



DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-4-008

УДК 378:371.134:51

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЛІНЗА РЕАЛЬНОГО СВІТУ

Алла ПРУС ✉

Житомирський державний університет  
 імені Івана Франка, Україна  
 pruswork@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-8869-2544>

## MATHEMATICAL MODELING AS A LENS OF THE REAL WORLD

Alla PRUS ✉

Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine  
 pruswork@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-8869-2544>

## АНОТАЦІЯ

**Формулювання проблеми.** Математичне моделювання сьогодні є не просто трендом, а нагальною потребою освіти. Однак впровадження в шкільний курс математики цього методу як методу наукового дослідження та основи для розвитку, для набуття математичних знань і вмінь є досить обмеженим.

**Матеріали і методи.** Аналіз навчально-методичної літератури з проблеми дослідження; систематизація й узагальнення різних підходів до визначення змісту математичного моделювання; аналіз та систематизація вітчизняного та зарубіжного досвіду використання методу математичного моделювання.

**Результати.** У статті представлено частину результатів дослідження про зміст математичного моделювання в освіті за кордоном (базуючись на публікаціях в англійськомовних джерелах) та в Україні. Розглянуті різні формулювання означення математичного моделювання, окреслено терміни, які вживають науковці, вивчаючи це поняття. Акцентовано увагу на важливості аналізу математичного моделювання як діяльності та як структури. Представлені схеми циклу математичного моделювання, які найчастіше використовуються у науково-методичних роботах. На основі аналізу структур компетенції математичного моделювання, які подані у дослідженнях різних авторів, виокремлено групи підкомпетенцій. Вони є важливими для формування вмінь на навичок розв'язувати відповідні модельні завдання.

**Висновки.** Розкриття змісту поняття математичного моделювання допоможе вчителю зосередитись на конкретних окремих діях, які варто опанувати учням для успішного здійснення всього циклу математичного моделювання. Для дійсного використання математичного моделювання у шкільному курсі математики, у відповідних вузівських курсах важливими є фактори зацікавленості вчителів (викладачів) математики та наявності у них відповідних знань та вмінь.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** моделювання; прикладна задача; практична задача; модельна задача; цикл математичного моделювання; компетенції математичного моделювання.

## ABSTRACT

**Formulation of the problem.** Mathematical modeling today is not just a trend, but an urgent need for education. However, the introduction of this method into the school course of Mathematics as a method of scientific research and the basis for the development, for acquiring mathematical knowledge and skills is quite limited.

**Materials and Methods.** The analysis of the courseware on the research problem; the systematization and generalization of different approaches to determine the content of mathematical modelling; the analysis and systematization of domestic and foreign experience in using the method of mathematical modelling.

**Results.** A part of our research on the content of mathematical modelling in education abroad (based on publications in English-language sources) and in Ukraine in this paper is presented. Various definition statements of mathematical modelling are considered, the terms that scientists use when studying this concept are outlined. The attention is focused on the importance of the analysis of mathematical modelling as an activity and the structure as well. The cycle schemes of mathematical modelling, which are most often used in the scientific and methodological papers, are introduced. Based on the analysis of the structures of the competence in mathematical modelling that are described in the studies of various authors groups of subcompetences have been identified. They are important for the formation of skills to solve the corresponding model problems.

**Conclusions.** Disclosing the content of the mathematical modelling concept will help the teacher focus on the specific individual actions that students should master in order to successfully complete the entire cycle of mathematical modelling. The condition of strong interest of teachers of Mathematics and the availability of relevant knowledge and skills in the actual use of mathematical modelling in the school course of Mathematics and in the corresponding University courses are important.

**KEYWORDS:** modelling; applied problem; practical problem; model problem; the cycle of mathematical modelling; the competencies of the mathematical modelling.

