Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

О.П. Довгопятий, Є.О. Севостьянов,
А.Л. Таргонський

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. ЧАСТИНА II

Навчально-методичний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2023

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 18 від 29 вересня 2023 р.)

Рецензенти:

В.П. Журавльов – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету, м. Житомир

І.В. Денега – доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України, м. Київ

А.О. Погоруй – доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка

В22 Математичний аналіз. Частина II / Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2023. - _ с.

Навчально-методичний посібник стосується такого важливого об'єкта математики, як похідна. Розглянуті питання про таблицю похідних, обчислення похідної за означенням, правила диференціювання, похідна складеної функції, похідна функцій, заданих параметрично і неявно, похідні старших порядків, рівняння дотичної і нормалі до графіку функції, правило Лопіталя. Кожен розділ містить в собі мінімальні теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач, та приклади їх розв'язання. Окремо наведені текстові питання, що мають рівень складності вище середнього, та типові задачі для самостійного розв'язання по 30 варіантів кожна.

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень **5**

1 Похідна функції: означення і методи обчислення **6**

1.1 Означення похідної функції 6
1.2 Завдання для самостійної роботи № 1 10
1.3 Основні правила диференціювання функції . . . 11
1.4 Завдання для самоконтролю 15
1.5 Завдання для самостійної роботи № 2 17
1.6 Похідна складеної функції 17
1.7 Завдання для самоконтролю 21
1.8 Завдання для самостійної роботи № 3 22
1.9 Похідні вищих порядків 22
1.10 Завдання для самоконтролю 27
1.11 Завдання для самостійної роботи № 4 29
1.12 Похідна від функції, заданої параметрично . . . 29
1.13 Завдання для самоконтролю 32
1.14 Завдання для самостійної роботи № 5 33
1.15 Завдання для самостійної роботи № 6 35
1.16 Похідна від функції, заданої неявно 37
1.17 Завдання для самостійної роботи № 7 43
1.18 Логарифмічне диференціювання 44
1.19 Завдання для самостійної роботи № 8 46
1.20 Завдання для самостійної роботи № 9 47

2 Рівняння дотичної і нормалі. Використання похідної при обчисленні границь **48**

2.1 Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції 48
2.2 Завдання для самоконтролю 52
2.3 Завдання для самостійної роботи № 10 53

2.4 Правило Лопіталя 54
2.5 Завдання для самоконтролю 58
2.6 Завдання для самостійної роботи № 11 59

Рекомендована література **60**

Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{Q}$	множина раціональних чисел, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
$[x]$	ціла частина числа x : найбільше ціле число, що не перевищує x
$A \Rightarrow B$	з умови A випливає умова B
$A \Leftrightarrow B$	умови A і B рівносильні
$\forall$	«для будь якого, для кожного, для всіх»
$\exists$	«існує, знайдеться»
$!$	«єдиний»
$x \in A$	«елемент x належить множині A»
$A \subset B$	«множина A включається у множину B», тобто, кожен елемент $x \in A$ також задовольняє умову $x \in B$
$f : D \to \mathbb{R}$	функція, область визначення якої є множина D, зі значеннями в $\mathbb{R}$
$f(A)$	$f(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\, x \in D : f(x) = y\}$ – образ множини $A \subset D$ при відображенні f
$f^{-1}(B)$	$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, y \in B : f(x) = y\}$ – (повний) прообраз множини B при відображенні f
$f^{-1} : f(D) \to D$	обернене відображення до відображення f, $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in D,\ f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in f(D)$
$\|x\|$	Покладемо $\|x\| = \begin{cases} x\,, & x \geqslant 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$
$f'(x)$	$f'(x)$ служить означенням звичайної похідної f в точці x
$C^1(D)$	клас неперервних функцій $f : D \to \mathbb{R}$

1 Похідна функції: означення і методи обчислення

1.1 Означення похідної функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, $\delta > 0$, точки $x_0 \in \mathbb{R}$. *Приростом аргумента* в точці x_0 називається різниця $\Delta x = x - x_0$, де $x \neq x_0$, $x \in D(f)$ і $D(f)$ – область визначення функції f.

Приростом функції f в точці x_0 називається вираз

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,.$$

Означення 1.1. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,$$

то ця границя називається *похідною* функції f в точці x_0.

Зауваження 1.1. Якщо функція f визначена на деякому відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то також мають право на існування наступні однобічні похідні:

$$f'(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,, \qquad f'(b) = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}\,.$$

Ці похідні можуть як існувати, так і ні, як і будь-яка границя функції в точці.

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 може позначатися по різному, зокрема, є загальноприйнятими наступні позначення:

$$f'(x_0), \quad f'_x(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \dot{y}(x_0)$$

(останнє позначення, як привило, використовується в фізиці, в тих випадках, якщо аргументом функції є час).

Розглянемо приклади знаходження похідної функції.

Приклад 1. *Знайти за означенням похідну від функції* $f(x) = x^2$.

Розв'язання. Розглянемо границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу, при $\Delta x \to 0$. Для довільної точки x маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x + x)(x + \Delta x - x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x\,. \ \square$$

Аналогічно можна довести, що будь-яка функція вигляду $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ має похідну:

$$f'(x) = nx^{n-1}\,. \tag{1.1.1}$$

Пропонуємо читачам довести цей факт самостійно.

Зауваження 1.2. Формула (1.1.1) справедлива не тільки для $n \in \mathbb{N}$, а і для довільних $n \in \mathbb{R}$, але цей факт доводиться дещо складніше. Тим не менш, ми будемо досить активно користуватися цією формулою в наступних розділах цього посібника.

Розглянемо ще декілька прикладів знаходження похідної від функції за допомогою означення:

Приклад 2. *Знайти за означенням похідну від функції* $f(x) = \sin x$*.*

Розв'язання. Розглянемо границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$. Для довільної точки x маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = \cos x\,. \ \square$$

Під час знаходження похідної, ми скористалися відомою формулою різниці синусів, а також першою чудовою границею: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (тему присвячену чудовим границям можна знайти в першій частині цього посібника).

Приклад 3. *Знайти за означенням похідну від функції*

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)\,.$$

Розв'язання. Розглянемо границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$. Для довільної точки $x \in \mathbb{R}$ маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a \, .$$

Наприкінці ми скористалися наслідком з другої визначної границі. □

Приклад 4. *Знайти за означенням похідну від функції*

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0, \quad a \neq 1) \, .$$

Розв'язання. Розглянемо границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу при $\Delta x \to 0$. Для довільної точки $x \in \mathbb{R}$ маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log \frac{x + \Delta x}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \frac{x + \Delta x}{x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right)^{\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x}{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a} \, .$$

Тут ми скористалися загальними властивостями логарифма, другою визначною границею $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, а також тим, що логарифм є неперервною функцією. □

Приклад 5. *Знайти похідну від функції $f(x)$ в точці $x_0 = 0$, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \, . \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося означенням похідної в точці:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \cdot \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} \, .$$

Зауважимо, що

$$\left| \sin \frac{1}{\Delta x} \right| \leqslant 1 \, .$$

Звідси маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$$

(як границя від добутку нескінченно малої і обмеженої функції). Отже, $f'(0) = 0\,.$ $\Box$

Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням* функції. Далеко не усі функції мають похідну в кожній своїй точці. Справедлива наступна теорема:

Теорема 1.1. *Якщо функція має похідну в точці, то вона неперервна в цій точці.*

Тим не менш, неперервність функції є лише необхідною умовою диференційовності. Тобто, **кожна функція, яка має похідну, є неперервною, але не усі неперервні у точці x_0 функції мають похідну в точці x_0.**

Приклад 6. *Довести, що функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$.*

Розв'язання. Розглянемо окремо правосторонню і лівосторонню границю

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1\,,$$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1\,.$$

Лівостороння і правостороння границі є різними значеннями, а отже, функція f не має похідної в цій точці. $\Box$

Зауваження 1.3. Функція $f(x) = |x|$ є неперервною на всій своїй області визначення, проте похідної в точці 0 не існує. Ще цікавішим прикладом є **функція Вейєрштрасса**, яка неперервна, але ніде не має похідної (пропонуємо читачам ознайомитися з цією функцією самостійно).

1.2 Завдання для самостійної роботи № 1

Задача 1. *Знайти похідну від функції* $f(x)$ *за означенням*

Варіант	**Функція** $f(x)$	**Варіант**	**Функція** $f(x)$
1	$f(x) = x^4$	16	$f(x) = x^7$
2	$f(x) = \sin 4x$	17	$f(x) = \sin 7x$
3	$f(x) = \cos 4x$	18	$f(x) = \cos 7x$
4	$f(x) = \log_a 4x \, (a > 0, a \neq 1)$	19	$f(x) = \log_a 7x \, (a > 0, a \neq 1)$
5	$f(x) = a^{4x} \, (a > 0, a \neq 1)$	20	$f(x) = a^{7x} \, (a > 0, a \neq 1)$
6	$f(x) = x^5$	21	$f(x) = x^8$
7	$f(x) = \sin 5x$	22	$f(x) = \sin 8x$
8	$f(x) = \cos 5x$	23	$f(x) = \cos 8x$
9	$f(x) = \log_a 5x \, (a > 0, a \neq 1)$	24	$f(x) = \log_a 8x \, (a > 0, a \neq 1)$
10	$f(x) = a^{5x} \, (a > 0, a \neq 1)$	25	$f(x) = a^{8x} \, (a > 0, a \neq 1)$
11	$f(x) = x^6$	26	$f(x) = x^9$
12	$f(x) = \sin 6x$	27	$f(x) = \sin 9x$
13	$f(x) = \cos 6x$	28	$f(x) = \cos 9x$
14	$f(x) = \log_a 6x \, (a > 0, a \neq 1)$	29	$f(x) = \log_a 9x \, (a > 0, a \neq 1)$
15	$f(x) = a^{6x} \, (a > 0, a \neq 1)$	30	$f(x) = a^{9x} \, (a > 0, a \neq 1)$

1.3 Основні правила диференціювання функції

В попередньому параграфі ми розглянули поняття похідної, а також приклади в яких ми знаходили похідні за означенням. Тим не менш, обчислення більш складних функцій за означенням є недоцільним. Розглянемо деякі правила, які будемо використовувати при обчислені похідних. Випишемо похідні основних елементарних функцій (деякі з них ми знайшли за означенням в попередньому параграфі). Похідні, які представленні далі називаються *табличними* і використовуються при знаходженні похідних від більш складних функцій.

№	**Функція** $f(x)$	**Похідна** $f'(x)$	**Умови виконання**
1	C (const)	0	
2	x^α	$nx^{\alpha-1}$	$x > 0$, якщо $\alpha \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$, якщо $\alpha \in \mathbb{N}$
3	a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
4	e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
5	$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \in \mathbb{R} \backslash 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
6	$\ln \lvert x\rvert$	$\ln x$	$x \in \mathbb{R} \backslash 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
7	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
8	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
15	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x \in \mathbb{R}$
16	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x \in \mathbb{R}$
17	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
18	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \in \mathbb{R} \backslash 0$

Зауваження 1.4. Зі шкільного курсу математики відомо, що:
1. $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
2. $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$.

Це дозволяє знаходити за допомогою другої формули з таблиці похідні від досить широкого класу функцій.

