Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КОЛОМІЄЦЬ ТАМІЛА ЮРІЇВНА

УДК: 512.552.22 + 517.95

ДИСЕРТАЦІЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ СИСТЕМ І ТЕОРІЇ МІРИ У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ АЛГЕБРАХ

Подається на здобуття ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_________________ Т. Ю. Коломієць

Науковий керівник: Погоруй Анатолій Олександрович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії

Житомир – 2023

АНОТАЦІЯ

Коломієць Т. Ю. Дослідження гіперкомплексних систем і теорії міри у скінченновимірних алгебрах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир, 2023.

Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних у відповідному сенсі) функцій зі значеннями у гіперкомплексних системах, які є скінченновимірними комутативними та некомутативними (зокрема, кліффордовими) алгебрами над полем $\mathbb{K}$ (дійсних $\mathbb{R}$ або комплексних $\mathbb{C}$ чисел), і застосуванню цих властивостей для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь з частковими похідними (ДРЧП) та лінійних систем ДРЧП з використанням відповідних алгебраїчно-аналітичних методів. Крім цього, у дисертації досліджено поліноміальні рівняння в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, яка є дійсним восьмивимірним зображенням алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$. Вивчено основні властивості ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ зі значеннями в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$ та міри ω зі значеннями в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$.

Алгебраїчно-аналітичний підхід для знаходження розв'язків ДРЧП з використанням властивостей моногенних функцій, визначених на асоційованих з цими ДРЧП комутативних алгебрах, вивчався в основоположних статтях П. Кетчума та в роботах Е. Лорха, Р. Вагнера, Дж. Уорда, Е. Блюма, К. Кунца. В останні роки цій галузі присвятили свої дослідження багато вчених, а саме: І. Мельниченко, В. Ковальов, М. Шапіро, Л. Собреро, С. Плакса, В. Шпаківський, А. Погоруй, Р. Родрігес-Дагніно, Р. Родрігес-Саїд, С. Грищук, Р. Пухтаєвич, Т. Кузьменко. Важливість алгебраїчно-аналітичного методу полягає в можливості його застосування для знаходження розв'язків ДРЧП з використанням скінченновимірної

комутативної алгебри, базис якої задовольняє відповідне цьому ДРЧП поліноміальне рівняння.

Застосування властивостей моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) функцій для вивчення розв'язків ДРЧП, асоційованих з комутативними алгебрами, не є продуктивним у випадку некомутативних алгебр. Добре відомо (А. Садбері), що в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$ моногенними у зазначеному вище сенсі будуть тільки лінійні кватерніоннозначні функції $f(x) = ax + b,\ x, a, b \in \mathbb{H}$. Для одержання змістовного результату вводять інші означення диференційовності функції у випадку некомутативних алгебр (Г. Мойсіл, Н. Теодореско, Р. Фуетер, Ф. Бракс, Р. Деланже, Р. Краусхар, Г. Малонек, Х. Борі-Рейес). Наприклад, Ф. Соммен і Х. Шеппер розглянули концепцію лівої (відповідно правої) диференційовності функції $f(\cdot)$, яка визначена у $(d+1)$-вимірному лінійному просторі $\mathbb{E}^{d+1}, d = 0,1, \ldots$, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}} (p + q = d + 1)$, як розв'язку рівняння $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$ (відповідно $f(\cdot)\mathcal{D} = 0$), де $\mathcal{D}$ – узагальнений оператор Коші-Рімана.

Ще однією областю застосування гіперкомплексних систем є побудова комплексної та гіперкомплексної теорії міри й теорії ймовірностей. Результати у цій галузі представлено в роботах У. Рудіна, Д. Алпая, М. Луни-Елізаррарас, М. Шапіро, Р. Кумара, К. Шарми, Ч. Гоша, С. Бісваса, Т. Ясіна, А. Погоруя.

Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку, що містить список публікацій здобувачки за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації.

У першому розділі дисертаційної роботи проведено огляд результатів попередніх досліджень, пов'язаних із темою дисертації, подано допоміжні теоретичні відомості та необхідні алгебраїчні конструкції. Зокрема, наведено означення гіперкомплексних систем, які використовуються у дисертації, та їх властивості. Представлено відомі результати застосування алгебраїчно-аналітичного методу для знаходження розв'язків ДРЧП за допомогою вивчення властивостей моногенних функцій, які задовольняють рівняння (умови типу) Коші-Рімана, на асоційованих з цим ДРЧП скінченновимірних комутативних алгебрах. Сформульовано необхідні алгебраїчні конструкції, які розкривають суть методу. Зроблено короткий огляд відомих розв'язків узагальнених телеграфного та біхвильового рівнянь, одержаних за допомогою алгебраїчно-аналітичного підходу у випадку комутативних алгебр. Проведено аналіз публікацій з кватерніонного та кліффордового аналізу, в яких можна знайти різні означення диференційовності функції та їх застосування у випадку некомутативних алгебр, зокрема для розвинення функції в ряд за поліномами типу Фуетера. Здійснено огляд результатів з комплексної та гіперкомплексної теорії міри й теорії ймовірностей у скінченновимірних алгебрах.

У другому розділі показано зображення алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ у вигляді дійсної восьмивимірної алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ та наведено основні алгебраїчні властивості цієї алгебри. Запропоновано метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, шляхом їх зведення до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$.

З використанням алгебраїчно-аналітичного методу у випадку комутативних алгебр знайдено формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$ розподілу випадкового одновимірного руху $x(t)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку (узагальнене телеграфне рівняння) та часткові розв'язки ДРЧП четвертого порядку (так зване узагальнене біхвильове рівняння). Показано застосування цього методу для знаходження часткових розв'язків лінійних систем ДРЧП. Наведено приклади розв'язування таких систем ДРЧП, зокрема з ДРЧП, асоційованими з алгеброю комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$.

Крім цього, вивчено властивості ліводиференційовних функцій $f(\cdot)$ (лівих власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$, тобто $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ $(p + q = d + 1)$, породженої $(d + 1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}$, $d = 0,1, \dots$, над полем $\mathbb{R}$. З використанням алгебраїчно-аналітичного методу у випадку некомутативних алгебр знайдено розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) в ряд за поліномами типу Фуетера. Наведено приклади застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП другого порядку.

У третьому розділі введено поняття відношення часткового порядку $\preccurlyeq_{\mathbb{W}_4}$ в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$. Визначено бігіперболічнозначний модуль $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$, бігіперболічнозначну норму $\|\cdot\|_{\mathbb{W}_4}$, збіжну послідовність бігіперболічних чисел $\{\alpha_n\}_{\mathbb{W}_4}$, $n = 1,2, \dots$, та доведено всі необхідні властивості. Проаналізовано означення ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$, яка набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$. Показано, що бігіперболічнозначна ймовірнісна міра $P_{\mathbb{W}_4}$, визначена на σ-алгебрі випадкових подій Σ простору елементарних подій $\mathrm{\omega} \in \Omega$, задовольняє основні властивості класичної дійснозначної ймовірності P. Введено поняття бігіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$, яка визначена на $\mathbb{W}_4$-ймовірнісному просторі $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$, та доведено її основні властивості. Досліджено особливі випадки, коли відповідно бігіперболічнозначна ймовірнісна міра $P_{\mathbb{W}_4}$ та бігіперболічнозначна випадкова величина $X_{\mathbb{W}_4}$ набувають значень в області дільників нуля $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ алгебри $\mathbb{W}_4$.

Подано означення кватерніоннозначної міри ω та її повної варіації $\mathrm{var}[\omega]$. Доведено, що повна варіація $\mathrm{var}[\omega]$ кватерніоннозначної міри ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ є невід'ємною мірою на $(X, \mathfrak{M})$, де $\mathfrak{M}$ – σ-алгебра підмножин непорожньої множини X. Зокрема доведено, що

$\mathrm{var}[\omega](X) < +\infty$, тобто класичні дійснозначні міри, які можуть набувати значення $+\infty$, не утворюють підклас кватерніоннозначних мір.

Визначено абсолютно неперервну ω_a і сингулярну ω_s кватерніоннозначні міри відносно класичної дійснозначної міри μ та наведено їх властивості. Доведено аналоги теореми про розклад Лебега, теореми Радона-Нікодима та одного з її наслідків для кватерніоннозначної міри ω.

Введено поняття ліволінійного (відповідно праволінійного) простору кватерніоннозначних мір ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$. В якості норми $\|\omega\|$ міри ω на $(X, \mathfrak{M})$ береться її повна варіація, тобто $\|\omega\| = \mathrm{var}[\omega](X)$. Доведено, що ліволінійний (відповідно праволінійний) простір кватерніоннозначних мір ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ з нормою $\|\omega\| = \mathrm{var}[\omega](X)$ є кватерніонним банаховим простором.

***Основні результати, що визначають наукову новизну дослідження*:**

- *розроблено* метод знаходження розв’язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, яка є дійсним восьмивимірним зображенням алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$, шляхом зведення цих рівнянь до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$;
- алгебраїчно-аналітичним методом моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) функцій, визначених у скінченновимірних комутативних алгебрах, *знайдено* формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку, що описує розподіл випадкового одновимірного руху $x(t)$ частинки в момент часу t у випадку, коли проміжок часу між двома послідовними перемиканнями швидкості частинки має розподіл Ерланга 3-го порядку (узагальнене телеграфне рівняння);
- *знайдено* розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі власних векторів

узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$, тобто $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p+q=d+1)$, породженої $(d+1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}, d = 0,1, \ldots$, над полем $\mathbb{R}$, у ряд за поліномами типу Фуетера; *наведено* приклади застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП другого порядку;

- *досліджено* аналог класичної дійснозначної ймовірнісної міри P у випадку, коли ця міра набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$; *вивчено* основні властивості бігіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ та бігіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$;
- *узагальнено* поняття класичної дійснозначної міри μ на випадок кватерніоннозначної міри ω, тобто міри, яка набуває значень в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$; *вивчено* основні властивості кватерніоннозначної міри ω.

Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер. На практиці одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані під час вивчення додаткових розділів алгебри, математичного, комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії міри, теорії диференціальних рівнянь студентами фізико-математичних спеціальностей, а також можуть бути застосованими у процесі досліджень за відповідними напрямами, зокрема для задач математичної фізики, теорії випадкових процесів, термодинаміки та статистичної фізики.

***Ключові слова*:** Гіперкомплексна система, скінченновимірна алгебра, лінійний простір, алгебра комплексних кватерніонів Сегре, похідна Гато, моногенна функція, диференціальні рівняння з частковими похідними, умови типу Коші-Рімана, узагальнений оператор Коші-Рімана, алгебра Кліффорда, поліноми типу Фуетера, бігіперболічнозначна ймовірнісна міра, бігіперболічнозначна випадкова величина, кватерніоннозначна міра.

ABSTRACT

Kolomiiets T. Yu. Research of hypercomplex systems and theory of measure in finite-dimensional algebras. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, specialty 111 Mathematics. – Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, 2023.

This dissertation is devoted to the study of the properties of monogenic (continuously differentiable and differentiable in the corresponding sense) functions with values in hypercomplex systems, which are commutative and non-commutative (in particular, the Clifford algebra) finite-dimensional algebras over field $\mathbb{K}$ (of real $\mathbb{R}$ or complex $\mathbb{C}$ numbers). The application of these properties to find solutions of partial differential equations (PDEs) and linear systems of PDEs, by using respective algebraic and analytical methods is considered. In addition, the thesis also studies polynomial equations in the Segre algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, which is a real eight-dimensional representation of the Segre algebra of complex quaternion $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$. We studied the basic properties of a probability measure $P_{\mathbb{W}_4}$ with values in algebra bihyberbolic numbers $\mathbb{W}_4$ and a measure ω with values in algebra quaternions $\mathbb{H}$.

Algebraic and analytical approach for solving PDEs by using the properties of monogenic functions on commutative algebras associated with these equations were studied in seminal papers by P. Ketchum, and works of E. Lorch, R. Wagner, J. Ward, E. Blum, K. Kunz. In recent years, many scholars devoted their research to this field, namely: I. Mel'nichenko, V. Kovalev, M. Shapiro, L. Sobrero, S. Plaksa, V. Shpakivskyi, A. Pogorui, R. Rodríguez-Dagnino, R. Rodríguez-Said, S. Gryshchuk, R. Pukhtaievych, T. Kuzmenko. The importance of the algebraic and analytical method is in its possible application to the study of PDE by using a finite-dimensional commutative algebra, which basis satisfies the polynomial equation corresponding to this PDE.

Application of the properties of monogenic functions (continuously differentiable and Gâteaux differentiable) to the study of solutions of PDEs

associated with commutative algebras is not productive for non-commutative algebras. It is well-known (A. Sudbery) that in the case of quaternions $\mathbb{H}$, only linear quaternion-valued functions $f(x) = ax + b,\ x, a, b \in \mathbb{H}$, are monogenic in the above sense. To obtain a meaningful result, other definitions of the function differentiability in case of non-commutative algebras are considered by G. Moisil, N. Theodoresco, R. Fueter, F. Brackx, R. Delanghe, R. Kraushar, H. Malonek, J. Bory-Reyes. For example, F. Sommen and H. Schepper considered the concept of the left (respectively right) differentiability of a function $f(\cdot)$ defined in a $(d + 1)$-dimensional linear space $\mathbb{E}^{d+1}, d = 0,1, \ldots$, over field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$) with values in the Clifford algebra $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}(p + q = d + 1)$ as a solution of the equation $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$ (respectively $f(\cdot)\mathcal{D} = 0$), where $\mathcal{D}$ is the generalized Cauchy-Riemann operator.

Another area of application of hypercomplex systems is the construction of complex and hypercomplex theory of measure and theory of probability. The results in this field are presented in works by W. Rudin, D. Alpay, M. Luna-Elizarrarás, M. Shapiro, R. Kumar, K. Sharma, Ch. Ghosh, S. Biswas, T. Yasin, A. Pogorui.

The dissertation consists of Introduction, three Chapters, Conclusions to Chapters, general Conclusions, a List of used sources and an Appendix containing a list of the applicant’s publications on the topic of the dissertation and information on the approval of the dissertation results.

In Chapter 1 we review results of previous researches related to the main topic of the thesis, providing theoretical information and algebraic constructions that are used. In particular, the definitions of hypercomplex systems used in the thesis and their properties are given. An overview of the known results of the use of the algebraic and analytical method of finding solutions of the PDE by studying the properties of monogenic functions that satisfy the Cauchy-Riemann equation (conditions of the type) on the finite-dimensional commutative algebras associated with the given PDE are presented. The necessary algebraic constructions that reveal the essence of the method are formulated. A brief review of well-known solutions of the generalized telegraph and biwave equations, which were obtained by using the algebraic and analytical approach in the case commutative algebras was made. We analyzed the main publications on quaternion and Clifford analysis, in which one can find various definitions of the function differentiability and their application in the case non-commutative algebras, in particular for the expansion of function into a series of Fueter-type polynomials. Results of complex and hypercomplex theory of measure and theory of probability in finite-dimensional algebras are reviewed.

In Chapter 2 the representation of the Segre algebra of complex quaternion $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ in the form of a real eight-dimensional Segre algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ is shown, the basic algebraic properties of this algebra are proved. A method of finding solutions of polynomial equations with coefficients taking values in the Segre algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ is proposed by carrying out of them to the corresponding systems of four polynomial equations with complex coefficients $\mathbb{C}$.

By using of the algebraic and analytical method for case of commutative algebras, a formula of the generalized density function $f(t,x)$ of the distribution of random one-dimensional motion $x(t)$ satisfying the sixth-order PDE (generalized telegraphic equation) is found, and partial solutions of the fourth-order PDE (the so-called generalized biwave equation) were studied. The application of this method to of find of partial solutions of linear systems of PDEs was shown. We consider examples of solving of such PDEs systems, in particular, with PDEs associated with the Segre algebra of complex quaternions $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$.

In addition, we studied the properties of left-differentiable functions $f(\cdot)$ (the left eigenvectors of the generalized Cauchy-Riemann operator $\mathcal{D}$, i. e. $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) with values in the Clifford algebra $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p+q=d+1)$ generated by $(d+1)$-dimensional linear space $\mathbb{E}^{d+1}, d = 0,1, \ldots$, over the field $\mathbb{R}$. By using of the algebraic and analytical method in case of non-commutative algebras the expansion of a monogenic function $f(\cdot)$ (continuously differentiable and left-differentiable as a solution of $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) in the series by using of Fueter-type polynomials is obtained. Examples of application of an expansion $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-valued function in the series to finding partial solutions of second-order PDEs are shown.

In Chapter 3, the notion of a relation of partial order $\preccurlyeq_{\mathbb{W}_4}$ in the algebra of bihyberbolic numbers $\mathbb{W}_4$ is introduced. The bihyberbolic-valued module $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$, norm $\|\cdot\|_{\mathbb{W}_4}$ and the notion of a convergent sequence of bihyberbolic numbers $\{\alpha_n\}_{\mathbb{W}_4}, n = 1,2, \ldots$, are introduced and all the necessary properties are proved. The definition of the probability measure $P_{\mathbb{W}_4}$ which values in the algebra of bihyberbolic numbers $\mathbb{W}_4$ is analyzed. It is shown that the bihyberbolic-valued probability measure $P_{\mathbb{W}_4}$ which is defined on the σ-algebra of random events $\varSigma$ of the space of elementary events ω ∈ $\varOmega$, satisfies the basic properties of the classical real-valued probability P. There of it is the bihyberbolic-valued random variable $X_{\mathbb{W}_4}$ which is defined on $\mathbb{W}_4$-probability space $\left(\varOmega, \varSigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$ and its basic properties are proved. We studied special cases when the bihyperbolic-valued probabilistic measure $P_{\mathbb{W}_4}$ and the bihyperbolic-valued random variable $X_{\mathbb{W}_4}$ take values in the region of zero divisors $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_{4},0}$ of the algebra $\mathbb{W}_4$, respectively.

The definition of the quaternion-valued measure ω and its total variation $\operatorname{var}[\omega]$ is introduced. We proved that the total variation $\operatorname{var}[\omega]$ of the quaternion-valued measure ω on a dimensional space $(X, \mathfrak{M})$ is a non-negative measure on $(X, \mathfrak{M})$, where $\mathfrak{M}$ is the σ-algebra of subsets of the nonempty set X. In addition, it is proved that $\operatorname{var}[\omega](X) < +\infty$, hence, classical real-valued measures that can take the value $+\infty$ do not form a subclass of the quaternion-valued measures.

The concepts of absolutely continuous ω_a and singular ω_s quaternion-valued measures relative to the classical real-valued measure μ are introduced and their properties are presented. Analogues of Lebesgue decomposition theorem, Radon-Nikodym theorem and one of its consequences for the quaternion-valued measure ω are proved.

The concept of a left-linear (respectively right-linear) space of the quaternion-valued measures ω on a measurable space $(X,\mathfrak{M})$ is introduced. As the norm $\|\omega\|$ of measure ω on $(X,\mathfrak{M})$, its complete variation is taken, i. e. $\|\omega\| = \mathrm{var}[\omega](X)$. It is proved that the left-linear (respectively right-linear) space of the quaternion-valued measures ω on a measurable space $(X,\mathfrak{M})$ with norm $\|\omega\| = \mathrm{var}[\omega](X)$ is a quaternion Banach space.

The main results that determine the scientific novelty of the thesis**:**

- a method for finding solutions of polynomial equations, with coefficients taking values in the Segre algebra $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ which is a real eight-dimensional representation of the Segre algebra of complex quaternion $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ by reducing these equations to the corresponding systems of four polynomial equations with complex coefficients $\mathbb{C}$, *is developed*;
- the algebraic and analytical method of monogenic (continuously differentiable and Gâteaux differentiable) functions defined in commutative finite-dimensional algebras, a formula for the generalized density function $f(t,x)$ satisfying the sixth-order PDE, *was found*, which describes the distribution of one-dimensional motion $x(t)$ of a particle with 3rd-order Erlang distribution of a sojourn time t of the switching velocity process (generalized telegraph equation);
- the expansion of the monogenic function $f(\cdot)$ (continuously differentiable and left-differentiable in the sense of eigenvectors of the generalized Cauchy-Riemann operator $\mathcal{D}$, i. e. $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) with values in the Clifford algebra $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p+q=d+1)$ generated by $(d+1)$-dimensional linear space $\mathbb{E}^{d+1}$, $d = 0,1,\ldots$, over the field $\mathbb{R}$, into a series of Fueter-type polynomials, *was found*; examples of applications of an expansion $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-valued function in the series to finding partial solutions of second-order PDEs, *are shown*;
- the analogue of the classical real-valued probability measure P in the case where this measure takes values in the algebra of bihyperbolic numbers $\mathbb{W}_4$ *was studied*; the basic properties of the bihyperbolic-valued probability measure $P_{\mathbb{W}_4}$ and the bihyperbolic-valued random variable $X_{\mathbb{W}_4}$, *are studied*;

- a classical real-valued measure μ, *is generalized* out to the case of the so-called the quaternion-valued measure ω where a measure takes values in the quaternion algebra $\mathbb{H}$; the basic properties of the quaternion-valued measure ω, *are studied*.

The thesis contains mathematical research of a theoretical nature. The obtained results and methods developed in the thesis can be used in the sequel research of the respective branches of algebra, mathematical, complex and hypercomplex analysis, probability theory and mathematical statistics, measure theory, PDEs by students of physical and mathematical specialties, and can also be applied in the process of research in the relevant directions, in particular for the problems of mathematical physics, the theory of random processes, thermodynamics and statistical physics.

***Keywords*:** Hypercomplex system, finite-dimensional algebra, linear space, Segre algebra of complex quaternions, Gâteaux derivative, monogenic function, partial differential equations, Cauchy-Riemann-type conditions, generalized Cauchy-Riemann operator, Clifford algebra, Fueter-type polynomials, bihyperbolic-valued probability measure, bihyperbolic-valued random variable, quaternionic-valued measure.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Kolomiiets T., Pogorui A., Rodríguez-Dagnino R. M. The distribution of random motion with Erlang-3 sojourn times. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2015. Vol. 23, iss. 2. P. 69–79.
2. Kolomiiets T., Pogorui A., Rodríguez-Dagnino R. M. Solution of systems of partial differential equations by using properties of monogenic functions on commutative algebras. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 239, No. 1. P. 43–50.
3. Pogorui A., Kolomiiets T. Some algebraic properties of complex Segre quaternions. *Праці Інституту математики і механіки НАН України*. 2019. Т. 33. С. 158–169.
4. Luna-Elizarrarás M. E., Pogorui A., Shapiro M., Kolomiiets T. On Quaternionic Measure. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2020. Vol. 30, iss. 4, art. 63. P. 1–17.
5. Коломієць Т. Ю. Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. *Праці Інституту математики і механіки НАН України*. 2020. Т. 34. С. 36–49.
6. Pogorui A. A., Kolomiiets T. Yu. Series expansions for monogenic functions in Clifford algebras and their application. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, No. 4. P. 502–507.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

7. Коломієць Т. Ю. Розподіл одновимірного блукання частинки в ерлангівському середовищі 3-го порядку. *Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики*: матеріали XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, м. Київ, 14-15 трав. 2015 р. Київ, 2015. Т. 3. С. 37–38.

