УДК 378:371.134:51

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЛІНЗА РЕАЛЬНОГО СВІТУ

Алла ПРУС
Житомирський державний університет імені Івана Франка, Україна
pruswork@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8869-2544

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Математичне моделювання сьогодні є не просто трендом, а нагальною потребою освіти. Однак впровадження в шкільний курс математики цього методу як методу наукового дослідження та основи для розвитку, для набуття математичних знань і вмінь є досить обмеженим.*

Матеріали і методи. *Аналіз навчально-методичної літератури з проблеми дослідження; систематизація й узагальнення різних підходів до визначення змісту математичного моделювання; аналіз та систематизація вітчизняного та зарубіжного досвіду використання методу математичного моделювання.*

Результати. *У статті представлено частину результатів дослідження про зміст математичного моделювання в освіті за кордоном (базуючись на публікаціях в англомовних джерелах) та в Україні. Розглянуті різні формулювання означення математичного моделювання, окреслено терміни, які вживають науковці, вивчаючи це поняття. Акцентовано увагу на важливості аналізу математичного моделювання як діяльності та як структури. Представлені схеми циклу математичного моделювання, які найчастіше використовуються у науково-методичних роботах. На основі аналізу структур компетенції математичного моделювання, які подані у дослідженнях різних авторів, виокремлено групи підкомпетенцій. Вони є важливими для формування вмінь на навичок розв'язувати відповідні модельні завдання.*

Висновки. *Розкриття змісту поняття математичного моделювання допоможе вчителю зосередитись на конкретних окремих діях, які варто опанувати учням для успішного здійснення всього циклу математичного моделювання. Для дійсного використання математичного моделювання у шкільному курсі математики, у відповідних вузівських курсах важливими є фактори зацікавленості вчителів (викладачів) математики та наявності у них відповідних знань та вмінь.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *моделювання; прикладна задача*; практична задача; модельна задача; цикл математичного моделювання; компетенції математичного моделювання.

MATHEMATICAL MODELING AS A LENS OF THE REAL WORLD

Alla PRUS
Zhytomyr Ivan Franko State University, Ukraine
pruswork@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8869-2544

ABSTRACT

Formulation of the problem.*Mathematical modeling today is not just a trend, but an urgent need for education. However, the introduction of this method into the school course of Mathematics as a method of scientific research and the basis for the development, for acquiring mathematical knowledge and skills is quite limited.*

Materials and Methods. *The analysis of the courseware on the research problem; the systematization and generalization of different approaches to determine the content of mathematical modelling; the analysis and systematization of domestic and foreign experience in using the method of mathematical modelling.*

Results. *A part of our research on the content of mathematical modelling in education abroad (based on publications in English-language sources) and in Ukraine in this paper is presented. Various definition statements of mathematical modelling are considered, the terms that scientists use when studying this concept are outlined. The attention is focused on the importance of the analysis of mathematical modelling as an activity and the structure as well. The cycle schemes of mathematical modelling, which are most often used in the scientific and methodological papers, are introduced. Based on the analysis of the structures of the competence in mathematical modelling that are described in the studies of various authors groups of subcompetences have been identified. They are important for the formation of skills to solve the corresponding model problems.*

Conclusions. *Disclosing the content of the mathematical modelling concept will help the teacher focus on the specific individual actions that students should master in order to successfully complete the entire cycle of mathematical modelling. The condition of strong interest of teachers of Mathematics and the availability of relevant knowledge and skills in the actual use of mathematical modelling in the school course of Mathematics and in the corresponding University courses are important.*

KEY WORDS: *modelling; applied problem; practical problem; model problem; the cycle of mathematical modelling; the competencies of the mathematical modelling.*

ВСТУП

Математична освіта є фундаментальною, оскільки дає можливість навчитись розв'язувати проблеми, що виходять далеко за межі математичних завдань. Будь-яке суспільство зараз потребує особистостей, які можуть використовувати математику для власних ~~цілей~~ і ~~для~~ суспільних цілей. Тому навчання математики має зосередитися на розвитку цих здібностей (Burkhardt, 2006). Моделювання є важливою складовою математики, а застосування математичних знань у реальному світі є вагомою компонентою математичної компетентності. Таким чином, розвиток компетентності учнів у розв'язуванні реальних проблем є загальновизнаною метою математичної освіти, як наслідок, математичне моделювання (далі будемо використовувати скорочення ММ) включено до багатьох навчальних програм у всьому світі.