Приклад 7. *Знайти похідну від функції* $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

Розв'язання. Представимо нашу функцію у вигляді степеневої. Будемо мати, що:

$$f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} .$$

Скористаємося другою формулою з таблиці:

$$f'(x) = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3} . \ \square$$

Приклад 8. *Знайти похідну від функції* $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

Розв'язання. Представимо нашу функцію у вигляді степеневої. Отримаємо, що $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{3/5}$. Скористаємося другою формулою з таблиці:

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-2/5} . \ \square$$

Для обчислення похідних також використовуються деякі властивості.

Правила диференціювання

Якщо функції $u(x)$, $v(x)$ мають похідні, а C – довільна стала, то

$$\mathbf{1}. \qquad (Cu)' = Cu' .$$

$$\mathbf{2}. \qquad (u \pm v)' = u' \pm v' .$$

За допомогою індукції, це правило можна узагальнити для довільної кількості доданків:

$$(u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm ... \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm u_3' \pm ... \pm u_n' .$$

$$\mathbf{3}. \qquad \text{(Правило Лейбніца).} \quad (uv)' = u'v + uv' .$$

$$\mathbf{4}. \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0) .$$

Зауваження 1.5. Як показують ці правила, похідна від добутку двох функцій не дорівнює добутку їх похідних. Аналогічна ситуація і з діленням.

Розглянемо декілька завдань на застосування правил диференціювання, а також табличних похідних:

Приклад 9. *Знайти похідну від функції*

$$f(x) = 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11 \operatorname{ctg} x .$$

Розв'язання. Скористаємося спочатку другим правилом, а потім першим:

$$f'(x) = \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11\operatorname{ctg} x\right)' =$$

$$= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - (2x^{\frac{1}{3}})' + (x^{-2})' - (11\operatorname{ctg} x)' =$$

$$= (6)' + (x)' + 3(x^2)' - (\sin x)' - 2(x^{\frac{1}{3}})' + (x^{-2})' - 11(\operatorname{ctg} x)'.$$

Помітимо, що усі функції, які знаходяться під знаком похідної є табличними. Підставимо значення їх похідних в цей вираз:

$$f'(x) = 0 + 1 + 3 \cdot 2x - \cos x - 2 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-3} - 11 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-3} + \frac{11}{\sin^2 x} =$$

$$= 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}. \ \square$$

Приклад 10. *Знайти похідну від функції*

$$f(x) = 5\ln x + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} + \operatorname{arctg} x - \lg 20 \cdot 2^x + \operatorname{tg} 3.$$

Розв'язання. Перед тим, як знаходити похідну, звернемо увагу на те, що хоча ми і не можемо порахувати $\lg 20$, а також $\operatorname{tg} 3$, вони є деякими сталими. Це стосується і інших виразів, які ми не можемо зобразити в вигляді десяткового, або звичайного дробу, наприклад:

$$\sqrt[5]{2}, \qquad \log_3 5, \qquad \sin 1, \qquad \arcsin\frac{1}{5}.$$

Знайдемо похідну від функції, використовуючи правила диференціювання, а також табличні похідні:

$$f'(x) = (5\ln x + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} + \operatorname{arctg} x - \lg 20 \cdot 2^x + \operatorname{tg} 3)' =$$

$$= (5\ln x)' + \left(\frac{2}{\sqrt[5]{x^7}}\right)' + (\operatorname{arctg} x)' - (\lg 20 \cdot 2^x)' + (\operatorname{tg} 3)' =$$

$$= 5(\ln x)' + 2(x^{-\frac{7}{5}})' + (\operatorname{arctg} x)' - \lg 20 \cdot (2^x)' + (\operatorname{tg} 3)' =$$

$$= \frac{5}{x} - \frac{14}{5 \cdot \sqrt[5]{x^{12}}} + \frac{1}{1+x^2} - \lg 20 \cdot 2^x \ln 2 \,. \ \square$$

Приклад 11. *Знайти похідну від функції*

$$f(x) = x^3 \arcsin x \,.$$

Розв'язання. В цьому прикладі функція $f(x)$ представлена в вигляді добутку двох функцій $u(x) = x^3$ та $v(x) = \arcsin x$. Скористаємося правилом похідної від добутку:

$$f'(x) = (x^3)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' = 3x^2 \arcsin x + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \,. \ \square$$

Приклад 12. *Знайти похідну від функції*

$$f(x) = \frac{3^x + 5}{\cos x} \,.$$

Розв'язання. Функція $f(x)$ представлена в вигляді частки двох функцій $u(x) = 3^x + 5$ та $v(x) = \cos x$. Скористаємося правилом похідної від частки:

$$f'(x) = \frac{(3^x+5)' \cos x + (3^x+5)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{3^x \ln 3 \cdot \cos x - (3^x+5) \sin x}{\cos^2 x} \,. \ \square$$

Не дивлячись на те, що існують правила, які дозволяють брати похідну від добутку і частки, в багатьох прикладах доцільно не використовувати їх зразу, а спочатку попрацювати з самою функцією, похідну з якої треба знайти.

Приклад 13. *Знайти похідну від функції*

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3}{x} \,.$$

Розв'язання. Щоб знайти похідну від цієї функції можна застосувати правило похідної від частки. Але, замість цього ми підемо трохи іншим шляхом. Попрацюємо спочатку з самою функцією і виконаємо почленне ділення:

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x} - 3}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{3}{x} = x + x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-1} \,.$$

Знайдемо похідну від функції після виконаних нами перетворень:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-2} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{3}{x^2}\,. \ \Box$$

Приклад 14. *Знайти похідну від функції*

$$f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}\,.$$

Розв'язання. Перед тим як знаходити похідну, виконаємо деякі перетворення:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x} = \cos x : \operatorname{ctg} x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x\,.$$

Похідну від заданої функції можна знайти за допомогою таблички:

$$f'(x) = \cos x\,. \ \Box$$

Пропонуємо читачу знайти похідні функцій, розглянутих в попередніх двох прикладах, не виконуючи перетворень перед диференціюванням, для того, щоб порівняти результати розв'язання.

1.4 Завдання для самоконтролю

1. Вкажіть приклад функції, яка має в деякій точці похідну, але не має похідної в жодному її околі.

2. Чи може так статися, що:

а) дві функції f і g одночасно не мають похідну в деякій точці, але їх сумма має похідну у ній;

б) дві функції f і g є такими, що рівно одна з них має похідну в деякій точці, але їх сумма має похідну у ній?

3. Чи може похідна $f'(x)$ функції f бути розривною в деякій точці? Якщо так, то чи не суперечить це необхідній умові диференційовності? (Нагадаємо, що усі диференційовні функції є неперервними, але не навпаки).

4. Чи можуть дві різних функції f і g мати однакову похідну на деякому інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$?

5. Чи є функція, яка має похідну в точці x_0, обмеженою в деякому околі точки x_0?

6. Чи є функція, яка має похідну в кожній точці $x_0 \in (a, b)$, обмеженою на інтервалі (a, b)?

7. Нехай функції f і g визначені на деякому інтервалі (a, b) числової прямої і мають похідну на ньому. Припустимо, що $f(x) \leqslant g(x)$ при всіх $x \in (a, b)$. Чи вірно, що $f'(x) \leqslant g'(x)$ при всіх $x \in (a, b)$?

8. Як зміниться відповідь на попереднє питання 7, якщо в ньому відкритий інтервал (a, b) замінити відрізком $[a, b]$ (у крайніх точках a і b похідні $f'(a)$ та $f'(b)$ визначені як відповідні однобічні границі)?

9. Нехай функції f і g визначені на деякому інтервалі (a, b) числової прямої і мають похідну на ньому. Припустимо, що $f'(x) \leqslant g'(x)$ при всіх $x \in (a, b)$. Чи вірно, що $f(x) \leqslant g(x)$ при всіх $x \in (a, b)$?

10. Як зміниться відповідь на питання 6, якщо в ньому відкритий інтервал (a, b) замінити відрізком $[a, b]$ (у крайніх точках a і b похідні $f'(a)$ та $f'(b)$ визначаються як відповідні однобічні границі)?

11. Нехай функція f має похідну в усіх точках деякого інтервалу $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Що можна сказати про існування однобічних похідних функції f у крайніх точках цього інтервалу (завжди існують, або ні)?

12. Вкажіть приклад функції, яка має нескінченну похідну в деякій точці.

1.5 Завдання для самостійної роботи № 2

Задача 2. *Знайти похідну від функції $f(x)$ для кожного з варіантів.*

Варіант	**Функція** $f(x)$,	**Варіант**	**Функція** $f(x)$,
1	$f(x) = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3$	16	$f(x) = x^{10} - 3\sqrt[3]{x}^7 + \frac{1}{x^2}$
2	$f(x) = \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$	17	$f(x) = e^x \arcsin x$
3	$f(x) = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}}$	18	$f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$
4	$f(x) = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3}$	19	$f(x) = 10x^5 - \frac{1}{x^4}$
5	$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x$	20	$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sin x$
6	$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$	21	$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$
7	$f(x) = x^{10} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{2}$	22	$f(x) = 7x^5 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{2}$
8	$f(x) = e^x \operatorname{tg} x$	23	$f(x) = \sqrt[3]{x} \cos x$
9	$f(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$	24	$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$
10	$f(x) = 7x^4 - \sqrt[7]{x^2} - \frac{1}{x^4} + \sqrt{7}$	25	$f(x) = 3x^{12} + 4\sqrt[3]{x}^7 - \frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{10}$
11	$f(x) = e^x \operatorname{ctg} x$	26	$f(x) = (\sqrt{x} - 4) \sin x$
12	$f(x) = \frac{\sqrt[x]{+7}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$	27	$f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}$
13	$f(x) = 8x^3 - 3\sqrt[5]{x}^4 - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x}$	28	$f(x) = 7x^3 + \frac{1}{2x^2} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{5}$
14	$f(x) = x \operatorname{arctg} x$	29	$f(x) = (x^3 + 1) \sin x$
15	$f(x) = \frac{x}{\sin x}$	30	$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

1.6 Похідна складеної функції

Правила, розглянуті в попередньому розділі, дозволяють знаходити похідні від досить широкого класу функцій. Зокрема, їх вистачає, щоб обчислювати похідні від перетворень, що виходять за допомогою операцій суми, різниці, множення і ділення функцій з табличними похідними. Проте, цих правил недостатньо, щоб знаходити похідні від композиції декількох функцій. Такі функції називають *складеними*. Наприклад, якщо $f(x) = x^3$, а $g(x) = \sin x$, то їх композиція $y_1 = f(g(x)) = \sin^3 x$. Функцію $f(x)$ ще називаються *зовнішньою*, а функцію $g(x)$ – *внутрішньою*. Помітимо також, що $y_2 = g(f(x)) = \sin x^3 \neq y_1$. Отже, операція композиції двох функцій не є комутативною.

Для знаходження похідних від них використовують наступну теорему.

Теорема 1.2. (*Похідна складеної функції.*) *Нехай функція $u = g(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $y = f(u)$ має похідну в точці $u_0 = g(x_0)$,* *то складена функція $y = f(g(x))$ має похідну в точці x_0, причому*

$$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,. \qquad (1.6.1)$$

Зауваження 1.6. Запис $f'(u)$ означає, що при знаходженні похідної, ми вважаємо аргументом не x, а u. Наприклад, якщо $y = \sin^6 x = u^6$, де $u = \sin x$, то $y'(u) = 6u^5$.