## ВСТУП

Математична освіта є фундаментальною, оскільки дає можливість навчитись розв'язувати проблеми, що виходять далеко за межі математичних завдань. Будь-яке суспільство зараз потребує особистостей, які можуть використовувати математику для власних і суспільних цілей. Тому навчання математики має зосередитися на розвитку цих здібностей (Burkhardt, 2006). Моделювання є важливою складовою математики, а застосування математичних знань у реальному світі є вагомим компонентом математичної компетентності. Таким чином, розвиток компетентності учнів у розв'язуванні реальних проблем є загальною метою математичної освіти, як наслідок, математичне моделювання (далі будемо використовувати скорочення ММ) включено до багатьох навчальних програм у всьому світі.

**Постановка проблеми.** ММ сьогодні є не просто трендом, а є нагальною потребою освіти. Цей факт вже не потребує доведення. Однак впровадження в шкільний курс математики методу ММ як методу наукового дослідження та основи для розвитку, для набуття математичних знань і вмінь є досить обмеженим. У багатьох країнах, зокрема, і в нашій країні, все ще існує значний розрив між передовими дослідженнями та розробками в математичній освіті, з одного боку, і основною тенденцією навчання математики, з іншого.

## Для цитування:

Прус А. Математичне моделювання як лінза реального світу. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 4. С. 56-61. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-4-008  
 Прус, А. (2023). Математичне моделювання як лінза реального світу. *Фізико-математична освіта*, 38(4), 56-61. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008>

## For citation:

Prus, A. (2023). Mathematical modeling as a lens of the real world. *Physical and Mathematical Education*, 38(4), 56-61. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008>  
 Prus, A. (2023). Matematychnе modelivannia yak linza realnoho svitu [Mathematical modeling as a lens of the real world]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(4), 56-61. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-4-008>



Однак незважаючи на деякі термінологічні розбіжності, зміст ММ визначається, в цілому, однаково. Для ілюстрації ми обрали три означення ММ, взяті з англомовних джерел та три означення, які були сформульовані в роботах українських авторів.

Таблиця 2

## Трактатування математичного моделювання

Автор, рік	Означення
Бахрушин В., 2004	Моделювання – це процес дослідження реальної системи, який включає побудову моделі, її дослідження та перенесення одержаних результатів на досліджувану систему.
Станжицький О., Таран Є., Гординський Л., 2006	Моделювання – це побудова (або вибір) і вивчення такого об'єкта будь-якої природи (моделі), що здатний замінити собою досліджуваний об'єкт (оригінал) і вивчення якого дає нову інформацію про досліджуваний об'єкт. Математичне моделювання є найвищою формою моделювання.
Niss, M., Blum, W., Galbraith, P, 2007	Математичне моделювання, задумане як розв'язування практичної задачі, є процес застосування математики до практичної задачі з метою її розуміння.
Семенова І., 2014	Математичне моделювання – один з основних методів дослідження систем. Він передбачає створення концептуальної моделі об'єкта дослідження, її формалізацію та перетворення у математичну або комп'ютерну модель, перевірку адекватності й подальше дослідження отриманої моделі за допомогою аналітичних або чисельних методів і сучасних комп'ютерних технологій.
Blum, W., 2015	Моделювання відбувається, коли вчителі, студенти, математики та інші намагаються описати деякі аспекти практичної задачі в математичних термінах, щоб зрозуміти щось краще або вжити або рекомендувати певні дії.
Greefrath & Vorhöf, 2016	Математичне моделювання завжди походить із практичної задачі, яка потім описується математичною моделлю та вирішується за допомогою цієї моделі. Весь процес називається моделюванням.

**Мета статті.** З'ясувати істотні властивості поняття ММ у процесі узагальнення розвитку проблеми впровадження математичного моделювання в освіту.

## МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналіз навчально-методичної літератури проблеми дослідження; систематизація й узагальнення різних підходів до визначення змісту ММ; аналіз та систематизація вітчизняного та зарубіжного досвіду використання методу ММ.

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо поняття «математичне моделювання» з двох точок зору: 1) як процес; 2) як структура.

