УДК 378.147:515.4

А.П.Боравльов,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
І.Г.Ленчук,
кандидат технічних наук, доцент
(Житомирський педуніверситет)

МЕТОДИЧНІ КОРЕКТИВИ ЗМІСТУ ТРАДИЦІЙНОЇ СХЕМИ У ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКІВ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ

Пропонується методика розв'язування задач на побудову, яка розглядає аналіз як перехід від дескриптивного означення шуканої фігури до конструктивного. При цьому етап "побудова" цілком звільняється від логічного навантаження: йому повертається його законне місце – бути лише процесом викреслювання.

Якісна перебудова вищої і середньої шкіл передбачає значне покращення професійної підготовки фахівців, всебічний розвиток їх творчого мислення. Проте діючі програма і підручник з геометрії не завжди орієнтують учителів і студентів педуніверситетів на достатній рівень оволодіння тими чи іншими розділами, темами і окремими питаннями.

У даній статті мова піде про одне з таких питань – розв'язування конструктивних задач, яким зараз, на жаль, приділяється недостатня увага, хоча ці задачі вигідні вже тим, що органічно пов'язані із задачами на доведення і дослідження.

У роботі зі студентами, а також на різних курсах для вчителів і учнів ми вже чимало років здійснюємо в певній мірі новий підхід до розв'язування конструктивних задач. Загальновизнана схема їх розв'язування така: аналіз, побудова, доведення і дослідження. Оскільки зміст кожного пункту цієї схеми всім цілком відомий, то ми перейдемо безпосередньо до її опису і одночасно до викладу міркувань, на яких базується наша методика.

<u>Аналіз.</u> Відомо [1,2], що означення можна поділити на явні (конструктивні) і неявні (дескриптивні). Тому умову задачі на побудову доцільно розглядати як неявне означення фігури, яку треба побудувати. З точки зору геометрії як абстрактної науки під побудовою фігури, яка має задовольняти певним вимогам, ми розуміємо алгоритм умовних дій, що базуються або безпосередньо на конструктивних аксіомах, або на вже відомих найпростіших і основних побудовах [3,4,5,6]. <u>Цей алгоритм є конструкцією, або конструктивним означенням фігури.</u> Звідси <u>розв'язати задачу на побудову – це значить перейти від неявного означення шуканої фігури до її конструктивного означення. Цей перехід і називається аналізом.</u>

Зауваження: 1. Не зовсім коректно, коли аналіз у конструктивній задачі розпочинають так: "Припустимо, що задачу розв'язано". Адже етапи побудови ще невідомі. Краще сказати: "Нехай зображена фігура задовольняє умові". 2. Аналіз містить усі необхідні конструктивні кроки (етапи) побудови. Під час розв'язання задачі ці кроки позначаємо відповідними цифрами в дужках.

<u>Побудова.</u> В діючому підручнику з геометрії [7] аналіз у конструктивних задачах зовсім відсутній, розв'язання розпочинається безпосередньо з побудови. Зрозуміло, з цим аж ніяк не можна погодитися. В деяких посібниках навіть попередніх років видання (див., наприклад, [8]) частину аналізу перенесено у побудову. У книзі [9] аналіз поєднаний із побудовою. Досвід практичної роботи показує, що відсутність чіткості у цьому питанні негативно впливає на стан розв'язування конструктивних задач у школі.

У відповідності з наведеним вище поясненням слід вважати, що саме аналіз є основним у схемі розв'язання конструктивної задачі. Фактично, задачу треба вважати розв'язаною як тільки проведено аналіз. Пункт "Побудова" з математичної точки зору взагалі є зайвим. У більш складних випадках для учнів доцільно лише прокоментувати кроки побудови, одержані в аналізі (особливо це відноситься до алгебраїчного методу). А втім, це є суто креслярський етап побудови, й вже досвідчені учитель і учень можуть його опустити.

<u>Доведення.</u> Доведення в схемі розв'язання конструктивної задачі є обернений перехід від явного означення шуканої фігури до її дескриптивного означення. Тому здійснення і аналізу, і доведення показує еквівалентність явного і неявного означень шуканої фігури. Іншими словами: аналіз показує необхідність знайдених конструктивних кроків, а доведення – їхню достатність для того, щоб побудована фігура задовольняла умові.

