

УДК 372.851.4

І. А. Сверчевська,  
кандидат педагогічних наук, доцент  
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)

### СТРУКТУРУВАННЯ ЗМІСТУ РОЗДІЛУ "ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА" У ПЕРШИХ ШКІЛЬНИХ ПІДРУЧНИКАХ З ГЕОМЕТРІЇ ЗАХІДНОЇ УКРАЇНИ

*У статті аналізуються перші шкільні підручники з геометрії Західної України. Виявляються особливості структурування змісту розділу стереометрії "Геометричні тіла", прогресивні ідеї, які можуть бути використані у сучасній школі. Виділяються актуальні для сьогодення методичні надбання, ідеї та підходи до вивчення геометричних тіл, такі як науковий підхід, диференційованість, розвиток логічного мислення, самостійність у навчанні.*

У період системних змін в освіті актуальним стає забезпечення належного рівня математичної підготовки учнів. Важлива роль у досягненні цієї мети належить шкільному підручнику, який залишається основним друкованим засобом у навчанні математики. Геометрія, зокрема стереометрія, займає значне місце у шкільній математиці. Ми зосередимо увагу на розділі "Геометричні тіла". Огляд методичної літератури свідчить про значущість вивчення цього розділу для розвитку просторового і логічного мислення, для загальнокультурного та естетичного виховання учнів, для демонстрації прикладної спрямованості геометрії і в той же час про стурбованість вчителів недостатнім рівнем знань учнів. Критичне осмислення стану речей привело до думки проаналізувати висвітлення розділу "Геометричні тіла" у підручниках з геометрії різних часів. Такий аналіз має велику пізнавальну і практичну цінність, бо це дозволяє простежити еволюцію вивчення геометричних тіл у шкільному курсі математики. Будемо розглядати перші підручники з геометрії Західної України, які містять оригінальні й цікаві ідеї.

Згідно з програмами з математики зміст розділу "Геометричні тіла" складається з двох основних тем "Многогранники" і "Тіла обертання". Зміст розділу визначає його структуру, тобто окремі модулі матеріалу, їх послідовність, взаємозв'язок між ними. Хоча зміст і структура відносно незалежні, даний зміст можна втілити у різних структурах. Запропонувавши певну структуру, зміст матеріалу можна видозмінювати.

Положення про структурування змісту підручників досліджували й досліджують вчені та методисти М. І. Бурда, Б. В. Гнеденко, Г. М. Литвиненко, Д. Пойа, З. І. Слєпкань, Н. Ф. Талізїна, Т. М. Хмара. Підручники з геометрії аналізуються в роботах В. Г. Городівської, В. П. Дзондзи, О. В. Ланкова, І. З. Штокало, В. Й. Якиляшека, І. Й. Якиляшека.

Аналіз підручників XVII – XVIII ст. показує, що в той час геометричні тіла у шкільному курсі геометрії розглядалися у різних розділах математики. До кінця XVIII ст. питання про шкільний підручник з геометрії не було розв'язано.

Головним культурним центром Західної України у другій половині XVIII ст. був Львів, де існувало декілька шкіл, в яких знайомили з елементами геометрії. Стосовно підручників з математики, до 1848 р. їх було дуже мало. Геометрію вивчали за двома виданнями чотирьох перших книг "Основ" Евкліда. А з середини XIX ст. найбільш вживаним підручником з геометрії був підручник Франца Мочніка "Наука геометрія съ погляду до ужитку ц.к. низшой гімназій" (Львів, 1876 р.) [1].

Підручник Мочніка був написаний німецькою мовою, але швидко з'явилися його переклади. У підручнику "Наука геометрія" ч.1 в розділі "Основні поняття" дається поняття тіла: "Простір зі всіх сторін обмежений зове ся тілом. Кожне тіло має три виміри: довготу, ширину і висоту". Перше тіло, яке розглядається – шестистінник (куб). Наводиться малюнок і розглядаються основні елементи: 6 стін (граней), 12 гран (ребер), 8 вершків (вершин). Пропонується подібним способом розглянути призму, чотиростінник (тетраедр), пірамідальний пеня (зрізана піраміда).

Аналогічно за малюнком описується валець (циліндр): "Валець займає простір зі всіх боків обмежений. Валець є тілом, він обмежений трьома поверхнями. Дві з них є плоскі, третя – крива. Валець має лише дві грани. Вершків (рогів) на вальці нема". Так само пропонується розглянути прямий стіжок (конус), стятий стіжок (зрізаний конус), кулю. Наводиться означення поверхні: "Границі тіла звать ся поверхнями. Тіла, поверхні, лінії і точки звать ся утворами просторовими (також геометричними). Можна собі представити, що утвори геометричні повстали через рух". Далі розглядається поділ поверхонь на плоскі і криві, тіл – на гранчасті і круглі. "Тіло, обмежене лише площами, зове ся гранчастим (шестистінник, скриня). Тіло, котрого границями не суть самі площі, зове ся круглим (валець, куля)".

