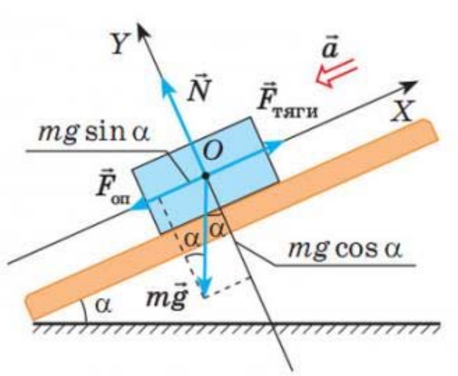


Збірник практичних завдань з курсу «Теоретична Механіка» для спеціальності «014 Середня освіта (Фізика та астрономія)»

Грищук А.М. Корнійчук П.П.

Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет
імені Івана Франка

А.М. Грищук, П.П. Корнійчук

**Навчально-методичний посібник
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти
спеціальності
«014 Середня освіта (Фізика та астрономія)»**

Житомир
ЖДУ
2023

УДК 539.12.01
ББК 22.3
Г-54

Рекомендовано до друку Вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол №19 від 27 жовтня 2023 р.).

Рецензенти:

О.М. Маханець, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної фізики та комп'ютерного моделювання, Чернівецького національного університету імені Ю.Федьковича

Ю.В. Доготар методист лабораторії упровадження освітніх інновацій (методика навчання фізики та астрономії), КЗ «Житомирський ОІППО» ЖОР.

В.Л. Рудніцький, директор Наукового ліцею Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Г-54 Грищук А.М, Збірник практичних завдань з курсу «Теоретична Механіка» для спеціальності «014 Середня освіта (Фізика та астрономія)»/ Грищук А.М., Корнійчук П.П. – Житомир: ЖДУ, 2023. – 54с.

Навчально-методичний посібник для студентів спеціальності "014 Середня освіта (Фізика та астрономія)", присвячений курсу "Теоретична Механіка", розглядає п'ять головних розділів, додатки та містить відповіді до практичних завдань.

Перший розділ, "Кінематика", охоплює завдання, пов'язані з рухом матеріальних точок та абсолютно твердих тіл, включаючи питання траєкторії, рівнянь руху, кінематичних параметрів та законів додавання швидкостей і прискорень.

Другий розділ, "Динаміка", включає в себе завдання, які охоплюють класичні закони руху, а також їхню диференціальну форму.

Третій розділ, "Закони збереження", включає задачі, пов'язані із законами збереження механічної енергії, імпульсу, моменту імпульсу та їхніми змінами.

Четвертий розділ, присвячений дослідженню коливального руху, включає завдання, що описують вільні та вимушені коливання з урахуванням тертя або його відсутності.

П'ятий розділ, "Аналітична механіка", вивчає основні поняття теоретичної фізики, такі як функції та рівняння Лагранжа, Гамільтона, дужки Пуассона та принцип екстремальності дії.

Посібник призначений для допомоги студентам у вивченні та розв'язанні практичних завдань з механіки.

ББК 22.3
УДК 539.12.01

ВСТУП

Збірник практичних завдань з курсу "Теоретична Механіка" є невід'ємною частиною навчального процесу студентів спеціальності "014 Середня освіта (Фізика та астрономія)". Механіка, як один із фундаментальних розділів фізики, є стовідсотковою основою для розуміння природних явищ і процесів, що відбуваються навколо нас. Вона розкриває перед нами закони руху та взаємодії об'єктів, допомагаючи розгадати та передбачати події у фізичному світі.

Вивчення теоретичної механіки в рамках підготовки вчителів фізики та астрономії є важливим етапом у формуванні майбутніх педагогів. Вони не лише мають освоїти цей курс для підвищення свого професійного рівня, але й вміло пояснювати складні фізичні концепції учням та стимулювати їхній інтерес до науки.

Цей збірник не тільки надає студентам можливість самостійно вдосконалювати свої навички розв'язування фізичних задач, але й сприяє їхньому глибокому розумінню основних концепцій, що лежать в основі теоретичної механіки. Він також може стати важливим інструментом під час підготовки до іспитів та контрольних робіт.

В даному методичному посібнику представлені задачі з усіх розділів класичної механіки. Методичний посібник складається з п'яти розділів, додатків та відповідей до завдань.

У першому розділі «Кінематика» наведені задачі про рух, як матеріальної точки, так і абсолютно твердого тіла. Окремі параграфи стосуються визначенню траєкторії та рівнянь руху точки, основних кінематичних характеристик, теорем про додавання швидкостей та прискорень, а також обертального руху.

Другий розділ «Динаміка» містить, як задачі, відомі з курсу «Класичної фізики», так і закони руху в диференціальній формі.

У третьому розділі — «Закони збереження» наведені задачі, які спираються на закони збереження механічної енергії, імпульсу, моменту імпульсу та їх зміни.

Четвертий розділ присвячений дослідженню коливального руху. Тут містяться задачі, які описують, як вільні коливання, так і вимушені з наявністю тертя, або його відсутністю.

Основними поняттями теоретичної фізики є функції та рівняння Лагранжа, Гамільтона, дужки Пуассона, принцип екстремальності дії, яким присвячений п'ятий розділ «Аналітична механіка».

Головні властивості тригонометричних функцій, систем координат, таблиці похідних та інтегралів наведені в додатках.

Методичний посібник призначений, як для аудиторної, так і для самостійної роботи студентів.

Розділ 1. Кінематика

1.1.Траєкторія та рівняння руху точки

1.1. За даним рівнянням руху точки знайти рівняння її траєкторії в координатній формі і вказати на рисунку напрямок руху:

а) $x = 3t - 5,\ \ y = 4 - 2t$;

б) $x = 2t,\ \ y = 8t^2$;

в) $x = 5\,Sin(10\,t),\ \ y = 3Cos(10\,t)$;

г) $x = 2 - 3\,Cos(5\,t),\ \ y = 4Sin(5\,t) - 1$;

д) $x = ch(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),\ \ y = sh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$;

1.2. За даним рівнянням руху точки знайти рівняння її траєкторії, а також вказати закон руху точки вздовж траєкторії, відраховуючи відстань від початкового положення точки:

а) $x = 3\,t^2, y = 4\,t^2$;

б) $x = 3\,Sin(t), y = 3Cos(t)$;

в) $x = a\,Cos^2(t), y = a\,Sin^2(t)$;

г) $x = 5\,Cos(5t^2), y = 5Sin(5t^2)$.

1.3. Знайти рівняння руху точки, що отримується при накладанні взаємно перпендикулярних коливань різної частоти:

а) $x = a\,Sin(2\omega t),\ \ y = a\,Sin(\omega t)$;

б) $x = a\,Cos(2\omega t),\ \ y = a\,Cos(\omega t)$

1.4. Тіло кинули зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Нехтуючи опором повітря, визначити:

а) траєкторію руху;

б) час всього руху;

в) дальність польоту;

г) час підйому на максимальну висоту;

д) максимальну висоту підйому.

1.5. Вантаж, піднятий на пружньому канаті, коливається згідно рівняння $y = a\, Sin(\omega t + \frac{3\pi}{2})$, визначити амплітуду a та колову частоту ω коливань вантажу, якщо період коливань рівний 0,4 с, і в початковий момент часу $y_0 = -4$ см.

1.6. Точка рухається по гвинтовій лінії $x = a\, Cos(\omega t)$, $y = a\, Sin(\omega t)$, $z = vt$, визначити рівняння руху точки в циліндричних координатах.

1.7. За даним рівнянням руху точки в декартових координатах $x = R\, Cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$, $y = \frac{R}{2} Sin(\omega t)$, $z = R\, Sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$, знайти її траєкторію та рівняння руху в сферичних координатах.

1.2. Швидкість та прискорення точки

1.8. Точка здійснює гармонічні коливання за законом
$x = a\, Sin\,(\omega t)$. Визначити амплітуду a, та колову частоту ω, якщо при $x = x_1$ швидкість $v = v_1$, а при $x = x_2$ швидкість $v = v_2$.

1.9. Знайти модуль швидкості матеріальної точки в полярній системі координат.

1.10. Знайти модуль швидкості матеріальної точки в циліндричній системі координат.

1.11. Знайти модуль швидкості матеріальної точки в сферичній системі координат.

1.12. Точка здійснює рух одночасно в двох взаємно перпендикулярних затухаючих коливаннях, згідно рівнянням: $x = Ae^{-\beta t} Cos(\omega t + \varphi), y = Ae^{-\beta t} Sin(\omega t + \varphi)$. Визначити проекції швидкості точки на осі:
а) декартових координат;
б) полярних координат;
в) знайти модуль швидкості точки.

1.13. Потяг рухається зі швидкістю 70 км/год. При гальмуванні він отримує сповільнення рівне 0,4 м/с^2. Знайти, за який час до прибуття потягу на станцію і на якій відстані від неї, повинно розпочатися гальмування.

1.14. Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a_x = -\pi^2 Sin \frac{\pi t}{2}$. Знайти рівняння руху точки, якщо її початкова швидкість $v_{0\,x} = 2\pi$, а початкове положення точки збігається з початком координат.