За попереднім, доведення, хоча це є математичний пункт, теж не є обов'язковим при розв'язанні конструктивної задачі. Проте його здійснення значно зменшує ймовірність помилки. Крім того, воно має виховне і, у певній мірі, естетичне значення, бо надає розв'язанню характер певної завершеності.

<u>Дослідження.</u> У школі дослідження в конструктивній задачі має надто умовний характер і зводиться в основному, до повторення можливостей взаємного розташування тих чи інших геометричних місць. У старших класах ми пропонували б в окремих задачах на побудову не тільки якісне, а й кількісне дослідження.

Взагалі кажучи, дослідження доцільно розглядати не як складову частину конструктивної задачі, а як окрему задачу, що має самостійне значення й лише супроводжує задачу на побудову. Більш того, ми переконані, що різноманітні задачі на дослідження повинні зайняти належне місце у шкільній практиці як четвертий дуже важливий тип задач (разом із задачами на обчислення, доведення і побудову).

Проілюструємо сказане прикладами.

<u>Приклад 1.</u> Побудувати трикутник за вершиною, серединою протилежної сторони і ортоцентром.

Аналіз. Нехай трикутник ABC задовольняє умові. Оскільки точки B і H відомі, то пряму $u=(BH)$ можна побудувати (1), (рис.1). BB_1 – висота, отже, пряму $v\perp u$ можна побудувати (2). Розглянемо точку $D = Z_M(B)$ (3). Оскільки $AM = MC$ (за припущенням) і $BM = MD$ (за побудовою), то чотирикутник $ABCD$ є паралелограм. Крім того, $AA_1 \perp BC$ і $CC_1 \perp AB$. Тому $AA_1 \perp AD$ і $CC_1 \perp CD$. Таким чином, точки A і C належать колу Γ з відомим діаметром DH (4) $\Rightarrow A\sim C = u\ \ \Gamma$. Залишається побудувати сторони AB і BC (5,6). Всі конструктивні кроки з'ясовані. Аналіз закінчено.

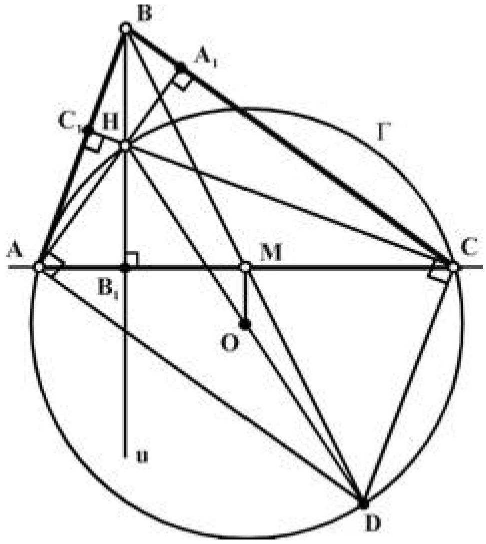

рис. 1

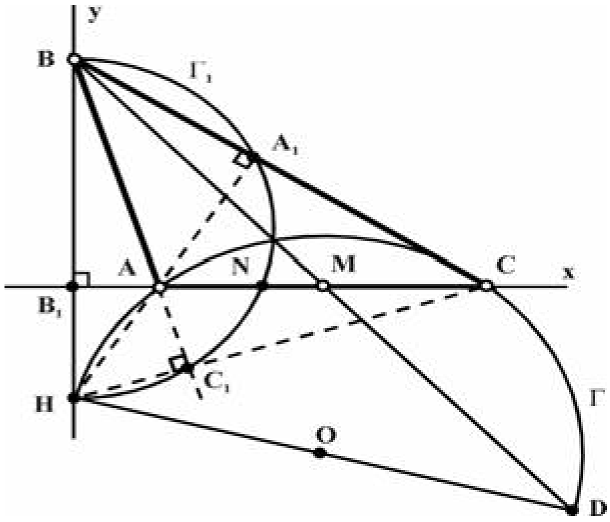

рис. 2

Отже, задачу фактично розв'язано: у "побудові" як математичному пункті писати вже нема чого, учням залишається за допомогою лінійки і циркуля реалізувати у зошитах одержані в аналізі конструктивні дії (1)-(6).