Постановка проблеми. ММ сьогодні є не просто трендом, а є нагальною потребою освіти. Цей факт вже не потребує доведення. Однак впровадження в шкільний курс математики методу ММ як методу наукового дослідження та основи для розвитку, для набуття математичних знань і вмінь є досить обмеженим. У багатьох країнах, зокрема, і в нашій країні, все ще існує значний розрив між передовими дослідженнями та розробками в математичній освіті, з одного боку, і основною тенденцією навчання математики, з іншого.

Аналіз актуальних досліджень. З'ясування ролі ММ в освіті стало популярним після дослідження Генрі Поллака «Як ми можемо навчати застосуванням математики» (Pollak, 1969). ММ є темою постійно зростаючого міжнародного інтересу (Kutluca & Kaya, 2023; рис. 1).

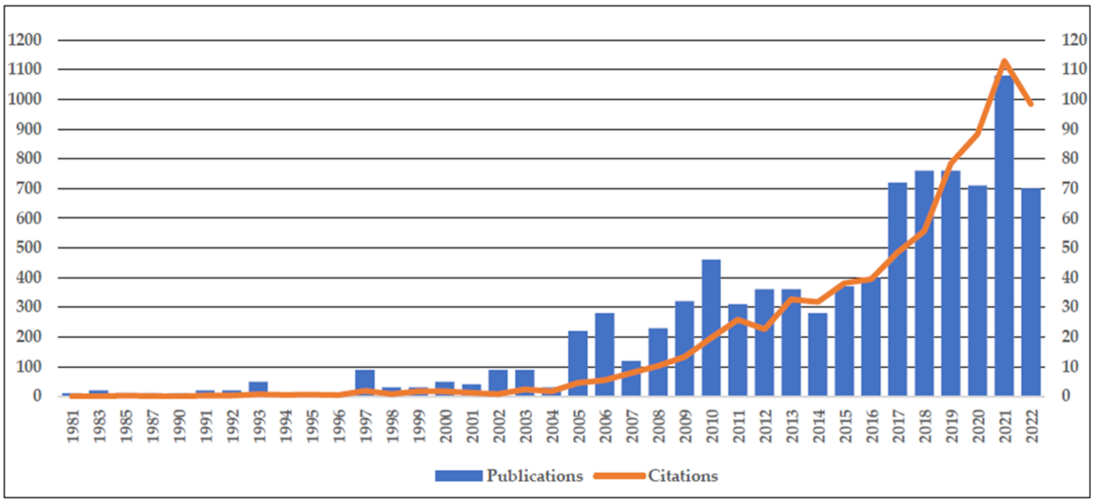

Рис. 1. Щорічна наукова продукція та цитування

В Україні ММ також активно вивчається. Протягом останніх майже двадцяти років були проведені ґрунтовні дослідження у цьому напрямку, їх результати обговорювались на науково-методичних конференціях, вони описані у дисертаційних роботах (див. табл.1) та науково-методичних статтях.