1.15. Потяг, що мав початкову швидкість 54 км/год, пройшов 600 м за перші 30 с. Враховуючи, що рух потягу рівнозмінний, визначити швидкість і прискорення потягу в кінці 30 с., якщо рух відбувається на заокругленні радіусом R=1 км.

1.16. При відправленні від станції швидкість потягу зростає рівномірно і досягає величини 72 км/год через 3 хв. руху. Рух відбувається по заокругленню радіусом 800 м. Визначити через 2 хв. після початку руху:
а) дотичне прискорення;
б) нормальне прискорення;
в) повне прискорення;

1.17. Потяг рухається рівносповільнено по дузі кола радіуса R= 800 м і проходить шлях s=800 м, маючи початкову швидкість v_0=54 км/год і кінцеву v=18 км/год. Визначити повне прискорення потягу на початку і в кінці руху, а також час руху по цій дузі.

1.18. Прямолінійний рух точки відбувається за законом

$s = \frac{g}{k^2}\left(kt + e^{-kt}\right)$. Визначити початкову швидкість точки, а також її прискорення, як функцію швидкості.

1.19. Рух точки задано рівняннями: $x = 10\, Cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right),\ \ y = 10\, Sin(\frac{2\pi t}{5})$ (x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Знайти рівняння траєкторії точки, величину і напрямок швидкості, а також величину і напрямок прискорення.

1.20. Рух точки задано рівняннями:

$$x = a\left(e^{kt} + e^{-kt}\right),\ y = a\left(e^{kt} - e^{-kt}\right).$$

Знайти:
а) рівняння траєкторії;
б) швидкість точки;
в) прискорення точки, як функцію модуля радіус-вектора
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.3. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

1.21. Визначити кутову швидкість:
а) секундної стрілки годинника;
б) хвилинної стрілки годинника;
в) часової стрілки годинника;
г) обертання Землі навколо власної осі;

д) парової турбіни, що здійснює 15000 обертів за хвилину.

1.22. Написати рівняння обертання диску парової турбіни при запуску, якщо кут повороту пропорційний кубу часу і при t=3 с. кутова швидкість диску рівна $\omega = 27\pi$ рад/с.

1.23. Маятник здійснює 120 обертів за хвилину. В початковий момент кут повороту дорівнює $\frac{\pi}{6}$ рад. Знайти кут повороту і кутове переміщення маятника за час $t = \frac{1}{2}$ с.

1.24. Диск починає обертатися рівнозмінно із стану спокою і здійснює 3600 обертів за перші 2 хв. Визначити кутове прискорення.

1.25. Вал починає обертатися рівнозмінно із стану спокою і здійснює 12,5 обертів за перші 5 с. Знайти кутову швидкість в кінці 5-ї секунди.

1.26. Вал починає обертатися рівнозмінно із стану спокою і через 10 хв. після початку руху, він має кутову швидкість $4\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Скільки обертів зробив вал за ці 10 хв.

1.27. Колесо, що має нерухому вісь, отримало початкову кутову швидкість 2π рад/с . Здійснивши 10 обертів, внаслідок тертя в підшибниках, колесо зупинилось. Визначити кутове прискорення колеса, вважаючи його постійним.

1.28. Стрілка гальванометра довжиною 3 см коливається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = \varphi_0 Sin(\omega t)$. Визначити:
а) прискорення кінця стрілки в середньому положенні;
б) прискорення кінця стрілки в крайніх положеннях;
в) моменти часу при яких кутова швидкість рівна нулю;
г) моменти часу при яких кутове прискорення рівне нулю
Період коливань рівний 0,4 с, а кутова амплітуда $\varphi_0 = \frac{\pi}{30}$.

1.4. Додавання швидкостей та прискорень точки

1.29. Корабель пливе прямолінійно зі швидкістю v_0. На висоті h над морем зі швидкістю v_1 рухається літак тим же курсом. Визначити відстань l вздовж горизонту, на якій слід скинути вантаж, щоб він влучив на корабель. Опором повітря знехтувати.

1.30. Розв'язати попередню задачу, якщо літак рухається назустріч кораблю.

1.31. Корабель, що проходить точку A, рухається з постійною за модулем та напрямком швидкістю v_0, під яким кутом β до прямої AB. Як слід почати рухатись катеру з точки B з постійною швидкістю $\overrightarrow{v_1}$, щоб він зустрівся з кораблем. Лінія AB утворює кут α з перпендикуляром до курсу корабля.

1.32. Вздовж радіуса диску, що обертається навколо осі, яка проходить крізь центр диску, перпендикулярно до його площини, з кутовою швидкістю $\omega = 2t$ рад/с, в напрямку від центра O рухається точка M за законом $0\text{M} = 4t^2$см. Визначити виличину абсолютного прискорення точки M в момент часу $t = 1$ с.

1.33. Прямокутник ABCD обертається навколо сторони CD з кутовою швидкістю $\omega = \frac{\pi}{2}$рад/с. Вздовж сторони AB рухається точка M за законом $s = b\,Sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$м. DA=CB= b м. Визначити абсолютне прискорення точки в момент часу $t = 1$с.

1.34. Точка рухається з постійною швидкістю v вздовж радіуса диску, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі, яка проходить крізь центр диску перпендикулярно до його площини.

Визначити абсолютне прискорення точки в той момент, коли вона буде знаходитись на відстані r від центра диску.

1.35. Кулька рухається зі швидкістю 1,2 м/с від точки A до точки B вздовж хорди AB диску, що обертається навколо осі, яка проходить крізь центр диску перпендикулярно до його площини. Знайти абсолютне прискорення кульки, коли вона знаходиться на найменшій відстані від центра диску, рівній 30 см. В цей момент кутова швидкість диску рівна 3 рад/с, а кутове сповільнення — 8 рад/с^2.

1.36. Розв'язати задачу 1.35 при умові, що диск обертається навколо діаметру, паралельного до хорди.

1.37. Розв'язати задачу 1.35 при умові, що віссю обертання диску є діаметр, перпендикулярний до хорди.

1.38. Вздовж ободу диску радіуса R, який обертається навколо свого діаметру з постійною кутовою швидкістю ω, рухається з постійною за модулем швидкістю v точка M. Знайти абсолютне прискорення точки M, як функцію кута φ, утвореного радіус-вектором точки з віссю обертання диску.

1.39. Точка рухається зі швидкістю 2 м/с вздовж ободу диску радіуса 2 м. Диск обертається в протилежному напрямку і має кутову швидкість 2 рад/с, та кутове прискорення 4 рад/с^2. Визначити абсолютне прискорення точки.

1.40. Диск обертається навколо осі, яка проходить крізь його центр перпендикулярно до площини диску за законом $\varphi = {}^2\!/_3\, t^3$. Вздовж радіуса диску рухається точка за законом $s = 4t^2 - 10t + 8$ (см). Відстань s вимірюється від центра диску.

Визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки в момент часу $t = 1$с.

1.41. Вздовж залізничної колії, прокладеної на паралелі північної широти, рухається потяг зі швидкістю v=20м/с з заходу на схід. Знайти прискорення Коріоліса потягу.

1.42. Залізнична колія йде прямо вздовж меридіану. Потяг рухається зі швидкістю $v = 90$км/год на північ; географічна широта міста φ =47^0. Знайти прискорення Коріоліса потягу.

Розділ 2 Динаміка

2.1. Визначення сил за заданим рухом

2.1 В шахті опускається рівноприскорено ліфт масою 280 кг. За перші 10 с. він проходить 35 м. Знайти натяг канату, на якому підвішений ліфт.

2.2. Горизонтальна платформа, на якій лежить вантаж масою 1,02 кг., опускається вертикально вниз з прискоренням 4 м/с^2. Знайти силу з якою вантаж діє на платформу під час спуску.

2.3. Камінь масою 0,3 кг., що прив'язаний до нитки довжиною 1 м., описує коло у вертикальній площині. Визначити найменшу кутову швидкість каменя, при якій відбудеться розрив нитки, якщо опір її розриву становить 9 Н.

2.4. Автомобіль масою 1000 кг рухається по опуклому мосту зі швидкістю $v = 10$ м/с. Радіус кривини мосту $R = 50$ м . Визначити силу тиску автомобіля на міст в момент проходження його через середину моста.

2.5. Рух матеріальної точки масою 0,2 кг задається рівняннями: $x = 3\,Cos(2\pi t)$см, $y = 4\,Sin(\pi t)$см. Визначити проекції сили, що діють на точку, в залежності від її координат.

2.6. Кулька, маса якої 100 г., падає під дією сили тяжіння і при цьому зазнає опору повітря. Рух кульки задається рівнянням:
$y = 4.9t - 2.45(1 - e^{-2t})$ м . Визначити силу опору повітря R і виразити її як функцію швидкості кульки.

2.7. Вантаж масою 1 кг підвішений до тросу довжиною 2 м і здійснює коливання згідно рівняння $\varphi = \frac{\pi}{6} Sin(2\pi t)$, де φ – кут відхилення троса від вертикалі в радіанах. Визначити натяг T_1 і T_2 троса в верхньому і нижньому положеннях вантажу.