8. Коломієць Т. Ю., Погоруй А. О. Дослідження розв’язків систем диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою моногенних функцій на комутативних алгебрах. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях*: тези доп. XIII Міжнар. наук. конф. для молодих вчених, м. Харків, 16-17 берез. 2018 р. Харків, 2018. С. 6–7.

9. Pogorui A., Kolomiiets T., Rodríguez-Dagnino R. M. An algebraic approach for solving fourth-order partial differential equations. *Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Matematica*. 2019. T. 26, iss. No. 1. P. 153–160.

10. Kolomiiets T. An algebraic approach for solving fourth-order partial differential equations. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях*: тези доп. XIV Міжнар. наук. конф. для молодих вчених, м. Харків, 15-16 берез. 2019 р. Харків, 2019. С. 9–11.

11. Pogorui A., Kolomiiets T. Solution of biwave equations by using properties of monogenic functions. *Ахборот-коммуникация технологиялари ва телекоммуни-кацияларнинг замонавий муаммолари ва ечимлари*: I қисм, республика илмий-техник анжуманининг маърузалар тўплами, Фарғона, 30-31 май 2019 йил. Фарғона, 2019. P. 55–56.

12. Коломієць Т. Ю., Погоруй А. О. Деякі алгебраїчні та аналітичні властивості комплексних кватерніонів Сегре. *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання*: зб. тез доп. Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів і молодих учених, м. Чернігів, 27 листоп. 2019 р. Чернігів, 2019. С. 35–36.

13. Kolomiiets T. Yu., Pogorui A. A. Monogenic functions in Clifford algebras and their applications. *Математика в сучасному технічному університеті*: матеріали IX Міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 28-29 груд. 2020 р. Вінниця, 2021. С. 13–16.

14. Kolomiiets T., Pogorui A. Elements of probability theory and measures with values in hypercomplex algebras. *Algebraic and Geometric Methods of Analysis*: dedicated to the memory of Yu. Trokhymchuk (17.03.1928-18.12.2019): International Online Conference, Odesa, May 25-28, 2021. Odesa, 2021. P. 81–83.

15. Коломієць Т., Погоруй А. Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. *Підстригачівські читання – 2021*: матеріали конф. молодих учених, м. Львів, 26-28 трав. 2021 р. Львів, 2021. С. 1–2.

16. Коломієць Т. Ю. Алгебраїчний метод дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними. *Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів*. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2023. Вип. 15. С. 30–35.

17. Kolomiiets T. Quaternion-valued measure and its total variation. *Information and innovative technologies in education in modern conditions*: Proceedings of the XXIV International Scientific and Practical Conference, Varna, June 20-23, 2023. Varna, 2023. P. 277–281.

ЗМІСТ

ВСТУП……19

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ……29

1.1. Гіперкомплексні системи……29

1.2. Моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних комутативних алгебрах……35

1.2.1. Алгебраїчно-аналітичний метод знаходження розв’язків ДРЧП……35

1.2.2. Узагальнене телеграфне рівняння……41

1.2.3. Узагальнене біхвильове рівняння……43

1.3. Моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних некомутативних алгебрах……44

1.4. Міра зі значеннями у скінченновимірних алгебрах……46

Висновки до першого розділу……47

РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МОНОГЕННИХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ АЛГЕБРАХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ……48

2.1. Моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних комутативних алгебрах, асоційованих з ДРЧП та системами ДРЧП……48

2.1.1. Поліноміальні рівняння в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$……48

2.1.2. Формула узагальненої функції щільності $f(x)$, яка задовольняє узагальнене телеграфне рівняння шостого порядку……54

2.1.3. Часткові розв’язки узагальненого біхвильового рівняння……70

2.1.4. Часткові розв’язки лінійних систем ДРЧП……81

2.2. Моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних некомутативних (кліффордових) алгебрах та їх застосування……88

2.2.1. Розвинення многенної функції в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ в ряд……88

2.2.2. Застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв’язків ДРЧП……93

Висновки до другого розділу……96

РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МІРИ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ АЛГЕБРАХ 98
3.1. Властивості ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ зі значеннями в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$ 98
3.1.1. Відношення часткового порядку в алгебрі $\mathbb{W}_4$ 98
3.1.2. Бігіперболічнозначна ймовірнісна міра $P_{\mathbb{W}_4}$ 101
3.1.3. Бігіперболічнозначна випадкова величина $X_{\mathbb{W}_4}$ 105
3.2. Властивості міри ω зі значеннями в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$ 114
3.2.1. Кватерніоннозначна міра ω та її повна варіація $\mathrm{var}[\omega]$ 114
3.2.2. Абсолютна неперервність та сингулярність кватерніоннозначної міри ω 120
3.2.3. Кватерніонний лінійний і кватерніонний банаховий простори 126
Висновки до третього розділу 128
ВИСНОВКИ 130
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 132
ДОДАТОК 147

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Гіперкомплексні системи, які називають скінченновимірними алгебрами над полем $\mathbb{K}$ (дійсних $\mathbb{R}$ або комплексних $\mathbb{C}$ чисел), є важливими об'єктами сучасних досліджень і мають застосування в різних галузях науки, зокрема у багатьох розділах математики (І. Кантор та А. Солодовніков [61], С. Оларіу [89], І. Яглом [131]).

Завдяки результатам робіт П. Кетчума [63−65] закладено основи використання алгебраїчно-аналітичного методу вивчення властивостей моногенних (неперервних і диференційовних за Гато) функцій, які набувають значень у скінченновимірних комутативних алгебрах, для знаходження розв'язків асоційованих з цими алгебрами диференціальних рівнянь з частковими похідними (ДРЧП).

В останні роки про плідність досліджень у цій галузі засвідчують роботи І. Мельниченка [81–83], В. Ковальова та І. Мельниченка [72], І. Мельниченка та С. Плакси [84], С. Плакси [19, 20, 92, 93], С. Плакси, С. Грищука та В. Шпаківського [94], С. Плакси та В. Шпаківського [95, 96], С. Плакси та Р. Пухтаєвича [21, 97], В. Шпаківського [27, 28, 120, 121], С. Грищука [2–8, 47–50], С. Грищука та С. Плакси [51, 53, 54]. У статтях А. Погоруя [98, 99], А. Погоруя та Р. Родрігеса-Дагніно [107], А. Погоруя, Р. Родрігеса-Дагніно та М. Шапіро [109] вивчається вужчий клас моногенних функцій (моногенні функції як неперервно-диференційовні й диференційовні за Гато), ніж у вищезгаданих авторів, та їх застосування для знаходження розв'язків ДРЧП зі сталими та змінними коефіцієнтами.

Суть алгебраїчно-аналітичного методу, який використано в цих публікаціях, полягає у знаходженні для заданого ДРЧП такої скінченновимірної комутативної банахової алгебри, базис якої задовольняє відповідне цьому ДРЧП поліноміальне рівняння, і тоді моногенна функція зі значеннями в цій алгебрі має компоненти, що є розв'язками цього ДРЧП. Даний підхід є актуальним при вивченні розв'язків ДРЧП та систем ДРЧП, які виникають, наприклад, у задачах математичної фізики та теорії випадкових процесів.

Моногенність функції (неперервність й диференційовність за Гато), що ефективно використовується для функцій, визначених у комутативних алгебрах, не є продуктивною для функцій, визначених у некомутативних алгебрах. Як добре відомо, наприклад, із роботи А. Садбері [128], в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$ тільки лінійні кватерніоннозначні функції $f(x) = ax + b$, $x, a, b \in \mathbb{H}$, є моногенними у вищезгаданому сенсі. Тому для функцій зі значеннями у некомутативних (наприклад, кліффордових) алгебрах використовуються інші означення диференційовності, аналогічні до визначених для кватерніонів $\mathbb{H}$ (Р. Деланже, Р. Краусхар і Г. Малонек [39], Х. Борі-Рейес і М. Шапіро [33]). Зокрема, в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}(p + q = {}$ $= d + 1)$, яка породжена $(d + 1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}$, $d = 0,1, \ldots,$ над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$), ліва (відповідно права) диференційовність функції $f(\cdot)$ визначається як власний вектор узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$, тобто як розв'язок рівняння $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$ (відповідно $f(\cdot)\mathcal{D} = 0$) (Ф. Соммен і Х. Шеппер [127]).

З використанням поліномів Фуетера для алгебри кватерніонів $\mathbb{H}$ (Р. Фуетер [42, 43]) Д. Алпаєм, М. Шапіро та Д. Волоком [31] знайдено розвинення диференційовних кватерніоннозначних функцій у ряд за цими поліномами. Розвинення диференційовних кокватерніоннозначних функцій у ряд за аналогом поліномів Фуетера було знайдено А. Погоруєм і Р. Родрігесом-Дагніно [106]. Тому актуальним постає завдання: знайти для некомутативних (зокрема, кліффордових $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}$) алгебр розвинення моногенної функції (неперервно-диференційовної й диференційовної зліва (відповідно справа) у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$) в ряд за поліномами типу Фуетера та показати приклади застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}$ -значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП.

Значну частину досліджень присвячено узагальненню результатів комплексного аналізу на багатовимірні комутативні та некомутативні алгебри: Г. Мойсіл і Н. Теодореско [85], А. Садбері [128], Ф. Бракс, Р. Деланже та Ф. Соммен [34], Г. Прайс [112], В. Кравченко та М. Шапіро [73], О. Герус [60], С. Плакса та В. Шпаківський [22], В. Шпаківський [26, 122], В. Шпаківський і Т. Кузьменко [29, 123, 124], Т. Кузьменко [18], С. Грищук і С. Плакса [9, 52, 55–57], М. Луна-Елізаррарас, М. Шапіро, Д. Струппа й А. Ваджак [80], М. Луна-Елізаррарас [78].

Останнім часом розвивається ще одна галузь застосування гіперкомплексних систем для побудови комплексної та гіперкомплексної теорії міри й теорії ймовірностей. В основоположній роботі У. Рудіна [114] узагальнено поняття класичної дійснозначної міри μ на комплекснозначну міру w та досліджено її властивості. Статтю Д. Алпая, М. Луни-Елізаррарас і М. Шапіро [30] присвячено вивченню властивостей ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}}$ зі значеннями в алгебрі гіперболічних чисел $\mathbb{W}$ та показано, що для цієї нової ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}}$ виконуються властивості класичної дійснозначної ймовірності P. Результати досліджень, пов'язані з гіперболічнозначною ймовірнісною мірою $P_{\mathbb{W}}$ та гіперболічнозначною мірою $\mu_{\mathbb{W}}$, опубліковано в роботах Р. Кумара та К. Шарми [74, 75], Ч. Гоша, С. Бісваса й Т. Ясіна [44]. Даний підхід є актуальним при вивченні комплексної та гіперкомплексної теорії міри й теорії ймовірностей та застосуванні цих результатів, наприклад, у задачах теорії ймовірностей та математичної статистики, статистичної фізики.

Запропоновані підходи можуть знайти використання у застосуванні теорії комплексного та гіперкомплексного аналізу в теорії відображень (Є. Севостьянов [117], О. Довгопятий та Є. Севостьянов [41], А. Таргонський [24], Є. Петров [91]), а також для крайових задач інтегро-диференціальних рівнянь (В. Журавльов і М. Фомін [10], О. Бойчук і В. Журавльов [1]).

Варто відзначити, що теорію гіперкомплексних числових систем та їх застосувань для синтезу цифрових фільтрів, у комп’ютерній томографії, криптографії, захисту інформації та алгоритмів виконання згортки, а також вивчення структури й розробки алгоритмів розв’язків гіперкомплексних лінійних однорідних диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь першого й вищих порядків, досліджено, наприклад, у роботах М. Синькова, Ю. Боярінової, Я. Каліновського, Т. Постнікової, Т. Синькової й О. Федоренко [23], Я. Каліновського, Ю. Боярінової й А. Туренко [11].

Застосування комутативних та некомутативних гіперкомплексних систем, зокрема для розробки відповідних алгебраїчно-аналітичних методів знаходження розв’язків ДРЧП та систем ДРЧП і побудови гіперкомплексної теорії міри та гіперкомплексної теорії ймовірностей зі значеннями у скінченновимірних алгебрах, стають об’єктами досліджень багатьох вітчизняних та зарубіжних математиків і сприяють майбутнім дослідженням за цими напрямами.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в Житомирському державному університеті імені Івана Франка відповідно до теми наукової роботи кафедри алгебри та геометрії «Алгебраїчні методи дослідження диференціальних рівнянь» (державний реєстраційний номер 0120U101103). Тему дисертації затверджено (протокол № 4 від 31 жовтня 2017 р.) та уточнено (протокол № 13 від 29 червня 2023 р.) на засіданні вченої ради Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Мета дослідження: запропонувати метод знаходження розв’язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, яка є дійсним зображенням алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$; знайти формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$ розподілу випадкового одновимірного руху $x(t)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку (узагальнене телеграфне рівняння); знайти часткові розв’язки ДРЧП четвертого порядку (так званого узагальненого біхвильового рівняння) та часткові розв’язки лінійних систем ДРЧП за допомогою алгебраїчно-аналітичного методу моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) функцій, визначених на асоційованих з цими ДРЧП скінченновимірних комутативних алгебрах; знайти розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p+q=d+1)$, породженої $(d+1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}$, $d=0,1,\ldots$, над полем $\mathbb{R}$, у ряд за поліномами типу Фуетера; показати застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв’язків ДРЧП; дослідити основні властивості ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ і випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$, які набувають значень в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$, та міри ω зі значеннями в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$.

Реалізація мети дослідження передбачає розв’язання таких **завдань:**

- запропонувати метод знаходження розв’язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, яка є дійсним восьмивимірним зображенням алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$, шляхом зведення цих рівнянь до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$;

- з використанням алгебраїчно-аналітичного методу у випадку комутативних алгебр знайти формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$ розподілу випадкового одновимірного руху $x(t)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку (узагальнене телеграфне рівняння), часткові розв’язки ДРЧП четвертого порядку (так званого узагальненого біхвильового рівняння) та часткові розв’язки лінійних систем ДРЧП;

- знайти розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$, тобто $\mathcal{D}f(\cdot)=0$) зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p+q=d+1)$, породженої $(d+1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}, d=0,1,\ldots$, над полем $\mathbb{R}$, у ряд за поліномами типу

Фуетера; навести приклади застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП;

- дослідити основні властивості ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ та випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$ у випадку, коли $P_{\mathbb{W}_4}$ і $X_{\mathbb{W}_4}$ набувають значень в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$;
- дослідити основні властивості міри ω у випадку, коли ця міра набуває значень в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$.

Об'єкт дослідження: комутативні та некомутативні гіперкомплексні системи, які є скінченновимірними алгебрами; поліноміальні рівняння та моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних алгебрах; ДРЧП; системи ДРЧП; ймовірнісна міра, випадкова величина та міра зі значеннями у скінченновимірних алгебрах.

Предмет дослідження: метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$; властивості моногенних функцій зі значеннями у комутативних і некомутативних (зокрема, кліффордовій алгебрі $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$) гіперкомплексних системах; розв'язки ДРЧП та систем ДРЧП, одержані з використанням відповідних алгебраїчно-аналітичних методів моногенних функцій; властивості ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ і випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$ в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$ та міри ω в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$.

Методи дослідження. Для досягнення мети та поставлених завдань використано методи скінченновимірних алгебр, комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і теорії міри.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, одержані в дисертаційній роботі, є новими та математично обґрунтованими. Основні з них такі:

- *розроблено* метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, яка є дійсним восьмивимірним зображенням алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$, шляхом зведення цих рівнянь до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$;

- алгебраїчно-аналітичним методом моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) функцій, визначених у скінченновимірних комутативних алгебрах, *знайдено* формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку, що описує розподіл випадкового одновимірного руху $x(t)$ частинки в момент часу t у випадку, коли проміжок часу між двома послідовними перемиканнями швидкості частинки має розподіл Ерланга 3-го порядку (узагальнене телеграфне рівняння);

- *знайдено* розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$, тобто $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p + q = d + 1)$, породженої $(d+1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}, d = 0,1, \ldots$, над полем $\mathbb{R}$, у ряд за поліномами типу Фуетера; *наведено* приклади застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв’язків ДРЧП другого порядку;

- *досліджено* аналог класичної дійснозначної ймовірнісної міри P у випадку, коли ця міра набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$; *вивчено* основні властивості бігіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ та бігіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$;

- *узагальнено* поняття класичної дійснозначної міри μ на випадок кватерніоннозначної міри ω, тобто міри, яка набуває значень в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$; *вивчено* основні властивості кватерніоннозначної міри ω.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер. На практиці одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані під час вивчення додаткових розділів алгебри, математичного, комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії міри, теорії диференціальних рівнянь студентами фізико-математичних спеціальностей. Зокрема, результати роботи можуть бути застосованими у процесі досліджень за відповідними напрямами, наприклад, у задачах математичної фізики, теорії випадкових процесів, термодинаміки та статистичної фізики.

Особистий внесок здобувачки. У статті «Some algebraic properties of complex Segre quaternions» (співавтор – А. Погоруй) здобувачкою показано зображення алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ у вигляді дійсної восьмивимірної алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, доведено основні властивості цієї алгебри та розроблено метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$. У публікації «The distribution of random motion with Erlang-3 sojourn times» (співавтори – А. Погоруй, Р. Родрігес-Дагніно) дисертанткою одержано формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку, що описує розподіл випадкового одновимірного руху $x(t)$ частинки в момент часу t у випадку, коли проміжок часу між двома послідовними перемиканнями швидкості частинки має розподіл Ерланга 3-го порядку (узагальнене телеграфне рівняння). Для цього застосовано алгебраїчно-аналітичний метод моногенних функцій у комутативному випадку і спеціальний підхід, розроблений А. Погоруєм для ДРЧП четвертого порядку, що описує аналогічний процес з розподілом Ерланга 2-го порядку. У статті «Solution of biwave equations by using properties of monogenic functions» (співавтори – А. Погоруй, Р. Родрігес-Дагніно) здобувачкою знайдено часткові розв'язки ДРЧП четвертого порядку (так званого узагальненого біхвильового рівняння) для гіперболічного випадку, а в роботі «Solution of systems of partial differential equations by using properties of monogenic functions on commutative algebras» (співавтори – А. Погоруй, Р. Родрігес-Дагніно) – часткові розв'язки лінійних систем ДРЧП. У роботі «Series expansions for monogenic functions in Clifford algebras and their application» (співавтор – А. Погоруй) здобувачці належить: доведення теореми про розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$, тобто $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p+q=d+1)$, породженої $(d+1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}, d = 0,1, \ldots$, над полем $\mathbb{R}$, у ряд за поліномами типу Фуетера; наведення прикладів розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП другого порядку у випадку алгебр Кліффорда $\mathbb{Cl}_{0,3}^{\mathbb{R}}$ і $\mathbb{Cl}_{1,3}^{\mathbb{R}}$. У публікації «On Quaternionic Measure» (співавтори – А. Погоруй, М. Луна-Елізаррарас, М. Шапіро) дисертантці належить: формулювання означень абсолютно неперервної ω_a та сингулярної ω_s кватерніоннозначних мір відносно класичної дійснозначної міри μ й доведення їх властивостей; доведення аналогу теореми про розклад Лебега для кватерніоннозначної міри ω; визначення поняття кватерніонного лінійного простору, норми $\|\omega\|$ лівокватерніонного (відповідно право-кватерніонного) лінійного простору та кватерніонного банахового простору.

Апробація матеріалів дисертації. Основні положення дослідження оприлюднено на науково-практичних конференціях: *міжнародних*: «Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука» (Київ, 2015, очна), «Професійна підготовка фахівців в умовах неперервної освіти: креативний підхід» (Житомир, 2017, очна), «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 2018, очна; 2019, заочна), «Ахборот-коммуникация технологиялари ва телекоммуни-кацияларнинг замонавий муаммолари ва ечимлари» (Фергана, 2019, заочна), «Математика в сучасному технічному університеті» (Київ, 2020, заочна), «Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928-18.12.2019)» (Одеса, 2021, дистанційна), «Підстригачівські читання – 2021» (Львів, 2021, дистанційна), «Information and innovative technologies in education in modern conditions» (Варна, 2023, заочна); *всеукраїнських:* «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання» (Чернігів, 2019, очна); *наукових семінарах*: кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка «Теорія відображень і алгебр Лі» (Житомир, 2017, 2018, очна; 2021, дистанційна; 2023, очна), відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (Київ, 2018, очна; 2020, дистанційна), відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України (Слов'янськ, 2020, дистанційна).

Публікації. Основні положення дисертації викладено у 17 наукових публікаціях (5 одноосібних), з яких 4 статті у журналах, що входять до наукометричних баз Scopus та / або Web of Science, 2 статті у наукових фахових виданнях України, 1 стаття у зарубіжному періодичному виданні, 10 у збірниках та матеріалах науково-практичних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел (131 найменувань, з них 102 іноземною мовою) та 1 додатку. Загальний обсяг дисертації становить 150 сторінок, з яких 131 – основного тексту.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1. Гіперкомплексні системи

Існує багато узагальнень комплексних чисел $\mathbb{C}$ на вищі розмірності. Ці узагальнення в математичній термінології називаються гіперкомплексними числами або гіперкомплексними системами. Зазвичай, під гіперкомплексною системою розуміють будь-яку скінченновимірну алгебру з одиницею над полем $\mathbb{K}$ (дійсних $\mathbb{R}$ або комплексних $\mathbb{C}$ чисел) (І. Кантор та А. Солодовніков [61], С. Оларіу [89], І. Яглом [131]).

Вивчення комутативних і некомутативних гіперкомплексних систем розпочалося з робіт математиків XIX століття: У. Гамільтона [58, 59], Г. Грассмана [46], О. де Моргана [40], В. Кліффорда [38], Б. Пірса [90], К. Сегре [115], Е. Картана [36].