Доведення. Точки M і O за побудовою є середини відрізків BD і DH відповідно, отже, OM – середня лінія трикутника BDH, звідки $OM \quad BH$. Але $BB_1 \perp AC$ (за побудовою), тому $OM \perp AC$. Оскільки OM – діаметр кола Γ, то $AM = MC$. Отже, чотирикутник $ABCD$ є паралелограм. Крім того, $\angle DAH = \angle DCH = 90°$. Звідки випливає, що $AH \perp BC$ і $CH \perp AB$, тобто, точка H – ортоцентр трикутника ABC.

Дослідження. Очевидно, умова існування розв'язку така: $OH > OM \Leftrightarrow OH^2 > OM^2$. Для дослідження введемо систему координат. Нехай AC – вісь абсцис, а HB – вісь ординат. Позначимо координати даних точок відповідно $B(O,h)$, $H(O,q)$, $M(m,O)$. При цьому можна вважати, що $h>0$, $m80$. Маємо: $D(2m,-h) \Rightarrow O\left(m,\dfrac{q-h}{2}\right)$. Таким чином, умову існування розв'язку можна переписати так:

$$m^2 + \left(q - \frac{q-h}{2}\right)^2 > \left(\frac{q-h}{2}\right)^2 \Rightarrow m^2 + q^2 - q(q-h) > 0 \Rightarrow m^2 > -qh.$$

Розглянемо випадки: 1) $m=0 \Rightarrow 0>-qh$, звідки розв'язок існує тоді і тільки тоді, коли $q>0$, 2) $m>0$. Тут при $q80$ розв'язок завжди існує. Отже, нехай $q<0$. Тоді $q=-|q|$, $m^2>|q|\cdot h$.

Ця умова існування розв'язку має цікавий геометричний зміст (рис.2). Маємо: $BB_1=h$, $B_1H=|q|$, $B_1N = \sqrt{|q| \cdot h}$. Розв'язок існує (і притому єдиний) тоді і тільки тоді, коли точка M лежить за межами відрізка B_1N (отже, за межами півкола Γ_1). У класі доцільно зробити малюнки до решти пунктів дослідження.

Приклад 2. Вписати в даний сектор коло.

Аналіз. Очевидно, що досить знайти центр O шуканого кола (рис.3). Нехай деяка гомотетія з центром S переводить коло (O) в коло (O'). Останнє легко побудувати (1). Відрізки CD і $C'D'$ є відповідними. Оскільки відрізок $C'D'$ можна побудувати (2), а точка C виникає під час побудови кола (O'), тому можна побудувати й відрізок $CD \parallel C'D'$ (3). Після цього можна побудувати коло (O) (4).

Доведення. Коло (O) дотикається до сторін кута як гомотетичне до вписаного в цей кут кола (O'). Трикутник $C'O'D'$ рівнобедрений й гомотетичний до нього трикутник COD: $OC=OD$, а тому коло (O) проходить через точку C. Коло (O) дотикається до дуги сектора, оскільки їх спільна точка C лежить на лінії центрів.

Дослідження. З самої побудови випливає, що задача завжди має розв'язок і притому єдиний.

Зауважимо, що вчитель за потребою завжди може деталізувати аналіз і ввести більшу кількість конструктивних кроків. Проте більш доцільно просто розв'язати необхідні попередні задачі.

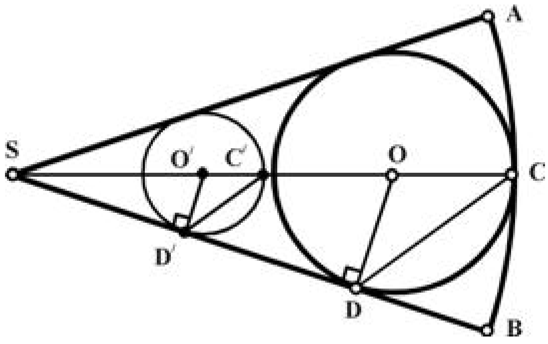

рис.3

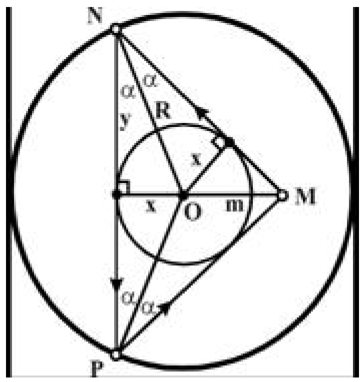

рис. 4

<u>Приклад 3.</u> Як треба вдарити кулю на круглому більярдному столі, щоб після двох відбиттів вона пройшла через початкове місце?