2.8. Тіло масою m рухається по еліпсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Прискорення тіла паралельно осі ОУ. При t=0 координати тіла були x=0; y=b; початкова швидкість v_0. Визначити силу, що діє на тіло в кожній точці його траєкторії.

2.2. Рух тіла при постійних силах.

2.9. Яку масу вантажу слід скинути з аеростату, що рівномірно опускається, щоб він почав рівномірно підніматися з тією ж швидкістю. Маса аеростату з вантажем M=1200 кг., піднімальна сила аеростату постійна і дорівнює F=8000 Н. Силу опору повітря вважати однаковою при спуску та підйомі.

2.10. Два вантажі масами m=0.2 кг., M=4 кг. зв'язані ниткою і лежать на гладенькому столі. До першого вантажу приклали силу F_1=0.2 Н., до другого в протилежному напрямку — силу F_2=0.5 Н. З яким прискоренням будуть рухатись вантажі і яка сила натягу нитки?

2.11. Дошка масою М може рухатись без тертя вздовж похилої площини з кутом α до горизонту. В якому напрямку і з яким прискоренням повинна бігти по дошці собака масою m, щоб дошка не зісковзувала з похилої площини.

2.12. Визначити кут нахилу поверхні рідини в посудині, що зісковзує без тертя з похилої площини.

2.13. Куля масою m падає в рідині густиною ρ з постійною швидкістю v. З якою силою слід тягнути цю кулю, щоб вона піднімалась в тій же рідині зі швидкістю $2v$? Об'єм кулі V. Опір при русі кулі в рідині пропорційний швидкості кулі.

2.14. За який час тіло зісковзне з похилої площини висотою h, нахиленою під кутом α до горизонту, якщо вздовж похилої площини з кутом нахилу β воно рухається рівномірно.

2.15. Від потягу масою М, що рухається з постійною швидкістю, відривається останній вагон масою m, який проходить шлях s і зупиняється. На якій відстані від вагону, в момент його зупинки, буде знаходитись потяг, якщо тяга тепловоза постійна, а сила тертя кожної частини потягу не залежить від швидкості і пропорційна її вазі.

2.16. Через блок, закріплений на краю гладенького горизонтального стола, перекинута мотузка, що з'єднує два вантажі m та М. М- лежить на столі, m — висить. Знайти прискорення вантажу m, якщо стіл рухається в гору з прискоренням b.

2.17. В задачі 2.16., визначити прискорення вантажу m, якщо стіл рухається вертикально вниз з прискоренням $b < g$.

2.18. Визначити період обертання конічного маятнику, якщо його довжина l=49см., а кут, утворений ниткою з вертикалю, α=60^0.

2.3. Диференціальні рівняння руху.

а) Прямолінійний рух.

2.19. Літак летить горизонтально. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,5 Н, при швидкості 1 м/с. Сила тяги постійна, дорівнює 30760 Н. і утворює кут 10^0 з напрямком руху. Визначити найбільшу швидкість літака.

2.20. Тіло масою 2 кг, кинуте вертикально в гору зі швидкістю 20 м/с, зазнає опору повітря, який при швидкості v м/с становить 0,4 v Н. Знайти, через скільки секунд тіло досягне максимальної висоти.

2.21. Корабель масою 10^7кг рухається зі швидкістю 16 м/с. Опір води пропорційний квадрату швидкості корабля і становить $3{\cdot}10^5$Н при швидкості 1 м/с. Яку відстань пройде корабель, перед тим як його швидкість стане рівною 4 м/с? За який час корабель пройде цю відстань?

2.22. Тіло падає в повітрі без початкової швидкості. Опір повітря $R = k^2mgv^2$. Знайти швидкість тіла через час t після початку руху. Знайти граничне значення швидкості.

2.23. Корабель масою $1{,}5{\cdot}10^6$ кг зазнає опору води, рівного $R = \alpha v^2$ Н. де $\alpha = 1200$. Сила тяги напрямлена за швидкістю в бік руху і змінюється за законом $F = 1.2 \cdot 10^6 \left(1 - \frac{v}{33}\right)$ Н. Знайти залежність швидкості корабля від часу, якщо початкова швидкість v_0 м/с.

2.24. В попередній задачі знайти залежність пройденого шляху від часу.

2.25. В задачі 2.23. знайти залежність шляху від часу при початковій швидкості $v_0 = 10$ м/с.

2.26. Знайти рівняння руху точки масою m, що падає без початкової швидкості на землю. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості. Коефіцієнт пропорційності дорівнює k.

2.27. Тіло масою 1 кг рухається під дією сили $F = 10(1-t)$ Н. Через скільки секунд тіло зупиниться, якщо початкова швидкість тіла $v_0 = 20$ м/с і сила збігалась за напрямком зі швидкістю тіла? Який шлях пройде тіло до зупинки?

2.28. Матеріальна точка масою m здійснює прямолінійний рух під дією сили $F = F_0 Cos(\omega t)$. Початкова швидкість точки v_0. Знайти рівняння руху точки.

2.29. Матеріальна точка масою m відштовхується від силового центру з силою, що пропорційна відстані (коефіцієнт пропорційності mk_2). Опір середовища пропорційний швидкості руху (коефіцієнт пропорційності $2mk_1$). В початковий момент точка знаходилась на відстані a від силового центру, і її швидкість в цей момент дорівнювала нулю. Знайти закон руху точки.

2.30. Точка масою m починає рухатись без початкової швидкості з положення $x = b$ прямолінійно (вздовж осі X) під дією сили притягання до початку координат, яка змінюється за законом $F = \frac{\alpha}{x^2}$. Знайти момент часу, коли точка перебуватиме в положенні $x_1 = \frac{b}{2}$. Визначити швидкість точки в цьому положенні.

2.31. Точка масою m починає рухатись без початкової швидкості з положення $x_0 = a$ прямолінійно під дією сили притягання $F_x = -c_1 mx$, і сили відштовхування $R_x = c_2 mx^3$. При якому співвідношенні між c_1, c_2, a, точка досягне початку координат і зупиниться?

б) Криволінійний рух.

2.32. Найбільша горизонтальна дальність снаряду рівна L. Визначити його горизонтальну дальність l при куті кидання $\alpha = 30^0$ і висоту h траєкторії в цьому випадку. Опором повітря знехтувати.

2.33. При куті кидання α снаряд має горизонтальну дальність L. Визначити горизонтальну дальність l при куті кидання, рівному $\frac{\alpha}{2}$. Опором повітря знехтувати.

2.34. Тіло масою m, кинуте з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту, рухається під дією сили тяжіння і сили опору R=kmgv повітря. Визначити найбільшу висоту h тіла над рівнем початкового положення.

2.35. В умовах задачі 2.34. знайти рівняння руху точки.

2.36. В умовах задачі 2.34. визначити, на якій відстані s вздовж горизонту точка досягне найвищого положення.

2.37. Точка масою m рухається під дією сили відштовхування $\vec{F} = k^2 m\vec{r}$ від нерухомого центру O. В початковий момент часу точка знаходилась в положенні $M_0(a, 0)$ і мала швидкість v_0, напрямлену паралельно осі У. Визначити траєкторію точки.

2.38. Точка масою m починає рухатись з положення $\vec{r} = \overrightarrow{r_0}$ (де $\vec{r}$ – радіус вектор точки) зі швидкістю $\overrightarrow{v_0}$ перпендикулярної до $\overrightarrow{r_0}$ під дією сили притягання, напрямленої до силового центру O і пропорційної відстані від нього. Коефіцієнт пропорційності дорівнює mc_1. Крім того, на точку діє постійна сила $mc\overrightarrow{r_0}$. Знайти рівняння руху і траєкторію точки. Яким повинно бути відношення $\frac{c_1}{c}$, щоб траєкторія руху проходила крізь силовий центр O? З якою швидкістю точка пройде крізь центр O?

Розділ 3. Закони збереження

3.1. Закон збереження імпульсу

3.1. Снаряд в верхній точці траєкторії на висоті h=100 м розірвався на дві частини: m_1=1 кг і m_2=1.5 кг. Швидкість снаряду в цій точці v_0=100 м/с. Швидкість більшого уламку v_2 виявилась горизонтальною, співпадаючою за напрямком з v_0 та рівною 250 м/с. Визначити відстань між точками падіння двох уламків. Опір повітря не враховувати.

3.2. Снаряд, що вилетів з гармати під деяким кутом до горизонту, у верхній точці траєкторії розірвався на два уламки рівної маси. Один уламок після вибуху вертається до гармати по тій же траєкторії. Де впаде другий уламок? Чи впадуть обидва уламки на землю одночасно? Опір повітря не враховувати.

3.3. Снаряд розривається у верхній точці траєкторії на висоті h=19.6 м на дві однакові частини. Через час t=1с. після вибуху одна частина впаде на землю під тим місцем, де відбувся вибух. На якій відстані s_2 від місця пострілу впаде другий уламок, якщо перший впав на відстані s_1=1000 м. Опір повітря не враховувати.