Розглянемо приклади, на знаходження похідної за допомогою теореми 1.2.

Приклад 15. *Знайти похідну від функції*

$$y = \cos(3x - 5)\,.$$

Розв'язання. Дана функція є композицією двох функцій.

$$y = f(g(x)), \quad f(u) = \cos u, \quad u(x) = 3x - 5\,.$$

Скористаємося теоремою 1.2 про похідну складеної функції:

$$y'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = -\sin u \cdot 3 = -3\sin(3x - 5)\,. \ \square$$

Приклад 16. *Знайти похідну від функції* $y = (2x+1)^5$.

Розв'язання. Дана функція є композицією двох функцій:

$$y = f(g(x)), \qquad f(u) = u^5, \qquad u = 2x + 1\,.$$

Скористаємося теоремою 1.2 про похідну складеної функції:

$$y'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4\,. \ \square$$

Зауваження 1.7. Враховуючи, що

$$f(x) = (2x+1)^5 = (2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)(2x+1)\,,$$

похідну від даної функції можна було знайти, використовуючи правило похідної від добутку. Проте, такий метод є дуже нераціональним, особливо, для великих степенів.

Приклад 17. *Знайти похідну від функції*

$$y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,.$$

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \,. \square$$

Приклад 18. *Знайти похідну від функції*

$$y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} \,.$$

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)} \,. \square$$

Зауваження 1.8. Функції, розглянуті в попередніх двох прикладах, є композиціями однакових функцій. Їх відмінність полягає в тому, що зовнішня і внутрішня функція змінені місцями. Як бачимо, похідні теж вийшли різними. Отже, при використанні теореми про похідну від складеної функції дуже важливо розуміти яка функція внутрішня, а яка зовнішня.

В усіх попередніх прикладах ми малу справу з композицією двох функцій. Проте, в деяких випадках треба знайти похідну від функції, які є композицію трьох, або більшої кількості функцій. Розглянемо декілька таких прикладів.

Приклад 19. *Знайти похідну від функції*

$$y = 7^{\arcsin^2 x} \,.$$

Розв'язання. Скористаємося правилом похідної від складеної функції. Маємо:

$$y' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' \,.$$

Неважко бачити, що внутрішня функція теж є складеною. Отже, ми повинні ще раз скористатися правилом знаходження похідної від складеної функції:

$$y' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (2 \arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2 \ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \,. \square$$

Приклад 20. *Знайти похідну від функції*

$$y = \ln^2(2x-1) \,.$$

Розв'язання.

$$y'(x) = 2\ln(2x-1) \cdot (\ln(2x-1))' =$$

$$= 2\ln(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}\cdot(2x-1)' = \frac{4\ln(2x-1)}{2x-1}\,.\ \square$$

Зауваження 1.9. В англомовній літературі правило похідної складеної функції ще називають *"chain rule"*, що дослівно можна перекласти, як *«ланцюгове правило»*. Як ми бачимо, ця назва гарно відображає суть цього правила, коли функція складається з композиції трьох і більше функцій. Для того, щоб знайти похідну, ми по черзі використовуємо це правило, з кожним кроком отримуючи все простішу і простішу функцію під знаком похідної.

На практиці теорема про похідну складеної функції використовується в комбінації з іншими правилами диференціювання.

Приклад 21. *Знайти похідну від функції*

$$y = -2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x\,.$$

Розв'язання. Спочатку скористаємося правилом похідної від суми:

$$y' = (-2xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)'\,.$$

Використовуючи привила знаходження похідної, а також теорему про похідну від складеної функції, маємо:

$$y' = (-2x)'e^{3x} + (-2x)(e^{3x})' + (x^2-4x+3)'\sin 7x + (x^2-4x+3)(\sin 7x)' =$$

$$= -2e^{3x} - 6xe^{3x} + (2x-4)\sin 7x + 7(x^2-4x+3)(\cos 7x) =$$

$$= -2e^{3x}(1+3x) + (2x-4)\sin 7x + 7(x^2-4x+3)\cos 7x\,.\ \square$$

Приклад 22. *Знайти похідну від функції*

$$y = \sqrt{x^2+4}\cdot\ln(\sin x)\,.$$

Розв'язання. Використовуючи правила 1)–4) на стор. 12, а також теорему 1.2 про похідну від складеної функції, маємо:

$$y' = (\sqrt{x^2+4})'\cdot\ln(\sin x) + (\sqrt{x^2+4})\cdot(\ln\sin x)' =$$

$$= \frac{x\ln(\sin x)}{\sqrt{x^2+4}} + \sqrt{x^2+4}\,\mathrm{ctg}\,x\,.\ \square$$

1.7 Завдання для самоконтролю

1. Вкажіть приклади функцій $f(x)$ і $g(x)$, визначених на $\mathbb{R}$, для яких функції $F(x) = f(g(x))$ і $G(x) = f(g(x))$ диференційовні та мають однакові похідні на $\mathbb{R}$.

2. Вкажіть приклади функцій $f(x)$ і $g(x)$, визначених на $\mathbb{R}$, для котрих функція $F(x) = f(g(x))$ має похідну в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, але формула $F(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ не може бути застосовна.

3. Знайдіть відповідь на питання 1 за додаткової вимоги: $f(x) \neq x \neq g(x)$ на $\mathbb{R}$.

4. Чи є вірною формула $(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ для деякого $x_0 \in \mathbb{R}$ у випадку, коли принаймні одна з похідних $f'(g(x_0))$ чи $g'(x_0)$ є нескінченною (за умови, що жодна з них не обертається в нуль)?

5. Для фіксованої сталої $C > 0$ вкажіть приклади функцій $f(x) \neq x$ і $g(x) \neq x$, визначених на $\mathbb{R}$, для яких $(f(g(x)))' = C$ при всіх $x \in \mathbb{R}$.

6. Дайте відповідь на питання 5 за додаткової вимоги: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}$.

7. Підберіть функцію f, визначену на відкритому інтервалі $(-1, 1)$ так, щоб функція $F(x) = \frac{|x|+f(x)}{|x|+1}$ не дорівнювала тотожно нулю і мала похідну в нулі.

8. Підберіть функцію f, визначену на відкритому інтервалі $(-1, 1)$ так, щоб функція $F(x) = f(|x|)$ не дорівнювала тотожно нулю і мала похідну в нулі.

1.8 Завдання для самостійної роботи № 3

Задача 3. *Знайти похідну від функції* $f(x)$.

Варіант	Функкція $f(x)$	Варіант	Функкція $f(x)$
1	$f(x) = e^{\sin x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \operatorname{ctg} e^x$	16	$f(x) = 2^{\sin x} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \operatorname{arctg} e^x$
2	$f(x) = \operatorname{tg}^2 6x - 2^x + x \cdot 10^{\sqrt{x}} + e^{\sin x}$	17	$f(x) = \ln \sin(2x+5) + x \cdot 7^{\sqrt{x}}$
3	$f(x) = e^{-x^2} + 10^{x \operatorname{tg} x} + \sin 3x \cos 5x$	18	$f(x) = \operatorname{tg} e^{2x+1} + \operatorname{arctg}(e^{2x}) \cdot \ln 4x$
4	$f(x) = (e^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + e^{2x}) + \frac{1}{\operatorname{arctg} e^x}$	19	$f(x) = \arcsin^4(\cos x) + \frac{1}{\operatorname{arctg} e^x}$
5	$f(x) = \operatorname{ctg} \frac{\ln x + 1}{2 - \ln x} + \cos^3 \sqrt{e^x}$	20	$f(x) = e^{\sin x + x^2} + \sin^7(e^{2x})$
6	$f(x) = \sin^2 2x \cos \frac{x}{2} + 3^{\operatorname{arctg} 3x}$	21	$f(x) = \sin^8 3x \cos \frac{x}{7} + 7^{\arccos 7x}$
7	$f(x) = \sin^2 2x \cos \frac{x}{2} + 3^{\operatorname{arctg} 3x}$	22	$f(x) = \operatorname{ctg} 4^{\ln x} + \operatorname{arctg} x^3 + \ln \cos x$
8	$f(x) = \ln(x^2 - 4x) + \operatorname{ctg}(\ln 2x)$	23	$f(x) = \ln(x^3 - 5x^2) + \operatorname{ctg} \ln 7x$
9	$f(x) = \sin^2 x^2 + 3^{\ln(x+1)}$	24	$f(x) = \sin^3(x^5) + \frac{\ln \arcsin x}{\arccos(\ln x)}$
10	$f(x) = x^4 e^{\sqrt{x^2+4}} + \sin^2 x^2$	25	$f(x) = \ln(\operatorname{tg}^3 4x) + \cos^7 \cdot x^5$
11	$f(x) = 2^{\sin x} + \frac{e^x + 2e^{-x}}{4} + \operatorname{tg}(\cos x)$	26	$f(x) = 5^{\arcsin 3x} + \ln \frac{2^x - 3x}{6}$
12	$f(x) = x \cdot 5e^{\operatorname{tg} x} + x^6 \cdot 2^{\sqrt{x}} + \operatorname{ctg}^2 7x$	27	$f(x) = \operatorname{ctg} 5^{\ln x} + \operatorname{arctg}(2x^3)$
13	$f(x) = \arcsin x \cdot \lg x + 2^{x \operatorname{ctg} x} + 3^{-x^2}$	28	$f(x) = \arcsin(x^3 - 6x) + \ln(\operatorname{tg} 3x)$
14	$f(x) = x \arccos \frac{2x+1}{9} + \frac{1}{\operatorname{arctg} 2^x}$	29	$f(x) = \cos^7 \cdot 3x^5 + \frac{\arcsin(\ln 9x)}{\sqrt{x + \sin x}}$
15	$f(x) = 3^{-x} \arccos x + \sin^4 \sqrt{e^x}$	30	$f(x) = \ln^6(x^6) + e^{\sqrt{x + \arcsin x}}$

1.9 Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, а $f'(x)$ – її похідна, яка також є функцією відносно x. Якщо функція $f'(x)$ диференційовна, то від неї теж можна знайти похідну. Похідну функції ще називають *похідною першого порядку.* Похідна від похідної першого порядку називається *похідною другого порядку.* Для похідної другого порядку використовують наступні позначення:

$$f''(x), \quad y''(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Отже, **для того щоб знайти похідну другого порядку від функції, для початку треба знайти похідну першого порядку, після чого знайти похідну від похідної**.

Розглянемо це на прикладі.

Приклад 23. *Знайти похідну другого порядку від функції*

$$y = x^3 + 3x^2 + 7x + 5\,.$$

Розв'язання. Знайдемо похідну від функції $y = f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 7\,.$$

Тепер знайдемо похідну другого порядку (тобто, знайдемо похідну від похідної):

$$f''(x) = 6x + 6\,. \;\square$$

Аналогічно, можна ввести поняття похідних третього, четвертого і т.д. порядків (**похідна n-го порядку, це похідна від похідної** $(n-1)$**-го порядку**).

Похідні n-го порядку від функції $y = f(x)$ позначають наступним чином:

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x) \quad \text{або} \quad \frac{d^n f}{dx^n}\,.$$

Також, для позначення похідних високих порядків застосовують римську нумерацію. Зокрема, похідна п'ятого порядку, може бути записана, як y^V. Розглянемо приклад, де знайдемо похідну порядку вищого за другий.

Приклад 24. *Знайти похідну четвертого порядку від функції* $y = x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x + 6 + \sin x$.