Таблиця 1

Дослідження, пов'язані з ММ

Рік	Автор	Тема
1997	Соколенко Л.	Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу
1998	Філон Л.	Вивчення елементів стереометрії в курсі математики основної школи
2006	Панченко Л.	Формування вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх учителів математики
2007	Прус А.	Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії
2011	Гриб'юк О.	Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю
2015	Філімонова М.	Формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії
2017	Волошена В.	Розвиток умінь математичного моделювання у старшокласників в процесі навчання природничо математичних предметів
2020	Катеринюк Г.	Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи

Аналізуючи поняття ММ в освіті, описуючи пов'язані з ним поняття, науковці за кордоном (в англомовних статтях) зазвичай вживають терміни, які подані у «хмарі слів» на рис. 2. Розмір кожного терміну та його близькість до хмарного центру визначають його важливість. Ключові слова, які найчастіше використовуються, такі: освіта, знання, учні, наука, продуктивність, вчителі, дизайн, математика, школа, модель. Термін «математичне моделювання» у відношенні до освіти ввели Gabriele Kaiser, Werner Hans-Joachim Blum у вісімдесятих роках минулого століття.

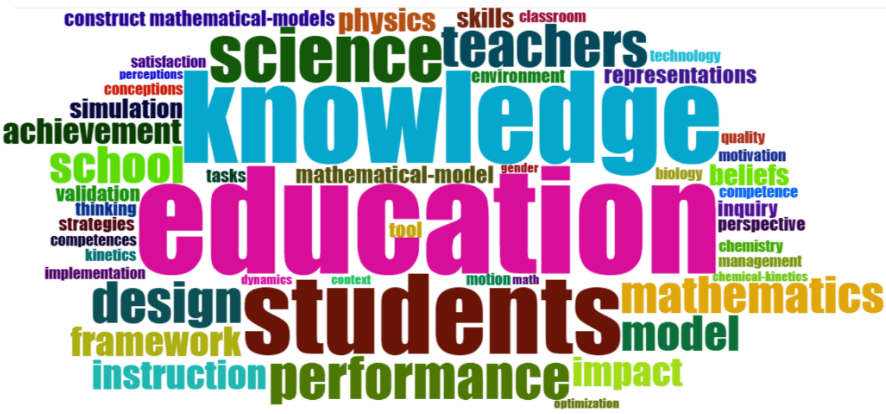

Рис. 2. «Хмара слів» (Kutluca & Kaya, 2023)

Автори публікацій з України, працюючи над цим же питанням, використовують схожу термінологію, однак є відмінності. Наприклад, про ММ говорять у контексті прикладної спрямованості математики, пишуть про необхідність навчати учнів розв'язувати прикладні задачі (синонімічно вживаючи «практична задача», «задача з прикладним змістом», «задача з практичним змістом») та квазіприкладні задачі.

Однак незважаючи на деякі термінологічні розбіжності, зміст ММ визначається, в цілому, однаково. Для ілюстрації ми обрали три означення ММ, взяті з англомовних джерел та три означення, які були сформульовані в роботах українськи авторів.

Таблиця 2

Трактування математичного моделювання

Автор, рік	Означення
Бахрушин В., 2004	Моделювання – це процес дослідження реальної системи, який включає побудову моделі, її дослідження та перенесення одержаних результатів на досліджувану систему.
Станжицький О., Таран Є., Гординський Л., 2006	Моделювання – це побудова (або вибір) і вивчення такого об'єкта будь-якої природи (моделі), що здатний замінити собою досліджуваний об'єкт (оригінал) і вивчення якого дає нову інформацію про досліджуваний об'єкт. Математичне моделювання є найвищою формою моделювання.
Niss, M., Blum, W., Galbraith, P, 2007	Математичне моделювання, задумане як розв'язування практичної задачі, є *процес* застосування математики до практичної задачі з метою її розуміння.
Семенова І., 2014	Математичне моделювання – один з основних методів дослідження систем. Він передбачає створення концептуальної моделі об'єкта дослідження, її формалізацію та перетворення у математичну або комп'ютерну модель, перевірку адекватності й подальше дослідження отриманої моделі за допомогою аналітичних або чисельних методів і сучасних комп'ютерних технологій.
Blum, W., 2015	Моделювання відбувається, коли вчителі, студенти, математики та інші намагаються описати деякі аспекти практичної задачі в математичних термінах, щоб зрозуміти щось краще або вжити або рекомендувати певні дії.
Greefrath & Vorhölter,2016	Математичне моделювання завжди походить із практичної задачі, яка потім описується математичною моделлю та вирішується за допомогою цієї моделі. Весь процес називається моделюванням.