Протягом XX століття багато авторів продовжували та розширювали цю тематику, наприклад, П. Кетчум [63–65], Г. Мойсіл і Н. Теодореско [85], Л. Собреро [126], У. Морін [86], Р. Фуетер [42, 43], І. Найвен [87], Е. Лорх [77], Р. Вагнер [129], Дж. Ворд [130], Е. Блюм [32], І. Яглом [131], К. Кунц [76], І. Мельниченко [81, 82], В. Ковальов та І. Мельниченко [72], А. Садбері [128], Ф. Бракс, Р. Деланже та Ф. Соммен [34], У. Рудін [114], І. Кантор та А. Солодовніков [61], Г. Прайс [112], Дж. Келлер [62], І. Портеус [111], В. Кравченко та М. Шапіро [73], К. Кармоді [35].

З початку XXI століття результати досліджень з даної тематики опубліковано в роботах Р. Деланже, Р. Краусхара і Г. Малонека [39], Р. Серодіо, Е. Перейра та Дж. Віторія [115], С. Оларіу [89], Е. Оболашвілі [88], І. Мельниченка [83], І. Мельниченка та С. Плакси [84], С. Плакси [19, 20, 92, 93], С. Плакси, С. Грищука та В. Шпаківського [94], С. Плакси та В. Шпаківського [22, 95, 96], В. Шпаківського [26–28, 119–122], В. Шпаківського та Т. Кузьменко [29, 123, 124], Т. Кузьменко [18], С. Грищука [2–8, 47–50], С. Грищука та С. Плакси [9, 51–57], С. Плакси та

Р. Пухтаєвича [21, 97], Д. Рошона та М. Шапіро [113], Д. Алпая, М. Шапіро та Д. Волока [31], А. Погоруя [98, 99], А. Погоруя та М. Шапіро [110], А. Погоруя та Р. Родрігеса-Дагніно [105–107], А. Погоруя, Р. Родрігеса-Дагніно та Р. Родрігеса-Саїда [108], А. Погоруя, Р. Родрігеса-Дагніно та М. Шапіро [109], О. Геруса [60], Ф. Катоні, Р. Канната й П. Зампетті [37], Х. Борі-Рейеса й М. Шапіро [33], М. Шапіро, Д. Струппи, А. Ваджака і М. Ваджак [118], Г. Собчика [125], Ф. Соммена і Х. Шеппер [127], М. Луни-Елізаррарас, М. Шапіро, Д. Струппи і А. Ваджака [80], Д. Алпая, М. Луни-Елізаррарас і М. Шапіро [30], М. Луни-Елізаррарас [78], Р. Кумара та К. Шарми [74, 75], Ч. Гоша, С. Бісваса й Т. Ясіна [44], М. Синькова, Ю. Боярінової, Я. Каліновського, Т. Постнікової, Т. Синькової й О. Федоренко [23], Я. Каліновського, Ю. Боярінової й А. Туренко [11].

Наведемо означення та властивості скінченновимірних алгебр, які використовуються в подальшому викладі матеріалу.

У 1843 році ірландський математик У. Гамільтон відкрив і досліджував некомутативну алгебру кватерніонів [58, 59].

Означення 1.1.1 [18, 26]. *Алгеброю кватерніонів називається чотиривимірна некомутативна алгебра вигляду*

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

з базисом $\{1, i, j, k\}$ *і таблицею множення для базисних елементів:*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Алгебру кватерніонів ще називають алгеброю кватерніонів Гамільтона, властивості та застосування якої можна знайти, наприклад, у роботі І. Кантора та А. Солодовнікова [61].

Очевидно вперше ґрунтовне вивчення властивостей коренів поліноміальних рівнянь з коефіцієнтами, які набувають значень в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$, було проведено в статті І. Найвена [87]. У роботах Р. Серодіо, Е. Перейра та Дж. Віторія [115], А. Погоруя та М. Шапіро [110], В. Шпаківського [119] досліджено властивості коренів кватерніонних рівнянь для різних типів многочленів.

У 1878 році англійський математик В. Кліффорд почав вивчати новий об’єкт – геометричну алгебру, яку згодом стали називати алгеброю Кліффорда [38].

Алгебра Кліффорда − це скінченновимірна алгебра, яка об’єднує властивості алгебри кватерніонів Гамільтона $\mathbb{H}$ та алгебри Грассмана (некомутативна алгебра зовнішніх форм [46]).

Сформулюємо означення алгебри Кліффорда, еквівалентне до означення, введеного Ф. Сомменом і Х. Шеппер [127].

Нехай $\mathbb{E}^{d+1}$ – $(d+1)$-вимірний лінійний простір над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) з базисом $\{e_0, e_1, \dots, e_d\}$.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – цілі невід’ємні числа, причому $p+q=d+1$.

Введемо діагональну матрицю δ $(d+1)$-го порядку

$$\delta=[\delta_{ab}]=\operatorname{diag}(1,\dots,1,-1,\dots-1), \quad a,b \in \mathbb{N},$$

на головній діагоналі якої розміщені p разів значення $+1$ і q разів значення -1.

Означення 1.1.2 [127]. *Алгеброю Кліффорда* $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}$ *над полем* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (*або* $\mathbb{C}$) *називається скінченновимірна алгебра розмірності* 2^{d+1}, *на лінійному підпросторі* $\mathbb{E}^{d+1}$, $d=0,1,\dots$, *якої введено операцію кліффордового множення*

$$U,V \to UV \quad \forall\, U,V \in \mathbb{E}^{d+1},\ d=0,1,\dots,$$

за правилами:

1) *дистрибутивність і узгодженість з лінійною структурою*

$$U(\alpha V+\beta W)=\alpha UV+\beta UW, \quad (\alpha U+\beta V)W=\alpha UW+\beta VW$$
$$\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \quad \forall\, U,V,W \in \mathbb{E}^{d+1},\ d=0,1,\dots;$$

2) *асоціативність*

$$(UV)W=U(VW) \quad \forall\, U,V,W \in \mathbb{E}^{d+1},\ d=0,1,\dots;$$

3) *унітальність*

$$Ue_0=e_0U=U \quad \forall\, U \in \mathbb{E}^{d+1},\ d=0,1,\dots;$$

4) *для всіх* $a, b = 1, \dots, d+1$

$$e_a\, e_b + e_b\, e_a = 2\delta_{ab} e_0;$$

5) *для всіх* $1 \le a_1 < \ldots < a_k \le d+1$

$$e_{a_1} \dots e_{a_k} = e_{a_1 \dots a_k},$$

де e_a *– породжуючі елементи алгебри, елемент* e_0 *– одиниця алгебри, пара чисел* (p, q) *– сигнатура алгебри (іноді під сигнатурою розуміють число* $p - q$*).*

Алгебра Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}$ визначається ортонормованим базисом

$$\left\{e_0, e_{a_1}, e_{a_i a_j}, \dots, e_{1\dots d}\right\}, \tag{1.1}$$

де індекси $a_1, a_2, a_3, \dots$ набувають значень від 1 до d і беруться у порядку зростання.

Будь-який елемент U алгебри Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}$ можна записати у вигляді розкладу за базисом (1.1):

$$U = u e_0 + \sum_{a_1} u_{a_1} e_{a_1} + \sum_{a_1 < a_2 \dots} u_{a_1 a_2} e_{a_1 a_2} + \ldots + u_{1\dots d}\, e_{1\dots d},$$

де $u, u_a, u_{a_1 a_2}, \dots, u_{1\dots d} \in \mathbb{K}$ [127].

Властивості, матричне зображення та приклади різних алгебр Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}$ можна знайти, наприклад, у роботах І. Портеуса [111] та Г. Собчика [125].

У 1892 році італійський математик К. Сегре відкрив і досліджував комутативну алгебру кватерніонів, яку ще в літературі називають алгеброю бікомплексних чисел або алгеброю кватерніонів Сегре [115].

Означення 1.1.3 [18, 26]. *Алгеброю кватерніонів Сегре називається чотиривимірна комутативна алгебра вигляду*

$$\mathbb{B}_4(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 f \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

з базисом $\{1, i, j, f\}$ *і таблицею множення для базисних елементів:*

$$i^2 = j^2 = -f^2 = -1, \quad ij = ji = f, \quad if = fi = -j, \quad jf = fj = -i.$$

Алгебру $\mathbb{B}_4(\mathbb{R})$ можна записати у вигляді

$$\mathbb{B}_2(\mathbb{C}) = \{c_0 + c_1 j \mid c_0, c_1 \in \mathbb{C}\} \tag{1.2}$$

з базисом $\{1, j\}$, де $j^2 = -1$. Крім цього, уявна одиниця $j \in \mathbb{B}_2(\mathbb{C})$ комутує з комплексною уявною одиницею $i \in \mathbb{C}$.

Тобто алгебра кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{R})$ є дійсним зображенням двовимірної алгебри Кліфforда над полем $\mathbb{C}$ $\left(\mathbb{B}_2(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{Cl}_{0,1}^{\mathbb{C}}\right)$.

Властивості та застосування алгебри кватерніонів Сегре можна знайти в роботах У. Моріна [86], Ф. Катоні, Р. Канната й П. Зампетті [37], А. Погоруя та Р. Родрігеса-Дагніно [105], М. Луни-Елізаррарас, М. Шапіро, Д. Струппи й А. Ваджака [80].

Означення 1.1.4 [108]. *Алгеброю бігіперболічних чисел називається чотиривимірна комутативна алгебра вигляду*

$$\mathbb{W}_4 = \mathbb{W}_4(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 e + a_2 f + a_3 g \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

з базисом $\{1, e, f, g\}$ *і таблицею множення для базисних елементів:*

$$e^2 = f^2 = g^2 = 1, \quad ef = fe = g, \quad eg = ge = f, \quad fg = gf = e.$$

У літературі алгебру бігіперболічних чисел ще називають алгеброю біподвійних чисел, а К. Кармоді [35] називає їх алгеброю гіперболічних кватерніонів.

Алгебру $\mathbb{W}_4$ можна зобразити у вигляді

$$\mathbb{W}_2 = \{w_0 + w_1 f \mid w_0, w_1 \in \mathbb{W}\}$$

з базисом $\{1, f\}$, де $f^2 = 1$, а $\mathbb{W}$ – двовимірна комутативна алгебра гіперболічних чисел

$$\mathbb{W} = \{b_0 + b_1 e \mid b_0, b_1 \in \mathbb{R}\}$$

з базисом $\{1, e\}$, де $e^2 = 1$. Крім цього, уявна одиниця $f \in \mathbb{W}_2$ комутує з уявною одиницею $e \in \mathbb{W}$.

Очевидно, вперше гіперболічні числа вивчав В. Кліффорд [131, стор. 19]. Властивості та застосування алгебри гіперболічних чисел $\mathbb{W}$ висвітлено у роботах Д. Рошона та М. Шапіро [113], М. Шапіро, Д. Струппи, А. Ваджака й М. Ваджак [118].

У статті А. Погоруя, Р. Родрігеса-Дагніно та Р. Родрігеса-Саїда [108] наведено властивості алгебри бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$.

Алгебра бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$ має чотири ідемпотенти [108]:

$$\begin{aligned} i_1 &:= \frac{1+e+f+g}{4}, \quad & i_2 &:= \frac{1-e-f+g}{4}, \\ i_3 &:= \frac{1+e-f-g}{4}, \quad & i_4 &:= \frac{1-e+f-g}{4}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

для яких виконуються співвідношення:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 1, \quad i_k^2 = i_k, \quad i_k i_l = 0, \quad k \neq l, \quad k, l = 1,2,3,4.$$

Позначимо через $\mathbb{W}_4(i_k) := i_k \mathbb{W}_4$ – головні ідеали, породжені ідемпотентами $i_k, k = 1,2,3,4$ (1.3).

Лема 1.1.1 [108]. *При* $k \neq l,\ k, l = 1,2,3,4$, *справедлива рівність*

$$\mathbb{W}_4(i_k) \cap \mathbb{W}_4(i_l) = 0.$$

Алгебру $\mathbb{W}_4$ можна зобразити у вигляді ідемпотентного розкладу, який називають розкладом Пірса [108]:

$$\mathbb{W}_4 = \mathbb{W}_4(i_1) \oplus \mathbb{W}_4(i_2) \oplus \mathbb{W}_4(i_3) \oplus \mathbb{W}_4(i_4), \tag{1.4}$$

де $\oplus$ – операція прямої суми.

Лема 1.1.2 [108]. *Кожне бігіперболічне число*

$$\alpha = a_0 + a_1 e + a_2 f + a_3 g, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

можна записати у вигляді

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4,$$

де i_k *– ідемпотенти* (1.3), $r_k \in \mathbb{R}, k = 1,2,3,4$.

Лема 1.1.3 [108]. *Для ідеалів* $\mathbb{W}_4(i_k)$ *виконується рівність*

$$\mathbb{W}_4(i_k) = i_k \mathbb{R}, \quad k = 1,2,3,4.$$

Позначимо область всіх дільників нуля алгебри $\mathbb{W}_4$ через $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$.

Легко бачити [108], якщо у правій частині суми (1.4) відсутній хоча б один доданок, то елементи такої суми належать області дільників нуля $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$. Зрозуміло, що справедливо і зворотне – якщо бігіперболічне число

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4$$

є дільником нуля, то існує індекс $k = 1,2,3,4$ такий, що $r_k = 0$.

Отже, бігіперболічне число α є дільником нуля тоді і тільки тоді, коли хоча б одне із чисел $r_k, k = 1,2,3,4$, дорівнює нулеві, тобто

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_{4,0}} \Leftrightarrow r_k = 0, \quad k = 1,2,3,4.$$

1.2. Моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних комутативних алгебрах

1.2.1. Алгебраїчно-аналітичний метод знаходження розв’язків ДРЧП

Алгебраїчно-аналітичний метод знаходження розв’язків ДРЧП за допомогою вивчення властивостей моногенних функцій, які набувають значень у скінченновимірних комутативних алгебрах, асоційованих з даними ДРЧП, очевидно, бере свій початок із добре відомого факту, що дійсна $u(x,y)$ і уявна $v(x,y)$ частини комплексної голоморфної функції

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

є гармонічними функціями двох змінних, тобто $u(x,y)$ і $v(x,y)$ є розв’язками двовимірного диференціального рівняння Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) h(x,y) = 0.$$

Згодом таку властивість диференційовних функцій було узагальнено на широкий клас комутативних гіперкомплексних систем.

У роботі С. Плакси [20] подано детальний огляд результатів, що відображають становлення та розвиток зазначеного алгебраїчно-аналітичного підходу. Нижче висвітлено основні із цих результатів, які передують дисертаційному дослідженню.

У статті П. Кетчума [63] було вперше використано аналітичні функції зі значеннями у комутативній тривимірній гармонічній алгебрі для побудови розв’язків тривимірного диференціального рівняння Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h(x,y,z) = 0.$$

Як одним із прикладів гармонічної алгебри П. Кетчум розглянув алгебру кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{R})$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ (означення 1.1.3), оскільки її можна зобразити у вигляді двовимірної алгебри $\mathbb{B}_2(\mathbb{C})$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ (1.2).

Згодом ідеї диференційовності функцій зі значеннями у комутативних гіперкомплексних системах та їх можливі застосування для знаходження розв'язків ДРЧП стали об'єктом дослідження багатьох математиків, наприклад, Е. Лорха [77], Р. Вагнера [129], Дж. Ворда [130], Е. Блюма [32], К. Кунца [76].

У середині 70-х років І. Мельниченко [81], використовуючи в якості моногенних неперервні й диференційовні за Гато гіперкомплексні функції, започаткував новий алгебраїчно-аналітичний підхід до еліптичних рівнянь математичної фізики, ідея якого полягає у знаходженні комутативної асоціативної банахової алгебри такої, щоб диференційовні за Гато функції зі значеннями у цій алгебрі мали компоненти, які є розв'язками заданих ДРЧП.

Згодом І. Мельниченком [82, 83] представлено такі алгебри для тривимірного диференціального рівняння Лапласа. У роботі І. Мельниченка та С. Плакси [84], а пізніше в їх спільній монографії, посилання на яку можна знайти в статті С. Плакси [20], вивчено алгебри для еліптичних рівнянь з виродженням на осі, що описують потенціальні поля з осьовою симетрією. В. Ковальовим та І. Мельниченком [72], С. Грищуком [2, 3, 47, 50], С. Грищуком і С. Плаксою [51–57] та В. Шпаківським [122] досліджено алгебри для двовимірного бігармонічного рівняння. Також В. Ковальовим та І. Мельниченком, а пізніше С. Грищуком вивчено алгебри для узагальненого бігармонічного рівняння зі значеннями у напівпростій алгебрі [4–6, 48]. У роботах С. Грищука [7, 8, 49] вивчається загальний випадок узагальненого бігармонічного рівняння, відповідне характеристичне рівняння якого має різні кратності.

Застосування властивостей моногенних функцій для вивчення часткових розв'язків ДРЧП зі сталими коефіцієнтами описано в статті

А. Погоруя, Р. Родрігеса-Дагніно та М. Шапіро [109], а зі змінними коефіцієнтами – у роботі А. Погоруя та Р. Родрігеса-Дагніно [107].

Статті С. Шпаківського й Т. Кузьменко [29, 123] та кандидатську дисертацію Т. Кузьменко [18] присвячено розробленню схеми дослідження G-моногенних (диференційовних за Гато) відображень зі значеннями в некомутативній алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, використовуючи схему дослідження моногенних функцій зі значеннями у скінченновимірних комутативних алгебрах. У роботі С. Шпаківського й Т. Кузьменко [124] вивчено клас H-аналітичних (диференційовних за Хаусдорфом) функцій у тривимірній некомутативній алгебрі $\widetilde{\mathbb{A}}_2$ над полем $\mathbb{C}$. Усі H-аналітичні функції описано в явному вигляді, за допомогою якого наведено інтегральне зображення цих функцій. Показано застосування H-аналітичних функцій для знаходження часткових розв’язків ДРЧП.

У докторській дисертації [28] В. Шпаківським запропоновано процедуру побудови нескінченного сімейства розв’язків лінійних ДРЧП зі сталими коефіцієнтами за допомогою дослідження моногенних функцій, що набувають значень у скінченновимірних комутативних асоціативних алгебрах. Розроблений метод використовується для побудови розв’язків деяких рівнянь математичної фізики.

Наведемо необхідні конструкції алгебраїчно-аналітичного методу.

Нехай $\mathbb{A}$ – скінченновимірна комутативна унітарна алгебра над полем $\mathbb{K}$ (дійсних $\mathbb{R}$ або комплексних $\mathbb{C}$ чисел), $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

Позначимо через

$$\{e_0, e_1, \dots, e_n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

деякий базис алгебри $\mathbb{A}$, де e_0 – одиничний елемент.

Виберемо $(m+1)$-вимірний підпростір $\mathbb{B}$ алгебри $\mathbb{A}$ з базисом

$$\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$$

при умові, що $m \le n,\ m \in \mathbb{N}$.

Нехай функція $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ має вигляд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k u_k(x), \tag{1.5}$$

де $u_k(x) = u_k(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ є $\mathbb{K}$-значними функціями $(m+1)$-ї змінної $x_i \in \mathbb{K},\ i = 0,1, \ldots m$. Тобто

$$\mathbb{B} \ni x = \sum_{i=0}^{m} e_i x_i \xrightarrow{f} \sum_{k=0}^{n} e_k u_k(x_0, x_1, \ldots, x_m),$$

$u_k : \mathbb{K}^{m+1} \to \mathbb{K},\ k = 0,1, \ldots, n.$

Означення 1.2.1 [20, 81, 96, 109]. *Функцію* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ *вигляду* (1.5) *називають диференційовною за Гато в просторі* $\mathbb{B}$, *якщо для кожної точки* $x \in \mathbb{B}$ *існує елемент* $f'(x) \in \mathbb{A}$ *такий, що виконується рівність*

$$\lim_{\mathbb{K} \ni \varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} = hf'(x) \quad \forall\, h \in \mathbb{B}, \tag{1.6}$$

де $hf'(x)$ *– добуток двох елементів* h *і* $f'(x)$ *алгебри* $\mathbb{A}$.

Означення 1.2.1 було вперше сформульовано І. Мельниченком у статті [81] і застосовано для випадку тривимірних комутативних асоціативних алгебр над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, асоційованих з тривимірним диференціальним рівнянням Лапласа [83]. Зв’язок цього означення похідної з іншими означеннями диференційовності функції в комутативних алгебрах можна знайти, наприклад, у роботі С. Плакси [20] або в монографії С. Плакси та В. Шпаківського [96].

Означення 1.2.2 [20, 96, 109]. *Функцію* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ *вигляду* (1.5) *називають моногенною в просторі* $\mathbb{B}$, *якщо вона неперервно-диференційовна й диференційовна за Гато в кожній точці* $x \in \mathbb{B}$.

Зауваження 1.2.1. Відмітимо, що у дисертації використовується поняття моногенної функції згідно означення 1.2.2, яке наведено у роботі А. Погоруя, Р. Родрігеса-Дагніно та М. Шапіро [109]. Це означення охоплює вужчий клас функцій, ніж поняття моногенної функції, яким користуються

С. Плакса [20], С. Плакса та В. Шпаківський [96], які моногенною називають неперервну й диференційовну за Гато функцію.

Згідно з означенням 1.2.1 можна зробити висновок про існування часткових похідних $\partial f/\partial x$ функції $f:\mathbb{B}\to\mathbb{A}$ в кожній точці $x\in\mathbb{B}$.

Дійсно, у статті А. Погоруя, Р. Родрігеса-Дагніно та М. Шапіро [109] показано, що якщо покласти

$$h = e_i, \quad i = 0,1,\dots,m,$$

то з рівності (1.6) одержуємо

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = e_i f'(x), \quad i = 0,1,\dots,m.$$

Теорема 1.2.1 [20, 96, 109]. *Для того, щоб неперервно-диференційовна функція* $f:\mathbb{B}\to\mathbb{A}$ *вигляду* (1.5) *була моногенною необхідно і достатньо, щоб в кожній точці* $x\in\mathbb{B}$ *існували неперервні часткові похідні*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = 0,1,\dots,m,$$

пропорційні з тим самим коефіцієнтом пропорційності для базисних елементів e_i*, тобто*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = e_i \alpha(x) \tag{1.7}$$

щоразу, коли $\alpha(x) = f'(x)$.