Розв'язання. Згідно означення похідних першого, другого, третього і четвертого порядків, ми будемо мати, що

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 9x^2 + \cos x\,,$$

$$f''(x) = 20x^3 + 36x^2 + 18x - \sin x\,,$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 72x + 18 - \cos x\,,$$

$$f^{(4)}(x) = 120x + 72 + \sin x\,. \;\square$$

В попередніх прикладах для знаходження похідної якогось порядку ми по черзі знаходили похідні усіх нижчих порядків. Проте, іноді доцільно замість цього помітити деяку закономірність, яка дозволить зразу знайти похідну певного порядку.

Приклад 25. *Знайти похідну 20-го порядку від функції* $f(x) = e^{5x}$.

Розв'язання. Знайдемо похідні перших трьох порядків:

$$f'(x) = 5e^{5x}\,,$$

$$f''(x) = 25e^{5x}\,,$$

$$f'''(x) = 125e^{5x}\,.$$

Можна припустити, що

$$f^{(n)}(x) = 5^n e^{5x}\,. \tag{1.9.1}$$

Доведемо рівність (1.9.1) методом математичної індукції. Справді, для $n = 1$ припущення вірне. Припустимо, що (1.9.1) виконується для деякого $n = k \in \mathbb{N}$, тобто,

$$f^{(k)}(x) = 5^k e^{5x}\,. \tag{1.9.2}$$

Доведемо, що (1.9.1) виконується і для $n = k+1$. Справді, беручи похідну у лівій і правій частині рівності (1.9.2), ми отримаємо, що

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = (5^k e^{5x})' = 5^{k+1} e^{5x}\,.$$

Отже, за принципом математичної індукції робимо висновок, що наше припущення справедливе для будь-якого $n \in \mathbb{N}$; зокрема, (1.9.1) виконується і для $n = 20$. Звідси маємо:

$$f^{(20)}(x) = 5^{20} e^{5x}\,. \ \square$$

Формула Лейбніца

В попередніх параграфах ми навчилися знаходити похідні від добутку двох функцій. Проте, процес знаходження похідних високих порядків від добутку може бути досить непростим.

Приклад 26. *Знайти похідну 3-го порядку від функції*

$$f(x) = e^{-x} \cos x\,.$$

Розв'язання. Знайдемо по черзі похідні першого, другого та третього порядків

$$f'(x) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)\,,$$

$$f''(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(\cos x - \sin x) =$$

$$= e^{-x}(\cos x + \sin x - \cos x + \sin x) = 2e^{-x} \cdot \sin x\,,$$

$$f'''(x) = -2e^{-x} \cdot \sin x + 2e^{-x} \cdot \cos x = 2e^{-x}(\cos x - \sin x)\,. \ \square$$

В цьому випадку ми змогли обійтися тими правилами, які вже розглядали раніше. Проте в випадках, коли вимагається знайти похідну ще вищого порядку, розв'язок може виходити значно важчим. Крім того, наша функція є добутком двох досить «гарних» функцій. Наприклад, знаходження за допомогою цього методу третьої похідної від функції $y = (2x^2 - 7)\ln(x-1)$ є досить складним з технічної точки зору завданням. В таких випадках користуються формулою Лейбніца, яка узагальнює правило знаходження похідної від добутку.

Теорема 1.3. *Нехай, функції $v(x)$ і $u(x)$ мають похідні до n-го порядку включно. Тоді справедлива формула Лейбніца:*

$$(u \cdot v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + ... + C_n^n u v^{(n)} ,$$

де

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

— біноміальні коефіцієнти, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$, $(n-k)! = 1 \cdot 2 \cdots (n-k)$.

Запам'ятати цю формулу не важко, оскільки вона досить схожа на біном Ньютона. Знайдемо за допомогою цієї теореми декілька похідних.

Приклад 27. *Знайти похідну 5-го порядку від функції*

$$f(x) = (2x^2 - 7)\ln(x-1) .$$

Розв'язання. Скористаємося формулою Лейбніца. Маємо:

$$f^{(5)}(x) = C_5^0 (2x^2-7)^{(5)} \ln(x-1) + C_5^1 (2x^2-7)^{(4)} v' + C_5^2 (2x^2-7)^{(3)} v'' +$$
$$+ C_5^3 (2x^2-7)'' v''' + C_5^4 (2x^2-7)' (\ln(x-1))^{(4)} +$$
$$+ C_5^5 (2x^2-7) \ln(x-1)^{(5)} .$$

Знайдемо усі похідні від функцій $u(x) = (2x^2 - 7)$ та $v(x) = \ln(x-1)$ до 5-го порядку включно. Маємо:

$$u'(x) = 4x , \quad u''(x) = 4 , \quad u'''(x) = 0 ,$$

$$u^{(4)}(x) = 0 , \quad u^{(5)}(x) = 0 ,$$

$$v'(x) = \frac{1}{x-1} , \quad v''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} , \quad v'''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} ,$$

$$v^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x-1)^4} , \quad v^{(5)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5} .$$

Підставимо ці похідні у формулу Лейбніца. Крім того, обчислимо біноміальні коефіцієнти. Маємо:

$$f^{(5)}(x) = 0+0+0+10\cdot 4\cdot \frac{2}{(x-1)^3} + 5\cdot 4x\cdot\left(-\frac{6}{(x-1)^4}\right) + \frac{24(2x^2-7)}{(x-1)^5} =$$

$$= \frac{80}{(x-1)^3} - \frac{120x}{(x-1)^4} + \frac{24(2x^2-7)}{(x-1)^5} = 8\left(\frac{10}{(x-1)^3} - \frac{15x}{(x-1)^4} + \frac{3(2x^2-7)}{(x-1)^5}\right) =$$

$$= 8\cdot\frac{10(x-1)^2 - 15x(x-1) + 3(2x^2-7)}{(x-1)^5} =$$

$$= 8\cdot\frac{10x^2-20x+10-15x^2+15x+6x^2-21}{(x-1)^5} = \frac{8(x^2-5x-11)}{(x-1)^5}\,. \ \square$$

Формулу Лейбніца можна використовувати і для знаходження похідних високих порядків від дробів.

Приклад 28. *Знайти похідну 3-го порядку від функції*

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x}\,.$$

Розв'язання. Запишемо дріб у вигляді добутку, після чого застосуємо формулу Лейбніца:

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x} = \sin 2x\cdot\frac{1}{x}\,,$$

$$f'''(x) = C_3^0\cdot(\sin 2x)'''\frac{1}{x} + C_3^1\cdot(\sin 2x)''\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' +$$

$$+C_3^2\cdot(\sin 2x)'\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'' + C_3^3\cdot(\sin 2x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'''.$$

Знайдемо усі похідні від функцій $u(x) = \sin 2x$ та $v(x) = \frac{1}{x}$ до 3-го порядку включно. Маємо:

$$u'(x) = 2\cos 2x\,,\quad u''(x) = -4\sin 2x\,,\quad u'''(x) = -8\cos 2x\,,$$

$$v'(x) = -\frac{1}{x^2}\,,\quad v''(x) = \frac{2}{x^3}\,,\quad v'''(x) = -\frac{6}{x^4}\,.$$

Тоді з огляду на теорему 1.3 ми будемо мати, що

$$f'''(x) = -8\cos 2x\cdot\frac{1}{x}+3\cdot(-4\sin 2x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+3\cdot(2\cos 2x)\cdot\frac{2}{x^3}+\sin 2x\cdot\left(-\frac{6}{x^4}\right),$$

$$f'''(x) = -\frac{8\cos 2x}{x}+\frac{12\sin 2x}{x^2}+\frac{12\cos 2x}{x^3}-\frac{6\sin 2x}{x^4},$$

$$f'''(x) = \frac{x^3(-8\cos 2x)+x^2(12\sin 2x)+x(12\cos 2x)-6\sin 2x}{x^4},$$

$$f'''(x) = \frac{(12x-8x^3)\cos 2x+(12x^2-6)\sin 2x}{x^4}. \;\square$$

1.10 Завдання для самоконтролю

1. Підберіть функцію f так, щоб вона мала похідну в деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}$, але друга похідна f'' не існує в цій точці.

2. Підберіть функцію f так, щоб вона мала першу і другу похідну в деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}$, але третя похідна f''' не існує в цій точці.

3. Для фіксованого $k \in \mathbb{N}$ підберіть функцію f так, щоб вона мала похідні $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0)$ в деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}$, але похідна $f^{(k+1)}$ не існує в цій точці.

4. Чи може статися так, що похідна $f'(x_0)$ не існує, а друга похідна $f''(x_0)$ існує і дорівнює нулю? Відповідь поясніть.

5. Чи може статися так, що для деякого фіксованого $k \in \mathbb{N}$ похідні $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0)$ дорівнюють нулю в деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}$, похідна $f^{(k+1)}$ не дорівнює нулю, а всі інші похідні $f^{(l)}(x_0)$ дорівнюють нулю при $l > k+1$ у цій точці?

6. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ побудуйте функцію f такою, що похідні $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0)$ дорівнюють нулю в деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}$, а всі інші похідні $f^{(l)}(x_0)$ не дорівнюють нулю при $l > k$ у цій точці.

7*. Припустимо, що функція f має похідну будь-якого порядку в деякому околі точки x_0, яка дорівнює нулю в цій точці. Чи вірно, що $f(x) \equiv const$ в деякому околі точки x_0?

8. Підберіть двічі диференційовну на деякому інтервалі $I = (a, b)$ функцію $f(x) \neq const$ так, щоб $f'(x) + f''(x) = 0$ при $x \in I$.

Вказівка. Підберіть натуральне число k так, щоб функція $f(x) = e^{kx}$ задовольняла потрібне співвідношення.

9. Підберіть тричі диференційовну на деякому інтервалі $I = (a, b)$ функцію $f(x) \neq const$ так, щоб $f'(x) + f''(x) + f'''(x) = 0$ при $x \in I$.

Вказівка. Підберіть натуральне число k так, щоб функція $f(x) = e^{kx}$ задовольняла потрібне співвідношення.

10. Підберіть чотирижди диференційовну на деякому інтервалі $I = (a, b)$ функцію $f(x) \neq const$ так, щоб $f'(x) - f''(x) + f'''(x) - f^{(4)}(x) = 0$ при $x \in I$.

Вказівка. Підберіть натуральне число k так, щоб функція $f(x) = e^{kx}$ задовольняла потрібне співвідношення.