3.4. Матеріальна точка рухається навколо нерухомого центру під дією сили притягання до цього центру. Знайти швидкість v_2 в найбільш віддаленій від центру точці траєкторії, якщо швидкість матеріальної точки в найбільш близькому положенні від центру v_1=30 см/с, а r_2 в п'ять разів більше r_1.

3.5. Три човна однакової маси M рухаються один за одним з однаковою швидкістю v. З середнього човна одночасно в передній і задній човни кидають зі швидкістю u відносно човна вантажі масою m. Якими будуть швидкості човнів після перекидання вантажів? Опором води знехтувати.

3.6. Візок, маса якого M=120 кг рухається вздовж горизонтальної площини зі швидкістю v=6м/с. З візка зістрибує людина масою m=80 кг під кутом $\alpha = 30^0$ до напрямку руху візка в горизонтальній площині. Швидкість візка зменшилась при цьому до $v' = 5$м/с. Якою була швидкість у людини під час стрибку відносно землі?

3.7. З реактивної установки масою M= 0,5 т., що знаходиться в спокою, в горизонтальному напрямку викидається послідовно дві порції речовини зі швидкістю v_0=1000 м/с відносно установки. Маса кожної порції m=25 кг. Якою стане швидкість v_2 установки після викиду другої порції? Тертя відсутнє.

3.8. З ракети масою M викидають продукти згорання порціями, маси яких m, зі швидкістю v відносно ракети. Нехтуючи дією сили тяжіння і опором повітря, визначити швидкість ракети u_n після вильоту n-ї порції.

3.9. Людина масою m=70 кг знаходиться на кормі човна. Довжина човна $l = 5$ м, його маса $M = 280$ кг. Людина переходить на ніс човна. На яку відстань людина переміститься відносно дна? Опором води знехтувати.

3.10. В задачі 3.9. визначити відстань, на яку переміститься човен.

3.2. Закон збереження енергії.

3.11. До кінця пружини підвішений вантаж масою М. Для розтягу пружини на один метр слід прикласти силу f Н. Скласти вираз повної механічної енергії вантажу на пружині. Вісь Y напрямлена вертикально вниз з положення рівноваги вантажу на пружині.

3.12. Куля, що летіла зі швидкістю v_0, пробиває декілька однакових дошок, розташованих на деякій відстані одна від одної. В якій за рахунком дошці застрягне куля, якщо її швидкість після проходження першої дошки рівна $v_1=0{,}83\ v_0$.

3.13. Потяг масою $1{,}0 \cdot 10^6$кг піднімається вздовж похилої площини з кутом нахилу $\alpha = 10^0$ зі швидкістю 15 м/с і проходить шлях s=2 км. Визначити роботу і середню потужність тепловозу, якщо коефіцієнт тертя між потягом та площиною рівний 0,5.

3.14. Знайти потужність, яку розвивають двигуни електропотягу, що складається з n=6 вагонів масою $m=4.0 \cdot 10^3$ кг кожний, якщо на протязі t=10 с. від початку руху, потяг набув швидкість v=10 м/с. Коефіцієнт тертя 0,2.

3.15. Яку роботу слід виконати, щоб перевернути куб масою 5 кг і ребром 0,1 м з однієї грані на іншу?

3.16. Дві кулі масами $m_1=0{,}2$ кг і $m_2=0{,}8$ кг, підвішені на двох паралельних нитках довжиною 2 м, дотикаються одна одної. Меншу кулю відхили на 90^0 від початкового положення та відпустили.
а) знайти швидкості куль після зіткнення, якщо удар абсолютно пружний;
б) знайти швидкості куль після зіткнення, якщо удар абсолютно не пружний;
в) яка частка енергії піде на нагрівання куль у випадку не пружного удару.

3.17. Куля масою m вдаряється в балістичний маятник масою М і застряє в ньому. Яка частка кінетичної енергії кулі перейде в теплоту?

3.18. Маленька кулька лежить на поверхні великої кулі радіусом 1 м. Яку початкову швидкість слід надати маленькій кульці, щоб вона відірвалась від поверхні великої кулі під кутом $\alpha = 60^0$, утвореного радіус-вектором кульки з горизонтом? Тертя відсутнє.

3.19. Розв'язати задачу 3.18., якщо коефіцієнт тертя між малою кулькою та поверхнею великої кулі $\mu = 0{,}3$.

3.20. Яку кінетичну енергію мало тіло масою 2 кг, якщо воно піднялось вздовж похилої площини з кутом нахилу 30^0 на висоту 1 м.? Коефіцієнт тертя між тілом та похилою площиною 0,1.

3.3 Закон збереження моменту імпульсу

3.21. До матеріальної точки, положення якої задається радіус-вектором $\vec{r} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, прикладена сила $\vec{F} = 5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$. Визначити момент сили $\vec{\mathrm{M}}$ відносно початку координат, модуль вектора $\vec{\mathrm{M}}$ і момент сили M_z відносно осі Z.

3.22. Тіло масою m=100 г. кинуте під кутом $\alpha = 45^0$ до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с . Знайти модуль моменту імпульсу тіла відносно точки кидання в момент знаходження його в найвищій точці траєкторії. Опір повітря не враховувати.

3.23. Довести, що при русі тіла під дією центральної сили, момент імпульсу тіла відносно полюса поля є величина стала.

3.24. Показати, що планети, які рухаються під дією центральних сил, мають плоску траєкторію.

3.25. Довести, що другий закон Кеплера є наслідок закону збереження моменту імпульсу.

3.26. Тіло масою m кинуте під кутом α до горизонту зі швидкістю v. Знайти залежність від часу модуля моменту імпульсу тіла відносно точки кидання.

3.27. Із точки з координатами (0,3,0) м вертикально вгору кинули тіло масою m=0.5кг зі швидкістю v=5м/с. Знайти приріст моменту імпульсу відносно початку координат за час його руху вгору і назад у вихідну точку.

Розділ 4. Коливальний рух

4.1. Вільні коливання

4.1. Знайти період вільних вертикальних коливань корабля на спокійній воді, якщо маса корабля M, площа його горизонтальної проекції S, густина води ρ. В'язкістю води знехтувати.

4.2. З умов попередньої задачі знайти рівняння руху корабля, коли він був спущений на воду з нульовою вертикальною швидкістю.

4.3. Вантаж, вага якого P Н, підвішений на пружній нитці до нерухомої точки. Виведений з положення рівноваги, вантаж починає здійснювати вертикальні коливання. Виразити довжину нитки x як функцію часу і знайти якій умові повинна задовольняти початкова довжина нитки x_0, щоб під час руху вантажу нитка залишалась натягнутою. Натяг нитки пропорційний видовженню; довжина її в не розтягнутому стані дорівнює l; при дії статичного навантаження, рівного q Н, нитка видовжується на 1 см. Початкова швидкість вантажу дорівнює нулю.

4.4. До пружини підвісили спочатку вантаж вагою P, а другий раз вантаж вагою 3P. Визначити, у скільки разів зміниться період коливань.

4.5. В задачі 4.4. за відомим коефіцієнтом пружності пружини k, знайти рівняння руху вантажів, якщо вантажі підвішувались до кінця не розтягнутої пружини і опускалися без початкової швидкості.

4.6. Вантаж масою $m_1 = 2$ кг, підвішений до пружини, кофіціент пружності якої k=98 Н/м, знаходиться в рівновазі. В деякий момент на вантаж m_1 поклали вантаж $m_2 = 0{,}8$ кг. Визначити рівняння руху та період коливань вантажів.

4.7. Вантаж масою 4 кг підвісили спочатку до пружини з коефіцієнтом пружності $k_1 = 2$ кН/м, а потім до пружини з коефіцієнтом пружності $k_2 = 4$ кН/м. Знайти відношення частот та періодів коливань вантажу.

4.8. Тіло масою m знаходиться на похилій площині, яка утворює кут α з вертикаллю. До тіла прикріплена пружина, коефіцієнт пружності якої k. Пружина паралельна до похилої площини. Знайти рівняння руху тіла, якщо в початковий момент часу пружина була не розтягнутою, і тілу надали початкової швидкості v_0, напрямленої вниз вздовж похилої площини. Початок координат знаходиться в положенні статичної рівноваги.

4.9. На гладенькій площині, нахиленій під кутом α до горизонту, знаходиться прикріплений до пружини вантаж вагою P. Статичне видовження пружини дорівнює l. Визначити рівняння коливань вантажу, якщо в початковий момент пружина була розтягнута з ненапруженого стану на довжину рівну $3l$, і вантаж відпущений без початкової швидкості.

4.2. Вплив тертя на вільні коливання.

4.10. Статичне видовження пружини під дією вантажу вагою P дорівнює l. На вантаж, що коливається, діє сила опору середовища, пропорційна швидкості. Визначити найменше значення коефіцієнту опору β, при якому процес руху буде аперіодичним. Знайти період затухаючих коливань, якщо коефіцієнт опору менше знайденого значення.

4.11. Вантаж масою 100 г., підвішений до кінця пружини, рухається в рідині. Коефіцієнт пружності пружини $k = 19.6$ Н/м. Сила опору пропорційна швидкості вантажу: $R = \beta v$ де $\beta = 3.5$ Н $\cdot \frac{с}{м}$. Знайти рівняння руху вантажу, якщо в початковий момент вантаж був зміщений з положення рівноваги на 1 см, і відпущений без початкової швидкості.