Розглянемо, які задачі до розділу "Геометричні тіла" пропонуються в "Рахунковій книжці" [2] (збірнику задач) Фр. Мочніка. У розділі "Повторювальні вправи" спочатку наводиться правило: "Об'єм куба находимо, коли число поміру его грани візьмемо тричі як чинник" і за відомими

числовими даними пропонується обчислити поверхню і об'єм. Правило для прямокутного рівнобіжностінника (паралелепіпеда): "Об'єм прямокутного рівнобіжностінника знаходимо, коли помножимо число поміру поверхні основи і висоти", дано ряд задач практичного змісту, в яких потрібно обчислити об'єм прямокутного паралелепіпеда. У розділі "Помір тіла" пропонуються задачі на обчислення поверхні та об'єму призми, циліндра, піраміди, конуса, зрізаного конуса, кулі.

Про призми наведено 20 задач на обчислення об'єму, з них 14 з практичним змістом. У цих задачах для куба задається бічне ребро, для прямокутного паралелепіпеда – його виміри, для призми – площа основи і висота.

Про циліндр наведено 18 задач. На початку наводиться задача на обчислення бічної поверхні, поверхні і об'єму циліндра з розв'язанням.

"Висота прямого циліндра має 9 см, промір (діаметр) основи 6 см; яка за велика а) бічна поверхня, б) ціла поверхня, в) який за великий об'єм циліндра?"

Коли розвинути бічну поверхню циліндра, то вийде прямокутник, що має з циліндром однакову висоту, а основу рівну з обводом основи циліндра. Бічну поверхню прямого циліндра знайдемо, як помножимо число поміру обводу основи числом поміру висоти.

а) обвід основи	$= 6 \text{ см} \times 3 \frac{1}{7} = 18,8 \text{ см},$
бічна поверхня циліндра	$= 18,8 \text{ см}^2 \times 9 = 169,2 \text{ см}^2;$
б) подвійна основа "	$= 56,4 \text{ см}^2,$
бічна поверхня "	$= 169,6 \text{ см}^2,$
Поверхня циліндра	$= 225,6 \text{ см}^2.$

в) Циліндр можна уважати призмою, котрої основи є кола. Об'єм циліндра знайдемо, як помножимо число поміру основи числом поміру висоти.  $\text{Об'єм} = 28,2 \text{ см}^3 \times 9 = 253,8 \text{ см}^3$ .

Із 18 задач цієї теми – 16 з практичним змістом: дві на обчислення бічної поверхні, дві на знаходження висоти циліндра за даним об'ємом і радіусом основи, а решта задач на обчислення об'єму.

Про піраміду наводиться 8 задач: 4 задачі на обчислення площі поверхні (2 з них з практичним змістом) і 4 – на обчислення об'ємів (2 з них з практичним змістом). Про зрізану піраміду наводиться 4 задачі. Одна задача подається з розв'язанням, три останніх – практичні задачі на обчислення об'єму. Про конус (стіжок) наводиться 6 задач, перша задача подається з розв'язанням. Друга і третя задача на обчислення поверхні (за діаметром основи і твірною) та об'єму (за радіусом основи і висотою). Останні три задачі з практичним змістом.

Перша задача про зрізаний конус подається з розв'язанням і вказівкою "Об'єм стятого стіжка знайдемо більше-менше, коли половину суми чисел поміру обох основ помножимо числом поміру висоти". В інших п'яти задачах потрібно обчислити об'єм за висотою і радіусами основ (4 задачі з практичним змістом).

Про кулю наводиться 8 задач. Перша задача подається з розв'язанням.

Промір кулі має 8 см; а) яка за велика її поверхня, б) який за великий її об'єм?

а) Доконано, що поверхня кулі 4 рази така за велика як поверхня найбільшого її кола. Поверхня найбільшого кола  $= (4 \times 4) \text{ см}^2 \times 3 \frac{1}{7} = 50,285 \text{ см}^2$ , поверхня кулі  $= 50,285 \text{ см}^2 \times 4 = 201,14 \text{ см}^2$ .