1.11 Завдання для самостійної роботи № 4

Задача 4. *Знайти значення похідної 3-го порядку функції $f(x)$ в точці x_0 відповідно до варіанту.*

Варіант	**Функція $f(x)$, точка x_0**	**Варіант**	**Функція $f(x)$, точка x_0**
1	$f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	16	$f(x) = x \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$
2	$f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$	17	$f(x) = x^4 \ln x$, $x_0 = 1$
3	$f(x) = \ln(2 + x)$, $x_0 = 0$	18	$f(x) = x + \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$
4	$f(x) = e^x \cos x$, $x_0 = 0$	19	$f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
5	$f(x) = e^x \sin 2x$, $x_0 = \pi$	20	$f(x) = \ln(x^2 - 4)$, $x_0 = 3$
6	$f(x) = e^{-x} \cos x$, $x_0 = 0$	21	$f(x) = x^2 \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$
7	$f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$	22	$f(x) = x \arccos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$
8	$f(x) = (2x + 1)^5$, $x_0 = 1$	23	$f(x) = (x + 1) \ln(x + 1)$, $x_0 = -\frac{1}{2}$
9	$f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 2$	24	$f(x) = \ln^3 x$, $x_0 = 1$
10	$f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x$, $x_0 = 0$	25	$f(x) = 2^{x^2}$, $x_0 = 1$
11	$f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$	26	$f(x) = (4x - 3)^5$, $x_0 = 1$
12	$f(x) = (5x - 4)^5$, $x_0 = 2$	27	$f(x) = x \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 2$
13	$f(x) = x \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	28	$f(x) = (7x - 4)^6$, $x_0 = 1$
14	$f(x) = x^2 \ln x$, $x_0 = x^2 \ln x, x_0 = \frac{1}{3}$	29	$f(x) = x \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$
15	$f(x) = x \sin 2x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$	30	$f(x) = \sin(x^3 + \pi)$, $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$

1.12 Похідна від функції, заданої параметрично

В попередніх параграфах ми розглядали похідні від функцій, заданих аналітично, тобто таких, які були записані в вигляді $y = f(x)$. Проте, це далеко не єдиний метод визначення функції. Залежність функції від аргументу може бути задана за допомогою третьої змінної t, яку ще називають *параметром:*

$$\begin{cases} x = \varphi(t)\,, \\ y = \psi(t)\,. \end{cases}$$

В таких випадках кажуть, що функція задана *параметрично.* Наприклад:

$$\begin{cases} x = 2t - 1\,, \\ y = t^3\,. \end{cases}$$

В цьому параграфі ми розглянемо питання знаходження похідної від функції, яка задана параметрично. В найпростіших випадках можна з першого рівняння виразити параметр t через x, і підставити в друге рівняння. За допомогою цього прийому ми зможемо виразити змінну y через x, після чого знайти похідну за допомогою правил, розглянутих раніше.

Приклад 29. *Знайти похідну від функції заданої параметрично*

$$\begin{cases} x = 2t - 1\,, \\ y = t^3\,. \end{cases}$$

Розв'язання. Виражаємо параметр t з першого рівняння:

$$t = \frac{x+1}{2}\,.$$

Підставимо отриманий вираз в друге рівняння:

$$y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^3.$$

Знайдемо похідну від цієї функції по x :

$$y' = 3 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3(x+1)^2}{8}\,. \ \square$$

На жаль, далеко не завжди функцію задану параметрично можна звести до вигляду $y = f(x)$. Для знаходження похідної в такому випадку використовується наступна формула:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}\,. \tag{1.12.1}$$

Зауваження 1.10. Індекси в цій формулі вказують на те, по якій змінній знаходиться похідна.

Розглянемо декілька прикладів на застосування формули (1.12.1).

Приклад 30. *Знайти похідну від функції, заданої параметрично, якщо*

$$\begin{cases} x = 3\sin(2t) - \sin(3t)\,, \\ y = 3\cos(2t) + \cos(3t)\,. \end{cases}$$

Розв'язання. Для того, щоб скористатися формулою (1.12.1), необхідно знайти x_t та y_t. Будемо мати, що

$$x_t = 6\cos(2t) - 3\cos(2t)\,, \quad y_t = -6\sin(2t) - 3\sin(2t)\,.$$

Підставимо величини x_t та y_t у співвідношення (1.12.1). Ми отримаємо, що

$$y_x = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{-6\sin(2t) - 3\sin(2t)}{6\cos(2t) - 3\cos(2t)} = \frac{6\sin(2t) + 3\sin(2t)}{3\cos(2t) - 6\cos(2t)}\,. \ \square$$

Похідні вищих порядків від функцій заданих параметрично

Нехай треба знайти похідну другого порядку від функції заданої параметрично. Оскільки, похідна другого порядку – це похідна від похідної, маємо:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}\,.$$

Тут ми скористалися формулою (1.12.1) для $(y'_x)'_x$. Аналогічно можна вивести формули для похідної 3-го порядку і вище. Наприклад:

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}\,.$$

Приклад 31. *Знайти похідну 3-го порядку від функції заданої параметрично, якщо*

$$\begin{cases} x = 2t - t^2\,, \\ y = 3t - t^3\,. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку y_t та x_t :

$$x_t = 2 - 2t\,, \quad y'_t = 3 - 3t^2\,.$$

Тепер знайдемо послідовно усі похідні по x до 3-го порядку включно:

$$y_x = \frac{y_t}{x_t} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3(1-t)(1+t)}{2(1-t)} = \frac{3(1+t)}{2} = \frac{3}{2}(1+t)\,,$$

$$y_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{3}{2} : (2-2t) = \frac{3}{2(2-2t)} = \frac{3}{4(1-t)}\,,$$

$$y_{xxx} = \frac{(y'_{xx})'_t}{x'_t} = \left(\frac{3}{4(1-t)}\right)' \cdot \frac{1}{2-2t} = \frac{3}{4(1-t)^2} \cdot \frac{1}{2(1-t)} = \frac{3}{8(1-t)^3}\,. \ \square$$

1.13 Завдання для самоконтролю

1. Перевірте формулу (1.12.1) для випадку, коли

$$\begin{cases} x = x\,, \\ y = f(x) \end{cases} .$$

Який вигляд має ця формула у вказаній ситуації?

2. Отримайте формулу (1.12.1), користуючись формулою (1.6.1).

3. Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$ – деяка неперервна параметризація, крім того, нехай при $t = t_0$ маємо: $x(t_0) = x_0$ і $y(t_0) = y_0$. Припустимо, що x та y одночасно не мають похідної по t у точці $t = t_0$. Що, у такому випадку, можна сказати про існування $y'(x)$ у точці $x = x_0$?

4. Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$ – деяка неперервна параметризація, крім того, нехай при $t = t_0$ маємо: $x(t_0) = x_0$ і $y(t_0) = y_0$. Припустимо, що x має похідну по t у точці $t = t_0$, проте y не має похідної по t у точці $t = t_0$. Що, у такому випадку, можна сказати про існування $y'(x)$ у точці $x = x_0$?

5. Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$ – деяка неперервна параметризація, причому $y = y(x)$. Нехай при $t = t_0$ маємо: $x(t_0) = x_0$ і $y(t_0) = y_0$, крім того, при $t = t_1$ маємо: $x(t_1) = x_0$ і $y(t_1) = y_0$ (де $t_0 \neq t_1$). Тоді за формулою (1.12.1)

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} = \frac{y'_t(t_1)}{x'_t(t_1)}\,.$$

Чи немає тут суперечності з огляду на деяку «неоднозначність» обчислення $y'_x(x_0)$?

1.14 Завдання для самостійної роботи № 5

Задача 5. *Знайти похідну f'_x від функції заданої параметрично.*

Варіант	Послідовність x_n, $n = 1, 2, \ldots$	Варіант	Послідовність x_n, $n = 1, 2, \ldots$
1	$\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = a^t \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = t^2 \cos t \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 2t^3 + t \\ y = \ln t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = \sin t \cos^2 t \\ y = -\cos^3 t \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = \ln \frac{t^2-1}{4} \\ y = \sin t \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = \frac{t+1}{t^4} \\ y = \frac{4}{t^2} + \frac{1}{3t} \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = \ln \frac{\sin t - 1}{2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = \sin t + t \\ y = \sqrt{t^3 + 1} \end{cases}$

Варіант	Функція f	Варіант	Функція f
9	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{t^2-5} \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \ln \sin t \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = \sin(t+1) \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = \ln(\cos t + 1) \\ y = \sin t + t \end{cases}$
12	$\begin{cases} x = e^{-t} \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - \sin t \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = \operatorname{arcctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$
14	$\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + 1 \\ y = \sin^2(t-4) \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t \operatorname{arcctg} t \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = t \cos t + \sin t \end{cases}$

1.15 Завдання для самостійної роботи № 6

Задача 6. *Знайти похідну другого порядку f''_{xx} від функції заданої параметрично.*

Варіант	Функція f	Варіант	Функція f
1	$\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = 2t^2 + t \\ y = \ln t \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = t + \frac{1}{2}\sin t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 - 8t - 1 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \\ y = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = \sin(\frac{t}{2}) \\ y = \cos t \end{cases}$

Варіант	Функція f	Варіант	Функція f
9	$\begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2} \\ y = \frac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = \cos at \\ y = \sin at \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = 2\cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \cos t \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = t - \sin t \end{cases}$
12	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \\ y = 2\ln \operatorname{ctg} t \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = e^{t^2} \end{cases}$
14	$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = at\sin t \end{cases}$

1.16 Похідна від функції, заданої неявно

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, то кажуть що функція задана в явному вигляді. Під *неявним* визначенням функції розуміють визначення функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної y. Наприклад:

$$y + x \ln y = 5\,.$$

Будь-яку явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $y - f(x) = 0$. В деяких випадках, функцію задану неявно можна переписати в явному вигляді. Це дозволяє знайти похідну найпростіших випадках.

Приклад 32. *Знайти похідну від функції заданої неявно, якщо*

$$yx + y - \sin x = 0\,.$$

Розв'язання. Для початку треба представити цю функцію у явному вигляді, тобто, виразити y через x :

$$y(x + 1) = \sin x\,,$$

$$y = \frac{\sin x}{x + 1}\,.$$

Залишилося знайти похідну від y по x за допомогою вже відомих нам привил (див. стор. 12):

$$y' = \frac{\cos x(x + 1) - \sin x}{(x + 1)^2}\,. \ \square$$

На жаль, далеко не завжди можна скористатися таким підходом. Проблема полягає в тому, що не завжди y можна легко виразити через x, а іноді і неможливо. Якщо неявна функція задана рівнянням

$$F(x, y) = 0\,,$$

то для знаходження похідної в таких випадках можна скористатися наступним алгоритмом:

1) Знайти похідну від лівої та правої частини по x, розглядаючи при цьому y, як функцію залежну від x.

2) Виразити звідси y'.

Приклад 33. *Знайти похідну від функції y заданої неявно, якщо:*

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0\,.$$

Розв'язання. Для початку, знайдемо похідну по x від лівої та правої частини. Відзначимо, що y^3 є складеною функцією. Справді, хоча на перший погляд ця функція не виглядає як складена, але оскільки y є не аргументом, а функцією залежною від x, то y^3 є композицією двох функцій. Тому при знаходженні похідної від цього доданку, скористаємося правилом похідної від складеної функції:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0\,.$$

Виразимо звідси y':

$$3y^2y' - 3xy' = 3y - 3x^2\,,$$

$$y'(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2\,,$$

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}\,. \ \square$$

Зауваження 1.11. Похідна від функції y в таких завданнях, як правило, виражається не тільки через x, а і через саму функцію y.