З рівності (1.7) одержуємо умови типу Коші-Рімана для диференційовності функції $f(x)$ у координатній формі [109]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_1} &= e_1 \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_0},\\
\sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_2} &= e_2 \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_0},\\
&\vdots\\
\sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_m} &= e_m \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_0};
\end{aligned} \tag{1.8}$$

або у векторній формі

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = e_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_0}, \quad i = 0,1, \dots, m. \tag{1.9}$$

Зауваження 1.2.2 [109]. *Умови* (1.8) і (1.9) *можна записати у симетричній формі відповідно*

$$\sum_{k=0}^{n} e_i e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} = \sum_{k=0}^{n} e_j e_k \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_i}, \quad i,j = 0, \dots, m,$$

або

$$e_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = e_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i,j = 0, \dots, m.$$

Позначимо через $C^r(\mathbb{B})$, $r = 1,2, \dots$ – клас $\mathbb{K}$-значних функцій $u : \mathbb{B} \to \mathbb{K}$, визначених у просторі $\mathbb{B}$, які є неперервно-диференційовними до порядку r включно. Якщо функція $u : \mathbb{B} \to \mathbb{K}$ належить класу $C^r(\mathbb{B})$ для довільного натурального r, то будемо вважати, що функція $u : \mathbb{B} \to \mathbb{K}$ належить класу $C^\infty(\mathbb{B})$, тобто є нескінченно неперервно-диференційовною в просторі $\mathbb{B}$.

У статті А. Погоруя [98] доведено наступну теорему.

Теорема 1.2.2 [98]. *Якщо функція* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ *вигляду* (1.5) *є моногенною й* $u_k(x)$ *є нескінченно неперервно-диференційовними* $\mathbb{K}$*-значними функціями в просторі* $\mathbb{B}$*, тобто*

$$u_k(x) \in C^\infty(\mathbb{B}), \quad u_k(x) : \mathbb{B} \to \mathbb{K}, \quad k = 0,1, \dots, n,$$

то існують $f'(x), f''(x), \dots, f^r(x)$ *– похідні функції* f*, які є моногенними, де*

$$f^r(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{\partial^r u_k(x)}{\partial x_i^r}, \quad i = 0,1, \dots, m, \quad r \geq 1.$$

Для натуральних чисел r і m введемо однорідний поліном над полем $\mathbb{K}$ [109]:

$$P(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) := \sum_{i_0 + i_1 + \dots + i_m = r} C_{i_0, i_1, \dots, i_m} \xi_0^{i_0} \xi_1^{i_1} \dots \xi_m^{i_m}, \tag{1.10}$$

де $C_{i_0, i_1, \dots, i_m} \in \mathbb{K}$.

Розглянемо ДРЧП вигляду

$$P(\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_m)\ [u(x_0, x_1, \dots, x_m)] = 0, \tag{1.11}$$

де

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 0, \dots, m.$$

Теорема 1.2.3 [109]. *Нехай* P *– поліном* (1.10). *Функція* $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ *має вигляд* (1.5), *тобто*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k u_k(x),$$

причому $f(x)$ *і всі її похідні* $f'(x), f''(x), \dots, f^r(x)$ *– моногенні функції. Припустимо, що базис* $\{\, e_0, e_1, \dots, e_m\}$ *підпростору* $\mathbb{B}$ *алгебри* $\mathbb{A}$ *такий, що*

$$P(\, e_0, e_1, \dots, e_m) = 0.$$

Тоді функції $C^\infty(\mathbb{B}) \ni u_k(x) \colon \mathbb{B} \to \mathbb{K}, k = 0, \dots, n,$ *є розв'язками рівняння* (1.11).

1.2.2. Узагальнене телеграфне рівняння

Нехай $f(t,x)$ – функція щільності розподілу процесу $x(t)$ (положення x частинки в момент часу t), тобто

$$f(t,x)\,dx = P\{x \le x(t) \le x + dx\}.$$

У роботі А. Погоруя та Р. Родрігеса-Дагніно [104] одержано ДРЧП вищого порядку (узагальнене телеграфне рівняння) для функції щільності $f(t,x)$ розподілу випадкового одновимірного руху $x(t)$ однієї частинки з узагальненим ерлангівським розподілом часових інтервалів між послідовними змінами швидкостей

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\right)^m f(t,x) - \lambda^{2m} f(t,x) = 0, \tag{1.12}$$

де $v > 0$ – швидкість частинки, λ – параметр розподілу Ерланга m-го порядку, $\lambda, m \in \mathbb{N}$ – натуральні числа.

У статті А. Погоруя [99] показано, що $f(t,x)$ є узагальненою функцією щільності розподілу процесу $x(t)$, яку можна записати у вигляді

$$f(t,x) = f_c(t,x) + f_s(t,x),$$

де $f_c(t,x)$ – абсолютно неперервна компонента розподілу процесу $x(t)$ відносно міри Лебега на прямій, а $f_s(t,x)$ – сингулярна компонента цього розподілу.

Лема 1.2.1 [99]. *Сингулярна компонента* $f_s(t,x)$ *узагальненої функції щільності* $f(t,x)$ *має вигляд*

$$f_s(t,x) = \exp(-\lambda t)\left(\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)\delta(tv - x).$$

Наслідок 1.2.1 [99]. *Абсолютно неперервна компонента* $f_c(t,x)$ *узагальненої функції щільності* $f(t,x)$ *задовольняє рівняння* (1.12) *для* $t < \left|\frac{x}{v}\right|$.

Поведінка абсолютно неперервної компоненти $f_c(t,x)$ біля ліній сингулярності $t = \pm\frac{x}{v}$ узагальненої функції щільності $f(t,x)$ задовольняє умови наступної леми.

Лема 1.2.2 [99]. *Для* $m \geq 2$ *маємо:*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{P\{0 < t - x(t) < \varepsilon\}}{\varepsilon} = \frac{\lambda^m t^{m-1}\exp(-\lambda t)}{2(m-1)!},$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{P\{t + x(t) < \varepsilon\}}{\varepsilon} = 0.$$

Зауваження 1.2.3 [99]. *Узагальнена функція щільності* $f(t,x)$ *має вигляд відповідно до розподілів, для яких абсолютно неперервна компонента* $f_c(t,x)$ *задовольняє умови:*

$$\lim_{x\uparrow t} f_c(t,x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{P\{0 < t - x(t) < \varepsilon\}}{\varepsilon},$$

$$\lim_{x\downarrow -t} f_c(t,x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{P\{t + x(t) < \varepsilon\}}{\varepsilon}.$$

Сформульовані вище твердження визначають формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$, яка задовольняє рівняння (1.12).

Відмітимо, що при $m = 1,\ v = 1,\ \lambda = 1$ рівняння (1.12) є звичайним телеграфним рівнянням, розв’язки якого добре відомі.

У роботі А. Погоруя [99] з використанням алгебраїчно-аналітичного методу моногенних функцій у випадку комутативних алгебр, знайдено формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$ розподілу процесу $x(t)$ при $m=2,\ v=1,\ \lambda=1$ і з початковою умовою $f(0,x)=\delta(x)$, де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака. Ця формула для функції $f(t,x)$ задовольняє рівняння (1.12).

1.2.3. Узагальнене біхвильове рівняння

У статті Л. Собреро [126] описано чотиривимірну комутативну асоціативну алгебру над полем $\mathbb{R}$, асоційовану з бігармонічним рівнянням

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)v(x,y)=0. \tag{1.13}$$

У роботах С. Грищука [2, 3, 47, 50], С. Грищука та С. Плакси [51–57], С. Плакси, С. Грищука та В. Шпаківського [94], В. Шпаківського [122] встановлено зв'язок між розширенням будь-якої моногенної функції та бігармонічними функціями, які задовольняють бігармонічне рівняння (1.13).

С. Грищуком у статтях [5, 6] вивчено співвідношення між розв'язками узагальненого бігармонічного рівняння вигляду

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2p\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)v(x,y)=0, \tag{1.14}$$

де $p>1$, та моногенними функціями, які набувають значень у напівпростій алгебрі, й наведено застосування цього рівняння до деяких випадків плоскої ортотропії. У роботі [4] одержано характеризацію розв'язків $v(x,y)$ рівняння (1.14) в обмежених однозв'язних областях при $-1<p<1$, а в статті [48] (Теорема 2.2, стор. 167) автором знайдено опис усіх базисів, які задовольняють відповідне співвідношення для базисних елементів. У роботі [7] вивчається загальний випадок, коли диференціальний оператор у формулі (1.14) є сумою будь-яких часткових похідних вигляду

$$\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}},\quad k_1+k_2=4,$$

з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$, а відповідне характеристичне рівняння має лише прості корені. Знайдено застосування відповідних моногенних функцій для плоскої анізотропної теорії пружності в роботах [4–6] та [7].

Статті [8, 49] присвячені дослідженню узагальненого оператора, який розглядається у роботі [7] у випадку, коли характеристичне рівняння має кратність більшу, ніж один.

Рівняння

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2c\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) v(x, y) = 0 \qquad (1.15)$$

є узагальненим рівнянням, яке включає рівняння (1.13) і (1.14). Дійсно, при $c = -1$ одержуємо бігармонічне рівняння вигляду (1.13), а при $c < -1$ маємо узагальнене бігармонічне рівняння вигляду (1.14) для $p > 1$.

Відмітимо, що при $c = 1$ рівняння (1.15) є біхвильовим рівнянням, розв'язки якого добре відомі.

Для випадку $1 \neq c > 0$ рівняння (1.15) будемо називати *узагальненим біхвильовим рівнянням*.

1.3. Моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних некомутативних алгебрах

Добре відомо, наприклад, із роботи А. Садбері [128], що якщо для кватерніоннозначних функцій

$$f(x), \quad x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H},$$

вимагати диференційовність аналогічно диференційовності функції в комплексному аналізі (з урахуванням некомутативності), то диференційовними будуть тільки лінійні кватерніоннозначні функції

$$f(x) = ax + b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{H}.$$

Щоб одержати більш змістовний результат, використовуються інші означення диференційовності. Зокрема, Г. Мойсіл і Н. Теодореско [85] та Р. Фуетер [42] вивчали відповідно тривимірне та чотиривимірне узагальнення систем рівнянь (умов типу) Коші-Рімана для функцій, що набувають значень в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$.

У 1936 році в роботі [43] швейцарський математик Р. Фуетер ввів поліноми в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$, які мають вигляд:

$$p_1(x) = x_1 - ix_0, \quad p_2(x) = x_2 - jx_0, \quad p_3(x) = x_3 - kx_0,$$

де $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ – дійсні числа.

Для цього Р. Фуетер використав ідею комплексного аналізу, що функція $f(x,y) \in \mathbb{C}$ є *диференційовною* (в будь-якій точці комплексної множини $\mathbb{C}$), якщо

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = 0,$$

і розглянув оператор в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$ у вигляді

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + j\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial v}.$$

Функція $f(x,y,z,v)$ зі значеннями в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$ називається *моногенною* (диференційовною в кожній точці множини $\mathbb{H}$), якщо

$$Df(x,y,z,v) = 0.$$

Тоді цей підхід можна поширити на будь-яку підмножину $\mathbb{H}$.

Д. Алпай, М. Шапіро й Д. Волок [31] з використанням поліномів Фуетера знайшли розвинення диференційовних кватерніоннозначних функцій в ряд за цими поліномами. Розвинення диференційовних кокватерніонозначних функцій в ряд за аналогом поліномів Фуетера було одержано в статті А. Погоруя та Р. Родрігеса-Дагніно [106].

Монографію Ф. Бракса, Р. Деланже та Ф. Соммена [34] присвячено детальному вивченню сучасного кліффордового аналізу. Застосування кліффордового аналізу для знаходження розв’язків ДРЧП вищого порядку показано в публікації Е. Оболашвілі [88].

Взаємозв’язки між поняттями диференційовності функцій у кватерніонному та кліффордовому аналізі вивчено в роботах Р. Деланже, Р. Краусхара й Г. Малонека [39] та Х. Борі-Рейеса й М. Шапіро [33].

У статті Ф. Соммена та Х. Шеппер [127] наведено різні означення моногенних функцій зі значеннями в кліффордових алгебрах.

1.4. Міра зі значеннями у скінченновимірних алгебрах

Очевидно вперше комплекснозначну міру w було введено й досліджено У. Рудіним у роботі [114], де вивчено властивості такої міри та доведено аналоги теорем Лебега й Радона-Никодима.

Нехай X – непорожня множина, $\mathfrak{M}$ – σ-алгебра підмножин X.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел. Для будь-яких натуральних індексів $i, j \in \mathbb{N}$ розглянемо сукупність множин

$$\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M},$$

які є розбиттям множини E, тобто

$$E = \bigcup_{i \geq 1} E_i, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Означення 1.4.1 [114]. *Комплекснозначною мірою називається комплекснозначна функція*

$$w = w(E) : \mathfrak{M} \to \mathbb{C},$$

яка визначена на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ *і така, що*

$$w = w(E) = \sum_{i=1}^{\infty} w(E_i) \tag{1.16}$$

для будь-якої множини $E \in \mathfrak{M}$ *і кожного розбиття* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ *множини* E.

Зауваження 1.4.1 [114]. *Для коректного означення сума ряду в* (1.16) *має бути однаковою для будь-якого розбиття* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ *множини* E *й не залежати від перестановки членів. Тому припускаємо, що ряд* (1.16) *є абсолютно збіжним.*

Властивості ймовірнісних мір, що набувають значень в алгебрі гіперболічних чисел $\mathbb{W}$ і задовольняють аналоги аксіом Колмогорова, вивчено в статті Д. Алпая, М. Луни-Елізаррарас і М. Шапіро [30], де базові властивості класичної дійснозначної ймовірнісної міри P узагальнено на випадок гіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}}$.

Р. Кумаром і К. Шармою в роботі [74] узагальнено аналоги основних положень теорії ймовірностей в алгебрі гіперболічних чисел $\mathbb{W}$, зокрема визначено поняття гіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}}$ та її числових характеристик. Цими ж авторами вивчено властивості класичної дійснозначної міри μ у випадку, коли міра набуває значень в алгебрі $\mathbb{W}$ [75]. У статті Ч. Гоша, С. Бісваса й Т. Ясіна [44] узагальнено результати робіт [30] і [75] та одержано гіперболічні аналоги основних тверджень для гіперболічнозначної міри $\mu_{\mathbb{W}}$ і гіперболічнозначної знакової міри (заряду) $\lambda_{\mathbb{W}}$.

Висновки до першого розділу

У першому розділі проведено огляд результатів попередніх досліджень, пов'язаних із темою дисертації, подано допоміжні теоретичні відомості та необхідні алгебраїчні конструкції. Зокрема, наведено означення гіперкомплексних систем, які використовуються у дисертації, та їх властивості. Представлено огляд відомих результатів застосування алгебраїчно-аналітичного методу знаходження розв'язків ДРЧП за допомогою вивчення властивостей моногенних функцій, які задовольняють рівняння (умови типу) Коші-Рімана, на асоційованих з цим ДРЧП скінченновимірних комутативних алгебрах. Сформульовано необхідні твердження, які розкривають суть методу. Зроблено короткий опис відомих розв'язків узагальнених телеграфного та біхвильового рівнянь, одержаних з використанням алгебраїчно-аналітичного підходу у випадку комутативних алгебр. Проведено аналіз публікацій з кватерніонного та кліффордового аналізу, в яких можна знайти різні означення диференційовності функції та їх застосування. Здійснено огляд відомих результатів з комплексної та гіперкомплексної теорії міри й теорії ймовірностей у скінченновимірних алгебрах.

Основні відомості першого розділу можна знайти в публікаціях здобувачки [15; 70; 71; 79; 100; 102; 103].

РОЗДІЛ 2

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МОНОГЕННИХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ АЛГЕБРАХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

2.1. Моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних комутативних алгебрах, асоційованих з ДРЧП та системами ДРЧП

2.1.1. Поліноміальні рівняння в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

Розглянемо алгебру кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{R})$, визначену в першому розділі (означення 1.1.3). Якщо в алгебрі $\mathbb{B}_4(\mathbb{R})$ замінити дійсні коефіцієнти $\mathbb{R}$ при базисних змінних на комплексні $\mathbb{C}$, то одержуємо алгебру, яку будемо називати *алгеброю комплексних кватерніонів Сегре*

$$\mathbb{B}_4(\mathbb{C}) = \{c_0 + c_1 j + c_2 k + c_3 f \mid c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\} \tag{2.1}$$

з базисом $\{1, j, k, f\}$ і з такою ж таблицею множення для базисних елементів:

$$j^2 = k^2 = -f^2 = -1, \quad jk = kj = f, \quad jf = fj = -k, \quad kf = fk = -j.$$

Крім цього, уявні одиниці $j, k, f \in \mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ комутують з комплексною уявною одиницею $i \in \mathbb{C}$. Легко перевірити, що алгебра $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ є комутативною асоціативною алгеброю над полем $\mathbb{C}$.

Позначимо через

$$p = ij = ji, \quad q = ik = ki, \quad r = if = fi.$$

Тоді чотиривимірну алгебру $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ над полем $\mathbb{C}$ можна зобразити у вигляді дійсної восьмивимірної алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{B}_8(\mathbb{R}) =$$

$$= \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 f + a_5 p + a_6 q + a_7 r \mid a_l \in \mathbb{R},\ \ l = 0,1, \dots 7\},$$

де множення базисних одиниць $\{1, i, j, k, f, p, q, r\}$ визначається таблицею Келі.

Таблиця Келі алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$

	1	i	j	k	f	p	q	r
1	1	i	j	k	f	p	q	r
i	i	-1	p	q	r	$-j$	$-k$	$-f$
j	j	p	-1	f	$-k$	$-i$	r	$-q$
k	k	q	f	-1	$-j$	r	$-i$	$-p$
f	f	r	$-k$	$-j$	1	$-q$	$-p$	i
p	p	$-j$	$-i$	r	$-q$	1	$-f$	k
q	q	$-k$	r	$-i$	$-p$	$-f$	1	j
r	r	$-f$	$-q$	$-p$	i	k	j	-1

Наведемо основні алгебраїчні властивості алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.

Твердження 2.1.1. *Алгебра Сегре* $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ *є восьмивимірною комутативною асоціативною алгеброю над полем дійсних чисел* $\mathbb{R}$.

Доведення. Комутативність операції множення безпосередньо випливає з таблиці Келі алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$. Асоціативність й дистрибутивність перевіряються прямими обчисленнями. Твердження доведено.

Розглянемо чотири елементи алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1-f+p+q}{4}, & i_2 &= \frac{1+f-p+q}{4}, \\ i_3 &= \frac{1+f+p-q}{4}, & i_4 &= \frac{1-f-p-q}{4}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Лема 2.1.1. *Елементи* i_1, i_2, i_3, i_4 *вигляду* (2.2) *задовольняють умови*:

$$1)\ i_1^2 = i_1, \quad i_2^2 = i_2, \quad i_3^2 = i_3, \quad i_4^2 = i_4, \tag{2.3}$$

тобто i_1, i_2, i_3, i_4 *є ідемпотентами алгебри Сегре* $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$;

$$2)\ i_k \cdot i_m = i_m \cdot i_k = 0, \quad k, m = 1,2,3,4, \quad k \neq m; \tag{2.4}$$

$$3)\ i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 1. \tag{2.5}$$

Доведення.

1) Згідно з даними таблиці Келі алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ одержуємо

$$i_1^2 = \left(\frac{1-f+p+q}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}(1 - f^2 + p^2 + q^2 - 2f + 2p + 2q - 2fp - 2fq + 2pq) =$$

$$= \frac{1}{16}(4 - 4f + 4p + 4q) = \frac{1-f+p+q}{4} = i_1.$$

Отже, елемент i_1 є ідемпотентом алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.

Аналогічно можна перевірити для інших елементів (2.3).

2) Для ідемпотентів i_1 та i_2 маємо

$$i_1 \cdot i_2 = \frac{1-f+p+q}{4} \cdot \frac{1+f-p+q}{4} =$$

$$= \frac{1}{16}(1 + f - p + q - f - f^2 + fp - fq +$$

$$+p + pf - p^2 + pq + q + qf - qp + q^2) = \frac{1}{16}(1 + f - p +$$

$$+q - f - 1 - q + p + p - q - 1 - f + q - p + f + 1) = i_2 \cdot i_1 = 0.$$

Такий же результат одержуємо, перевіривши інші рівності (2.4).

3) Для i_1, i_2, i_3, i_4 виконується рівність

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = \frac{1-f+p+q}{4} + \frac{1+f-p+q}{4} +$$

$$+ \frac{1+f+p-q}{4} + \frac{1-f-p-q}{4} = 1.$$

Лему доведено.

Нехай $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 f + x_5 p + x_6 q + x_7 r \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.

Лінійний підпростір

$$\mathbb{B}_8(x) = \{yx : y \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})\} = \mathbb{B}_8(\mathbb{R})x \subset \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$$

будемо називати *головним ідеалом* алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, що породжений вектором x.

Позначимо через

$$\mathbb{B}_8(i_1), \quad \mathbb{B}_8(i_2), \quad \mathbb{B}_8(i_3), \quad \mathbb{B}_8(i_4)$$

головні ідеали алгебри $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, породжені відповідними ідемпотентами (2.2):

$$\mathbb{B}_8(i_k) = \mathbb{B}_8(\mathbb{R})i_k = \{yi_k, y \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})\}, \quad k = 1,2,3,4.$$

Твердження 2.1.2. *Нехай* i_k, i_m, $k, m = 1,2,3,4$ *– ідемпотенти* (2.2). *Якщо* $x \in \mathbb{B}_8(i_k)$, $y \in \mathbb{B}_8(i_m)$, $k \neq m$, *то виконується рівність*

$$x \cdot y = 0.$$

Доведення. Дійсно, оскільки

$$x \in \mathbb{B}_8(i_k), \quad y \in \mathbb{B}_8(i_m),$$

то існують елементи $x_0, y_0 \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ такі, що

$$x = x_0 i_k, \quad y = y_0 i_m.$$

З урахуванням комутативності алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ та формули (2.4) леми 2.1.1 маємо

$$xy = x_0 y_0 i_k i_m = 0.$$

Твердження доведено.

Твердження 2.1.3. *Алгебру Сегре* $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ *можна зобразити у вигляді розкладу Пірса, тобто прямої суми головних ідеалів:*

$$\mathbb{B}_8(\mathbb{R}) = \mathbb{B}_8(i_1) \oplus \mathbb{B}_8(i_2) \oplus \mathbb{B}_8(i_3) \oplus \mathbb{B}_8(i_4),$$

де $\oplus$ *– операція прямої суми.*

Доведення. Оскільки ідеали

$$\mathbb{B}_8(i_k), \quad k = 1,2,3,4,$$

є ортогональними лінійними підпросторами $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ і

$$\mathbb{B}_8(i_k) \cap \mathbb{B}_8(i_m) = 0, \quad k \neq m,$$

то з урахуванням (2.5) робимо висновок про можливість зображення алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ у вигляді розкладу Пірса. Твердження доведено.