Мета статті. З'ясувати істотні властивості поняття ММ у процесі узагальнення розвитку проблеми впровадження математичного моделювання в освіту.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналіз навчально-методичної літератури проблеми дослідження; систематизація й узагальнення різних підходів до визначення змісту ММ; аналіз та систематизація вітчизняного та зарубіжного досвіду використання методу ММ.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо поняття «математичне моделювання» з двох точок зору: 1) як процес; 2) як структура.

Процес моделювання часто представляють у вигляді циклу. Він починається і закінчується проблемною ситуацією в реальному житті або в нематематичній дисципліні. У цьому циклі є переклад проблеми математичною мовою та математичне розв'язання. В англомовних статтях можна знайти багато модифікацій, розширень і поліпшень щодо цього циклу. Нижче (рис.3; рис 4) наведено найбільш поширені схеми, які створені відомими закордонними авторами (кроки кожного циклу, на нашу думку, інтуїтивно зрозумілі, тому ми їх не перекладали українською). Зазначимо, що в українських джерелах нам вдалось знайти лише одну схему ММ, вона побудована українським науковцем В. Швецем.

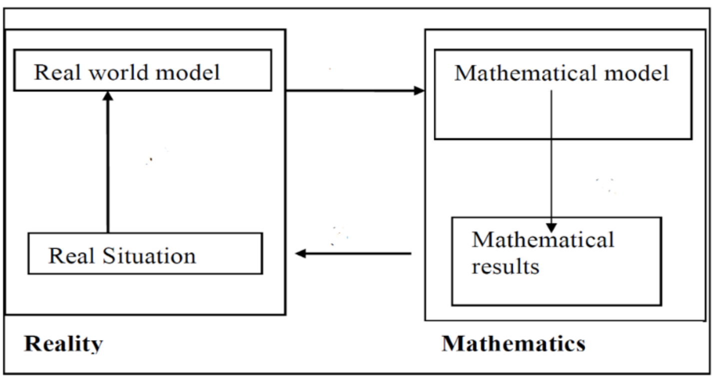

Рис. 3. Цикл моделювання за (Kaiser, 1995; Blum, 1996)

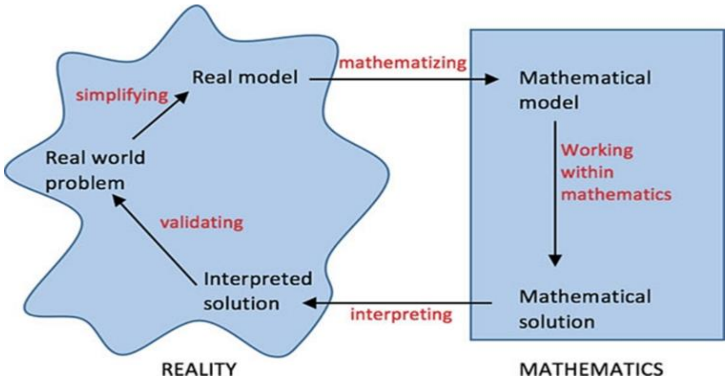

Рис. 4. Цикл моделювання за (Maaß, 2006)

Процес моделювання, як показано далі на рис. 5, включає такі етапи: 1) розуміння завдання; 2) спрощення (структурування); 3) математизацію; 4) математичне розв'язування; 5) інтерпретацію; 6) валідацію; 7) представлення (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Ці сім кроків процесу моделювання добре відомі та успішно використовуються закордоном протягом останніх кількох десятиліть як евристика для навчання учнів ММ.