Приклад 34. *Знайти похідну від функції, заданої неявно:*

$$e^{xy} = \ln(x^2 + y^2)\,. \tag{1.16.1}$$

Розв'язання. Щоб користуватися описаним вище алгоритмом, не обов'язково зводити функцію до вигляду $F(x, y) = 0$. Замість цього можна зразу знайти похідну від лівої та правої частини. Роблячи це у (1.16.1), будемо мати:

$$(e^{xy})' = (\ln(x^2 + y^2))'\,,$$

$$e^{xy} \cdot (y + xy') = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x + 2yy')\,,$$

$$e^{xy}y + e^{xy}xy' = \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{2yy'}{x^2 + y^2}\,,$$

$$e^{xy}xy' - \frac{2yy'}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - e^{xy}y\,,$$

$$y'\left(e^{xy}x - \frac{2y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - e^{xy}y\,,$$

$$y'\left(\frac{e^{xy}x(x^2+y^2)-2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2x-e^{xy}y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,,$$

$$y'=\frac{2x-e^{xy}y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}:\frac{e^{xy}x(x^2+y^2)-2y}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{2x+e^{xy}y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{e^{xy}x(x^2+y^2)-2y}\,,$$

$$y'=\frac{2x-e^{xy}y(x^2+y^2)}{e^{xy}x(x^2+y^2)-2y}\,.\ \square$$

В деяких задачах вимагають знаходження не тільки загальної формули похідної, а і конкретного значення в якійсь точці.

Приклад 35. *Знайти похідну від функції заданої неявно:*

$$x^3y+3y^3-x+1=0$$

в точці $M_0(1;2)$.

Розв'язання. Знайдемо для початку загальний вигляд похідної. Для цього знайдемо похідну по x від лівої та правої частини. Будемо мати, що

$$3x^2y+x^3y'+9y^2y'-1=0\,,$$

$$x^3y'+9y^2y'=1-3x^2y\,,$$

$$y'(x^3+9y^2)=1-3x^2y,\,,$$

$$y'=y'(x)=\frac{1-3x^2y}{9y^2+x^3}\,. \tag{1.16.2}$$

Тепер знайдемо значення похідної в конкретній точці. Для цього підставимо $x=1$ і $y=2$ у співвідношення (1.16.2). Ми отримаємо, що

$$y'(1)=\frac{1-3\cdot 1^2\cdot 2}{9\cdot 2^2+1^3}=-\frac{5}{37}\,.\ \square$$

Похідні вищих порядків від функцій, заданих неявно

Для знаходження похідних вищих порядків від функцій заданих неявно користуються тим самим алгоритмом. Для того, щоб знайти похідну другого порядку, треба знайти похідну по x від похідної першого порядку.

Зауваження 1.12. В деяких прикладах раціональніше знаходити похідну не від похідної першого порядку, а диференціювати ліву і праву частину виразу, з якого ми її виражали. Далі буде відповідний приклад, де це буде використано.

Приклад 36. *Знайти похідні першого та другого порядку від функції заданої неявно:*

$$\operatorname{arctg} y = x + y\,.$$

Розв'язання. Для початку знайдемо похідну першого порядку:

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1 + y'\,,$$

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' = 1\,,$$

$$y'\left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right) = 1\,,$$

$$y'(\frac{1-1-y^2}{1+y^2}) = 1\,,$$

$$y'\frac{-y^2}{1+y^2} = 1\,,$$

$$y' = -\frac{1+y^2}{y^2}\,.$$

Перша похідна від функції знайдена. Для знаходження другої похідної достатньо знайти похідну від першої. Перед тим, як її знаходити, виконаємо почленне ділення, щоб полегшити процес знаходження похідної. Маємо:

$$y' = -\frac{1}{y^2} - 1\,.$$

Знайдемо тепер другу похідну:

$$y'' = \frac{2}{y^3}y'\,.$$

Звернемо увагу на те, що хоча похідні і можуть бути виражені через саму функцію, але не повинні містити в своєму записі похідних інших порядків. Для того, щоб виразити другу похідну через x і y, підставимо сюди знайдену раніше похідну першого порядку:

$$y'' = \frac{2}{y^3}\cdot\left(-\frac{1+y^2}{y^2}\right),$$

$$y'' = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}\,. \ \square$$

Приклад 37. *Знайти похідні першого та другого порядку від функції заданої неявно:*

$$y = e^{3y} + 5x^2\,.$$

Розв'язання. Обчислюючи похідні, будемо мати:

$$y' = 3e^{3y}y' + 10x\,, \tag{1.16.3}$$

$$y' - 3e^{3y}y' = 10x\,,$$

$$y'(1-3e^{3y}) = 10x\,,$$

$$y' = \frac{10x}{1-3e^{3y}}\,.$$

Другу похідну можна знайти таким само методом, як і в попередньому прикладі. Проте, ми підемо дещо іншим шляхом. Ми знайдемо похідну від лівої та правої частини виразу, з якого ми виражали першу похідну. Такий підхід особливо корисний в випадках, коли перша похідна є досить складним дробом. Використання формули похідної від частки може призвести до більшої кількості технічної роботи, ніж запропонований метод. Отже, беручи похідну по x у лівій так правій частині співвідношення (1.16.3), ми отримаємо, що

$$(y'(1-3e^{3y}))' = (10x)'\,,$$

$$y''(1-3e^{3y}) + y'(1-3e^{3y})' = 10\,,$$

$$y''(1-3e^{3y}) + y'\cdot(-9e^{3y}y') = 10\,.$$

Як зазначалося вище, похідні повинні бути виражені лише через x та y. Підставимо сюди значення першої похідної. Будемо мати:

$$y''(1-3e^{3y}) + \frac{10x}{1-3e^{3y}}\cdot(-9e^{3y})\frac{10x}{1-3e^{3y}} = 10\,,$$

$$y''(1-3e^{3y}) - \frac{900x^2\cdot e^{3y}}{(1-3e^{3y})^2} = 10\,,$$

$$y''(1-3e^{3y}) = 10 + \frac{900x^2\cdot e^{3y}}{(1-3e^{3y})^2}\,,$$

$$y''(1-3e^{3y}) = \frac{10(1-3e^{3y})^2 + 900x^2\cdot e^{3y}}{(1-3e^{3y})^2}\,,$$

$$y'' = \frac{10(1 - 3e^{3y})^2 + 900x^2 \cdot e^{3y}}{(1 - 3e^{3y})^3}\,,$$

$$y'' = \frac{10 - 60e^{3y} + 90e^{6y} + 900x^2 \cdot e^{3y}}{(1 - 3e^{3y})^3}\,. \ \square$$

1.17 Завдання для самостійної роботи № 7

Задача 7. *Знайти похідні першого та другого порядку від функції заданої в неявному вигляді для кожного з варіантів.*

Варіант	Функція	Варіант	Функція
1	$y^2 = 8x$	16	$\sin y = 7x + 3y$
2	$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$	17	$\operatorname{tg} y = 4y - 5x$
3	$y = x + \operatorname{arctg} y$	18	$y = 7x - \operatorname{ctg} y$
4	$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$	19	$xy - 6 = \cos y$
5	$y^2 = 25x - 4$	20	$3y = 7 + xy^3$
6	$\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$	21	$y^2 = x + \ln(\frac{x}{y})$
7	$y^2 - x = \cos y$	22	$xy^2 - y^3 = 4x - 5$
8	$3x + \sin y = 5y$	23	$x^2y^2 + x = 5y$
9	$\operatorname{tg} y = 3x + 5y$	24	$x^4 + x^2y^2 + y = 4$
10	$xy = \operatorname{ctg} y$	25	$\sin y = xy^2 + 5$
11	$y = e^y + 4x$	26	$x^3 + y^3 = 5x$
12	$\ln y - \frac{y}{x} = 7$	27	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7}$
13	$x^2 + y^2 = \sin y$	28	$y^2 = \frac{x-y}{x+y}$
14	$e^y = 4x - 7y$	29	$\sin^2(3x + y^2) = 5$
15	$4\sin^2(x + y) = x$	30	$\operatorname{ctg}^2(x + y) = 5x$

1.18 Логарифмічне диференціювання

В попередніх розділах цього посібника ми розібрали знаходження похідних як від степеневих функцій, так і від показникових. Проте, функція може містити змінну як в основі, так і в степені. Такі функції називаються *степенево-показниковими.* Для знаходження похідної від такої функції зручно використовувати *логарифмічне диференціювання.* Цей метод полягає у наступному:

1) Спочатку ліву і праву частину треба прологарифмувати (як правило, використовують натуральний логарифм);

2) Після цього знаходять похідну, як похідну від функції заданої неявно

Приклад 38. *Знайти похідну від функції:*

$$y = x^{\sin x}\,. \tag{1.18.1}$$

Розв'язання. Прологарифмуємо ліву та праву частину співвідношення (1.18.1), а також скористаємося властивостями логарифма:

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln x\,.$$

Знайдемо похідну від лівої та правої частини по x:

$$(\ln y)' = \Big(\sin x \cdot \ln x\Big)',$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\,,$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Оскільки, $y = x^{\sin x}$, остаточно маємо:

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right). \ \square$$

Зауваження 1.13. Степенево-показникові функції іноді плутають, як зі степеневими, так і з показниковими. Їх суттєва особливість полягає в тому, що вони містять змінну як в степені, так і в основі. Показникові містять змінну лише в степені, степеневі лише в основі. Використання табличних похідних розрахованих для степеневих, або показникових функцій призведе до помилки.

Зауваження 1.14. На відміну від задач з попереднього розділу, похідна повинна бути виражена лише через x. Зробити це досить не важко, оскільки в умові у нас функція записана в явному вигляді.

Зауваження 1.15. Задачу можна було розв'язати і без використання логарифмічного диференціювання. Для цього досить скористатися властивостями логарифма і записати функцію в наступному вигляді:

$$y = x^{\sin x} = e^{\ln\left(x^{\sin x}\right)} = e^{\sin x \cdot \ln x}.$$

Похідну від цієї функції можна знайти за допомогою вже відомих властивостей (радимо читачам зробити це самостійно).

Знаходження похідної від степенево показникової функції не є єдиним застосуванням логарифмічного диференціювання. В деяких випадках цей метод дозволяє значно зменшити кількість технічної роботи.

Приклад 39. *Знайти похідну від функції:*

$$y = \frac{(x+2)^2(x-6)\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^3(x-4)^2}.$$

Розв'язання. Правил розглянутих раніше достатньо, щоб знайти похідну від цієї функції. Проте, не важко зрозуміти що такий процес буде досить непростим. Справді, ми маємо справу с функцією, яка подана у вигляді частки декількох функцій, кожна з яких є добутком двох, або трьох функцій. Крім того, майже всі ці функції являються складеними. В таких випадках логарифмічне диференціювання значно полегшує процесс знаходження похідної. Прологарифмуємо ліву та праву частину, а також скористаємося властивостями логарифмів:

$$\ln y = \ln \frac{(x+2)^2(x-6)\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^3(x-4)^2},$$

$$\ln y = \ln (x+2)^2(x-6)\sqrt{x^2+1} - \ln (x-2)^3(x-4)^2,$$

$$\ln y = \left(\ln(x+2)^2 + \ln(x-6) + \ln\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\ln(x-2)^3 + \ln(x-4)^2\right),$$

$$\ln y = 2\ln(x+2) + \ln(x-6) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\ln(x-2) - 2\ln(x-4).$$

Знайдемо похідну по x від лівої та правої частини:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 3\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-4},$$

$$y' = y\left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 3\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-4}\right),$$

$$y' = \frac{(x+2)^2(x-6)\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^3(x-4)^2}\cdot\left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-6} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-4}\right). \square$$