Процес моделювання часто представляють у вигляді циклу. Він починається і закінчується проблемною ситуацією в реальному житті або в нематематичній дисципліні. У цьому циклі є переклад проблеми математичною мовою та математичне розв'язання. В англомовних статтях можна знайти багато модифікацій, розширень і поліпшень щодо цього циклу. Нижче (рис.3; рис 4) наведено найбільш поширені схеми, які створені відомими закордонними авторами (кроки кожного циклу, на нашу думку, інтуїтивно зрозумілі, тому ми їх не перекладали українською). Зазначимо, що в українських джерелах нам вдалось знайти лише одну схему ММ, вона побудована українським науковцем В. Швецем.

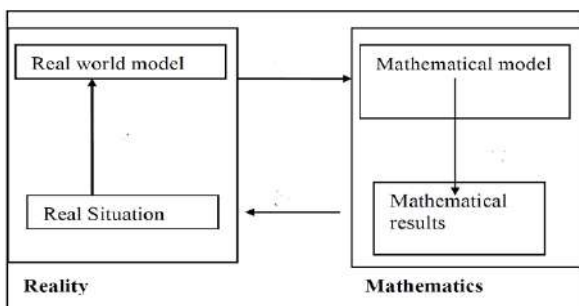


Рис. 3. Цикл моделювання за (Kaiser, 1995; Blum, 1996)

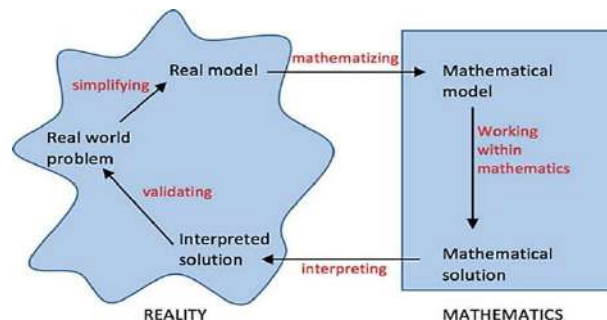


Рис. 4. Цикл моделювання за (Мааб, 2006)

Процес моделювання, як показано далі на рис. 5, включає такі етапи: 1) розуміння завдання; 2) спрощення (структурування); 3) математизацію; 4) математичне розв'язування; 5) інтерпретацію; 6) валідацію; 7) представлення (Blum & Ferri, 2009). Ці сім кроків процесу моделювання добре відомі та успішно використовуються закордоном протягом останніх кількох десятиліть як евристика для навчання учнів ММ.

Пояснення позначень, які використовувались на рис. 6: ПЗ – прикладна задача; МЗ – математична задача; РМЗ – розв'язки математичної задачі; РПЗ – розв'язки прикладної задачі;  $\mp$  – дуже слабо володіють навичками; + – добре володіють навичками;  $\pm$  – навички сформовано недостатньо.

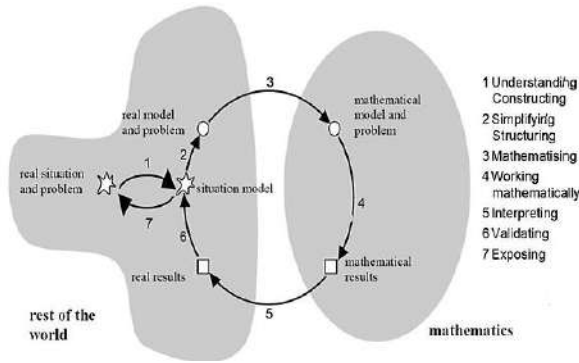


Рис. 5. Цикл моделювання за (Blum, Leiß, 2006)

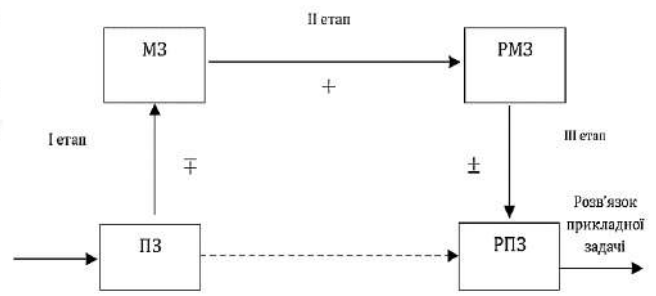


Рис. 6. Урізана графічна схема процесу математичного моделювання (мале коло) (Швець, 2008)

Перейдемо до розгляду ММ як до структури. Компетенції моделювання включають навички та здібності виконувати процеси моделювання належним чином і цілеспрямовано, а також готовність втілювати їх у життя (Мааß, 2006).