Із властивостей ідемпотентів (2.4) випливає, що елементи головних ідеалів $\mathbb{B}_8(i_k)$, $k = 1,2,3,4$, є дільниками нуля алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$.

Лема 2.1.2. *Нехай* $\mathbb{C}$ *– множина комплексних чисел. Тоді*

$$\mathbb{B}_8(i_k) = \mathbb{C}i_k, \quad k = 1,2,3,4.$$

Доведення. Нехай $k = 1$ і $y \in \mathbb{B}_8(i_1)$. Тоді існують дійсні числа $y_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,\ldots,7$, для яких виконується рівність

$$y = (y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k + y_4 f + y_5 p + y_6 q + y_7 r) i_1 =$$
$$= \frac{1}{4}(y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k + y_4 f + y_5 p + y_6 q + y_7 r) -$$
$$- \frac{1}{4}(y_0 f + y_1 r - y_2 k - y_3 j + y_4 - y_5 q - y_6 p + y_7 i) +$$
$$+ \frac{1}{4}(y_0 p - y_1 j - y_2 i + y_3 r - y_4 q + y_5 - y_6 f + y_7 k) +$$
$$+ \frac{1}{4}(y_0 q - y_1 k + y_2 r - y_3 i - y_4 p - y_5 f + y_6 + y_7 j) =$$
$$= (y_0 - y_4 + y_5 + y_6) i_1 + \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 - y_7)(i - j - k - r) =$$
$$= \big((y_0 - y_4 + y_5 + y_6) + (y_1 - y_2 - y_3 - y_7) i\big) i_1 = c i_1,$$

де

$$c = y_0 - y_4 + y_5 + y_6 + (y_1 - y_2 - y_3 - y_7) i \in \mathbb{C}.$$

Аналогічно можна довести для випадків, коли $k = 2,3,4$. Лему доведено.

Таким чином, з урахуванням результатів леми 2.1.1 та леми 2.1.2 робимо висновок, що поліноміальні рівняння, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, можна звести до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$.

Теорема 2.1.1. *Поліноміальне рівняння натурального степеня* $m \in \mathbb{N}$

$$P_m(\xi) = a_m \xi^m + a_{m-1} \xi^{m-1} + \dots + a_0 = 0 \qquad (2.6)$$

з коефіцієнтами, що набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, *тобто*

$$\xi, a_\lambda \in \mathbb{B}_8(\mathbb{R}), \quad \lambda = 0,1,\dots,m,$$

можна звести до системи із чотирьох поліноміальних рівнянь (2.9) *з комплексними коефіцієнтами* $\mathbb{C}$.

Доведення. Відповідно до леми 2.1.1 розглянемо розклад:

$$\begin{gathered} a_\mu = a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + a_\mu^{(3)} + a_\mu^{(4)}, \quad \mu = 0,1,\dots m, \\ \xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, \end{gathered} \qquad (2.7)$$

де $a_\mu^{(n)}$, $\xi_n \in \mathbb{B}_8(i_n)$, $n = 1,2,3,4$.

Слід відзначити, що

$$a_{\mu}^{(\eta)} a_{\mu}^{(\nu)} = 0; \quad \xi_{\eta}\xi_{\nu} = 0; \quad a_{\mu}^{(\eta)}\xi_{\nu} = 0, \;\; \eta \neq \nu.$$

Підставивши (2.7) у (2.6), одержуємо систему поліноміальних рівнянь

$$\begin{cases} a_m^{(1)}\xi_1^m + a_{m-1}^{(1)}\xi_1^{m-1} + \dots + a_0^{(1)} = 0, \\ a_m^{(2)}\xi_2^m + a_{m-1}^{(2)}\xi_2^{m-1} + \dots + a_0^{(2)} = 0, \\ a_m^{(3)}\xi_3^m + a_{m-1}^{(3)}\xi_3^{m-1} + \dots + a_0^{(3)} = 0, \\ a_m^{(4)}\xi_4^m + a_{m-1}^{(4)}\xi_4^{m-1} + \dots + a_0^{(4)} = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

З урахуванням леми 2.1.2 отримуємо:

$$a_{\mu}^{(n)} = c_{\mu}^{(n)} i_n, \quad \xi_n^{\mu} = z_n^{\mu} i_n, c_{\mu}^{(n)}, \quad z_n^{\mu} \in \mathbb{C}, \quad n = 1,2,3,4.$$

Якщо підставити значення виразів для $a_{\mu}^{(n)}$ і ξ_n^{μ} у кожне рівняння системи (2.8) та винести за дужки i_n $(n = 1,2,3,4)$ з n-го рівняння цієї системи, то одержуємо систему з чотирьох рівнянь з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} c_m^{(1)}z_1^m + c_{m-1}^{(1)}z_1^{m-1} + \dots + c_0^{(1)} = 0, \\ c_m^{(2)}z_2^m + c_{m-1}^{(2)}z_2^{m-1} + \dots + c_0^{(2)} = 0, \\ c_m^{(3)}z_3^m + c_{m-1}^{(3)}z_3^{m-1} + \dots + c_0^{(3)} = 0, \\ c_m^{(4)}z_4^m + c_{m-1}^{(4)}z_4^{m-1} + \dots + c_0^{(4)} = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Теорему доведено.

Теорема 2.1.2. *Нехай* $\left\{r_1^{(s)}, r_2^{(s)}, \dots, r_m^{(s)}\right\}$, $s = 1,2,3,4$, *є множиною комплексних нулів полінома*

$$c_m^{(s)}z_s^m + c_{m-1}^{(s)}z_s^{m-1} + \dots + c_0^{(s)} = 0.$$

Тоді розклад у вигляді прямої суми

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4,$$

де $S_k = \left\{r_1^{(k)} i_k, r_2^{(k)} i_k, \dots, r_m^{(k)} i_k\right\}$, $k = 1,2,3,4$, *є множиною розв'язків рівняння* (2.6).

Доведення. Для доведення цієї теореми достатньо провести хід доведення теореми 2.1.1 у зворотньому напрямку. Теорему доведено.

Зауваження 2.1.1. *Легко перевірити, що рівняння* (2.6) *має* m^4 *коренів.*

2.1.2. Формула узагальненої функції щільності $f(t,x)$, яка задовольняє узагальнене телеграфне рівняння шостого порядку

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

Розглянемо узагальнене телеграфне рівняння у вигляді (1.12) (§1.2.2):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial x}+\lambda\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}+\lambda\right)^m f(t,x)-\lambda^{2m}f(t,x)=0,$$

де $v>0$ – швидкість частинки, λ – параметр розподілу Ерланга m-го порядку, $\lambda,m\in\mathbb{N}$ – натуральні числа.

Поклавши $m=3$ у рівнянні (1.12), одержуємо ДРЧП шостого порядку:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-v\frac{\partial}{\partial x}+\lambda\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}+\lambda\right)^3 f(t,x)-\lambda^{6}f(t,x)=0, \qquad (2.10)$$
$$f(0,x)=\delta(x),$$

де $f(t,x)$ є узагальненою функцією щільності розподілу випадкового одновимірного руху $x(t)$ частинки в момент часу t, $v>0$ – швидкість частинки, λ – параметр розподілу Ерланга 3-го порядку, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

Відмітимо, що під розв'язком рівняння (2.10) будемо розуміти формулу, що задає вигляд узагальненої функції щільності $f(t,x)$.

Нагадаємо (§1.2.2), що функція $f(t,x)$ є сумою абсолютно неперервної $f_c(t,x)$ та сингулярної $f_s(t,x)$ компонент:

$$f(t,x)=f_c(t,x)+f_s(t,x).$$

Застосувавши перетворення

$$f(t,x)=\exp(\lambda t)g(t,x)$$

і заміну змінної $y=\frac{x}{v}$, рівняння (2.10) запишемо у вигляді

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^3 g_c(t,y)-\lambda^6 g_c(t,y)=0 \qquad (2.11)$$

з сингулярною компонентою (лема 1.2.1)

$$g_s(t,y)=\left(\sum_{i=0}^{2}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)\delta(t-y).$$

Покладемо $v = 1,\ \lambda = 1$. Введемо функцію

$$f(t, y, z) = \exp(z) g_c(t, y).$$

Тоді рівняння (2.11) зводимо до рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^3 f(t, y, z) - \frac{\partial^6}{\partial z^6} f(t, y, z) = 0. \qquad (2.12)$$

Знайдемо розв’язок рівняння (2.12), використовуючи алгебраїчно-аналітичний метод моногенних функцій у випадку комутативних алгебр та спеціальний підхід, розроблений А. Погоруєм [99] для ДРЧП четвертого порядку (узагальненого телеграфного рівняння (1.12) при $m = 2$).

Нехай $\mathbb{A}_0$ – шестивимірна скінченновимірна комутативна алгебра над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Припустимо, що множина

$$\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

є базисом алгебри $\mathbb{A}_0$ з таблицею Келі

$$e_i e_j = e_{i \odot j}, \quad i, j = 0,1,2,3,4,5,$$

де $i \odot j = i + j$ (mod6).

Алгебра $\mathbb{A}_0$ має матричне зображення

$$e_k \to P_k = P_1^k, \quad k = 0,1,2 \ldots,$$

де

$$P_1 = [p_{ij}]_{i,j=\overline{0,5}},$$

$$p_{i(i+1)} = 1, \quad 0 \le i \le 4,$$

$$p_{50} = 1,$$

$$p_{ij} = 0 \text{ для інших індексів } i \text{ та } j.$$

Нехай покладемо:

$$\tau_0^l := e_l, \quad l = 0,1,2,3,4,5;$$

$$\tau_1^l := e_l i \sin\varphi, \quad l = 0,1,2,3,4,5;$$

$$\tau_2^l := e_l \cos\varphi, \quad l = 0,1,2,3,4,5;$$

$$\tau_{2k}^l := e_l \cos k\varphi, \quad \tau_{2k+1}^l := e_l i \sin(k+1)\varphi,$$

$$l = 0,1,2,3,4,5, \quad k = 0,1,2, \ldots, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Легко перевірити, що для елементів τ_{2k}^{l}, $k = 0,1,2,...$, виконується таблиця множення:

$$\tau_{2n}^{l_1} \cdot \tau_{2k}^{l_2} = \frac{1}{2}\left(\tau_{2(n-k)}^{l_1 \odot l_2} + \tau_{2(n+k)}^{l_1 \odot l_2}\right), \quad n \geq k;$$

$$\tau_{2n+1}^{l_1} \cdot \tau_{2k+1}^{l_2} = \frac{1}{2}\left(\tau_{2(n-k)+4}^{l_1 \odot l_2} - \tau_{2(n+k)}^{l_1 \odot l_2}\right), \quad k = 0, \quad n = 0,1,2,...;$$

$$\tau_{2n+1}^{l_1} \cdot \tau_{2k}^{l_2} = \frac{1}{2}\left(\tau_{2(n-k)+1}^{l_1 \odot l_2} + \tau_{2(n+k)+1}^{l_1 \odot l_2}\right), \quad n \geq k;$$

$$\tau_{2n+1}^{l_1} \cdot \tau_{2k}^{l_2} = \frac{1}{2}\left(\tau_{2k+1}^{l_1 \odot l_2} + \tau_{2k-3}^{l_1 \odot l_2}\right), \qquad n = 0, \quad k = 2,3,4,...;$$

$$\tau_{2n+1}^{l_1} \cdot \tau_{2k}^{l_2} = \frac{1}{2}\tau_{2(n+k)+1}^{l_1 \odot l_2}, \quad n = 0, \quad k = 1.$$

Введемо комутативну алгебру

$$\mathbb{A} = \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{5} \left(a_{2k}^{l}\tau_{2k}^{l} + a_{2k+1}^{l}\tau_{2k+1}^{l}\right) \mid a_{2k}^{l}, a_{2k+1}^{l} \in \mathbb{R}\right\},$$

де

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{5} \left(|a_{2k}^{l}|^2 + |a_{2k+1}^{l}|^2\right) < +\infty.$$

Відзначимо, що схожу банахову алгебру вивчали І. Мельниченко й С. Плакса [19].

Нехай

$$\mathbb{B} = \{a_0\tau_2^1 + a_1\tau_1^1 + a_2\tau_0^0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

є підпростором алгебри $\mathbb{A}$.

Введемо функцію $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ у вигляді

$$f(t, y, z) = f(e_1(t\cos\varphi + yi\sin\varphi) + z).$$

Тоді

$$f(t, y, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{5} \left(v_{2k}^{l}(t, y, z)\tau_{2k}^{l} + v_{2k+1}^{l}(t, y, z)\tau_{2k+1}^{l}\right).$$

Припустимо, що функція $f(t,y,z)$ є моногенною згідно означення 1.2.2, тобто в кожній точці підпростору $\mathbb{B}$ алгебри $\mathbb{A}$ виконуються умови типу Коші-Рімана (теорема 1.2.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,y,z) = e_1\cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial z}f(t,y,z), \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(t,y,z) = e_1 i\sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial z}f(t,y,z). \tag{2.14}$$

У цьому випадку всі функції $v_k^l(t,y,z),\ l = 0,1,2,3,4,5,\ k = 0,1,2,\dots$, є розв'язками рівняння (2.12). Дійсно,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^3 f(t,y,z) - \frac{\partial^6}{\partial z^6}f(t,y,z) = e_1^6(\cos^2\varphi - (i\sin\varphi)^2)^3 - 1 = 0.$$

Для зручності позначимо елемент e_1 через e і будемо шукати розв'язок рівняння (2.12) у вигляді

$$g_c(e(t\cos\varphi + yi\sin\varphi)) = \exp(e(t\cos\varphi + yi\sin\varphi)). \tag{2.15}$$

Оскільки

$$f(e(t\cos\varphi + yi\sin\varphi) + z) = g_c\big(e(t\cos\varphi + yi\sin\varphi)\big)\exp(z),$$

маємо

$$v_k^l(t,y,z) = u_k^l(t,y)\exp(z),\quad l = 0,1,2,3,4,5,\quad k = 0,1,2,\dots,$$

де

$$g_c(t,y) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{5}\big(u_{2k}^l(t,y)\tau_{2k}^l + u_{2k+1}^l(t,y)\tau_{2k+1}^l\big).$$

Отже, для $t \geq |y|$ одержуємо функції $u_0^l(t,y),\ l = 0,1,2,3,4,5$, з рівняння

$$\sum_{l=0}^{5} u_0^l(t,y)\tau_0^l = \sum_{l=0}^{5} u_0^l(t,y)e^l =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(e(t\cos\varphi + yi\sin\varphi))\,d\varphi = I_0\left(e\sqrt{t^2 - y^2}\right),$$

де I_0 – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку (І. Градштейн та І. Рижик [45]).

З рівностей (2.13) та (2.14) маємо умови типу Коші-Рімана у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_0^{l\odot 1} = \frac{1}{2}u_2^l,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_1^{l\odot 1} = \frac{1}{2}u_3^l,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_2^{l\odot 1} = u_0^l + \frac{1}{2}u_4^l, \tag{2.16}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_{2k-1}^{l\odot 1} = \frac{1}{2}\left(u_{2k-3}^l + u_{2k+1}^l\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_{2k}^{l\odot 1} = \frac{1}{2}\left(u_{2(k-1)}^l + u_{2(k+1)}^l\right), \quad k = 2,3,\dots, \quad l = 0,1,2,3,4,5,$$

і

$$\frac{\partial}{\partial y}u_0^{l\odot 1} = -\frac{1}{2}u_1^l,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}u_1^{l\odot 1} = u_0^l + \frac{1}{2}u_4^l,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}u_2^{l\odot 1} = -\frac{1}{2}u_3^l, \tag{2.17}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}u_{2k+1}^{l\odot 1} = \frac{1}{2}\left(u_{2k}^l + u_{2(k+2)}^l\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}u_{2k+2}^{l\odot 1} = \frac{1}{2}\left(u_{2k-1}^l - u_{2k+3}^l\right), \quad k = 1,2,\dots, \quad l = 0,1,2,3,4,5.$$

Знаючи функції $u_0^l(t,y)$, з рівностей (2.16) та (2.17) одержуємо рекурсивним способом функції $u_k^l(t,y)$ для будь-якого $k \geq 1$, які використаємо при побудові розв'язку рівняння (2.11).

Теорема 2.1.3. *Узагальнена функція щільності* $f(t,x)$ *розподілу положення* x *частинки в момент часу* t, *яка задовольняє рівняння* (2.10) *при* $v = 1,\ \lambda = 1,$ *має вигляд:*

$$f(t,x) = \frac{(t^2 + x^2)\exp(-t)}{2\Lambda_x^2} I_0(\Lambda_x) +$$
$$+\left(\frac{tx\exp(-t)}{3\Lambda_x^2} - \frac{2(3tx^2 + t^3)\exp(-t)}{3\Lambda_x^4}\right)\times$$
$$\times\left(I_0(\Lambda_x) - \omega_3 I_0(\omega_3\Lambda_x) + \omega_3^2 I_0(\omega_3^2\Lambda_x)\right) -$$

$$-\frac{(t^2+x^2)\exp(-t)}{\Lambda_x^3}I_1(\Lambda_x)+$$

$$+\left(\frac{4(3tx^2+t^3)\exp(-t)}{3\Lambda_x^5}-\frac{2tx\exp(-t)}{3\Lambda_x^3}\right)\left(I_1(\Lambda_x)-I_1(\omega_3\Lambda_x)+I_1(\omega_3^2\Lambda_x)\right)\times$$

$$\times\frac{(3tx^2+t^3)\exp(-t)}{6\Lambda_x^3}\left(I_1(\Lambda_x)-\omega_3^2I_1(\omega_3\Lambda_x)-\omega_3I_1(\omega_3^2\Lambda_x)\right)+$$

$$+\frac{t\exp(-t)}{6\Lambda_x}\left(2I_1(\Lambda_x)+\omega_3^2I_1(\omega_3\Lambda_x)+\omega_3I_1(\omega_3^2\Lambda_x)\right)+$$

$$+\delta(t-x)\exp(-t)+t\delta(t-x)\exp(-t)+\frac{t^2}{2}\delta(t-x)\exp(-t),$$

де $\Lambda_x=\sqrt{t^2-x^2}$*;* $I_k,\ k=0{,}1$ *– модифіковані функції Бесселя першого роду* k*-го порядку;* $\omega_3=\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\in\mathbb{C}$ *– один із комплексно спряжених коренів виразу* $\sqrt[3]{-1}$.

Доведення. З урахуванням леми 1.2.1 запишемо сингулярну компоненту функції щільності $f(t,x)$ при $m=3$ і $v=1,\ \lambda=1$, тобто

$$f_s(t,x)=\exp(-t)\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)\delta(t-x).$$

Тоді

$$g_s(t,y)=\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)\delta(t-y).$$

Алгебра $\mathbb{A}_0$ має вигляд

$$\mathbb{A}_0=\{a+e_1b+e_2c+e_3d+e_4q+e_5r\mid a,b,c,d,q,r\in\mathbb{R}\},$$

де елементи e та $e_l=e^l, l=0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$, мають матричні зображення:

$$e\to P_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$e_0=e^0=1,\quad e_1=e^1=e,\quad e_2=e^2,\quad e_3=e^3,$$

$$e_4=e^4,\quad e_5=e^5,\quad e_6=e^0=1.$$

Тоді для елементів τ_{2k}^{l}, $k = 0,1,2, \ldots$, одержуємо:

$$\tau_0^0 = 1, \quad \tau_{2k}^0 = \cos k\varphi, \quad \tau_{2k}^l = e_l \cos k\varphi, \quad \tau_{2k+1}^l = e_l i \sin(k+1)\varphi,$$

$$l = 0,1,2,3,4,5, \quad k = 0,1,2, \ldots, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

З використанням рівності (2.15) отримуємо

$$u_0^0(t,y) + e u_0^1(t,y) + e^2 u_0^2(t,y) + e^3 u_0^3(t,y) + e^4 u_0^4(t,y) + e^5 u_0^5(t,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(e(t\cos\varphi + yi\sin\varphi))\, d\varphi = I_0\left(e\sqrt{t^2 - y^2}\right).$$

Позначимо $\Lambda_y = \sqrt{t^2 - y^2}$. Тоді

$$I_0(e\Lambda_y) = \frac{I_0(\Lambda_y) + I_0(\omega_3\Lambda_y) + I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3} +$$

$$+ e^2 \left(\frac{I_0(\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3} \right) +$$

$$+ e^4 \left(\frac{I_0(\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3} \right),$$

де $\omega_3 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Для $t \geqslant |y|$ одержуємо:

$$u_0^1(t,y) = u_0^3(t,y) = u_0^5(t,y) = 0;$$

$$u_0^0(t,y) = \frac{I_0(\Lambda_y) + I_0(\omega_3\Lambda_y) + I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3};$$

$$u_0^2(t,y) = \frac{I_0(\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3};$$

$$u_0^4(t,y) = \frac{I_0(\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3}.$$

З першого рівняння (2.17) випливає, що

$$u_1^l(t,y) = -2\frac{\partial}{\partial y} u_0^{l\odot 1}(t,y).$$

Тоді маємо:

$$u_1^0(t,y) = -2\frac{\partial}{\partial y} u_0^1(t,y) = 0;$$

$$u_1^1(t,y) = -2\frac{\partial}{\partial y}u_0^2(t,y) = -2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{I_0(\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3}\right] =$$

$$= \frac{2y}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y) - \omega_3^2 I_1(\omega_3\Lambda_y) - \omega_3 I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_1^2 = -2\frac{\partial}{\partial y}u_0^3(t,y) = 0;$$

$$u_1^3(t,y) = -2\frac{\partial}{\partial y}u_0^4(t,y) = -2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{I_0(\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3}\right] =$$

$$= \frac{2y}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y) - I_1(\omega_3\Lambda_y) + I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_1^4 = -2\frac{\partial}{\partial y}u_0^5(t,y) = 0;$$

$$u_1^5 = -2\frac{\partial}{\partial y}u_0^6(t,y) = -2\frac{\partial}{\partial y}u_0^0(t,y) =$$

$$= -2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{I_0(\Lambda_y) + I_0(\omega_3\Lambda_y) + I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3}\right] =$$

$$= \frac{2y}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y) + \omega_3 I_1(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big).$$

Аналогічно з першого рівняння (2.16) знайдемо

$$u_2^l(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_0^{l\odot 1}(t,y).$$