1.19 Завдання для самостійної роботи № 8

Задача 8. *Знайти $f'(x)$ відповідно до варіанту.*

Варіант	**Функція** $f(x)$	**Варіант**	**Функція** $f(x)$
1	$f(x) = (\operatorname{cth} 3x)^{\arcsin x}$	16	$f(x) = (\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$
2	$f(x) = (\cos(x+2))^{\ln x}$	17	$f(x) = (\operatorname{th}\sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg} 2x}$
3	$f(x) = (\sin 3x)^{\arccos x}$	18	$f(x) = (\operatorname{cth}\frac{1}{x})^{\arcsin 7x}$
4	$f(x) = (\operatorname{th} 5x)^{\arcsin(x+1)}$	19	$f(x) = (\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$
5	$f(x) = (\operatorname{sh}(x+2))^{\arcsin 2x}$	20	$f(x) = (\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$
6	$f(x) = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$	21	$f(x) = (\sin 4x)^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$
7	$f(x) = (\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg} 3x}$	22	$f(x) = (\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x+3}}$
8	$f(x) = (\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$	23	$f(x) = (\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$
9	$f(x) = (\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg} 7x}$	24	$f(x) = (\operatorname{tg} 7x^5)^{\sqrt{x+2}}$
10	$f(x) = (\operatorname{sh} 3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$	25	$f(x) = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$
11	$f(x) = (\operatorname{ch} 3x)^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$	26	$f(x) = (\operatorname{ctg} 7x)^{\operatorname{sh}(x+3)}$
12	$f(x) = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$	27	$f(x) = (\operatorname{sh} 5x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$
13	$f(x) = (\arccos 5x)^{\ln x}$	28	$f(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{th}(3x+1)}$
14	$f(x) = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$	29	$f(x) = (\operatorname{cth}\sqrt{x})^{\sin(x+3)}$
15	$f(x) = (\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 2x}$	30	$f(x) = (\operatorname{sh} 3x)^{\operatorname{arctg} 2x}$

1.20 Завдання для самостійної роботи № 9

Задача 9. *Знайти $f'(x)$ відповідно до варіанту.*

Варіант	Функція $f(x)$	Варіант	Функція $f(x)$
1	$f(x) = \frac{\sqrt{(x+7)}(x-3)^4}{(x+2)^5}$	16	$f(x) = \frac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^3}$
2	$f(x) = \frac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$	17	$f(x) = \frac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$
3	$f(x) = \frac{(x-2)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$	18	$f(x) = \frac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$
4	$f(x) = \frac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$	19	$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}$
5	$f(x) = \frac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$	20	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$
6	$f(x) = \frac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$	21	$f(x) = \frac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}$
7	$f(x) = \frac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$	22	$f(x) = \frac{(x-1)^6(x+2)^3}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$
8	$f(x) = \frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$	23	$f(x) = \frac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$
9	$f(x) = \frac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$	24	$f(x) = \frac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$
10	$f(x) = \frac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$	25	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x-4)^2}$
11	$f(x) = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$	26	$f(x) = \frac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}$
12	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}$	27	$f(x) = \frac{\sqrt[5]{(x-2)^3(x-1)}}{(x+3)^4}$
13	$f(x) = \frac{\sqrt{(x+2)^3(x-1)^4}}{(x+2)^7}$	28	$f(x) = \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-2)^5}}{(x-3)^2}$
14	$f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^5(x+3)^2}}{(x-7)^3}$	29	$f(x) = \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$
15	$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x-8}(x+2)^6}{(x-1)^5}$	30	$f(x) = \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$

2 Рівняння дотичної і нормалі. Використання похідної при обчисленні границь

2.1 Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

В цій секції ми ознайомимося з деякими застосуваннями похідної. Зокрема, вона використовується до побудови рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.

Означення 2.1. Дотичною до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 називається граничне положення січної до графіка даної функції, що проходить через дві точки графіка, одна з яких має абсцису x_0, якщо різниця абсцис цих точок прямує до нуля.

Зауваження 2.1. Дотичною до кола називається пряма, яка має з ним одну спільну точку. Аналогічно визначити дотичну для графіка функції не можна. Дотична до графіка функції може мати більше однієї спільної точки з графіком функції і навпаки. Пряма може мати рівно одну спільну точку з графіком функції, але не бути для нього дотичною.

Означення 2.2. Нормаллю до кривої в точці x_0 називається пряма, що проходить через точку перпендикулярно до дотичної в цій точці.

Якщо функція задана в явному вигляді $y = f(x)$, то рівняння дотичної до неї в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{2.1.1}$$

Зауваження 2.2. Як видно з рівняння 2.1.1, дотична до графіка функції в точці x_0 має кутовий коефіцієнт $k = y'(x_0)$.

Приклад 40. *Знайти рівняння дотичної до графіка функції* $y = x^3 - 4x + 6$ *в точці* $M_0(1; 3)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну даної функції:

$$y' = 3x^2 - 4\,.$$

Для того, щоб знайти рівняння дотичної за допомогою (2.1.1), нам необхідно обчислити значення похідної в точці $x_0 = 1$:

$$y'(1) = 3 - 4 = -1\,.$$

Запишемо рівняння дотичної:

$$y - 3 = -(x - 1)\,.$$

Рівняння дотичної можна записати за допомогою загального рівняння прямої:

$$y + x - 4 = 0\,,$$

а також, у явному вигляді:

$$y = -x + 4\,. \;\square$$

Приклад 41. *У якій точці дотична до параболи* $y = x^2$ *:*

а) паралельна до прямої $y = 2x - 4$;

б) перпендикулярна до прямої $x + y = 1$ *?*

Розв'язання. а) Зі шкільного курсу математики відомо, що дві прямі паралельні між собою тоді, коли їх кутові коефіцієнти рівні. Пряма $y = 2x - 4$ має кутовий коефіцієнт $k_1 = 2$. Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи:

$$y' = 2x\,.$$

Кутовий коефіцієнт параболи в точці x_0 дорівнює $k_2 = 2x_0$. Звідси, маємо рівняння:

$$2x_0 = 2\,,$$

$$x_0 = 1\,.$$

Знайдемо другу координату цієї точки:

$$y(1) = 1\,.$$

Отже, $M_1(1;1)$ є бажаною точкою.

б) Прямі перпендикулярні тоді, коли добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює -1. Знайдемо кутовий коефіцієнт k_1 прямої $x + y = 1$. Будемо мати, що

$$y = -x + 1\,,$$

$$k_1 = -1\,.$$

Отже, для знаходження точки x_0 можемо скласти наступне рівняння:

$$2x_0 \cdot (-1) = -1\,,$$

$$-2x_0 = -1\,,$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\,,$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,,$$

$$M_2 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right). \ \square$$

Для пошуку рівняння нормалі функції в точці x_0 використовують наступну формулу:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0}(x - x_0)\,. \tag{2.1.2}$$

Приклад 42. *Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^3$ в точці $M_0(2; 8)$.*

Розв'язання. Знайдемо значення похідної при $x_0 = 2$:

$$y' = 3x^2\,,$$

$$y'(2) = 12\,.$$

Скористаємося формулами (2.1.1) та (2.1.2). Звідси рівняння дотичної має вигляд:

$$y - 8 = 12(x - 2)\,,$$

або

$$y - 12x + 16 = 0\,.$$

Рівняння нормалі:

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2)\,,$$

або

$$12y + x - 98 = 0\,. \ \square$$

Зауваження 2.3. Зауважимо, що формула (2.1.1) виконується лише в тому випадку, коли похідна в точці існує і є скінченною. Якщо похідна $f'(x_0) = \pm\infty$, то дотична до графіку функції все одно існує. В цьому випадку, через точку x_0 проходить вертикальна дотична $x = x_0$.

Зауваження 2.4. Формулами (2.1.1) та (2.1.2) можна користуватися і для функцій, які задані неявно, або параметрично.

Приклад 43. *Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 + 4xy^2 + y^2 - y - 12 = 0$ в точці $M_0(2, 1)$.*

Розв'язання. Знайдемо похідну від даної функції, як похідну від складеної функції:

$$2x + 4y^2 + 8xyy' + 2yy' - y' = 0\,,$$

$$8xyy' + 2yy' - y' = -2x - 4y^2\,,$$

$$y'(8xy+2y-1)=-(2x+4y^2)\,,$$
$$y'=-\frac{2x+4y^2}{8xy+2y-1}\,.$$
Знайдемо значення похідної в точці $M_0(2,1)$:
$$y'(2,1)=-\frac{8}{17}\,.$$
Скористаємося тепер формулою (2.1.1) для знаходження дотичної:
$$(y-1)=-\frac{8}{17}(x-2)\,,$$
а також формулою (2.1.2) для знаходження рівняння нормалі:
$$(y-1)=\frac{17}{8}(x-2)\,.$$
Виконавши елементарні перетворення, отримані рівняння можна записати за допомогою загального рівняння прямої. Тоді рівняння дотичної та нормалі відповідно, будуть мати наступний вигляд:
$$8x+17y-33=0\,,$$
$$17x-8y-26=0\,.\ \Box$$

Приклад 44. *Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої заданої параметрично, які проведені в точці, для якої* $t_0=\frac{\pi}{2}$, *якщо*
$$\begin{cases} x=t-\sin t\,,\\ y=1-\cos t\,.\end{cases}$$
Розв'язання. Для початку знайдемо, чому дорівнює x та y, якщо $t_0=\frac{\pi}{2}$:
$$x_0=\frac{\pi}{2}-1\,,$$
$$y_0=1\,.$$
Знайдемо похідну від функції $y=f(x)$ по x :
$$f'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\,.$$

Знайдемо значення похідної $f'(x)$ функції $y = f(x) = f(x(t))$ в точці $t_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$f'_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1\,.$$

Для того, щоб знайти рівняння дотичної та нормалі, скористаємося формулами (2.1.1) та (2.1.2), відповідно.

Рівняння дотичної:

$$y-1 = 1\cdot\left(x - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)\,, \quad y-1 = x-\frac{\pi}{2}+1\,,$$

$$y - x + \frac{\pi}{2} - 2 = 0\,.$$

Рівняння нормалі:

$$y-1 = -1\cdot\left(x - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)\,, \quad y-1 = \frac{\pi}{2}-1-x\,,$$

$$y-1-\frac{\pi}{2}+1+x = 0\,, \quad y+x-\frac{\pi}{2} = 0\,. \ \square$$

2.2 Завдання для самоконтролю

1. Розглянемо функцію $f(x) = \begin{cases} x^2\,, & x\in\mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$. Чи існує до графіку цієї функції дотична у точці $x_0 = 0$? Що можна сказати про існування дотичної в інших точках?

2. Розглянемо функцію $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}\,, & x\neq 0\,, \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$. Чи існує до графіку цієї функції дотична у точці $x_0 = 0$? Що можна сказати про існування дотичної в інших точках?

3. Розглянемо функцію $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}\,, & x\neq 0\,, \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$. Чи існує до графіку цієї функції дотична у точці $x_0 = 0$? Що можна сказати про існування дотичної в інших точках?

4. При яких $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ функція $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}\,, & x\neq 0\,, \\ 0\,, & x=0 \end{cases}$ має дотичну у точці $x_0 = 0$?