4.12. З попередньої задачі знайти рівняння руху вантажу, якщо в початковий момент вантаж зміщено з положення статичної рівноваги на відстань 1 см., і йому надали початкової швидкості 50 см/с в напрямку, протилежному зміщенню.

4.13. В умовах задачі 4.11. в початковий момент вантаж змістили з положення рівноваги на відстань 5 см, і йому надали початкової швидкості 100 см/с в тому ж напрямку. Знайти рівняння руху вантажу.

4.3. Вимушені коливання.

4.14. Знайти рівняння прямолінійного руху точки масою m, що знаходиться під дією сили $F_1 = -kx$ та постійної сили F_0. В початковий момент часу $x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = 0$.

4.15. В задачі 4.14. визначити період коливань точки.

4.16. Знайти рівняння прямолінійного руху точки масою m, що знаходиться під дією сили $F_1 = -kx$ та сили $F_2 = \alpha t$. В початковий момент часу $x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = 0$.

4.17. Знайти рівняння прямолінійного руху точки масою m, що знаходиться під дією сили $F_1 = -kx$ та сили $F_2 = F_0 e^{-\alpha t}$. В початковий момент часу $x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = 0$.

4.18. На пружині, коефіцієнт пружності якої $k = 19.6 \frac{Н}{м}$, підвішений магнітний стрижень масою 100 г. Нижній кінець магніту проходить через соленоїд по якому тече струм силою $I = 20\, Sin(8\,\pi t)$ А. Струм тече з моменту часу t=0 і втягує стрижень в соленоїд; до цього моменту магнітний стрижень висів на пружині нерухомо. Сила взаємодії між магнітом та соленоїдом задається рівністю $F = 0.016\,\pi I$ Н. Визначити рівняння руху стрижня.

4.19. В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху стрижня, якщо його підвісили до кінця не розтягнутої пружини і відпустили без початкової швидкості.

4.20. В умовах задачі 4.18. знайти рівняння руху стрижня, якщо йому в положенні статичної рівноваги надали початкову швидкість $v_0 = 5$ см/с.

4.21. Вантаж масою 200 г., підвішений до пружини, коефіцієнт пружності якої k=9.8 Н/см, знаходиться під дією сили $F = 20\, Sin(50\, t)$ Н. В початковий момент часу $y_0 = 2$ см, $v_0 = 10$ см/с. Початок координат вибрано в положенні статичної рівноваги. Знайти рівняння руху вантажу.

4.22. В умовах попередньої задачі частота вимушуючої сили прийняла значення 70 рад/с. Визначити рівняння руху вантажу.

4.23. Вантаж на пружині коливається так, що його рух описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{y} + ky = 5\,Cos(\omega t) + 2\,Cos(3\omega t)$$

Знайти закон руху вантажу, якщо в початковий момент його зміщення і швидкість дорівнювали нулю, а також визначити, при яких значеннях ω наступить резонанс.

4.4. Вплив тертя на вимушені коливання.

4.24. Матеріальна точка масою m=2 кг, підвішена на пружині, коефіцієнт пружності якої k=4 кН/м. На точку діє вимушуюча сила $F_1 = 120\,Sin\,(\omega t + \delta)$Н, та сила опору руху $F_2 = 0.5\sqrt{mk}\dot{y}$ Н. Знайти максимальне значення амплітуди вимушених коливань. При якій частоті ω амплітуда вимушених коливань досягне найбільшого значення.

4.25. В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху точки, якщо в початковий момент часу $y_0 = 2$ см, $v_0 = 3\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$, частота вимушуючої сили $\omega = 30$ рад/с, початкова фаза вимушуючої сили $\delta = 0$. Початок координат вибрано в положенні статичної рівноваги.

4.26. Матеріальна точка масою m=3 кг підвішена на пружині, коефіцієнт пружності якої k=117,6 Н/м. На точку діє вимушуюча сила $F_1 = F_0\,Sin\,(6.26\,t + \delta)$ Н, та сила опору руху $F_2 = -\alpha v$ Н. Як зміниться амплітуда вимушених коливань точки, якщо коефіцієнт α збільшиться в три рази.

4.27. Матеріальна точка масою m=0,1 кг підвішена на пружині, коефіцієнт пружності якої k=5 кН/м. На точку діє вимушуюча сила $F_1 = 100\,Sin\,(100\,t)$ Н та сила опору руху $F_2 = -50v$ Н. Написати рівняння руху вимушених коливань.

4.28. В умовах попередньої задачі визначити зсув фаз між вимушеними коливаннями та вимушуючою силою.

4.29. Матеріальна точка масою m=0,2 кг підвішена на пружині, коефіцієнт пружності якої k=19,6 Н/м. На точку діє вимушуюча сила $F_1 = 0{,}2\,Sin\,(14\,t)$ Н та сила опору руху $F_2 = -49v$ Н. Визначити зсув фаз між вимушеними коливаннями та вимушуючою силою.

Розділ 5. Аналітична механіка

5.1. Функція Лагранжа

5.1. Знайти функцію Лагранжа подвійного плоского маятника (рис. 5.1)

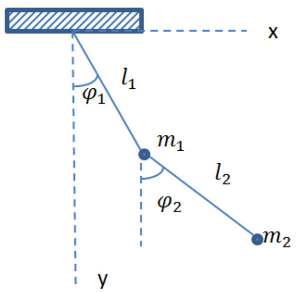


рис. 5.1.

5.2. Визначити функцію Лагранжа плоского маятника з масою m_2, точка підвісу якого (з масою m_1 в ній) може здійснювати рух вздовж горизонтальної прямої (рис. 5.2.)

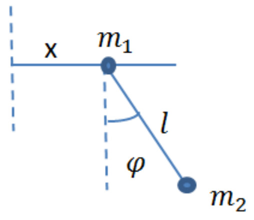


рис. 5.2.

5.3. Знайти функцію Лагранжа плоского маятника, точка підвісу якого рівномірно рухається по вертикальному колу з постійною частотою ω (рис. 5.3)

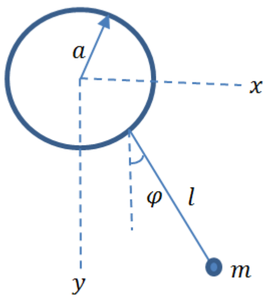


рис. 5.3.

5.4. Знайти функцію Лагранжа плоского маятника, точка підвісу якого здійснює горизонтальні коливання за законом $x = a\ Cos\ \omega t$.

5.5. Знайти функцію Лагранжа плоского маятника, точка підвісу якого здійснює вертикальні коливання за законом $y = a\ Cos\ \omega t$.

5.2. Функція Гамільтона

5.6. Знайти функцію Гамільтона матеріальної точки в декартовій системі координат.

5.7. Знайти функцію Гамільтона матеріальної точки в полярній системі координат.

5.8. Знайти функцію Гамільтона матеріальної точки в циліндричній системі координат.

5.9. Знайти функцію Гамільтона матеріальної точки в сферичній системі координат.

5.10. Знайти функцію Гамільтона системи, що складається з однієї частинки масою M та n частинок масами m, без врахування руху центра інерції.

5.3. Дужки Пуассона

5.11. Визначити дужки Пуассона, утворені з декартових компонент імпульсу та моменту імпульсу.

5.12. Визначити дужки Пуассона утворені з декартових компонент моменту імпульсу.

5.13. Довести рівність $\frac{\partial}{\partial t}[f,g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right]$.

5.14. . Довести рівність $[f, q_k] = \frac{\partial f}{\partial p_k}$.

5.15. Довести рівність $[f, p_k] = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$.

Додатки

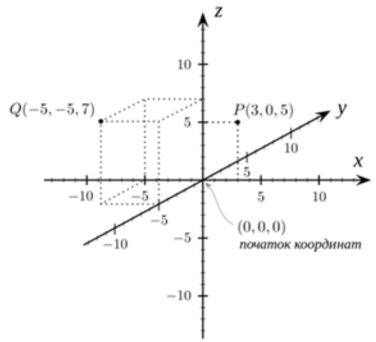
Системи координат

Декартові координати

В двововимірній системі Декартових координат, розташування точки *P* на *xy*-площині визначається парою чисел (x,y).

- x — відстань від точки P до осі *y* або значення абсциси (з урахуванням знаку)
- y — відстань від точки P до осі *x* або значення ординати (з урахуванням знаку)

В тривимірній системі Декартових координат, точка P в *xyz*-просторі локалізується вже за допомогою трьох параметрів: (x,y,z).