Тоді:

$$u_2^0(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_0^1(t,y) = 0;$$

$$u_2^2(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_0^3(t,y) = 0;$$

$$u_2^4(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_0^5(t,y) = 0;$$

$$u_2^1(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_0^2(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{I_0(\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3}\right] =$$

$$= \frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y) - \omega_3^2 I_1(\omega_3\Lambda_y) - \omega_3 I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_2^3(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_0^4(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{I_0(\Lambda_y)+\omega_3^2I_0(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3}\right]=$$

$$=\frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y)-I_1(\omega_3\Lambda_y)+I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_2^5(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_0^0(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{I_0(\Lambda_y)+I_0(\omega_3\Lambda_y)+I_0(\omega_3^2\Lambda_y)}{3}\right]=$$

$$=\frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y)+\omega_3I_1(\omega_3\Lambda_y)+\omega_3^2I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big).$$

З (2.16) знайдемо

$$u_3^l(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_1^{l\odot 1}(t,y).$$

Тоді одержуємо:

$$u_3^0(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_1^1(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2y}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y)-\omega_3^2I_1(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\right]=$$

$$=\frac{4ty}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0(\Lambda_y)+I_0(\omega_3\Lambda_y)+I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)-$$

$$-\frac{8ty}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y)-\omega_3^2I_1(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_3^2(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_1^3(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2y}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y)-I_1(\omega_3\Lambda_y)+I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\right]=$$

$$=\frac{4ty}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0(\Lambda_y)-\omega_3I_0(\omega_3\Lambda_y)+\omega_3^2I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)-$$

$$-\frac{8ty}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y)-I_1(\omega_3\Lambda_y)+I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_3^4(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_1^5(t,y)=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2y}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y)+\omega_3I_1(\omega_3\Lambda_y)+\omega_3^2I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\right]=$$

$$=\frac{4ty}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0(\Lambda_y)+\omega_3^2I_0(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)-$$

$$-\frac{8ty}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y)+\omega_3I_1(\omega_3\Lambda_y)+\omega_3^2I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_3^1(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_1^2(t,y) = 0;$$

$$u_3^3(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_1^4(t,y) = 0; \quad u_3^5(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_1^0(t,y) = 0.$$

З (2.16) для u_4^l маємо рівність

$$u_4^l(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_2^{l\odot 1}(t,y) - 2u_0^l(t,y).$$

Тоді:

$$u_4^0(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_2^1(t,y) - 2u_0^0(t,y) =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y) - \omega_3^2 I_1(\omega_3\Lambda_y) - \omega_3 I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\right] -$$

$$-\frac{2}{3}\Big(I_0(\Lambda_y) + I_0(\omega_3\Lambda_y) + I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big) =$$

$$= \frac{2(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0(\Lambda_y) + I_0(\omega_3\Lambda_y) + I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big) -$$

$$-\frac{4(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y) - \omega_3^2 I_1(\omega_3\Lambda_y) - \omega_3 I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_4^2(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_2^3(t,y) - 2u_0^2(t,y) =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y) - I_1(\omega_3\Lambda_y) + I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\right] -$$

$$-\frac{2}{3}\Big(I_0(\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big) =$$

$$= \frac{2(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0(\Lambda_y) - \omega_3 I_0(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big) -$$

$$-\frac{4(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y) - I_1(\omega_3\Lambda_y) + I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_4^4(t,y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_2^5(t,y) - 2u_0^4(t,y) =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y) + \omega_3 I_1(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\right] -$$

$$-\frac{2}{3}\left(I_0\left(\Lambda_y\right)+\omega_3^2 I_0\left(\omega_3\Lambda_y\right)-\omega_3 I_0\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)=$$

$$=\frac{2(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^2}\left(I_0\left(\Lambda_y\right)+\omega_3^2 I_0\left(\omega_3\Lambda_y\right)-\omega_3 I_0\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)-$$

$$-\frac{4(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^3}\left(I_1\left(\Lambda_y\right)+\omega_3 I_1\left(\omega_3\Lambda_y\right)+\omega_3^2 I_1\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right);$$

$$u_4^1(t,y)=u_4^3(t,y)=u_4^5(t,y)=0.$$

З (2.16) випливає, що для u_5^l (при $k = 2$) виконується рівність

$$u_5^l(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_3^{l\odot 1}(t,y)-u_1^l(t,y).$$

Тоді:

$$u_5^0(t,y)=u_5^2(t,y)=u_5^4(t,y)=0;$$

$$u_5^1(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_3^2(t,y)-u_1^1(t,y)=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4ty}{3\Lambda_y^2}\left(I_0\left(\Lambda_y\right)-\omega_3 I_0\left(\omega_3\Lambda_y\right)+\omega_3^2 I_0\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{8ty}{3\Lambda_y^3}\left(I_1\left(\Lambda_y\right)-I_1\left(\omega_3\Lambda_y\right)+I_1\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)\right]-$$

$$-\frac{2y}{3\Lambda_y}\left(I_1\left(\Lambda_y\right)-\omega_3^2 I_1\left(\omega_3\Lambda_y\right)-\omega_3 I_1\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)=$$

$$=-\frac{8(3t^2y+y^3)}{3\Lambda_y^4}\left(I_0\left(\Lambda_y\right)-\omega_3 I_0\left(\omega_3\Lambda_y\right)+\omega_3^2 I_0\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)+$$

$$+\frac{16(3t^2y+y^3)}{3\Lambda_y^5}\left(I_1\left(\Lambda_y\right)-I_1\left(\omega_3\Lambda_y\right)+I_1\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)+$$

$$+\frac{2(3t^2y+y^3)}{3\Lambda_y^3}\left(I_1\left(\Lambda_y\right)-\omega_3^2 I_1\left(\omega_3\Lambda_y\right)-\omega_3 I_1\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right);$$

$$u_5^3(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_3^4(t,y)-u_1^3(t,y)=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4ty}{3\Lambda_y^2}\left(I_0\left(\Lambda_y\right)+\omega_3^2 I_0\left(\omega_3\Lambda_y\right)-\omega_3 I_0\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{8ty}{3\Lambda_y^3}\left(I_1\left(\Lambda_y\right)+\omega_3 I_1\left(\omega_3\Lambda_y\right)+\omega_3^2 I_1\left(\omega_3^2\Lambda_y\right)\right)\right]-$$

$$-\frac{2y}{3\Lambda_y}\Big(I_1\big(\Lambda_y\big) - I_1\big(\omega_3\Lambda_y\big) + I_1\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big) =$$

$$= -\frac{8(3t^2y + y^3)}{3\Lambda_y^4}\Big(I_0\big(\Lambda_y\big) + \omega_3^2 I_0\big(\omega_3\Lambda_y\big) - \omega_3 I_0\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big) +$$

$$+\frac{16(3t^2y + y^3)}{3\Lambda_y^5}\Big(I_1\big(\Lambda_y\big) + \omega_3 I_1\big(\omega_3\Lambda_y\big) + \omega_3^2 I_1\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big) +$$

$$+\frac{2(3t^2y + y^3)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1\big(\Lambda_y\big) - I_1\big(\omega_3\Lambda_y\big) + I_1\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big);$$

$$u_5^5(t, y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_3^0(t, y) - u_1^5(t, y) =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4ty}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0\big(\Lambda_y\big) + I_0\big(\omega_3\Lambda_y\big) + I_0\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big)\right] -$$

$$-\frac{8ty}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1\big(\Lambda_y\big) - \omega_3^2 I_1\big(\omega_3\Lambda_y\big) - \omega_3 I_1\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big) -$$

$$-\frac{2y}{3\Lambda_y}\Big(I_1\big(\Lambda_y\big) + \omega_3 I_1\big(\omega_3\Lambda_y\big) + \omega_3^2 I_1\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big) =$$

$$= -\frac{8(3t^2y + y^3)}{3\Lambda_y^4}\Big(I_0\big(\Lambda_y\big) + I_0\big(\omega_3\Lambda_y\big) + I_0\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big) +$$

$$+\frac{16(3t^2y + y^3)}{3\Lambda_y^5}\Big(I_1\big(\Lambda_y\big) - \omega_3^2 I_1\big(\omega_3\Lambda_y\big) - \omega_3 I_1\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big) +$$

$$+\frac{2(3t^2y + y^3)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1\big(\Lambda_y\big) + \omega_3 I_1\big(\omega_3\Lambda_y\big) + \omega_3^2 I_1\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big).$$

Аналогічно з (2.16) для u_6^l (при $k = 2$) маємо

$$u_6^l = 2\frac{\partial}{\partial t}u_4^{l\odot 1}(t, y) - u_2^l(t, y).$$

Тоді:

$$u_6^0(t, y) = u_6^2(t, y) = u_6^4(t, y) = 0;$$

$$u_6^1(t, y) = 2\frac{\partial}{\partial t}u_4^2(t, y) - u_2^1(t, y) =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2(t^2 + y^2)}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0\big(\Lambda_y\big) - \omega_3 I_0\big(\omega_3\Lambda_y\big) + \omega_3^2 I_0\big(\omega_3^2\Lambda_y\big)\Big) -\right.$$

$$-\frac{4(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y)-I_1(\omega_3\Lambda_y)+I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\Big]-$$

$$-\frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y)-\omega_3^2I_1(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)=$$

$$=-\frac{8(3ty^2+t^3)}{3\Lambda_y^4}\Big(I_0(\Lambda_y)-\omega_3I_0(\omega_3\Lambda_y)+\omega_3^2I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)+$$

$$+\frac{16(3ty^2+t^3)}{3\Lambda_y^5}\Big(I_1(\Lambda_y)-I_1(\omega_3\Lambda_y)+I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)+$$

$$+\frac{2(3ty^2+t^3)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y)-\omega_3^2I_1(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_6^3(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_4^4(t,y)-u_2^3(t,y)=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{2(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0(\Lambda_y)+\omega_3^2I_0(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)-$$

$$-\frac{4(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y)+\omega_3I_1(\omega_3\Lambda_y)+\omega_3^2I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\Big]-$$

$$-\frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y)-I_1(\omega_3\Lambda_y)+I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)=$$

$$=-\frac{8(3ty^2+t^3)}{3\Lambda_y^4}\Big(I_0(\Lambda_y)+\omega_3^2I_0(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)+$$

$$+\frac{16(3ty^2+t^3)}{3\Lambda_y^5}\Big(I_1(\Lambda_y)+\omega_3I_1(\omega_3\Lambda_y)+\omega_3^2I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)+$$

$$+\frac{2(3ty^2+t^3)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y)-I_1(\omega_3\Lambda_y)+I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big);$$

$$u_6^5(t,y)=2\frac{\partial}{\partial t}u_4^0(t,y)-u_2^5(t,y)=$$

$$=2\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{2(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^2}\Big(I_0(\Lambda_y)+I_0(\omega_3\Lambda_y)+I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)\Big]-$$

$$-\frac{4(t^2+y^2)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y)-\omega_3^2I_1(\omega_3\Lambda_y)-\omega_3I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)-$$

$$-\frac{2t}{3\Lambda_y}\Big(I_1(\Lambda_y)+\omega_3I_1(\omega_3\Lambda_y)+\omega_3^2I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big)=$$

$$= -\frac{8(3ty^2 + t^3)}{3\Lambda_y^4}\Big(I_0(\Lambda_y) + I_0(\omega_3\Lambda_y) + I_0(\omega_3^2\Lambda_y)\Big) +$$

$$+\frac{16(3ty^2 + t^3)}{3\Lambda_y^5}\Big(I_1(\Lambda_y) - \omega_3^2 I_1(\omega_3\Lambda_y) - \omega_3 I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big) +$$

$$+\frac{2(3ty^2 + t^3)}{3\Lambda_y^3}\Big(I_1(\Lambda_y) + \omega_3 I_1(\omega_3\Lambda_y) + \omega_3^2 I_1(\omega_3^2\Lambda_y)\Big).$$

З урахуванням відомих інтегралів для функцій Бесселя [45] знайдемо:

$$\int_{-t}^{t} u_0^0(t,y)dy = \frac{2}{3}(\mathrm{sinh}t - \omega_3^2\mathrm{sinh}\omega_3 t - \omega_3\mathrm{sinh}\omega_3^2 t);$$

$$\int_{-t}^{t} u_0^2(t,y)dy = \frac{2}{3}(\mathrm{sinh}t - \mathrm{sinh}\omega_3 t + \mathrm{sinh}\omega_3^2 t);$$

$$\int_{-t}^{t} u_0^4(t,y)dy = \frac{2}{3}(\mathrm{sinh}t + \omega_3\mathrm{sinh}\omega_3 t + \omega_3^2\mathrm{sinh}\omega_3^2 t);$$

$$\int_{-t}^{t} u_1^1(t,y)dy = \int_{-t}^{t} u_1^3(t,y)dy = \int_{-t}^{t} u_1^5(t,y)dy = 0;$$

$$\int_{-t}^{t} u_2^1(t,y)dy = \int_{-t}^{t} 2\frac{\partial}{\partial t}u_0^2(t,y)dy =$$

$$= 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t} u_0^2(t,y)dy - u_0^2(t,t) - u_0^2(t,-t)\right) =$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{cosh}t - \omega_3\mathrm{cosh}\omega_3 t + \omega_3^2\mathrm{cosh}\omega_3^2 t);$$

$$\int_{-t}^{t} u_2^3(t,y)dy = 2\int_{-t}^{t} \frac{\partial}{\partial t}u_0^4(t,y)dy =$$

$$= 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t} u_0^4(t,y)dy - u_0^4(t,t) - u_0^4(t,-t)\right) =$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{cosh}t + \omega_3^2\mathrm{cosh}\omega_3 t - \omega_3\mathrm{cosh}\omega_3^2 t);$$

$$\int_{-t}^{t} u_2^5(t,y)dy = 2\int_{-t}^{t} \frac{\partial}{\partial t}u_0^0(t,y)dy =$$

$$= 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t} u_0^0(t,y)dy - u_0^0(t,t) - u_0^0(t,-t)\right) =$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{cosh}t + \mathrm{cosh}\omega_3 t + \mathrm{cosh}\omega_3^2 t) - 4.$$

Аналогічно:

$$\int_{-t}^{t} u_4^0(t,y)dy = 2\int_{-t}^{t} \left(\frac{\partial}{\partial t}u_2^1(t,y) - u_0^0(t,y)\right)dy =$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{sinh}t - \omega_3^2\mathrm{sinh}\omega_3 t - \omega_3\mathrm{sinh}\omega_3^2 t) - 4t;$$

$$\int_{-t}^{t} u_4^2(t,y)dy = 2\int_{-t}^{t} \left(\frac{\partial}{\partial t}u_2^3(t,y) - u_0^2(t,y)\right)dy =$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{sinh}t - \mathrm{sinh}\omega_3 t + \mathrm{sinh}\omega_3^2 t);$$

$$\int_{-t}^{t} u_4^4(t,y)dy = 2\int_{-t}^{t} \left(\frac{\partial}{\partial t}u_2^5(t,y) - u_0^4(t,y)\right)dy =$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{sinh}t + \omega_3\mathrm{sinh}\omega_3 t + \omega_3^2\mathrm{sinh}\omega_3^2 t);$$

$$\int_{-t}^{t} u_6^1(t,y)dy = \int_{-t}^{t} \left(2\frac{\partial}{\partial t}u_4^2(t,y) - u_2^1(t,y)\right)dy =$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{cosh}t - \omega_3\mathrm{cosh}\omega_3 t + \omega_3^2\mathrm{cosh}\omega_3^2 t) - 2t^2;$$

$$\int_{-t}^{t} u_6^3(t,y)dy = \int_{-t}^{t} \left(2\frac{\partial}{\partial t}u_4^4(t,y) - u_2^3(t,y)\right)dy =$$

$$= \frac{4}{3}(\mathrm{cosh}t + \omega_3^2\mathrm{cosh}\omega_3 t - \omega_3\mathrm{cosh}\omega_3^2 t);$$

$$\int_{-t}^{t} u_6^5(t,y)dy = \int_{-t}^{t} \left(2\frac{\partial}{\partial t}u_4^0(t,y) - u_2^5(t,y)\right)dy =$$

$$= \frac{4}{3}(\cosh t + \cosh \omega_3 t + \cosh \omega_3^2 t) - 4.$$

Усі інші інтеграли від функцій $u_k^l(t,y)$ дорівнюють нулю.

Для $t \leq |y|$ розглянемо функцію

$$g(t,y) = g_c(t,y) + g_s(t,y),$$

де

$$g_c(t,y) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_2^3(t,y) + u_2^5(t,y) + u_3^2(t,y) + u_4^0(t,y) + u_4^2(t,y) + u_4^4(t,y) + u_6^1(t,y)\right),$$

$$g_s(t,y) = \delta(t-y) + t\delta(t-y) + \frac{t^2}{2}\delta(t-y).$$

За побудовою функція $g_c(t,y)$ є розв’язком рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^3 g(t,y) - g(t,y) = 0. \tag{2.18}$$

Отже, функція

$$f_c(t,x) = \exp(-t) g_c(t,x)$$

є розв’язком рівняння (2.10).

Покладемо

$$f(t,x) = \exp(-t)(g_c(t,x) + g_s(t,x)).$$

Беручи до уваги значення інтегралів від функцій $u_k^l(t,y)$, які входять до виразу для $g_c(t,y)$, одержуємо

$$\int_{-t}^{t} f(t,x)dx = 1 \quad \forall\, t \geq 0.$$

З урахуванням леми 1.2.2 та зауваження 1.2.3 розв’язки рівняння (2.10) будемо шукати серед розподілів, для яких абсолютно неперервна компонента $f_c(t,x)$ задовольняє умови:

$$\lim_{x \uparrow t} f_c(t,x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P\{0 < t - x(t) < \varepsilon\}}{\varepsilon} = \frac{1}{4}t^2 \exp(-t),$$

$$\lim_{x\downarrow -t} f_c(t,x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{P\{t + x(t) < \varepsilon\}}{\varepsilon} = 0.$$

Легко перевірити, що

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\uparrow t} g_c(t,y) = \frac{1}{4}\left(0 + 0 + \frac{t^2}{2} + 0 + \frac{t^2}{2} + 0 + 0\right) = \frac{t^2}{4},\\
&\lim_{y\downarrow -t} g_c(t,y) = \frac{1}{4}\left(0 + 0 - \frac{t^2}{2} + 0 + \frac{t^2}{2} + 0 + 0\right) = 0.
\end{aligned} \qquad (2.19)$$

Таким чином,

$$\lim_{x\uparrow t} f_c(t,x) = \frac{1}{4}t^2\exp(-t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{P\{t - x(t) < \varepsilon\}}{\varepsilon},$$

$$\lim_{x\downarrow -t} f_c(t,x) = 0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{P\{t + x(t) < \varepsilon\}}{\varepsilon}.$$

Рівності (2.19) разом з умовою

$$\int_{-t}^{t} g(t,y)\exp(-t)\,dy = 1$$

гарантують єдиність розв’язку $g_c(t,y)$ для рівняння (2.18) і відповідно єдиність розв’язку $f_c(t,x)$ для рівняння (2.10).

Отже, формула узагальненої функції щільності $f(t,x)$ розподілу випадкового одновимірного руху $x(t)$, вигляд якої наведено у формулюванні цієї теореми 2.1.3, задовольняє рівняння (2.10). Теорему доведено.

2.1.3. Часткові розв’язки узагальненого біхвильового рівняння

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

Знайдемо часткові розв’язки ДРЧП четвертого порядку (так званого узагальненого біхвильового рівняння)

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2c\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)v(x,y) = 0, \quad 1 \neq c > 0, \qquad (2.20)$$

для двох випадків: гіперболічного та еліптичного.

При $c > 1$ рівняння (2.20) будемо називати *узагальненим біхвильовим рівнянням гіперболічного типу*.

При $0 < c < 1$ рівняння (2.20) будемо називати *узагальненим біхвильовим рівнянням еліптичного типу*.

Легко перевірити, що будь-яке рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$\left(A\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2B\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + C\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)v(x,y) = 0,$$

де $AC > 0$ і $AB < 0$, можна звести до рівняння (2.20) заміною змінних.

Нехай $\mathbb{A}_c(\mathbb{K})$ – скінченновимірна комутативна унітарна алгебра над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) з базисом

$$\{e_1, \dots, e_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через $\mathbb{B}_c$ підпростір алгебри $\mathbb{A}_c(\mathbb{K})$ з базисом

$$\{e_1, \dots, e_m\}, \quad m \leq n, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Нехай $C^r(\mathbb{B}_c)$, $r = 1,2,\dots$ – клас $\mathbb{K}$-значних функцій $v : \mathbb{B}_c \to \mathbb{K}$, визначених у просторі $\mathbb{B}_c$, які є неперервно-диференційовними до порядку r включно.

Щоб одержати часткові розв'язки рівняння (2.20) при $1 \neq c > 0$, застосуємо алгебраїчно-аналітичний метод моногенних функцій у випадку комутативних алгебр. Згідно такого підходу потрібно знайти комутативну алгебру з базисом $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє поліноміальне рівняння

$$e_1^4 - 2c\, e_1^2 e_2^2 + e_2^4 = 0. \tag{2.21}$$

Дослідимо часткові розв'язки рівняння (2.20) у *гіперболічному випадку*, тобто при $c > 1$.

Розглянемо асоціативну комутативну алгебру над полем $\mathbb{R}$

$$\mathbb{A}_c(\mathbb{R}) = \{xu + yf + ze + wfe \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

з базисом $\{u, f, e, fe\}$, де u – одиничний елемент алгебри, й таблицею Келі для базисних елементів:

$$fe = ef, \quad f^2 = u, \quad e^2 = u - mfe, \quad m = \sqrt{2(c-1)}.$$

Базисні елементи $\{u, e\}$ задовольняють поліноміальне рівняння (2.21).

Зауважимо, що алгебра з таким базисом і таблицею множення вивчається у роботах С. Грищука [4–6] та [7]. Результати, одержані нижче, зокрема про зображення моногенних функцій, є частковими випадками результатів, одержаних С. Грищуком [4–6] та [7, 8, 48, 49].