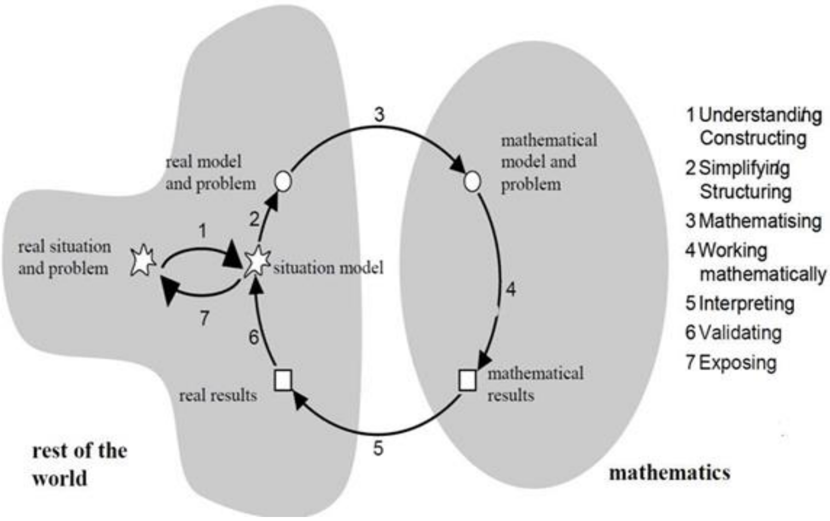

Рис. 5. Цикл моделювання за (Blum, Leiß, 2006)

Пояснення позначень, які використовувались на рис. 6: ПЗ – прикладна задача; МЗ – математична задача; РМЗ – розв'язки математичної задачі; РПЗ – розв'язки прикладної задачі; ∓ – дуже слабо володіють навичками; + – добре володіють навичками; ± – навички сформовано недостатньо.

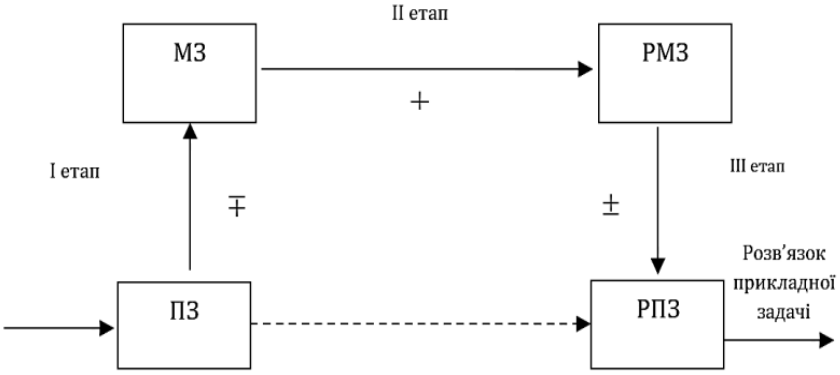

Рис. 6. Урізана графічна схема процесу математичного моделювання (мале коло) (Швець, 2008)

Перейдемо до розгляду ММ як до структури. Компетенції моделювання включають навички та здібності виконувати процеси моделювання належним чином і цілеспрямовано, а також готовність втілювати їх у життя (Maaß, 2006).

Перша група. Компетенції для розуміння проблеми та створення моделі на основі реальності: 1) зробити припущення щодо проблеми та спростити ситуацію; 2) розпізнати величини, які впливають на ситуацію, назвати їх і визначати ключові змінні; 3) будувати зв'язки між змінними; 4) шукати доступну інформацію та розрізняти релевантну та нерелевантну інформацію.

Друга група. Компетенції для створення математичної моделі з реальної моделі: 1) математизувати відповідні величини та їх співвідношення; 2) спростити відповідні величини та їх співвідношення, якщо це необхідно, а також зменшити їх кількість і складність; 3) обрати відповідні математичні позначення та графічно зобразити ситуацію; 4) використовувати евристичні стратегії (поділ проблеми на складові, встановлення відношень до подібних або аналогічних проблем, перефразування проблеми, перегляд проблеми в іншій формі, зміна величин або доступних даних тощо); 5) застосовувати математичні знання для розв'язування задачі.