**Перша група.** Компетенції для розуміння проблеми та створення моделі на основі реальності: 1) зробити припущення щодо проблеми та спростити ситуацію; 2) розпізнати величини, які впливають на ситуацію, назвати їх і визначити ключові змінні; 3) будувати зв'язки між змінними; 4) шукати доступну інформацію та розрізнати релевантну та нерелевантну інформацію.

**Друга група.** Компетенції для створення математичної моделі з реальної моделі: 1) математизувати відповідні величини та їх співвідношення; 2) спростити відповідні величини та їх співвідношення, якщо це необхідно, а також зменшити їх кількість і складність; 3) обрати відповідні математичні позначення та графічно зобразити ситуацію; 4) використовувати евристичні стратегії (поділ проблеми на складові, встановлення відношень до подібних або аналогічних проблем, перефразування проблеми, перегляд проблеми в іншій формі, зміна величин або доступних даних тощо); 5) застосовувати математичні знання для розв'язування задачі.

**Третя група.** Компетенції для інтерпретації математичних результатів у реальній ситуації: 1) інтерпретувати математичні результати в позаматематичних контекстах; 2) узагальнити рішення, які були розроблені для конкретної ситуації; 3) переглянути розв'язання проблеми.

**Четверта група.** Компетенції перевірки знайденого розв'язку: 1) критично перевірити та обміркувати знайдені розв'язки; 2) переглянути деякі частини моделі або знову пройти процес моделювання, якщо розв'язки не відповідають ситуації; 3) подумати про інші способи вирішення проблеми, поставити під сумнів модель.

З'ясування істотних властивостей ММ дає вчителю необхідні знання, щоб навчати учнів розв'язувати прикладні задачі. За останні двадцять років написано як за кордоном, так і у нашій країні, декілька збірників таких задач (зокрема, Прус & Швець, 2007). Наведемо приклад повного розв'язування модельного завдання (Borgheseo Ferri, 2010). Зазначимо, що це один із відомих прикладів, який взятий із дослідження (Hankeln, 2020), одним із завдань якого було порівняти індивідуальні модельні маршрути учнів із Німеччини та Франції, та з якими перешкодами вони зустрічаються у процесі математичного моделювання.

**Завдання «Маяк».** Маяк Balenoaux – це споруда, яка знаходиться в 3 км від Pointe du phare Baleines, на північному заході острова Іль-де-Ре. Спочатку планувалося, що висота вежі буде 50 м, але в результаті географічних труднощів маяк піднімається лише на 31 м. Вогні маяка дозволяють кораблям визначити розташування безпечних зон біля узбережжя, а також портів. Яку відстань до узбережжя ще має судно, коли воно вперше розпізнає світло маяка? (рис. 7).

**1. Розуміння та спрощення ситуації.** У завданні дається інформація про маяк на атлантичному узбережжі Франції, який розташований на відстані 3 км від узбережжя і має висоту 31 м. Оскільки метою маяка є попередження суден про можливу небезпечну зону узбережжя, для екіпажу судна важливо знати свою відстань до узбережжя, коли вони вперше бачать маяк. Оскільки точна відстань залежить від різних факторів, таких як погода, висота корабля, тощо, але інформація про корабель, який прибув, не надається, здається доцільним пошукати приблизну оцінку.



Рис. 7. Маяк Balenoaux

Тому можна зробити деякі спрощення: 1) ідеальні погодні умови; 2) висотою корабля можна знехтувати; 3) світло випромінюється з вершини маяка; 4) максимальна відстань обмежена кривизною землі, Земля вважається ідеальною кулею з радіусом 6371 км.