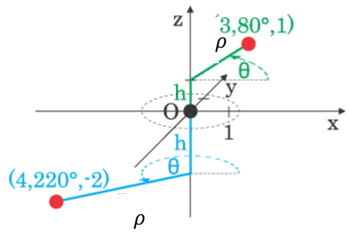


- x — відстань від точки P до площини *yz*
- y — відстань від точки P до площини *xz*
- z — відстань від точки P до площини *xy*

Циліндричні координати

В циліндричній системі координат, точка P репрезентується трикомпонентним кортежем (ρ, θ, φ). В термінахДекартової системи координат,

- $\rho \geq 0$ (радіус) — відстань від осі *z* до точки P,
- $0^0 \leq \theta \leq 360^0$ (азимут або довгота) — кут між позитивною («плюсовою») частиною осі *x* та прямої лінії, уявно проведеної від полюса до точки P, зпроектованої на *xy*-площину

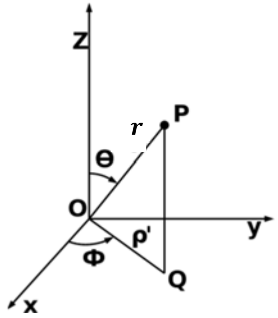


- z (висота) — відстань (з врахуванням знаку) від *xy*-площини до точки P.

Циліндричні координати корисні для вивчення систем, симетричних навколо якоїсь осі.

Сферичні координати

В сферичній системі координат, розташування точки P визначається трьома компонентами: (r, θ, φ) . В термінах Декартової системи координат,



- $r \geq 0$ (радіус) — це відстань від точки P до полюса,
- $0^0 \leq \varphi \leq 90^0$ (широта або полярний кут) — кут між *z*-віссю і прямою, проведеною з полюсу до точки P
- $0^0 \leq \theta \leq 360^0$ (азимут або довгота) — кут між позитивною («плюсовою» *x*-віссю та проекцією прямої, проведеною з полюсу до точки P на *xy*-площину.

Зв'язок між системами координат:

Циліндрична та Декартова система:

$$x = \rho\ Cos\ \varphi$$
$$y = \rho\ Sin\ \varphi$$
$$z = z$$

Сферична, Циліндрична та Декартова системи координат:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{cases} \begin{cases} \rho = r\sin\theta, \\ \varphi = \varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2+z^2}, \\ \theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\rho}{z}\right), \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

Тригонометричні функції та їх перетворення

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin x	cos α	cos α	sin α	- sin α	- cos α	- cos α	- sin α	sin α
cos x	sin α	- sin α	- cos α	- cos α	- sin α	sin α	cos α	cos α
tg x	ctg α	- ctg α	- tg α	tg α	ctg α	- ctg α	- tg α	tg α
ctg x	tg α	- tg α	- ctg α	ctg α	tg α	- tg α	- ctg α	ctg α

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$Sin\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$Cos\,\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$
$tg\,\alpha+tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z;$
$tg\,\alpha-tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z;$
$ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\alpha,\beta\neq\pi n,n\in Z;$
$ctg\,\alpha-ctg\,\beta=\frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\alpha,\beta\neq\pi n,n\in Z.$

$|\cos\frac{\alpha}{2}|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$
$|\sin\frac{\alpha}{2}|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$
$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\neq\pi k,k\in Z;$
$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\alpha\neq\pi k,k\in Z;$
$|tg\frac{\alpha}{2}|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\alpha\neq\pi+2\pi k,k\in Z.$

Векторний та мішаний добутки

♦ **Обчислення векторного добутку**. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\ \text{ і }\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},$$

то їхній векторний добуток

$$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.$$

Цей вираз можна записати за допомогою визначників другого порядку:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

☛ Векторний добуток можна також записати за допомогою визначника третього порядку:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (2)$$

♦ **Умова колінеарності векторів**. Із рівностей (1) і (2) можна отримати *умову колінеарності (паралельності) двох векторів*, заданих своїми координатами:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

♦ **Обчислення площі трикутника**. Площа трикутника, побудованого на двох векторах $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, що виходять з однієї точки (вершини трикутника), визначається за формулою

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}.$$

Мішаний добуток векторів:

Означення. **Мішаний добуток векторів** — це скалярний добуток вектора $\overline{a}$ на векторний добуток векторів $\overline{b}$ і $\overline{c}$.

Формула обрахунку мішаного добутку векторів

Мішаний добуток векторів дорівнює визначнику матриці, отриманої з цих векторів.

Мішаний добуток векторів $\overline{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ і $\overline{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}$ в декартовій системі координат можна обрахувати, скориставшись наступною формулою:

$$\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Властивості мішаного добутку векторів

- *Геометричний зміст мішаного добутку.* Модуль мішаного добутку трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, утвореного цими векторами:
  $$V_{\text{парал}} = \overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}]$$
- *Геометричний зміст мішаного добутку.* Об'єм піраміди утвореної трьома векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ дорівнює одній шостій частині від модуля мішаного добутку цих векторів:
  $$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}|\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}]|$$
- Якщо мішаний добуток трьох не нульових векторів дорівнює нулю, то ці вектори компланарні.
- $\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] = \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b})$
- $\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] = \overline{b} \cdot [\overline{c} \times \overline{a}] = \overline{c} \cdot [\overline{a} \times \overline{b}] = -\overline{a} \cdot [\overline{c} \times \overline{b}] = -\overline{b} \cdot [\overline{a} \times \overline{c}] = -\overline{c} \cdot [\overline{b} \times \overline{a}]$
- $\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] + \overline{b} \cdot [\overline{c} \times \overline{a}] + \overline{c} \cdot [\overline{a} \times \overline{b}] = 0$ - **тотожність Якобі.**

Таблиця похідних та інтегралів

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$
9. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
11. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
12. $(e^x)' = e^x$
13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$
14. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$

Правила взяття похідної від складеної функції:

1.	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**4.**	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
2.	$(uv)' = u'v + uv'$	**5.**	$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
3.	$(cu)' = cu'$	**6.**	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Невизначений інтеграл :

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \ F'(x) = f(x).$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a \neq 0.$
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$.

15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \mathrm{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \mathrm{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$.

18. $\int \mathrm{tg}\, x \, dx = -\ln |\cos x| + C$.

19. $\int \mathrm{ctg}\, x \, dx = \ln |\sin x| + C$.

20. $\int \mathrm{sh}\, x \, dx = \mathrm{ch}\, x + C$.

21. $\int \mathrm{ch}\, x \, dx = \mathrm{sh}\, x + C$.

22. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$.

23. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$.

$$\int x \cos ax dx = \frac{x}{a} \sin ax + \frac{1}{a^2} \cos ax + C$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{x^2}{a} \sin ax + \frac{2x}{a^2} \cos ax - \frac{2}{a^3} \sin ax + C$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x}{a} \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax + C$$

$$\int x^2 \sin ax dx = -\frac{x^2}{a} \cos ax + \frac{2x}{a^2} \sin ax + \frac{2}{a^3} \cos ax + C$$

Відповіді

Кінематика

1.1:а) напівпряма $2x + 3y - 2 = 0$ з початком в точці $x = -5,\ y = 4,$;

б) права вітка параболи $y = 2x^2$ з початковою точкою $x = 0, y = 0$;

в) еліпс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ з початковою точкою $x = 0, y = 3$;

г) еліпс $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ з початковою точкою $x = -1, y = -1$;

д) верхня частина правої вітки гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ з початковою точкою $x = 1,\ y = 0$;

1.2. а) напівпряма $4x - 3y = 0,\ s = 5t^2$;

б) коло $x^2 + y^2 = 9,\ \ s = 3\,t$;

в) відрізок прямої $x + y - a = 0$, за умови $0 \le x, y \le a$; $s = a\sqrt{2}\, Sin^2(t)$;

г) коло $x^2 + y^2 = 25$; $s = 25\, t^2$.

1.3. а) $x^2 a^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$;

б) $2y^2 - ax - a^2$=0, за умови $|x| \le a,\ |y| \le a$

1.4.

а) парабола $y = x\, tg(\alpha) - \frac{gx^2}{2v_0^2 Cos^2(\alpha)}$;

б) $t = \frac{2v_0 Sin(\alpha)}{g}$;

в) $s = \frac{{v_0}^2 Sin(2\alpha)}{g}$;

г) $t = \frac{v_0 Sin(\alpha)}{g}$;

д) $s = \frac{{v_0}^2 Sin^2(\alpha)}{2g}$.

1.5. $a = 4$ см, $\omega = 5\pi$ рад/с.

1.6. $r = a,\ \varphi = \omega t,\ z = vt$.

1.7. Лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

і циліндру $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$.

Рівняння руху в сферичних координатах: $r = R,\ \varphi = \frac{\omega t}{2},\ \theta = \frac{\omega t}{2}$.

1.8. $a = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}},\ \omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$.

1.9. $v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2}$/

1.10. $v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$/

1.11. $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 Sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2}$.

1.12. а) $\begin{matrix} v_x = -Ae^{-\beta t}[\beta\ Cos(\omega t + \varphi) + \omega\ Sin(\omega t + \varphi)] \\ v_y = -Ae^{-\beta t}[\beta\ Sin(\omega t + \varphi) - \omega\ Cos(\omega t + \varphi)] \end{matrix}$;

б) $\begin{matrix} v_\rho = -A\beta e^{-\beta t} \\ v_\varphi = A\omega e^{-\beta t} \end{matrix}$; в) $v = A\sqrt{\beta^2 + \omega^2} e^{-\beta t} = \sqrt{\beta^2 + \omega^2} r$.