Третя група. Компетенції для інтерпретації математичних результатів у реальній ситуації: 1) інтерпретувати математичні результати в позаматематичних контекстах; 2) узагальнити рішення, які були розроблені для конкретної ситуації; 3) переглянути розв'язання проблеми.

Четверта група. Компетенції перевірки знайденого розв'язку: 1) критично перевірити та обміркувати знайдені розв'язки; 2) переглянути деякі частини моделі або знову пройти процес моделювання, якщо розв'язки не відповідають ситуації; 3) подумати про інші способи вирішення проблеми, поставити під сумнів модель.

З'ясування істотних властивостей ММ дає вчителю необхідні знання, щоб навчати учнів розв'язувати прикладні задачі. За останні двадцять років написано як за кордоном, так і у нашій країні, декілька збірників таких задач (зокрема, Прус, Швець, 2007). Наведемо приклад повного розв'язування модельного завдання (Borromeo Ferri, 2010). Зазначимо, що це один із відомих прикладів, який взятий із дослідження (Hankeln, 2020), одним із завдань якого було порівняти індивідуальні модельні маршрути учнів із Німеччини та Франції, та з якими перешкодами вони зустрічаються у процесі математичного моделювання.

Завдання «Маяк». Маяк Balenoaux – це споруда, яка знаходиться в 3 км від Pointe du phare Baleines, на північному заході острова Іль-де-Ре. Спочатку планувалося, що висота вежі буде 50 м, але в результаті географічних труднощів маяк піднімається лише на 31 м. Вогні маяка дозволяють кораблям визначати розташування небезпечних зон біля узбережжя, а також портів. Яку відстань до узбережжя ще має судно, коли воно вперше розпізнає світло маяка? (рис. 7).

Рис. 7. Маяк Balenoaux

1. Розуміння та спрощення ситуації. У завданні дається інформація про маяк на атлантичному узбережжі Франції, який розташований на відстані 3 км від узбережжя і має висоту 31 м. Оскільки метою маяка є попередження суден про можливу небезпечну зону узбережжя, для екіпажу судна важливо знати свою відстань до узбережжя, коли вони вперше бачать маяк. Оскільки точна відстань залежить від різних факторів, таких як погода, висота корабля, тощо, але інформація про корабель, який прибув, не надається, здається доцільним пошукати приблизну оцінку.

Тому можна зробити деякі спрощення: 1) ідеальні погодні умови; 2) висотою корабля можна знехтувати; 3) світло випромінюється з вершини маяка; 4) максимальна відстань обмежена кривизною землі, Земля вважається ідеальною кулею з радіусом 6371 км.

2. Математизація ситуації, математичне розв'язування. Всі ці припущення можна перетворити на таку математичну модель (рис. 8): використаємо двовимірне уявлення ситуації, що є поперечним перерізом Землі і маяка. Коло d позначає землю, GE позначає маяк, дотична GH позначає промінь світла, а точка H -положення човна. Максимальна відстань між кораблем (що бачить світло) і маяком еквівалентна відстані між точкою дотику дотичної до кола, що проходить через вершину маяка, та основою маяка. Дотична та радіус у точці дотику перпендикулярні.

Найпростіший спосіб наближено визначити відстань HE — це двічі застосувати теорему Піфагора. Оскільки EA = HA = 6371 км і GE = 31 м, то:

$$HG = \sqrt{GA^2 - HA^2} = \sqrt{6371{,}031^2 - 6371^2} = \sqrt{395{,}003} \approx 19{,}874;$$

$$HE = \sqrt{GH^2 - GE^2} = \sqrt{395{,}003^2 - 0{,}031^2} = \sqrt{394{,}972} \approx 19{,}874$$