Легко перевірити, що при $c > 1$ алгебра $\mathbb{A}_c(\mathbb{R})$ має ідемпотенти:

$$\begin{gathered} i_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} u - \frac{f\sqrt{2}}{k_1 + k_2} e, \\ i_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} u + \frac{f\sqrt{2}}{k_1 + k_2} e, \end{gathered} \qquad (2.22)$$

де

$$k_1 = \sqrt{c+1} - \sqrt{c-1}, \quad k_2 = \sqrt{c+1} + \sqrt{c-1}.$$

Таким чином, маємо:

$$i_1 + i_2 = u,$$

$$i_1 \cdot i_2 = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} u - \frac{\sqrt{2} k_2}{(k_1 + k_2)^2} fe + \frac{\sqrt{2} k_1}{(k_1 + k_2)^2} fe -$$

$$- \frac{2}{(k_1 + k_2)^2} u + \frac{2m}{(k_1 + k_2)^2} fe = 0.$$

Тоді

$$e = f \frac{k_1}{\sqrt{2}} i_2 - f \frac{k_2}{\sqrt{2}} i_1. \qquad (2.23)$$

Позначимо підпростір алгебри $\mathbb{A}_c(\mathbb{R})$ через

$$\mathbb{B}_c = \{\omega = xu + ye \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Шукану функцію $g(\omega)$ (в алгебрі $\mathbb{A}_c(\mathbb{R})$) запишемо у вигляді

$$g(\omega) = uv_1(x, y) + fv_2(x, y) + ev_3(x, y) + fev_4(x, y).$$

Тоді з урахуванням теореми 1.2.1 можна перевірити, що неперервно-диференційовна функція

$$g(\omega) : \mathbb{B}_c \to \mathbb{A}_c(\mathbb{R})$$

є моногенною у підпросторі $\mathbb{B}_c$ тоді і тільки тоді, якщо дійснозначні компоненти $v_i(x,y)$, $i = 1,2,3,4$, функції $g(\omega)$ мають неперервні часткові похідні

$$\frac{\partial v_i(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_i(x,y)}{\partial y}, \quad i = 1,2,3,4,$$

і виконуються умови типу Коші-Рімана

$$e\frac{\partial}{\partial x}g(\omega) = u\frac{\partial}{\partial y}g(\omega) \quad \forall\, \omega \in \mathbb{B}_c,$$

або

$$\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v_3(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v_4(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_3(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial x} - m\frac{\partial v_4(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_4(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - m\frac{\partial v_3(x,y)}{\partial x}.$$

Тоді згідно теореми 1.2.3 компоненти $v_i(x,y)$, $i = 1,2,3,4$, моногенної функції $g(\omega)$ є частковими розв'язками рівняння (2.20).

Переходячи (у підпросторі $\mathbb{B}_c$) від базису $\{u,e\}$ до базису $\{i_1,i_2\}$, отримуємо

$$\omega = xu + ye = \left(x - f\frac{k_2}{\sqrt{2}}y\right)i_1 + \left(x + f\frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right)i_2.$$

Лема 2.1.3. *Неперервно-диференційовна функція*

$$g(\omega) : \mathbb{B}_c \to \mathbb{A}_c(\mathbb{R}), \quad c > 1,$$

є моногенною тоді і тільки тоді, якщо її можна записати у вигляді

$$g(\omega) = \alpha(\omega_1)i_1 + \beta(\omega_2)i_2, \tag{2.24}$$

де

$$\omega_1 = x - f\frac{k_2}{\sqrt{2}}y, \quad \omega_2 = x + f\frac{k_1}{\sqrt{2}}y,$$

і функції

$$\alpha(\omega_1) = \alpha_1(\omega_1) + f\alpha_2(\omega_1), \quad \beta(\omega_2) = \beta_1(\omega_2) + f\beta_2(\omega_2)$$

мають неперервні часткові похідні

$$\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1), \quad \frac{\partial}{\partial y}\alpha(\omega_1), \quad \frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2), \quad \frac{\partial}{\partial y}\beta(\omega_2),$$

що задовольняють рівності

$$\frac{\partial}{\partial y}\alpha(\omega_1) = -f\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1), \quad \frac{\partial}{\partial y}\beta(\omega_2) = f\frac{k_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2).$$

Доведення. Достатність можна перевірити безпосередньо. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial y}g(\omega) = \frac{\partial}{\partial y}\alpha(\omega_1)i_1 + \frac{\partial}{\partial y}\beta(\omega_2)i_2 = -f\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1)i_1 + f\frac{k_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2)i_2.$$

З іншого боку, з урахуванням формул (2.22) та (2.23) одержуємо

$$e\frac{\partial}{\partial x}g(\omega) = \left(f\frac{k_1}{\sqrt{2}}i_2 - f\frac{k_2}{\sqrt{2}}i_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1)i_1 + \frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2)i_2\right) =$$

$$= -f\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1)i_1 + f\frac{k_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2)i_2.$$

Отже,

$$e\frac{\partial}{\partial x}g(\omega) = u\frac{\partial}{\partial y}g(\omega).$$

Доведемо необхідність. Припустимо, що функція

$$g(\omega) = uv_1(x,y) + fv_2(x,y) + ev_3(x,y) + fev_4(x,y)$$

є моногенною в $\mathbb{B}_c$.

Позначимо

$$\alpha(\omega_1) = u\left(v_1(x,y) - \frac{k_2}{\sqrt{2}}v_4(x,y)\right) + f\left(v_2(x,y) - \frac{k_2}{\sqrt{2}}v_3(x,y)\right),$$

$$\beta(\omega_2) = u\left(v_1(x,y) + \frac{k_1}{\sqrt{2}}v_4(x,y)\right) + f\left(v_2(x,y) + \frac{k_1}{\sqrt{2}}v_3(x,y)\right).$$

Тоді одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial y}\alpha(\omega_1) = u\left(\frac{\partial v_3(x,y)}{\partial x} - \frac{k_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - m\frac{\partial v_3(x,y)}{\partial x}\right)\right) +$$

$$+f\left(\frac{\partial v_4(x,y)}{\partial x}-\frac{k_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial x}-m\frac{\partial v_4(x,y)}{\partial x}\right)\right)=$$

$$=-f\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial x}-u\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x}+u\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}}m+1\right)\frac{\partial v_3(x,y)}{\partial x}+$$

$$+f\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}}m+1\right)\frac{\partial v_4(x,y)}{\partial x}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{k_2}{\sqrt{2}}m+1=\sqrt{c^2-1}+c=\frac{k_2^2}{2},$$

виконується рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}\alpha(\omega_1)=-f\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1).$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{\partial}{\partial y}\beta(\omega_2)=f\frac{k_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2).$$

Лему доведено.

Зауваження 2.1.2. *Розглянувши змінні*

$$x_1=x,\quad y_1=-\frac{k_2}{\sqrt{2}}y,\quad x_2=x,\quad y_2=\frac{k_1}{\sqrt{2}}y,$$

отримуємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_1}\alpha(\omega_1)&=f\,\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1),\\ \frac{\partial}{\partial y_2}\beta(\omega_2)&=f\,\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2).\end{aligned}\qquad(2.25)$$

Легко перевірити, що якщо дійснозначні компоненти $\alpha_1(\omega_1)$, $\alpha_2(\omega_1)$ *функції* $\alpha(\omega_1)=\alpha_1(\omega_1)+f\alpha_2(\omega_1)$ *належать класу* $C^2(\mathbb{B}_c)$, *тобто мають неперервні часткові похідні до другого порядку включно*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_k(\omega_1),\quad \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\alpha_k(\omega_1),\quad k=1,2,$$

то вони задовольняють хвильове рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)v(x,y_1)=0.$$

Аналогічно, якщо дійснозначні компоненти $\beta_1(\omega_2)$, $\beta_2(\omega_2)\in C^2(\mathbb{B}_c)$ *функції* $\beta(\omega_2)=\beta_1(\omega_2)+f\beta_2(\omega_2)$ *мають неперервні часткові похідні до другого порядку включно*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\beta_k(\omega_2),\quad \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\beta_k(\omega_2),\quad k=1,2,$$

то вони задовольняють хвильове рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)v(x,y_2)=0.$$

Теорема 2.1.4. *Нехай неперервно-диференційовна функція* $v(x,y)$ *є моногенною і має вигляд*

$$v(x,y)=\alpha_i(\omega_1)i_1+\beta_j(\omega_2)i_2,\quad i,j=1,2,$$

де $\alpha_i(\omega_1)$, $\beta_j(\omega_2)\in C^4(\mathbb{B}_c)$ *– неперервно-диференційовні дійснозначні компоненти до четвертого порядку включно відповідно функцій*

$$\alpha(\omega_1)=\alpha_1(\omega_1)+f\alpha_2(\omega_1),\quad \beta(\omega_2)=\beta_1(\omega_2)+f\beta_2(\omega_2),$$

які задовольняють умови (2.25) *і є компонентами у розкладі* (2.24) *моногенної функції*

$$g(\omega)=\alpha(\omega_1)i_1+\beta(\omega_2)i_2.$$

Тоді компоненти $\alpha_i(\omega_1)$, $\beta_j(\omega_2)$, $i,j=1,2$, *функції* $v(x,y)$ *є частковими розв'язками рівняння* (2.20) *при* $c>1$.

Доведення. Оскільки за умовою теореми $\alpha_i(\omega_1)$, $\beta_j(\omega_2)\in C^4(\mathbb{B}_c)$, то відповідно функції $\alpha(\omega_1)$, $\beta(\omega_2)\in C^4(\mathbb{B}_c)$ і, очевидно, моногенна функція $g(\omega)\in C^4(\mathbb{B}_c)$. З урахуванням леми 2.1.3 і теореми 1.2.3 (розділ 1) робимо висновок, що компоненти $\alpha_i(\omega_1)$ і $\beta_j(\omega_2)$ неперервно-диференційовної функції

$$v(x,y)=\alpha_i(\omega_1)i_1+\beta_j(\omega_2)i_2,\quad i,j=1,2,$$

є частковими розв'язками рівняння (2.20) при $c>1$. Теорему доведено.

Для *еліптичного випадку*, тобто при $0 < c < 1$, розглянемо асоціативну комутативну алгебру над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$

$$\mathbb{A}_c(\mathbb{C}) = \{zu + we \mid z, w \in \mathbb{C}\}$$

з базисом $\{u, e\}$, де u – одиничний елемент алгебри, й таблицею Келі для базисних елементів:

$$ue = eu = e, \quad e^2 = u + i\mu e, \quad \mu = \sqrt{2(1-c)}.$$

При $0 < c < 1$ алгебра $\mathbb{A}_c(\mathbb{C})$ має ідемпотенти:

$$I_- = \frac{k_1}{k_1 + k_2} u + \frac{\sqrt{2}}{k_1 + k_2} e,$$
$$I_+ = \frac{k_2}{k_1 + k_2} u - \frac{\sqrt{2}}{k_1 + k_2} e, \tag{2.26}$$

де

$$k_1 = \sqrt{1+c} - i\sqrt{1-c}, \quad k_2 = \sqrt{1+c} + i\sqrt{1-c}.$$

Легко перевірити, що ідемпотенти (2.26) задовольняють рівності:

$$I_- + I_+ = u,$$

$$I_- \cdot I_+ = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} u + \frac{\sqrt{2} k_2}{(k_1 + k_2)^2} e - \frac{\sqrt{2} k_1}{(k_1 + k_2)^2} e -$$
$$- \frac{2}{(k_1 + k_2)^2} u - \frac{2i\mu}{(k_1 + k_2)^2} e = 0.$$

Зрозуміло, що

$$e = \frac{k_2}{\sqrt{2}} I_- - \frac{k_1}{\sqrt{2}} I_+. \tag{2.27}$$

Лема 2.1.4. *Всі ненульові елементи підпростору*

$$\mathbb{B}_c = \{xu + ye \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

алгебри $\mathbb{A}_c(\mathbb{C})$ *є оборотними, тобто, якщо* $0 \neq \omega \in \mathbb{B}_c$, *то існує обернений елемент* $\omega^{-1} \in \mathbb{B}_c$.

Доведення. Припустимо, що

$$\omega = su + te \in \mathbb{B}_c, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Покажемо, що існує елемент

$$\omega^{-1} = xu + ye, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

для якого $\omega\omega^{-1} = 1$.

Дійсно, рівняння

$$(su + te)(xu + ye) = u$$

має єдиний розв’язок, оскільки детермінант Δ системи

$$\begin{cases} sx + ty = 1, \\ tx + (s + i\mu t)y = 0, \end{cases}$$

де x, y – невідомі, виражається формулою

$$\Delta = s^2 - t^2 + i\mu ts,$$

звідки $\Delta = 0 \Leftrightarrow s = t = 0$.

Алгебру

$$\mathbb{A}_c(\mathbb{C}) = \{zu + we \mid z, w \in \mathbb{C}\}$$

можна записати у вигляді

$$\mathbb{A}_c(\mathbb{R}) = \{xu + yi + pe + qie \mid x, y, p, q \in \mathbb{R}\}$$

з базисом $\{u, i, e, ie\}$, де u – одиничний елемент алгебри, і з тією ж таблицею Келі для базисних елементів.

Функцію

$$f(\omega) = f(x, y) = uv_1(x, y) + iv_2(x, y) + ev_3(x, y) + iev_4(x, y)$$

вважатимемо диференційовною у підпросторі $\mathbb{B}_c \subset \mathbb{A}_c(\mathbb{R})$, якщо вона диференційовна в загальному сенсі, тобто для всіх $\omega \in \mathbb{B}_c$ існує границя

$$\lim_{\mathbb{B}_c \ni \Delta\omega \to 0} \frac{f(\omega + \Delta\omega) - f(\omega)}{\Delta\omega} = f'(\omega).$$

Легко перевірити, що якщо неперервно-диференційовна функція $f(\omega)$ є диференційовною в загальному сенсі, то вона є моногенною, і отже, задовольняє умови типу Коші-Рімана [109]:

$$e\frac{\partial}{\partial x} f(\omega) = u\frac{\partial}{\partial y} f(\omega)$$

або

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_3(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_4(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_3(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} - \mu\frac{\partial v_4(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_4(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_3(x,y)}{\partial x}.$$

Отже, функції $v_j(x,y),\ j = 1,2,3,4$, задовольняють рівняння (2.20).

Переходячи (у $\mathbb{B}_c$) від базису $\{u,e\}$ до базису $\{I_-, I_+\}$, маємо

$$\omega = xu + ye = \left(x + \frac{k_2}{\sqrt{2}}y\right)I_- + \left(x - \frac{k_1}{\sqrt{2}}y\right)I_+.$$

Лему доведено.

Лема 2.1.5. *Неперервно-диференційовна функція*

$$f(\omega) : \mathbb{B}_c \to \mathbb{A}_c(\mathbb{R}), \quad 0 < c < 1,$$

є моногенною тоді і тільки тоді, якщо її можна записати у вигляді

$$f(\omega) = \alpha(\omega_1)I_- + \beta(\omega_2)I_+, \tag{2.28}$$

де

$$\omega_{\,1} = x_1 + iy_1, \quad x_1 = x, \quad y_1 = -i\frac{k_2}{\sqrt{2}}y,$$

$$\omega_2 = x_2 + iy_2, \quad x_2 = x, \quad y_2 = i\frac{k_1}{\sqrt{2}}y,$$

і $\alpha(\omega_1),\ \beta(\omega_2)$ *є аналітичними функціями змінних* ω_1, ω_2 *відповідно, тобто*

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\alpha(\omega_1) = i\,\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\beta(\omega_2) = i\,\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2).$$

Доведення. Достатність можна перевірити безпосередньо. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial y}f(\omega) = \frac{\partial}{\partial y_1}\alpha(\omega_1)\frac{\partial y_1}{\partial y}I_- + \frac{\partial}{\partial y_2}\beta(\omega_2)\frac{\partial y_2}{\partial y}I_+ =$$

$$= -i\frac{k_2}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial}{\partial y_1}\alpha(\omega_1)I_- + i\frac{k_1}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial}{\partial y_2}\beta(\omega_2)I_+ =$$

$$= \frac{k_2}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1)I_- - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2)I_+.$$

З іншого боку, з урахуванням (2.26) і (2.27) маємо

$$e\frac{\partial}{\partial x}f(\omega) = \left(\frac{k_2}{\sqrt{2}}I_- - \frac{k_1}{\sqrt{2}}I_+\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1)I_- + \frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2)I_+\right) =$$

$$=\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1)I_- - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2)I_+.$$

Отже,

$$e\frac{\partial}{\partial x}f(\omega)=\frac{\partial}{\partial y}f(\omega).$$

Необхідність. Припустимо, що неперервно-диференційовна функція

$$f(\omega)=uv_1(x,y)+iv_2(x,y)+ev_3(x,y)+iev_4(x,y)$$

є моногенною у $\mathbb{B}_c$, тобто

$$e\frac{\partial}{\partial x}f(\omega)=\frac{\partial}{\partial y}f(\omega).$$

З (2.26) випливає, що

$$f(\omega)=\alpha(\omega_1)I_- + \beta(\omega_2)I_+,$$

де

$$\alpha(\omega_1)=v_1(x,y)+\frac{k_2}{\sqrt{2}}v_3(x,y)+i\left(v_2(x,y)+\frac{k_2}{\sqrt{2}}v_4(x,y)\right),$$

$$\beta(\omega_2)=v_1(x,y)-\frac{k_1}{\sqrt{2}}v_3(x,y)+i\left(v_2(x,y)-\frac{k_1}{\sqrt{2}}v_4(x,y)\right).$$

Розглянемо

$$u\frac{\partial}{\partial y}f(\omega)=\frac{\partial\alpha(\omega_1)}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}I_- + \frac{\partial\beta(\omega_2)}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y}I_+ =$$

$$=-\frac{ik_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial\alpha}{\partial y_1}I_- + \frac{ik_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\beta}{\partial y_2}I_+.$$

Тоді з урахуванням (2.26) маємо

$$e\frac{\partial}{\partial x}f(\omega)=\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}}I_- - \frac{k_1}{\sqrt{2}}I_+\right)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}I_- + \frac{\partial\beta}{\partial x}I_+\right)=$$

$$=\frac{k_2}{\sqrt{2}}\frac{\partial\alpha}{\partial x}I_- - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\beta}{\partial x}I_+.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\alpha(\omega_1)=i\frac{\partial}{\partial x}\alpha(\omega_1), \qquad \frac{\partial}{\partial y_2}\beta(\omega_2)=i\frac{\partial}{\partial x}\beta(\omega_2).$$

Лему доведено.

Теорема 2.1.5. *Компоненти неперервно-диференційовної функції* $v(x, y)$ *є частковими розв'язками рівняння* (2.20) *при* $0 < c < 1$, *якщо її можна записати у вигляді*

$$v(x, y) = \alpha_i(\omega_1)I_- + \beta_j(\omega_2)I_+ \quad \forall\, i, j = 1,2,$$

де $\alpha_i(\omega_1), \beta_j(\omega_2)$ *є компонентами* $\alpha(\omega_1)$ *і* $\beta(\omega_2)$ *моногенної функції* $f(\omega)$ *у розкладі* (2.28), *тобто*

$$f(\omega) = \alpha(\omega_1)I_- + \beta(\omega_2)I_+,$$

де $\alpha(\omega_1), \beta(\omega_2)$ *– аналітичні функції відповідних змінних.*

Доведення. Якщо компоненти неперервно-диференційовної функції $v(x, y)$ є частковими розв'язками рівняння (2.20) при $0 < c < 1$, то згідно з лемою 2.1.4 можна показати, що

$$v(x, y) = \alpha_i(\omega_1)I_- + \beta_j(\omega_2)I_+ \quad \forall\, i, j = 1,2,$$

де $\alpha(\omega_1) = \alpha_1(\omega_1) + i\alpha_2(\omega_1)$, $\beta(\omega_2) = \beta_1(\omega_2) + i\beta_2(\omega_2)$ є аналітичними функціями відповідних змінних. Теорему доведено.

2.1.4. Часткові розв'язки лінійних систем ДРЧП

Нехай $\mathbb{A}$ – скінченновимірна комутативна унітарна алгебра над полем $\mathbb{K}$ (дійсних $\mathbb{R}$ або комплексних $\mathbb{C}$ чисел) з базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, де $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел. Нехай $\mathbb{B}$ – підпростір алгебри $\mathbb{A}$ з базисом $\{e_1, \dots, e_m\}$ при умові, що $m \le n$, $m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо лінійну систему ДРЧП вигляду

$$\begin{cases} D_{11}u_1(x) + D_{12}u_2(x) + \cdots + D_{1n}u_n(x) = 0, \\ D_{21}u_1(x) + D_{22}u_2(x) + \cdots + D_{2n}u_n(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_{n1}u_1(x) + D_{n2}u_2(x) + \cdots + D_{nn}u_n(x) = 0, \end{cases} \tag{2.29}$$

де $u_n(x) = u_n(x_1, \dots, x_m)$ – $\mathbb{K}$-значні функції m змінних, $x_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots m$, D_{ij} – диференціальні оператори довільного порядку $r = 1,2, \dots$, що задовольняють умову комутативності

$$D_{ij}D_{kl} = D_{kl}D_{ij}, \quad i, j, k, l = 1,2, \dots, n.$$

Введемо матрицю диференціальних операторів у вигляді

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Позначимо через $\det(D)$ − визначник матриці D, A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці D, тобто

$$\det(D) = D_{n1}A_{n1} + D_{n2}A_{n2} + \dots + D_{nn}A_{nn}.$$

Позначимо через

$$C^r(\mathbb{B}) \ni u(x) : \mathbb{B} \to \mathbb{K}, \quad r = 1,2,\dots,$$

неперервно-диференційовну $\mathbb{K}$-значну функцію $u(x)$ до порядку r включно.

Теорема 2.1.6. *Припустимо, що* $\mathbb{K}$*-значні функції* $u_i(x)$

$$C^r(\mathbb{B}) \ni \ u_i(x) : \mathbb{B} \to \mathbb{K}, \quad i = 1,2,\dots,n, \quad r \in \mathbb{N},$$

є частковими розв'язками системи (2.29). *Тоді для всіх* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *виконується рівність*

$$\det(D)\big(\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \dots + \lambda_n u_n(x)\big) = 0.$$

Доведення. Систему лінійних ДРЧП (2.29) можна записати у матрично-векторному вигляді

$$D \cdot U = 0, \tag{2.31}$$

де D – матриця (2.30), $U = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Позначимо через

$$\widetilde{D} = \left(A_{ij}\right)^T$$

транспоновану матрицю, складену з алгебраїчних доповнень A_{ij} елементів матриці D.

Якщо матричне рівняння (2.31) помножити на матрицю $\widetilde{D}$, тобто

$$\big(\widetilde{D}D\big)U = \ \widetilde{D}(DU) = \widetilde{D}0 = 0,$$

одержуємо

$$\begin{pmatrix} \det(D) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(D) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \det(D)u_1(x) = 0, \\ \det(D)u_2(x) = 0, \\ \qquad \vdots \\ \det(D)u_n(x) = 0, \end{cases}$$

що рівнозначно

$$\det(D)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x)\right) = 0 \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}. \tag{2.32}$$

Теорему доведено.