<u>Аналіз.</u> Тут для розв'язання доцільно використати алгебраїчний метод. Очевидно, що за законом відбиття, куля має рухатися по дотичних до кола деякого радіуса *x* (рис.4). У відповідності з позначеннями, маємо: $\frac{m+x}{y} = tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$. Але $tg\alpha = \frac{x}{y}$, а $y^2 = R^2 - x^2$, тому $m + x = \frac{2xy^2}{y^2 - x^2} = \frac{2x\left(R^2 - x^2\right)}{R^2 - 2x^2}$, звідки $2mx^2 + R^2x - mR^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-R^2 \pm \sqrt{R^4 + 8m^2R^2}}{4m}$. Аналіз закінчено.

В даному випадку побудову слід прокоментувати. По-перше, у виразі для *x*, що очевидно, треба залишити лише знак "плюс". По-друге, виразу слід надати зручну для побудови форму: $x = \frac{R}{4m}\left(\sqrt{R^2 + 8m^2} - R\right) = \frac{2Rm}{\sqrt{R^2 + 8m^2} + R} = \frac{Rm}{\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(m\sqrt{2}\right)^2} + \frac{R}{2}}$. Побудову відрізка *x* доцільно здійснювати щонайменшою кількістю дій (одну з таких побудов показано на рис.5). Після цього можна провести згадане в аналізі внутрішнє коло й одержати шуканий шлях *MNP* кулі на більярдному столі.

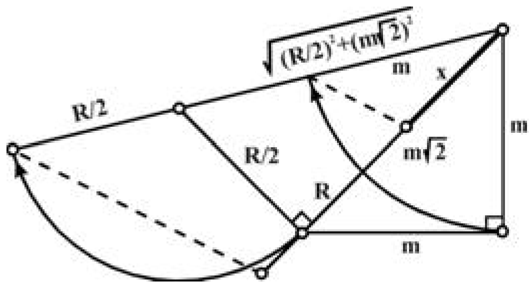

рис. 5

Задача має розв'язок при всякому $m \in [O, R]$. Якщо *m=R*, то трикутник, сторони якого суть траєкторія руху кулі, є рівносторонній; при *m=0* він вироджується в будь-який діаметр.

1. Дубнов Я.С. Измерение отрезков. - М.: Физматгиз, 1962. - 100с.
2. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Т.1. Движения и преобразования подобия. - М.: ГИТТЛ, 1955. - 282с.
3. Адлер А. Теория геометрических построений. - Одесса: Матезис, 1924. - 302с.
4. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение/ Пособие для учителей средней школы. - М.: Учпедгиз, 1950. - 175с.
5. Аргунов Б.И. и Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости/ Пособие для студентов педагогических институтов. - М.: Учпедгиз, 1957. - 266с.
6. Тесленко І.Ф. та інші. Геометрія: Практикум з розв'язування задач/ Навчальний посібник для студентів фізмат факультетів педінститутів. Вид. 2-е. - К.: Вища школа, 1985. - 184с.
7. Погорелов А.В. Геометрия/ Учебник для 7-11 кл. средней школы. - М.: Просвещение, 1990. - 383с.

8. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений./ Учебное пособие для педагогических институтов. - М.: Учпедгиз, 1952. - 147с.
9. Мисюркеев И.В. Геометрические построения./ Пособие для учителей. - М.: Учпедгиз, 1950. - 148с.
10. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. - К.: Радянська школа, 1983. - 192с.

Матеріал надійшов до редакції 13.03.2000 р.

Боравлев А.Ф., Ленчук. И.Г. Методические коррективы содержания традиционной схемы в поиске решений конструктивных задач.

Предлагается методика решения задач на построение, которая рассматривает анализ как переход от дескриптивного определения искомой фигуры к конструктивному. При этом этап “построение” полностью освобождается от логической нагрузки: ему возвращается его законное место – быть всего лишь процессом вычерчивания.

Boravlyov A.P., Lenchuk I.H. Methodical corrective amendments of the contents of the traditional circuit in search of the decisions of constructive tasks.

The technique of the decision of tasks on construction is offered. It considers the analysis as transition from the descriptive definition of a required figure to the constructive one. Thus a stage "construction" is completely exempted from logic loading: it is brought to its lawful place - comes back to be but an only process of drawing.