**2. Математизація ситуації, математичне розв'язування.** Всі ці припущення можна перетворити на таку математичну модель (рис. 8): використаємо двовимірне уявлення ситуації, що є поперечним перерізом Землі і маяка. Коло  $d$  позначає землю,  $GE$  позначає маяк, дотична  $GH$  позначає промінь світла, а точка  $H$  – положення човна. Максимальна відстань між кораблем (що бачить світло) і маяком еквівалентна відстані між точкою дотику дотичної до кола, що проходить через вершину маяка, та основою маяка. Дотична та радіус у точці дотику перпендикулярні.

Найпростіший спосіб наближено визначити відстань  $HE$  – це двічі застосувати теорему Піфагора. Оскільки  $EA = HA = 6371$  км і  $GE = 31$  м, то:

$$HG = \sqrt{GA^2 - HA^2} = \sqrt{6371,031^2 - 6371^2} = \sqrt{395,003} \approx 19,874;$$



7. Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modeling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
8. Blum, W., & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.
9. Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Cham: Springer International Publishing.
10. Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 86–95.
11. Burkhardt, H., & Muller. E. R. (2006). Applications and Modelling for Mathematics. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Studies Series no. 10*, New York: Springer. To appear.
12. Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). Teaching and Learning Mathematical Modelling, *ICME-13 Topical Surveys*, DOI 10.1007/978-3-319-45004-9\_1.
13. Hankeln, Corinna (2020). Mathematical modeling in Germany and France: a comparison of students' modeling processes. *Journal of Educational Studies in Mathematics*, (103), 209–229.
14. Kutluca, T., & Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, 11 (21), 240-274. <https://doi.org/10.18009/jcer.1242785>.
15. Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, et al. (Eds.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp 64 – 84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
16. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113–142.
17. Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3–32). New York: Springer.
18. Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics* 2(2/3), 393-404.

#### REFERENCES

1. Bakhruşyn, V. Ye. (2004). *Matematychni modeliuvannia [Mathematical modeling]*. ZIDMU (in Ukrainian)
2. Prus, A.V., & Shvets, V.O. (2007). *Teoriia ta praktyka prykladnoi spriamovanosti shkilnoho kursu stereometrii [Theory and practice of the applied orientation of the school course of stereometry]*. ZhDU im.I.Franka. (in Ukrainian)
3. Semenova, I. Yu. (2014). *Matematychni modeli MSS [Mathematical models of MSS]*. Kyiv (in Ukrainian)
4. Stanzhytskyi, O. M., Taran, Ye. Yu., & Hordynskyi, L. D. (2006). *Osnovy matematychnoho modeliuvannia [Fundamentals of mathematical modeling]*. Kyivskyi universytet (in Ukrainian)
5. Shvets, V. O. (2009). Matematychni modeliuvannia yak zmistova liniia shkilnoho kursu matematyky [Mathematical modeling as a content line of the school mathematics course]. *Dydaktyka matematyky: problemy i doslidzhennia – Didactics of mathematics: problems and research*, (32), 16-23.
6. Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematik-unterricht – Trends und Perspektiven. *Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, (23), 15 – 38 (in German).
7. Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modeling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
8. Blum, W., & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.
9. Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Cham: Springer International Publishing.
10. Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 86–95.
11. Burkhardt, H., & Muller. E. R. (2006). Applications and Modelling for Mathematics. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Studies Series no. 10*, New York: Springer. To appear.
12. Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). Teaching and Learning Mathematical Modelling, *ICME-13 Topical Surveys*, DOI 10.1007/978-3-319-45004-9\_1.
13. Hankeln, Corinna (2020). Mathematical modeling in Germany and France: a comparison of students' modeling processes. *Journal of Educational Studies in Mathematics*, (103), 209–229.
14. Kutluca, T., & Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, 11 (21), 240-274. <https://doi.org/10.18009/jcer.1242785>.
15. Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, et al. (Eds.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp 64 – 84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
16. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113–142.
17. Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3–32). New York: Springer.
18. Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics* 2(2/3), 393-404.