1.13. 50 с, 500 м.

1.14. $x = 4\ Sin \frac{\pi}{2} t$.

1.15. v=25 м/с; a=0,708 м/с^2.

1.16. а) $a_\tau = \frac{1}{9}$ м/с^2; б) $a_n = \frac{2}{9}$ м/с^2; в) $a = 0.25$ м/с^2.

1.17. $a_0 = 0.308 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a = 0.129 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, T = 80 с.

1.18. $v_0 = 0,\ a = g - kv$.

1.19. Коло радіуса 10 см; швидкість v=4π см/с і напрямлена вздовж дотичної в бік переходу від осі OX до осі OY із поворотом на 90^0; прискорення a=1,6 π^2 см/с і напрямлено до центру.

1.20. а) Гіпербола $x^2 - y^2 = 4\,a^2$; б) $v = kr$; в) $a = k^2 r$.

1.21. а) $\omega = \frac{\pi}{30}$ рад/с; б) $\omega = \frac{\pi}{1800}$ рад/с; в) $\omega = \frac{\pi}{21600}$ рад/с;

г) $\omega = \frac{\pi}{43200}$ рад/с; д) $\omega = 1571$ рад/с.

1.22. $\varphi = \pi t^3$рад.

1.23. $\varphi = \frac{13}{6}\pi$ рад.; $\Delta\varphi = 2\pi$ рад.

1.24. $\varepsilon = \pi$ рад/с^2.

1.25. $\omega = 10\pi$ рад/с.

1.26. 600 обертів.

1.27. $\varepsilon = 0{,}1\pi$ рад/с^2, рух сповільнений.

1.28. а) в середньому положенню стрілки a=8,1 см/с^2;

б) в крайніх положеннях стрілки a=77,5 см/с^2;

в) $\omega = 0$, при $t = (0.1 + 0.2n)$, де (n=0,1,2,….);

г) $\varepsilon = 0$, при $t = 0{,}2n$, де (n=0,1,2,….).

1.29. $l = (v_1 - v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

1.30. $l = (v_1 + v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

1.31. $Sin\beta = \frac{v_0}{v_1} Cos\alpha$.

1.32. $a = 34$ см/с^2

1.33. $a = \frac{b\,\pi^2}{4}\sqrt{2}$ м/с^2.

1.34. $a = \omega\sqrt{r^2\omega^2 + 4v^2}$.

1.35. $a = 10.18$ м/с^2.

1.36. $a = 3.612$ м/с^2.

1.37. $a = 7.2$ м/с^2.

1.38. $a = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \omega^4 R^2\, Sin^2\varphi + 2\omega^2 v^2 (1 + Cos^2\varphi)}$.

1.39. $a = 8.24$ м/с^2, і направлене під кутом 76^0 до радіуса.

1.40. $v = 4.47\,\frac{\text{см}}{\text{с}}, a = 0$.

1.41. $a = 2.91 \cdot 10^{-3}$м/с^2.

1.42. $a = 2.66 \cdot 10^{-3}$м/с^2.

Динаміка

2.1. 2548 Н.

2.2. 5,92 Н.

2.3. $\omega_{min} = 4{,}494$ рад/с.

2.4. 7800 Н.

2.5. $F_x = -0.0789x$ Н; $F_y = -0.0197y$ Н.

2.6. $R = 0.98(1 - e^{-2t}) = 0.2\, v$ Н.

2.7. T_1=32,1 Н, T_2=8,65 Н.

2.8. $F_y = -m\frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3}$.

2.9. $m = 2\left(M - \frac{F}{g}\right) \approx 800$ кг.

2.10. a=0,12 м/с^2, T=0,22 Н.

2.11. $a = g\, Sin(\alpha)\left(1 + \frac{M}{m}\right)$, напрямок руху собаки не грає ролі.

2.12. $\alpha = arctg\left(\frac{g}{a}\right)$.

2.13. $F = 3g(m - \rho V)$.

2.14. $t = \frac{1}{Sin(\alpha)}\sqrt{\frac{2h}{g(1 - ctg(\alpha)tg(\beta))}}$.

2.15. $l = \frac{M}{M-m}s$.

2.16. $a = \frac{m(g+b)}{M+m}$ — прискорення відносно столу;

$\acute{a} = a - b = \frac{mg - Mb}{M+m}$ – прискорення відносно землі.

2.17. $a = \frac{m(g-b)}{M+m}$ — прискорення відносно столу;

$\acute{a} = a + b = \frac{mg+Mb}{M+m}$ – прискорення відносно землі.

2.18. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\,Cos(\alpha)}{g}}$=1 с.

2.19. $v_{max} = 246$ м/с.

2.20. t=1.71 с.

2.21. s=46.2 м, t=6.25 с.

2.22. $v = \frac{1}{k}\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}$, $v_\infty = \frac{1}{k}$.

2.23. $v = \frac{70v_0+20(v_0+50)\left(e^{0.056t}-1\right)}{70+(v_0+50)(e^{0.056t}-1)}$.

2.24. $s = 893\,ln\frac{v_0+50}{v+50} + 357ln\frac{v_0-20}{v-20}$ м.

2.25. $s = 1250\,ln\frac{6e^{0.056t}+1}{7} - 50t$.

2.26. $s = \frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{gk}{m}}t$.

2.27. $t = 3.236$ с, $s = 60.6$ м.

2.28. $x = \frac{F_0}{m\omega^2}\left(1 - Cos(\omega t)\right) + v_0 t$.

2.29. $x = \frac{a}{\alpha+\beta}\left(\alpha e^{\beta t} + \beta e^{-\alpha t}\right)$,

де $\alpha = \sqrt{k_1^2 + k_2} + k_1, \beta = \sqrt{k_1^2 + k_2} - k_1$

2.30. $t = \frac{b^{3/2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$, $v = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}$.

2.31. $c_1 = \frac{1}{2}c_2 a^2$.

2.32. $l = \frac{\sqrt{3}}{2}L$, $h = \frac{L}{8}$.

2.33. $l = \frac{L}{2Cos\alpha}$.

2.34. $h = \frac{v_0 Sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2}ln(1 + kv_0 Sin\alpha)$.

2.35. $x = \frac{v_0 Cos\alpha}{gk}\left(1 - e^{-kgt}\right)$, $y = \frac{1}{kg}\left(v_0 Sin\alpha + \frac{1}{k}\right)\left(1 - e^{-kgt}\right) - \frac{t}{k}$.

2.36. $s = \frac{{v_0}^2 Sin2\alpha}{2g(kv_0\,Sin\alpha+1)}$.

2.37. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$. (гіпербола).

2.38. 1) $\vec{r} = \frac{c}{c_1}\overrightarrow{r_0} + \frac{\overrightarrow{v_0}}{\sqrt{c_1}}Sin\sqrt{c_1}t + \overrightarrow{r_0}\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)Cos\sqrt{c_1}t$;

2) еліпс $\left[\frac{x - \frac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1-\frac{c}{c_1}\right)}\right]^2 + \left[\frac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right]^2 = 1$;

3) точка пройде крізь центр О якщо $\frac{c}{c_1} = 2$;

4) точка пройде крізь центр О зі швидкістю $\vec{v} = \overrightarrow{v_0}$ в момент часу $t = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}}$.

Закони збереження

3.1. s≈1695 м.

3.2. Другий уламок впаде на землю вдвічі далі ніж впав би снаряд. Одночасно.

3.3. s_2=5000 м.

3.4. v_2=6 см/с.

3.5. В системі відліку, що рухається зі швидкістю v відносно берега, швидкість першого човна $\acute{v}_1 = \frac{mu}{m+M}$; швидкість середнього човна $\acute{v}_2 = 0$; швидкість заднього човна $\acute{v}_3 = -\frac{mu}{m+M}$.

3.6. $u = \frac{(M+m)v - M\acute{v}}{m\,Cos(\alpha)} \approx 8{,}6$ м/с.

3.7. $v_2 = -mv_0\left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m}\right) \approx -108.2$ м/с.

3.8. $u_n = v\sum_{k=1}^{n} \frac{m}{M-km}$.

3.9. $s = \frac{M}{M+m}l = 4$м.

3.10. $s = \frac{m}{M+m}l$.

3.11. $E = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}fy^2 - Mgy$.

3.12. В четвертій дошці.

3.13. $A = mgs\big(Sin(\alpha) + \mu Cos(\alpha)\big) = 4.4 \cdot 10^9$Дж,

$$N = mg(Sin(\alpha) + \mu Cos(\alpha))v = 3.3 \cdot 10^7 \text{Вт}$$

3.14. $N = \frac{nmv}{2}\left(kg + \frac{v}{t}\right) = 350$кВт.

3.15. $A = \frac{mga}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) = 2$ Дж.

3.16. а) $v_1 = (m_2 - m_1)\frac{\sqrt{2gl}}{(m_2+m_1)} = 3.8$м/с,

$v_2 = 2m_1\frac{\sqrt{2gl}}{(m_2+m_1)} = 2.5$м/с;

б) $v = m_1\frac{\sqrt{2gl}}{(m_2+m_1)} = 1.3$м/с,

в) $\eta = \frac{m_2}{(m_2+m_1)} = 0{,}8$.