2.3 Завдання для самостійної роботи № 10

Задача 10. *Виконати завдання, відповідно до варіанту.*

	Завдання
1	Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 7x + 3$ в точці з абсцисою $x = 1$
2	Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 - 16x + 7$ в точці з абсцисою $x = 1$
3	Записати рівняння дотичної до лінії $y = \sqrt{x-4}$ в точці з абсцисою $x = 8$
4	Записати рівняння нормалі до лінії $y = \sqrt{x+4}$ в точці с абсцисою $x = -3$
5	Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точці $(2, 1)$
6	Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точці $(1, 1)$
7	Визначити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точці (3,2)
8	В якій точці кривої $y^2 = 4x^3$ дотична перпендикулярна до прямої $x+3y-1 = 0$
9	Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x + 2$ в точці з абсцисою $x = 2$
10	Записати рівняння дотичної до кривої $y = \frac{x^2}{4} - x + 5$ в точці з абсцисою $x = 4$
11	Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{x^4}{4} - 27x + 60$ в точці з абсцисою $x = 2$
12	Записати рівняння дотичної до кривої $y = -\frac{x^2}{2} + 7x - \frac{15}{2}$ в точці з абсцисою $x = 3$
13	Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3\operatorname{tg} 2x + 1$ в точці з абсцисою $x = \frac{\pi}{2}$
14	Записати рівняння дотичної до кривої $y = 4\operatorname{tg} 3x$ в точці з абсцисою $x = \frac{\pi}{9}$
15	Записати рівняння нормалі до кривої $y = 6\operatorname{tg} 5x$ в точці з абсцисою $x = \frac{\pi}{20}$
16	Записати рівняння дотичної до кривої $y = 4\sin 6x$ в точці з абсцисою $x = \frac{\pi}{18}$
17	З'ясувати, в яких точках кривої $y = \sin 2x$ дотична утворює з віссю OX кут $\frac{\pi}{4}$
18	З'ясувати, в якій точці кривої $y = 2x^3 - 1$ дотична утворює з віссю OX кут $x = \frac{\pi}{3}$
19	З'ясувати, в якій точці кривої $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 7x + 9$ дотична утворює з віссю OX кут $-\frac{\pi}{4}$
20	З'ясувати, в яких точках кривої $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + 4$ дотична утворює з віссю OX кут $\frac{\pi}{4}$
21	Знайти точки на кривій $y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7$, в яких дотичні паралельні до осі OX
22	Знайти точку на кривій $y = \frac{x^4}{4} - 7$, дотична в якій паралельна прямій $y = 8x - 4$

Варіант	Завдання
23	Знайти точку на кривій $y = -3x^2 + 4x + 7$, дотична в якій перпендикулярна до прямої $x - 20y + 5 = 0$
24	Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 4x + 6$, дотична в якій паралельна прямій $8x - y - 5 = 0$
25	Знайти точку на кривій $y = 5x^2 - 4x + 1$ дотична в якій паралельна до прямої $x + 6y + 15 = 0$
26	Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 5x - 11$, дотична в якій паралельна прямій $x - y + 10 = 0$
27	Знайти точку на кривій $y = -x^2 + 7x + 16$, дотична в якій паралельна прямій $y = 3x + 4$
28	З'ясувати, в якій точці кривої $y = 4x^2 - 10x + 13$ дотична паралельна прямій $y = 6x - 7$.
29	З'ясувати, в якій точці кривої $y = 7x^2 - 5x + 4$ дотична перпендикулярна до прямої $23y + x - 1 = 0$
30	З'ясувати, в якій точці кривої $y = \frac{x^2}{4} - 7x + 5$ дотична паралельна прямій $y = 2x + 5$

2.4 Правило Лопіталя

Як відомо, у теорії границь центральною проблемою є розкриття невизначеностей. Не всяка невизначеність передбачає чіткий, послідовний і зрозумілий механізм її розкриття. Наприклад, границя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 6}{x^7 - 9x^2 + 18} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \tag{2.4.1}$$

відносно легко обчислюється, оскільки маємо дріб, в чисельнику і знаменнику котрого знаходяться поліноміальні вирази. В цьому випадку, ділимо чисельник і знаменник на старшу степінь x (у даному випадку це x^7. В результаті з'ясовуємо, що вказана границя дорівнює нулю – перевірте!). Розглянемо тепер границю

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{x^7 - 9x^2 + 18} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \tag{2.4.2}$$

Прямі обчислення тут недоцільні, зокрема, ділення на x^7 нічого не дає. Можна скористатися фактом, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty$, $a > 1$, $k > 0$. Звідси випливає, що границя у (2.4.2) дорівнює нескінченності. Іншими словами, дана задача передбачає знання деяких «спеціальних фактів», але й ці факти також потребують доведення. Без використання правила Лопіталя, котрому присвячений параграф, співвідношення $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=\infty$ доводиться доволі складно (одна з методологій «прямого» доведення спирається на біномі Ньютона та випливаючій з нього нерівності Бернуллі).

Зараз ми ознайомимося з методологією, яка дозволяє встановити це співвідношення більш елементарно; зокрема, ми прямо обчислимо границю в (2.4.2). Викладений нижче підхід в якійсь мірі є універсальним, бо він дозволяє розкривати будь-які невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ та $\left[\frac{0}{0}\right]$. Більш того, вирази $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$ та деякі інші можуть бути зведені до них. Справедлива наступна

Теорема 2.1. *Припустимо, що функції f і g визначені у напівінтервалі $(a,b]$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, крім того, f і g мають скінченні похідні на $(a,b]$ і $g'(x)\neq 0$ на $(a,b]$. Якщо існує (скінченна або нескінченна) границя*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K\,,$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K\,.$$

Теорема 2.1 допускає узагальнення на випадок, коли $x\to\pm\infty$. Зокрема, виконується наступне твердження.

Теорема 2.2. *Припустимо, що функції f і g визначені на півпроміжку $[c,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, крім того, f і g мають скінченні похідні на $[c,+\infty)$ і $g'(x)\neq 0$ на $[c,+\infty)$. Якщо існує (скінченна або нескінченна) границя*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K\,,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K\,.$$

Наступні теореми містять інформацію про невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 2.3. *Припустимо, що функції f і g визначені у напівінтервалі $(a,b]$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, крім того, f і g мають скінченні* *похідні на* $(a, b]$ *і* $g'(x) \neq 0$ *на* $(a, b]$. *Якщо існує (скінченна або нескінченна) границя*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K\,,$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = K\,.$$

Теорема 2.4. *Припустимо, що функції* f *і* g *визначені на півпроміжку* $[c, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$, *крім того,* f *і* g *мають скінченні похідні на* $[c, +\infty)$ *і* $g'(x) \neq 0$ *на* $[c, +\infty)$. *Якщо існує (скінченна або нескінченна) границя*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K\,,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K\,.$$

Теореми 2.1–2.4 у сукупності називаються *правилом Лопіталя*: **границя відношення нескінченно малих, або нескінченно великих функцій, дорівнює границі відношення їх похідних.** В більшості випадків це дозволяє прямо обчислювати границі, або суттєво полегшує їх знаходження. Переконаємося у цьому на конкретних прикладах.

Приклад 45. *Знайти границю*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}\,. \tag{2.4.3}$$

Розв'язання. Маємо справу з невизначеністю $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. За правилом Лопіталя (теорема 2.4), яке ми послідовно використовуємо у виразі під знаком границі у (2.4.3) k разів, будемо мати:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a\cdot a^x}{kx^{k-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln a)^2 a^x}{k(k-1)x^{k-2}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln a)^k a^x}{k!} = \infty\,,$$

оскільки $\frac{(\ln a)^k}{k!}$ – фіксоване число, а $a^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$. $\square$

Приклад 46. *Знайти границю*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^7-9x^2+18}\,. \tag{2.4.4}$$

Розв'язання. Маємо справу з невизначеністю $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. За правилом Лопіталя (теорема 2.4), застосовним під знаком границі в (2.4.4), ми будемо мати:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^7-9x^2+18}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5\cdot 5^x}{7x^6-18x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \tag{2.4.5}$$

Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ під знаком границі не зникла, тому застосовуємо у (2.4.5) правило Лопіталя ще раз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5\cdot 5^x}{7x^6-18x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln 5)^2\cdot 5^x}{42x^5-18}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \tag{2.4.6}$$

Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ під знаком границі не зникла, тому застосовуємо у (2.4.6) правило Лопіталя ще декілька разів:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln 5)^2\cdot 5^x}{42x^5-18}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln 5)^3\cdot 5^x}{210x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln 5)^4\cdot 5^x}{840x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln 5)^5\cdot 5^x}{2520x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln 5)^6\cdot 5^x}{5040x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln 5)^7\cdot 5^x}{5040}=$$

$$=\frac{(\ln 5)^7}{5040}\lim_{x\to+\infty}5^x=\infty\,. \tag{2.4.7}$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^7-9x^2+18}=\frac{(\ln 5)^7}{5040}\lim\limits_{x\to+\infty}5^x=\infty\,.$ □

Приклад 47. *За допомогою правила Лопіталя знайти границю*

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}\,. \tag{2.4.8}$$

Розв'язання. Підставляючи у чисельник та знаменник $x=1$, з'ясовуємо, що це невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосуємо теорему 2.1 для $a=1$, $f(x)=\sqrt{2x-x^4}-\sqrt{x}$ і $g(x)=1-\sqrt[4]{x^3}$. Будемо мати:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x-x^4}}\cdot(2-4x^3)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

$$g'(x) = \left(-x^{\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}\,.$$

Тоді за правилом Лопіталя (теорема 2.1) ми отримаємо, що

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-x^4}}\cdot(2-4x^3)-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot(-2)-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = 2\,.\square$$

2.5 Завдання для самоконтролю

1. Розв'яжіть приклад у формулі (2.4.1) за допомогою правила Лопіталя.

2. Покажіть, як невизначенності вигляду $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$ і $[\infty^0]$ можна звести до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ та/або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

3. Чому дорівнює границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$? Відповідь обґрунтуйте.

4. Чому дорівнює границя $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x}$? Відповідь обґрунтуйте.

5. Нехай функції f та g визначені на промені $(0,\infty)$ і не обертаються в нуль. Чи вірно, що якщо $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то і $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$? Що можна сказати про границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$ у порівнянні з $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$?

2.6 Завдання для самостійної роботи № 11

Задача 11. *Знайти границю функції, за допомогою правила Лопіталя.*

Варіант	Границя	**Варіант**	**Границя**
1	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$	16	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$
2	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{\ln x}-x}{x-1}$	17	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$
4	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-4\sin^2(\frac{\pi x}{6})}{1-x^2}$	19	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$
5	$\lim\limits_{x\to a} \arcsin\frac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}(x-a)$	20	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sin mx}{\ln\sin x}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty} (\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$	21	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty} (a^{\frac{1}{x}}-1)x$	22	$\lim\limits_{x\to 0} 1-\cos x\operatorname{tg} x$
8	$\lim\limits_{x\to 1} (\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x})$	23	$\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$
9	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$	24	$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{3}{x}$
10	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-x}{2\sin x+x}$	25	$\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$	26	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$
12	$\lim\limits_{x\to 1} x^3-2x^2-x+2x^3-7x+6$	27	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$
13	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$	28	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{4x-\sin x}$
14	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$	29	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$
15	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$	30	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

[1] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч. 1.* – К.: Вища школа, 1990.

[2] *Практикум з вищої математики: Навчальний посібник.* За ред. В.О. Коваля. — Житомир: ЖДТУ, 2008.

[3] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз. Частина І.* – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2022.

[4] Денисьєвський М.О., Курченко О.О., Нагорний В.Н., Нестеренко О.Н., Петрова О.Н., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Частина І. Функції однієї змінної.* — К.: ВПЦ «Київський університет», 2005.

[5] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак.* 4-те вид. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013.