б) Як проведемо через осередок кулі дуже багато площ, то через те розпадеся куля на дуже багато малих пірамід, що мають свій вершок в осередку кулі, а тим то їх висотою буде луч кулі, а всі їх основи разом творити муть поверхню кулі. Поверхню кулі знайдемо, як помножимо число поміру поверхні третиною числа поміру луча.  $\text{Об'єм кулі} = 201,14 \text{ см}^3 \times \frac{4}{3} = 268,19 \text{ см}^3$ .

У задачах № 2, 3, 4 потрібно обчислити поверхню і об'єм кулі за даним діаметром, радіусом, довжиною кола великого круга. Задачі № 6, 7 з практичним змістом на обчислення поверхні і об'єму. Усі задачі на повторення з практичним змістом. Наведемо приклади деяких задач.

У посудині 5 дм довгій, 4 дм широкій є вода. В неї пущено камінь неправильного виду і він потонув зовсім у воді. Який об'єм того каменя, коли від него підійшла вода у посудині на 1,2 дм вгору?

Знайти об'єм отсих пірамід: а) основа 3 м<sup>2</sup>, висота 3 м; б) основа 0,35 м<sup>2</sup>, висота 0,48 м; в) основа 1 м<sup>2</sup> 56 дм<sup>2</sup> 24 см<sup>2</sup>, висота 1 м 7 дм 4 см.

Кілько м<sup>3</sup> кори має смерека 9,2 м бічної висоти і 2 м обводу на кінці пня?

У циліндр з проміром на 1 м і з висотою 1 м вписати кулю і прямий стіжок; а) який за великий об'єм кожного з сих тіл; б) кілька раз більша куля від стіжка, а кілька циліндр від кулі? У яким відношенню стоять проте об'єми стіжка, кулі і циліндра до себе?

Громозвід хоронить об'єм стіжка, котрого висотою є громозвід, а луном основи єго подвійна довгота. а) Яку площу кривлі хоронить громозвід із жердкою 3,5 м високою? б) Який об'єм хоронить громозвід, котрого вершок здіймає ся 16 м понад землю?

Поверхня і об'єм тіл вивчалась в старших класах, в який користувалися підручником Мочніка "Геометрія для кляс высших гимназійных" (Львів, 1880) [3]. Підручник починається з планіметричного матеріалу. Стереометрія розглядається у другій частині книги. Підрозділ II "О телах геометричних в загале" починається означенням многогранника – це частина простору, замкнена з усіх сторін площинами. Крім того, розглядається теорема Ейлера, дається поняття правильного многогранника. Призма означається як многогранник, у якого дві грані рівні і паралельні, а всі інші – паралелограми. Дається означення паралелепіпеда, прямокутного паралелепіпеда, куба, розглядаються їх властивості. Для доведень властивостей даються вказівки. Після кожної теми вміщені задачі на доведення, які доповнюють властивості геометричного тіла, що розглядається.

Пірамідою називається многогранник, у якого одна грань є многокутник, а всі інші – трикутники, що мають спільну вершину. Далі доводиться теорема про перетин піраміди площиною, паралельною до основи. Після теореми дається поняття зрізаної піраміди. Крім призми і піраміди автор додатково розглядає поняття призматоїда. З використанням теореми Ейлера визначаються п'ять правильних многогранників, розглядаються деякі їх властивості.

Другий підрозділ містить матеріал про круглі тіла. Автор проводить аналогію між призмою і циліндром, пірамідою і конусом, правильними многогранниками і кулею. Означення циліндра і конуса – конструктивні. Розглядаються прямі та похилі циліндри і конуси, як частинний випадок – кругові. Властивості циліндрів і конусів подаються у вигляді задач на доведення.

Введення поняття "куля" починається з означення кульової поверхні як поверхні обертання. Куля – це тіло, замкнене кульовою поверхнею. Далі розглядаються властивості, взаємне розташування прямих і площин з кулею. Робиться вказівка, що доведення властивостей дотичної площини до кулі аналогічні доведенням про коло в планіметрії. Закінчується підрозділ задачами. Частина з них містить завдання виконати малюнки вивчених геометричних тіл, інші – обчислювального характеру. Задачі на комбінацію многогранників і кулі подано з роз'ясненнями.

Підрозділ "Вимірювання тіл" містить матеріал про обчислення площ поверхонь і об'ємів геометричних тіл, який подається у такій послідовності: призма, піраміда, зрізана піраміда, призматойд, правильні многогранники, циліндр, конус, зрізаний конус, куля та її частини.