3.17. $\eta = \frac{M}{M+m}$

3.18. $v_0 = \sqrt{gR(3\,Sin(\alpha) - 2)} = 2.4$м/с.

3.19. $v_0 = \sqrt{gR\left[\left(3 + \frac{\pi\mu}{6}\right)Sin(\alpha) - 2\right]} = 2{,}5$ м/с

3.20. $E_k = mgh(1 + \mu\,ctg(\alpha)) = 23$ Дж.

3.21. $\vec{M} = -10\vec{i} + 11\vec{j} + 2\vec{k}$ (Н · м); $M = 15$ Н · м; $M_z = 2$ Н · м.

3.22. $L = \frac{mv_0^3\,Sin^2\alpha\,Cos\,\alpha}{2g}$=14 кг·м^2/с.

3.26. $L = \frac{1}{2}mgv\,Cos(\alpha t^2)$.

3.27. $\Delta\vec{L} = -15\vec{i}$ кг м^2/с.

Коливальний рух

4.1. T=$2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho gS}}$.

4.2. $y = -\frac{M}{\rho S}\,Cos\sqrt{\frac{\rho gS}{M}}t$.

4.3. $x = l + \frac{P}{q} + \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right)\,Cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right)$; $l \le x_0 \le l + \frac{2P}{q}$.

4.4. $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{3}$.

4.5. $y_1 = -\frac{P}{k}\ Cos\sqrt{\frac{kg}{P}}t,\ y_2 = -\frac{3P}{k}\ Cos\sqrt{\frac{kg}{3P}}t$.

4.6. $y = -0.08\ Cos(5.916\ t)$м, $\ T = 1{,}062$ с.

4.7. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$.

4.8. $x = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}\ Sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{mg}{k}\ Cos(\alpha)Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

4.9. $x = 2l\ Cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}\ Sin\ \alpha\ t}\right)$.

4.10. $\beta = \frac{2P}{\sqrt{gl}}$,

При $\beta < \frac{2P}{\sqrt{gl}}$ рух буде коливальним з періодом $T = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$.

4.11 $y = 1.32\ e^{-7t} - 0.33\ e^{-28\ t}$ см.

4.12. $y = -\ e^{-7t} + 2\ e^{-28\ t}$ см

4.13. $= 11{,}4\ e^{-7t} - 6{,}4\ e^{-28\ t}$ см

4.14. $x = \frac{F_0}{k}(1 - Cos(\omega t))$ де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4.15. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

4.16. $x = \frac{\alpha}{m\omega^3}(\omega t - Sin(\omega t))$, де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4.17. $x = \frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - Cos(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega}Sin(\omega t)\right)$; де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4.18. $y = -2.3\ Sin(8\ \pi t)$ см.

4.19. $y = -5\ Cos(14\ t) + 4.13\ Sin(14\ t) - 2.3\ Sin(8\ \pi t)$ см.

4.20. $y = 4.486\ Sin(14\ t) - 2.3\ Sin(8\ \pi t)$ см.

4.21. $y = 2\ Cos\ (70\ t) - 2.83\ Sin(70\ t) + 4.17\ Sin(50\ t)$см.

4.22. $y = 2\ Cos(70\ t) + 1.16\ Sin\ (70\ t) - 71.4\ t\ Cos\ (70\ t)$см.

4.23. $y = \frac{47\ m\ \omega^2 - 7\ k}{(k - m\ \omega^2)(k - 9\ m\ \omega^2)}Cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{5}{c - m\ \omega^2}Cos(\omega t) +$
$\frac{2}{c - 9\ m\ \omega^2}\ Cos(3\omega t)$. Резонанс наступить в двох випадках $\omega_1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$;
$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4.24. $A_{max} = 6.2$ см, $\omega = 41{,}83\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

4.25. $y = e^{-11.18t}\left(4.422\ Cos(43.3\ t) - 1.547\ Sin(43.3\ t)\right) +$
$+4.66\ Sin(30\ t - 0.174\ \pi)$см.

4.26. Амплітуда зменшиться в три рази.

4.27. $y = 0.98\ Sin(100\ t) - 1.22\ Cos\ (100\ t)$

4.28. $\delta = arctg1.25 = 51^0 20'$.

4.29. $\delta = 91^0 38'$.

Аналітична механіка

5.1. $L = \frac{m_1+m_2}{2} l_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot\varphi_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \ \dot\varphi_2 \ Cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$
$+(m_1 + m_2) g l_1 Cos\ \varphi_1 + m_2 g l_2 Cos\ \varphi_2$

5.2. $L = \frac{m_1+m_2}{2} \dot x^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot\varphi^2 + 2l\dot x\dot\varphi\ Cos\ \varphi) + m_2 gl\ Cos\varphi$

5.3. $L = \frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + mla\omega^2 Sin(\varphi - \omega t) + mgl\ Cos\ \varphi$

5.4. $L = \frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + mla\omega^2\ Cos\ \omega t\ Sin\ \varphi + mgl\ Cos\ \varphi$

5.5. . $L = \frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + mla\omega^2\ Cos\ \omega t\ Cos\ \varphi + mgl\ Cos\ \varphi$

5.6. $H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x, y, z)$

5.7. .$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right) + U(\rho, \varphi)$

5.8.$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + U(\rho, \varphi, z)$

5.9.$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\ Sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi)$

5.10. $H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^n p_i^2 + \frac{1}{2M}\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^2$

5.11. $\begin{cases} [M_i, p_j] = 0; \ \ i = j \\ [M_i, p_j] = p_k; \ i \neq j \neq k \end{cases}$; i, j, k=x,y,z.

5.12. $[M_x, M_y] = -M_z$; $[M_y, M_z] = -M_x$; $[M_z, M_x] = -M_y$.

Рекомендована література

Основна:

1. Федорченко А.М. Теоретична фізика. Том 1. Класична механіка і електродинаміка -Вища школа, -2009 -535 с.
2. Шульга. О.Ю. Теоретична механіка. –Харків: Ранок, 2007. – 208 с
3. Бугаєнко Г.О. Курс теоретичної механіки. –К., 1968. –367 с.
4. Кузьо І. В., Ванькович Т.-Н. М., Зінько Я. А., Смерека І. П.. Теоретична механіка. Кінематика. Навчальний посібник.Львів: Видавництво Львівської політехніки. –2007. –188 с.
5. Цасюк В.В. Теоретична механіка:Навчальний посібник .– К.:ЦУЛ, -2004.–402 с.
6. Павловський М. А. Теоретична механіка: [підручник] / Павловський=М.=А. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
7. Видмиш А. А. Збірник завдань для самостійної роботи з теоретичної механіки. Статика. Кінематика: збірник завдань / Видмиш А. А., Приятельчук В. О., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 128 с.
8. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : [навч. пос.] / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 108 с.
9. Теоретична механіка : збірник задач / [О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.]; за ред. М. А. Павловського – К. : Техніка, 2007. – 400 с.
10. Ільчишина Д. І. Теоретична механіка: навч. посіб. / Д. І. Ільчишина, Л. М. Шальда – К. : УМК ВО, 1991 – 252 с.

Додаткова:

1. Павловський М.А., Акінфієва Л.Ю., Юрокін А.І., Свістунов С.Я. Кінематика та динаміка точки. –Київ: Либідь, 1993.

2. Кильчевский Н.А., Ремизова Н.И., Кильчевская Е.Н. Основы теоретической механики.–К, 1986. –295 с.
3. Спеціальні розділи математики 3. Аналітична динаміка: Збірник задач. За ред. М.А. Павловського.— К.: Техніка, 2007.— 400 с.
4. Практикум з теоретичної механіки. Статика твердого тіла. Навчальний посібник / Векерик В.І., Рижков Л.М., Левчук К.Г. та ін.- Івано-Франківськ: Факел, 2004.- 186 с.
5. Золотов М.С., Рубаненко О.І., Жуков В.Ф. Теоретична механіка (Навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціаль-ностей). Харків: ХДАМГ, 1999.
6. Глонь О.А. Основи теоретичної механіки. - К., 1997.
7. Зінченко В.І., Мамаєв Л.М. Теоретична механіка: Навч. посібник. – К.: ІСДО, 1995. – 228 с.
8. Березова О.А., Друшляк Г.Е., Солодовников Р.В. Теоретическая механика. Сборник задач: Учеб. Пособие для вузов. – К.: Вища школа, 1980. – 400

Інтернет ресурси:

1. Бібліотека українських підручників [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://pidruchniki.ws/.
2. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського: режим доступу: http://nbuv.gov.ua
3. Цифрова фізична лабораторія: режим доступу: https://phet.colorado.edu/en/simulations/

ЗМІСТ

Навчально-методичний посібник

Збірник практичних завдань з курсу
«Теоретична Механіка»
для спеціальності
«014 Середня освіта (Фізика та астрономія)»

Навчально-методичний посібник
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності
«014 Середня освіта (Фізика та астрономія)»

Укладач **Грищук Андрій Миколайович,**
Корнійчук Платон Павлович
Відповідальний за випуск
Літературний редактор