Примітка: оскільки маяк дуже малий по відношенню до радіуса Землі, перше застосування теореми Піфагора вже дає добре наближення до відстані. Інша можливість полягає в тому, щоб визначити криволінійну відстань HE за допомогою визначення косинуса. Якщо кут між HA і GA позначити α, то:

$$\alpha = arccos\frac{HA}{GA} = arccos\frac{6371}{6371{,}031}$$

$$HE = \frac{\alpha}{360}2\pi \times 6371 \approx 19{,}874$$

3. Інтерпретація та підтвердження результату. Обидва розрахунки показують, що корабель знаходиться приблизно в 20 км від маяка, коли екіпаж корабля вперше побачить його світло. Оскільки маяк розташований не на узбережжі, а за 3 км від нього, максимальна відстань від корабля до узбережжя може становити 23 км, залежно від того, з якого боку судно прибуває. Ця відстань здається виправданою, оскільки вона залишає достатньо часу для екіпажу корабля, щоб відреагувати відповідним чином та скоригувати курс. Проте, припущення, що висоту корабля можна ігнорувати, може мати серйозні наслідки для вимірювання відстані. Чим вищий корабель, тим більша максимальна відстань до маяка. Ця інформація може бути інтегрована в модель на рис. 9. За допомогою цієї моделі можна тестувати різну висоту корабля (відрізок DF). Але ці судження виходять далеко за межі того, що очікується від даного завдання.

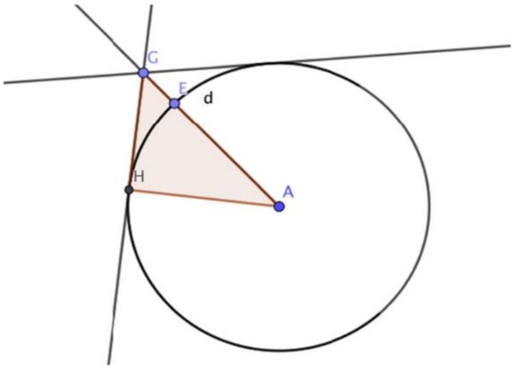

Рис. 8. Модель 1

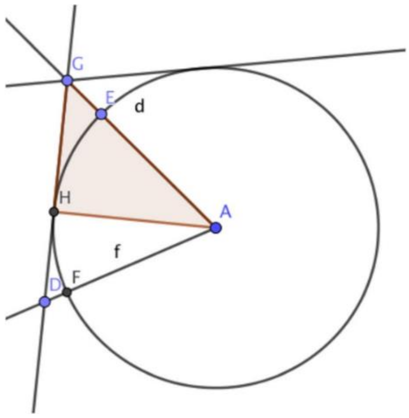

Рис. 9. Модель 2

ОБГОВОРЕННЯ

Існують чітко визначені у дослідженнях як у нас в Україні, так і за кордоном (Blum, 1991), причини переваги використання процесу ММ у навчанні математики. *Прагматичні аргументи.* Викладання математики покликане допомогти учням зрозуміти та впоратися з практичними завданнями. Виходячи з цього, без моделювання не обійтись. *Формуючі аргументи*. Цікавлячись математикою, учні повинні набувати загальних якостей (наприклад, здатність вирішувати проблеми) або установок (наприклад, відкритість до нових ситуацій). Моделювання є одним із важливих способів їх розвитку. *Культурні аргументи*. Учням слід викладати математичні теми як джерело для роздумів або для того, щоб створити всеосяжне та збалансоване уявлення про математику як науку та частину людської історії та культури. Моделювання - це невід'ємна риса людського інтелекту, а також історії та реальної практики, і, таким чином, воно може сприяти просуванню цих аспектів. З огляду на перераховане, багато науковців підтримують думку, що ММ має стати наскрізною змістовою лінією шкільного курсу математики (Швець, 2009). Впровадження ММ у шкільну практику в Україні реально почалось із оновлення змісту навчальних програм із математики, підручників. Однак там, практично, і зупинилось. Причиною цього, на нашу думку, є не лише «ковідні роки» та війна, яка триває. Це є приводом всебічного обговорення.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Розкриття змісту поняття ММ допоможе вчителю зосередитись на конкретних окремих діях, які варто опанувати учням для успішного здійснення всього циклу ММ. Для дійсного широкого використання ММ у шкільному курсі математики, у відповідних вузівських освітніх компонентах важливими є фактор зацікавленості вчителів (викладачів) математики та фактор наявності у них відповідних знань та вмінь.