Для об'єму призми і піраміди використовується підхід, відомий з часів Евкліда. Об'єм зрізаної піраміди знаходиться алгебраїчним способом. Площа поверхні та об'єм циліндра знаходяться з використанням вписаних і описаних призм. Для конуса використовуються аналогічно піраміди. Формули для площі поверхні та об'єму зрізаного конуса виводяться алгебраїчно. Щоб визначити площу поверхні кулі та її частин, в коло вписується правильний многогранник з парною кількістю сторін та обертається навколо діаметра. Об'єм кулі та її частин знаходиться за допомогою нескінченної кількості пірамід з вершинами в центрі кулі та основами, що є мікрочастинами поверхні кулі.

Після кожної теми подаються задачі на обчислення, серед них є прикладні. У підручнику також вміщено матеріал про сферичні многокутники. Інші частини підручника містять тригонометрію на площині та сферичну, застосування алгебри до геометрії та елементи аналітичної геометрії.

Педагоги-математики Західної України групувалися навколо Наукового товариства імені Т. Г. Шевченка, створеного у 1873 році у Львові. Перші оригінальні підручники українською мовою були створені українськими математиками О. Савицьким (геометрія), П. Огоновським (арифметика, алгебра), В. Левицьким (алгебра) [4]. П. Огоновський був автором кількох шкільних підручників, написаних українською мовою, зокрема, арифметики, алгебри, фізики для молодших класів. Відомий його підручник "Геометрія для кляс высших гимназійных", написаний у 1877 році німецькою мовою та перекладений українською О. Савицьким.

Перший підручник з геометрії "Геометрія для висших кляс гимназійных" [5] українською мовою створено О. Савицьким у 1908 році. О. Савицький робив переклади українською мовою підручників з геометрії Ф. Мочніка, підручника П. Огоновського. А його власний підручник відрізняється від перекладів, при його написанні автор використав власні ідеї та педагогічний досвід.

Підручник складається з чотирьох частин: планіметрія, стереометрія, тригонометрія, геометрія аналітична. Зосередимо увагу на розділі стереометрії "Тіла". Спочатку розглядаються многогранники (многостінники), дається означення, роз'яснюються терміни. Означення призми конструктивне. Формулюються найпростіші властивості призм, що впливають з означення, властивості діагоналей паралелепіпеда та прямокутного паралелепіпеда подаються з доведенням.

Означення піраміди також конструктивне, розглядаються прямі та похилі піраміди. Після доведення теореми про переріз піраміди площиною, паралельною до основи, означається зрізана піраміда. Розглядаються загальні властивості многогранників, серед них теорема Ейлера. Закінчується підрозділ матеріалом про правильні многогранники. Після чого йдуть задачі до

параграфів. Задачі різного типу: на доведення, дослідження, побудову та обчислення. До деяких задач є вказівки, відповіді, розв'язання.

Наступний підрозділ – "Круглі тіла". Циліндр означається конструктивно, даються основні властивості, вказівки провести аналогію з призмою для доведень. Прямий круговий циліндр означається і як тіло обертання. При поданні матеріалу про конус (стіжок) здійснюється аналогічний підхід. Коротко розглядається зрізаний конус. Куля означається як тіло обертання, формулюються властивості, основні доводяться, для інших даються вказівки можливого шляху самостійного доведення.

Площі поверхонь розглядаються послідовно для всіх геометричних тіл, формулюються відповідні правила. Площа бічної поверхні циліндра (конуса) знаходиться з використанням міркувань про вписані та описані призми (піраміди) з нескінченно великою кількістю бічних граней. Окремо розглядаються поверхні обертання. Площа поверхні кулі знаходить з використанням обертання навколо діаметра вписаного в коло правильного многокутника з парною кількістю сторін при необмеженому збільшенні їх кількості.

Об'єми геометричних тіл також розглядаються послідовно: паралелепіпед, призма, циліндр, піраміда, конус, зрізана піраміда та зрізаний конус, куля та її частини. Ланцюжок тверджень про об'єми паралелепіпедів та призм використовує рівноскладеність цих многогранників. Об'єм циліндра знаходиться як гранична величина, до якої наближаються об'єми вписаних і описаних призм із нескінченно зростаючою кількістю бічних граней. Для доведення формули об'єму піраміди спочатку з використанням аксіоми Кавальєрі доводиться допоміжне твердження про піраміди з рівними основами і висотами. Об'єм конуса визначається аналогічно до об'єму циліндра. Об'єми зрізаних піраміди і конуса визначаються алгебраїчно. Об'єм кулі розглядається як границя, до якої наближається об'єм вписаного і описаного многогранника із зростаючою кількістю граней. При цьому використовуються піраміди з вершинами в центрі кулі і висотами, що приблизно рівні радіусу кулі.

Завершується підрозділ про площі поверхонь і об'єми тіл задачами. Задачі (всього 78) наведені для кожного геометричного тіла окремо, розташовані в порядку підвищення складності. Досить багато прикладних задач. Цікавими є задачі на встановлення зв'язків між вимірами геометричного тіла. Наприклад, площею основи, радіусом, висотою, площею бічної поверхні та об'ємом циліндра. Однією з особливостей підручника О. Савицького є історичні довідки про Ейлера, Піфагора, Евкліда, Евдокса. Також зустрічаються завдання самостійно сформулювати, довести твердження, даються відповідні вказівки.

Підручники Ф. Мочніка та О. Савицького структуровано так, що спочатку вивчаються многогранники, їх властивості та тіла обертання й їх властивості, а потім окремим розділом площі поверхонь і об'єми тіл. Це дозволяє зосередити увагу на змістовій лінії вивчення об'ємів тіл, вибудувати чітку, логічну послідовність викладу матеріалу, провести аналогії про вимірювання площ поверхонь і об'ємів призм і циліндрів, пірамід і конусів.

Критичний аналіз розглянутих підручників дає змогу виділити актуальні для сьогодення методичні надбання, ідеї та підходи до вивчення геометричних тіл. Стосовно теоретичних підходів до логічної побудови курсу "Геометричні тіла" можна стверджувати, що підручники XVIII – початку XIX ст. дотримувалися класичних підходів евклідової геометрії. У підручниках Ф. Мочніка та О. Савицького використана ідея вивчення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл одним блоком. Це забезпечує більш науковий прогресивний підхід до викладу теорії та застосовується у сучасних підручниках з геометрії.

Зміст підручників Ф. Мочніка та О. Савицького будується так, щоб учні вчилися логічно міркувати. У ході викладу теоретичного матеріалу ставляться запитання, робляться вказівки для самостійної роботи. Це змушує учнів вдумливо опрацьовувати текст, заохочує до самостійних доведень, орієнтує на самостійне здобуття знань. У кінці параграфів, підрозділів автори роблять висновки, зауваження, узагальнення, що сприяє покращенню засвоєння матеріалу. З методичної точки зору цікавою є ідея паралельного структурування матеріалу, проведення аналогій до доведень, які виконувалися у планіметрії.

Слід наголосити на такій структурній особливості розглянутих підручників, як диференційованість. Про це свідчить наявність додаткового теоретичного матеріалу, задач різної складності. Включення прикладних задач, пов'язаних із повсякденним життям учнів, є прикладом розв'язання проблеми гуманізації та прикладної спрямованості освіти.

Зроблений огляд підручників з геометрії дає можливість виявити їх особливості і використати найкращі ідеї та методичні здобутки в умовах сучасної школи.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Мочнік Ф. Наука геометрія съ погляду до ужитку ц.к. низшой гімназій. – Львів: З друкарні Товариства ім. Шевченка, 1876. – 49 с.
2. Мочнік Ф. Рахункова книжка для австрійських вселюдних шкіл народних. – Відень: Цісарсько-королівське видавництво книжок шкільних, 1911. – 137 с.
3. Мочнік Ф. Геометрія для клясь высших гімназіяльніхъ. – Львів: З друкарні Товариства ім. Шевченка, 1880. – 330 с.
4. Якиляшек В. Й., Якиляшек І. Й. Математична освіта в контексті змісту освіти гімназій Галичини // Математика в школі. – 1998. – № 2. – С. 41-46.
5. Савицкий Е. М. Геометрия для высших кляс гімназіяльных. – Львів: З друкарні Наукового товариства ім. Шевченка, 1908. – 250 с.

Матеріал надійшов до редакції 25.09. 2009 р.

#### ***Сверчевская И. А. Структура содержания раздела "Геометрические тела" в первых учебниках по геометрии Западной Украины.***

*В статье анализируются первые школьные учебники по геометрии Западной Украины. Выявляются особенности структуры содержания раздела стереометрии "Геометрические тела", прогрессивные идеи, которые могут быть использованы в современной школе. Выделяются актуальные для сегодняшнего дня методические идеи и подходы, такие как научный подход, дифференциация, развитие логического мышления, умения самостоятельно учиться.*

#### ***Sverchevska I. A. The Structure of Contents of the "Geometric Solids" Section in the First Geometry Textbooks in Schools of Western Ukraine.***

*The article focuses on the analysis of the first geometry textbooks in schools of Western Ukraine. It also separates the main features of the structure of the "Geometric Solids" section contents, and notes progressive ideas, which can be used in modern school. Methodical ideas and approaches, such as the scientific approach, differentiation, development of logic thinking are allocated actual for today, abilities to study independently.*