Ми представили лише частину нашого дослідження. Наступна частина дослідження сфокусована на аналізі прикладних задач (модельних завдань), які використовуються за кордоном та Україні, ролі ІКТ для ММ в освіті. Також ми плануємо детально розглянути системні бар'єри реального впровадження ММ в освіту (середню, вищу) та ключових важелів їх подолання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бахрушин В. Є. (2004). *Математичне моделювання*. ЗІДМУ.
2. Прус А.В., Швець В.О. (2007). Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії. ЖДУ ім.І.Франка.
3. Семенова І. Ю. (2014). *Математичні моделі МСС*. Київ.
4. Станжицький О. М., Таран Є. Ю., Гординський Л. Д. (2006). *Основи математичного моделювання*. Київський університет.
5. Швець В. О. (2009). Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження,* (32), 16-23.
6. Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematik-unterricht – Trends und Perspektiven. *Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, (23), 15 – 38. (in German).
7. Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modeling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
8. Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.
9. Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Cham: Springer International Publishing.
10. Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 86–95.

11. Burkhardt, H., Muller. E. R. et al. (2006). Applications and Modelling for Mathematics. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Studies Series* no. 10, New York: Springer. To appear.

12. Greefrath G., Vorhölter, K. (2016). Teaching and Learning Mathematical Modelling, *ICME-13 Topical Surveys*, DOI 10.1007/978-3-319-45004-9_1.

13. Hankeln Corinna (2020). Mathematical modeling in Germany and France: a comparison of students' modeling processes. *Journal of Educational Studies in Mathematics*, (103), 209–229.

14. Kutluca, T., & Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, 11 (21), 240-274. https://doi.org/10.18009/jcer.1242785.

15. Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, et al. (Eds.): *Materialen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp 64 – 84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

16. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113–142.

17. Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3–32). New York: Springer.

18. Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics* 2(2/3), 393-404.

REFERENCES

1. Bakhrushyn V. Ye. (2004). Matematychne modeliuvannia. ZIDMU.(in Ukrainian)

2. Prus A.V., Shvets V.O. (2007). Teoriia ta praktyka prykladnoi spriamovanosti shkilnoho kursu stereometrii. ZhDU im.I.Franka. (in Ukrainian)

3. Semenova I. Yu. (2014). Matematychni modeli MSS. Kyiv. (in Ukrainian)

4. Stanzhytskyi O. M., Taran Ye. Yu., Hordynskyi L. D. (2006). Osnovy matematychnoho modeliuvannia. Kyivskyi universytet. (in Ukrainian)

5. Shvets V. O. (2009). Matematychne modeliuvannia yak zmistova liniia shkilnoho kursu matematyky. Dydaktyka matematyky: problemy i doslidzhennia, (32), 16-23.

6. Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematik-unterricht – Trends und Perspektiven. *Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, (23), 15 – 38. (in German).

7. Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modeling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.

8. Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S.Khan (Eds.), *Mathematical Modeling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp 222 – 231). Chichester: Horwood Publishing.

9. Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Cham: Springer International Publishing.

10. Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 86–95.
11. Burkhardt, H., Muller. E. R. et al. (2006). Applications and Modelling for Mathematics. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Studies Series* no. 10, New York: Springer. To appear.

12. Greefrath G., Vorhölter, K. (2016). Teaching and Learning Mathematical Modelling, *ICME-13 Topical Surveys*, DOI 10.1007/978-3-319-45004-9_1.

13. Hankeln Corinna (2020). Mathematical modeling in Germany and France: a comparison of students' modeling processes. *Journal of Educational Studies in Mathematics*, (103), 209–229.

14. Kutluca, T., & Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, 11 (21), 240-274. https://doi.org/10.18009/jcer.1242785.

15. Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, et al. (Eds.): *Materialen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp 64 – 84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

16. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113–142.

17. Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3–32). New York: Springer.

18. Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics* 2(2/3), 393-404.