Зауваження 2.1.3. *Часткові розв'язки рівняння* (2.32)

$$u_i(x), \quad i = 1,2, \dots, n,$$

є лінійною комбінацією часткових розв'язків системи (2.29).

Отже, якщо маємо m *лінійно незалежних часткових розв'язків* $v_i(x)$

$$C^r(\mathbb{B}) \ni v_i(x) : \mathbb{B} \to \mathbb{K}, \quad i = 1,2, \dots, m, \quad r = 1,2, \dots,$$

рівняння

$$det(D)v(x) = 0,$$

то часткові розв'язки системи (2.29) *можна знайти у вигляді лінійної комбінації*

$$u_i(x) = c_{i1}v_1(x) + c_{i2}v_2(x) + \cdots + c_{im}v_m(x), \quad i = 1,2, \dots, m.$$

Приклад 2.1.1. Знайдемо часткові розв'язки лінійної системи ДРЧП

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x,y) + \dfrac{\partial^3}{\partial y^3} u_2(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial y} u_1(x,y) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x,y) = 0, \end{cases} \tag{2.33}$$

де $x, y \in \mathbb{R}$ – дійсні змінні, а $u_k, k = 1,2$ – дійснозначні ($\mathbb{R}$-значні) функції.

Розв'язання. Нехай $\mathbb{R}$-значні функції u_k, $k = 1,2$, визначені у підпросторі $\mathbb{B}$ алгебри $\mathbb{A}$, причому

$$C^2(\mathbb{B}) \ni u_1(x,y) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}, \quad C^3(\mathbb{B}) \ni u_2(x,y) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}.$$

Запишемо систему (2.33) у матрично-векторному вигляді

$$DU(x,y) = 0,$$

де

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^3}{\partial y^3} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку одержуємо рівняння

$$\det(D)v(x,y) = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) v(x,y) = 0. \tag{2.34}$$

Поліном P для рівняння (2.34) має вигляд

$$P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2)^2 - (\xi_2^2)^2.$$

Знайдемо алгебру з базисом $\{e_1, e_2\}$, для якого виконується рівність

$$P(e_1, e_2) = (e_1^2)^2 - (e_2^2)^2 = 0. \tag{2.35}$$

Легко бачити, що базис $\{1, i\}$ алгебри комплексних чисел $\mathbb{C}$ задовольняє рівняння (2.35). Тобто маємо випадок $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Введемо функцію

$$f(z) = \exp(z) = \exp(x)(\cos y + i \sin y).$$

Компоненти функції $f(z)$ є нескінченно неперервно-диференційовними в $\mathbb{B} = \mathbb{C}$ і легко перевірити, що для будь-якого дійсного $K \in \mathbb{R}$ функції

$$u_1(x,y) = K\exp(x)(\cos y - \sin y),$$

$$u_2(x,y) = K\exp(x)(\cos y + \sin y)$$

є частковими розв'язками системи (2.33).

Це означає, що

$$k_{11} = -k_{12} = k_{21} = k_{22} = K.$$

Відмітимо, що для схожої системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} u_1(x,y) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u_2(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u_1(x,y) + \dfrac{\partial^3}{\partial x^3} u_2(x,y) = 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

де $x, y \in \mathbb{R}$ – дійсні змінні, а u_k, $k = 1{,}2$ – $\mathbb{R}$-значні функції, для яких виконуються умови

$$C^2(\mathbb{B}) \ni u_1(x,y) : \mathbb{B} \to \mathbb{A}, \quad C^3(\mathbb{B}) \ni u_2(x,y) : \mathbb{B} \to \mathbb{A},$$

маємо

$$\det(D) = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)$$

і можна використати ту ж саму функцію

$$f(z) = \exp(z) = \exp(x)(\cos y + i \sin y),$$

компоненти якої є нескінченно неперервно-диференційовними в $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

Легко бачити, що функції

$$u_1(x,y) = L\exp(x)\cos y - L\exp(x)\sin y,$$

$$u_2(x,y) = u_1(x,y)$$

є частковими розв’язками системи (2.36). Це еквівалентно тому, що

$$l_{11} = l_{12} = l_{21} = l_{22} = L.$$

Приклад 2.1.2. Знайдемо часткові розв’язки лінійної системи ДРЧП

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} u_1(z,w) + \dfrac{\partial^2}{\partial w^2} u_2(z,w) = 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial w^2} u_1(z,w) + \dfrac{\partial}{\partial z} u_2(z,w) = 0, \end{cases} \tag{2.37}$$

де $z, w \in \mathbb{C}$ – комплексні змінні, а u_k, $k = 1{,}2$ – комплекснозначні ($\mathbb{C}$-значні) функції.

Розв’язання. Нехай $\mathbb{C}$-значні функції u_k, $k = 1{,}2$, визначені у підпросторі $\mathbb{B}$ алгебри $\mathbb{A}$, причому

$$C^2(\mathbb{B}) \ni u_1(z,w) : \mathbb{B} \to \mathbb{C}, \quad C^2(\mathbb{B}) \ni u_2(z,w) : \mathbb{B} \to \mathbb{C}.$$

Запишемо систему (2.37) у матрично-векторному вигляді

$$D \cdot U = 0,$$

де

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial^2}{\partial w^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial w^2} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1(z,w) \\ u_2(z,w) \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку

$$\det(D)v(z,w)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^4}{\partial w^4}\right)v(z,w)=0. \tag{2.38}$$

Щоб застосувати алгебраїчно-аналітичний метод для знаходження часткових розв'язків рівняння (2.38), введемо додаткову змінну $\omega \in \mathbb{C}$. Тоді з використанням функції $\exp(\omega)$ одержуємо рівняння

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \omega^2 \partial z^2}-\frac{\partial^4}{\partial w^4}\right)V(\omega,z,w)=0. \tag{2.39}$$

Знайдемо часткові розв'язки рівняння (2.39) у вигляді

$$F(\omega,z,w)=\exp(\omega)v(z,w).$$

Легко бачити, що компоненти функції $v_0(z,w)$ є частковими розв'язками рівняння (2.38) тоді і тільки тоді, якщо компоненти функції

$$F(\omega,z,w)=\exp(\omega)v_0(z,w)$$

є частковими розв'язками рівняння (2.39).

Поліном P для рівняння (2.39) має вигляд

$$P(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1^2\xi_2^2-\xi_3^4.$$

Знайдемо комутативну алгебру з базисом $\{e_1,e_2,e_3\}$, для елементів якого виконується рівність

$$P(e_1,e_2,e_3)=e_1^2e_2^2-e_3^4=0. \tag{2.40}$$

У цьому випадку використаємо алгебру комплексних кватерніонів Сегре (2.1), яка вивчалась у §2.1.1 цього розділу, тобто

$$\mathbb{B}_4(\mathbb{C})=\{c_0+c_1j+c_2k+c_3f \mid c_0,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}\}$$

з базисом $\{1,j,k,f\}$, для елементів якого виконується таблиця множення:

$$j^2=k^2=-f^2=-1,\quad jk=kj=f,\quad jf=fj=-k,\quad kf=fk=-j.$$

Виберемо підпростір $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ алгебри $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$:

$$\mathbb{A}_3(\mathbb{C})=\{a_0+a_1f+a_2j \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{C}\}.$$

Бачимо, що базис $\{1,f,j\}$ підпростору $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ задовольняє поліноміальне рівняння (2.40).

Введемо функцію $W:\mathbb{A}_3(\mathbb{C})\to\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ у вигляді

$$W(\omega,z,w)=\exp(\omega+fz+jw)=$$

$$= W_1(\omega, z, w) + W_2(\omega, z, w)j + W_3(\omega, z, w)k + W_4(\omega, z, w)f,$$

де

$$C^4\big(\mathbb{B}_4(\mathbb{C})\big) \ni W_l(\omega, z, w) : \mathbb{A}_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad l = 1,2,3,4.$$

Функція $W(\omega, z, w)$ є моногенною, оскільки для неї виконуються умови типу Коші-Рімана:

$$f\frac{\partial}{\partial\omega}W(\omega, z, w) = \frac{\partial}{\partial z}W(\omega, z, w) = f\exp(\omega + fz + jw),$$

$$j\frac{\partial}{\partial\omega}W(\omega, z, w) = \frac{\partial}{\partial w}W(\omega, z, w) = j\exp(\omega + fz + jw),$$

$$j\frac{\partial}{\partial z}W(\omega, z, w) = f\frac{\partial}{\partial w}W(\omega, z, w) = jf\exp(\omega + fz + jw).$$

З врахуванням теореми 1.2.3 компоненти

$$W_l : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \quad l = 1,2,3,4,$$

функції $W(\omega, z, w)$ є частковими розв'язками рівняння (2.39). Тоді компоненти функції

$$v(z, w) = \exp(fz + jw),$$

де

$$C^4\big(\mathbb{B}_4(\mathbb{C})\big) \ni v_l(z, w) : \mathbb{A}_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad l = 1,2,3,4,$$

є частковими розв'язками рівняння (2.38). Тобто

$$v(z, w) = \exp(jw + fz) = \exp(jw) \cdot \exp(fz) =$$

$$= (\cos(w) + j\sin(w))(\cosh(z) + f\sinh(z)) = \cos(w)\cosh(z) +$$

$$+j\sin(w)\cosh(z) - k\sin(w)\sinh(z) + f\cos(w)\sinh(z).$$

Отже, одержуємо часткові розв'язки рівняння (2.38):

$$\begin{aligned} &v_1(z, w) = \cos(w)\cosh(z), \quad v_2(z, w) = \sin(w)\cosh(z), \\ &v_3(z, w) = -\sin(w)\sinh(z), \quad v_4(z, w) = \cos(w)\sinh(z). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Тоді часткові розв'язки системи (2.37) знайдемо у вигляді

$$\begin{cases} u_1(z, w) = c_{11}\cos(w)\cosh(z) + c_{12}\sin(w)\cosh(z) - \\ \qquad -c_{13}\sin(w)\sinh(z) + c_{14}\cos(w)\sinh(z), \\ u_2(z, w) = c_{21}\cos(w)\cosh(z) + c_{22}\sin(w)\cosh(z) - \\ \qquad -c_{23}\sin(w)\sinh(z) + c_{24}\cos(w)\sinh(z). \end{cases} \tag{2.42}$$

де $c_{ij} \in \mathbb{C}, \ i, j = 1,2,3,4.$

Підставивши вирази (2.42) у систему (2.37), отримуємо

$$\begin{cases} (c_{11}-c_{24})\cos(w)\sinh(z)+(c_{12}+c_{23})\sin(w)\sinh(z)- \\ -(c_{13}+c_{22})\sin(w)\cosh(z)+(c_{14}-c_{21})\cos(w)\cosh(z)=0, \\ (c_{11}-c_{24})\cos(w)\cosh(z)+(c_{12}+c_{23})\sin(w)\cosh(z)- \\ -(c_{13}+c_{22})\sin(w)\sinh(z)+(c_{14}-c_{21})\cos(w)\sinh(z)=0. \end{cases} \quad (2.43)$$

З (2.43) випливає, що

$$c_{11}=c_{24}, \quad c_{12}=-c_{23}, \quad c_{13}=-c_{22}, \quad c_{14}=c_{21}.$$

Таким чином, із системи часткових розв'язків (2.43) можна одержати безліч часткових розв'язків лінійної системи ДРЧП (2.37).

2.2. Моногенні функції зі значеннями у скінченновимірних некомутативних (кліффордових) алгебрах та їх застосування

2.2.1. Розвинення моногенної функції в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ в ряд

Розглянемо алгебру Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{K}}$ (означення 1.1.2) над полем $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, де $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел. Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

Позначимо $\mathbb{E}^{d+1}, d=0,1,\ldots$ (далі $\mathbb{E}^{d+1}$) – $(d+1)$-вимірний лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ з ортонормованим базисом

$$\{e_i, \quad i=0,1,\ldots,d\}.$$

Нехай простір $\mathbb{E}^{d+1}$ є вкладеним в алгебру Кліффорда

$$\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p+q=d+1)$$

з одиницею алгебри $I=e_0$, причому для базисних елементів простору $\mathbb{E}^{d+1}$ виконуються умови множення:

$$e_k e_l+e_l e_k=0, \quad k\neq l, \quad 1\leq k, \quad l\leq d,$$

$$e_k^2=I, \quad 1\leq k\leq p,$$

$$e_k^2=-I, \quad p<k\leq d.$$

Нехай

$$x=\sum_{i=0}^{d} e_i x_i \in \mathbb{E}^{d+1}.$$

Введемо узагальнений оператор Коші-Рімана, який використовують, наприклад, Ф. Соммен і Х. Шеппер [127], у вигляді

$$\mathcal{D} = \sum_{i=0}^{d} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Легко перевірити, що

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^* = \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

де $\mathcal{D}^*$ – оператор, спряжений до $\mathcal{D}$.

Розглянемо функцію

$$f(\cdot) : \mathbb{E}^{d+1} \to \mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}},$$

яка визначена в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p + q = d + 1)$, що породжена $(d + 1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}$ над полем $\mathbb{R}$.

З використанням відомих означень диференційовності функції у випадку некомутативних алгебр (наприклад, Р. Деланже, Р. Краусхар і Г. Малонек [39]), сформулюємо аналогічні означення для введених вище позначень.

Означення 2.2.1. *Функцію*

$$f(\cdot) : \mathbb{E}^{d+1} \to \mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$$

будемо називати ліводиференційовною, якщо $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$, *і право-диференційовною, якщо* $f(\cdot)\mathcal{D} = 0$.

Означення 2.2.2. *Моногенною будемо називати неперервно-диференційовну й ліводиференційовну (відповідно праводиференційовну)* $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ *-значну функцію* $f(\cdot)$ *як розв'язок рівняння* $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$ *(відповідно* $f(\cdot)\mathcal{D} = 0$*).*

Надалі будемо досліджувати неперервно-диференційовні й ліводиференційовні функції (ліві власні вектори узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$).

Для цього вивчимо розв'язки рівняння

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^* f(x) = 0. \qquad (2.44)$$

Очевидно, що будь-яка моногенна функція є розв’язком рівняння (2.44).

За аналогом кватерніонних поліномів Фуетера (підрозділ 1.3) для будь-якого елемента

$$\mathbb{E}^{d+1} \ni x = \sum_{i=0}^{d} e_i x_i$$

запишемо поліноми в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} (p + q = d + 1)$ у вигляді

$$p_k(x) = x_k - e_k x_0, \quad 1 \le k \le d,$$

які будемо називати *поліномами типу Фуетера*.

Позначимо через $C^{\infty}(\mathbb{E}^{d+1})$ множину нескінченно неперервно-диференційовних $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значних функцій, визначених у просторі $\mathbb{E}^{d+1}$.

Теорема 2.2.1. *Нехай неперервно-диференційовна* $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ *-значна функція* $f(x)$ *є нескінченно неперервно-диференційовною в просторі* $\mathbb{E}^{d+1}$, *тобто* $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{E}^{d+1})$, *причому функція* $f(x)$ *і всі її часткові похідні функції*

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

є моногенними. Тоді для всіх натуральних $n \in \mathbb{N}$ *функцію* $f(x)$ *можна розвинути в ряд:*

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{d} p_k(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} p_i(x) p_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) +$$

$$+ \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \times \sum_{i_1=1}^{d} \sum_{i_2=1}^{d} \dots \sum_{i_{n-1}=1}^{d} p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_{n-1}}(x) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{n-1}}} f(0) +$$

$$+ R(x),$$

де

$$R(x) = f(x) - f(0) - \sum_{i=1}^{d} p_k(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} p_i(x) p_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) - \cdots -$$

$$-\frac{1}{(n-1)!} \times \sum_{i_1=1}^{d} \sum_{i_2=1}^{d} \dots \sum_{i_{n-1}=1}^{d} p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_{n-1}}(x) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{n-1}}} f(0).$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(tx)$ як функцію дійсної змінної $t \in \mathbb{R}$. З врахуванням того, що функція $f(x)$ є моногенною, тобто

$$\frac{\partial}{\partial x_0} f(x) = -\sum_{i=1}^{d} e_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x),$$

маємо

$$\frac{d}{dt} f(tx) = \sum_{i=0}^{d} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx) = \sum_{i=1}^{d} (x_i - e_i x_0) \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx). \qquad (2.45)$$

Покладемо $t = 0$. Тоді

$$\frac{d}{dt} f(0) = \sum_{i=1}^{d} p_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(0). \qquad (2.46)$$

З врахуванням того, що перша часткова похідна функції $f(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

є моногенною функцією, з рівності (2.45) одержуємо

$$\frac{d^2}{dt^2} f(tx) = \sum_{i=1}^{d} (x_i - e_i x_0) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(tx) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} (x_i - e_i x_0) \sum_{j=1}^{d} \left(x_j - e_j x_0\right) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(tx).$$

Отже, при $t = 0$ маємо

$$\frac{d^2}{dt^2} f(0) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} (x_i - e_i x_0)\left(x_j - e_j x_0\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0). \qquad (2.47)$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{d^n}{dt^n} f(tx) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{d} \sum_{i_2=1}^{d} \dots \sum_{i_n=1}^{d} p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_n}(x) \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(tx). \tag{2.48}$$

Запишемо ряд Тейлора для функції $f(tx)$ відносно змінної t:

$$f(tx) = f(0) + \frac{d}{dt} f(0) t + \dots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \tag{2.49}$$

$$+ R_n(tx),$$

де

$$R_n(tx) = f(tx) - f(0) - \frac{d}{dt} f(0) t - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Підставивши (2.46) – (2.48) у вираз (2.49), одержуємо рівність (2.44).

Якщо $R_n(tx) \to 0,\ n \to \infty$, то з рівняння (2.44) випливає, що

$$f(x) = f(0) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i_1=1}^{d} \sum_{i_2=1}^{d} \dots \sum_{i_n=1}^{d} p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_n}(x) \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(0) \right). \tag{2.50}$$

Зокрема, якщо

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(0) = a_n, \quad i_1, i_2, \dots, i_n = 1,2, \dots, n,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i_1=1}^{d} \sum_{i_2=1}^{d} \dots \sum_{i_n=1}^{d} p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_n}(x) a_n \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(p_{i_1}(x) + p_{i_2}(x) + \dots + p_{i_n}(x) \right)^n a_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{d} x_k - x_0 \sum_{k=1}^{d} e_k \right)^n a_n.$$

Таким чином, у цьому випадку

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{d} x_k - x_0 \sum_{k=1}^{d} e_k \right)^n a_n, \tag{2.51}$$

де $a_0 = f(0)$.

Теорему доведено.

2.2.2. Застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП

З використанням розвинень функції $f(x)$ (2.50) та (2.51) можна побудувати часткові розв'язки рівняння (2.44).

Наприклад, якщо в розвиненні функції $f(x)$ (2.51) покладемо, що

$$a_n = n! \quad 1 \leq n \leq m, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

і

$$a_n = 0 \quad \forall\, n > m,$$

то одержуємо частковий розв'язок рівняння (2.44) у вигляді

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{d} x_k - x_0 \sum_{k=1}^{d} e_k \right)^n = \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{k=1}^{d} x_k - x_0 \sum_{k=1}^{d} e_k \right)^n.$$

З урахуванням того, що в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ виконується рівність

$$\left(\sum_{k=1}^{d} e_k \right)^{2n} = (p-q)^n, \tag{2.52}$$

дійсний частковий розв'язок рівняння (2.44) має вигляд:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_d) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \left(\left(\sum_{k=1}^{d} x_k \right)^n + C_n^2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k \right)^{n-2} (p-q)^2 x_0^2 + \right.$$

$$\left. + C_n^4 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k \right)^{n-4} (p-q)^4 x_0^4 + \cdots \right), \quad C_n^k = 0, \quad n < k.$$

де C_n^k – біноміальні коефіцієнти.

Розглянемо приклад побудови часткових розв'язків рівняння (2.44) у випадках нескінченних ненульових доданків ряду (2.50).

Покладемо в (2.50), що $a_n = 1$ для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$. Тоді частковий розв'язок рівняння (2.44) має вигляд

$$f(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{d} x_k - x_0 \sum_{k=1}^{d} e_k\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{d} x_k\right)\exp\left(-x_0 \sum_{k=1}^{d} e_k\right).$$

З урахуванням рівності (2.52) і того, що вирази

$$\left(\sum_{k=1}^{d} e_k\right)^{2n+1}$$

не є дійсними для всіх $n \in \mathbb{N}$, одержуємо дійсний частковий розв'язок рівняння (2.44)

$$u(x_1, x_2, \dots, x_d) = \exp\left(\sum_{k=1}^{d} x_k\right)\cos\left(x_0\sqrt{p-q}\right).$$

Якщо $p = 0$ (або $q = 0$), то маємо алгебру Кліффорда $\mathbb{Cl}_{0,d}^{\mathbb{R}}$ (або $\mathbb{Cl}_{d,0}^{\mathbb{R}}$). Тоді з рівняння (2.44) випливає, що моногенна функція $f(x)$ задовольняє d-вимірне рівняння Лапласа

$$\Delta_d f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) = 0. \qquad (2.53)$$

Розглянемо алгебру Кліффорда $\mathbb{Cl}_{0,3}^{\mathbb{R}}$ з вкладеним лінійним простором $\mathbb{E}^3$, базис якого $\{I, e_1, e_2\}$, I – одиничний елемент, і виконується умова

$$e_k e_l + e_l e_k = -2I\delta_{kl}, \quad 1 \le k, \quad l \le 2,$$

де $\delta_{kl}(k \neq l)$ – елементи відповідної діагональної матриці 3-го порядку (підрозділ 1.1).

У цьому випадку рівняння (2.53) є тривимірним рівнянням Лапласа

$$\Delta_3 f(v) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(v) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(v) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(v) = 0.$$

З урахуванням (2.51) функція

$$f(v) = f(x,y,z) = \frac{(e_1+e_2)x - y - z}{1-(e_1+e_2)x + y + z}$$

є моногенною у просторі

$$\mathbb{E}^3 \setminus \{(e_1+e_2)x + y + z = 1\}.$$

Знайдемо дійсну $\mathrm{Re}(f)$ та уявну $\mathrm{Im}(f)$ частини функції $f(x,y,z)$.

$$f(x,y,z) = \left(\frac{(e_1+e_2)x - y - z}{1-(e_1+e_2)x + y + z}\right) \cdot \left(\frac{1+(e_1+e_2)x + y + z}{1+(e_1+e_2)x + y + z}\right) =$$

$$= \frac{y+z-2x^2-(y+z)^2}{2x^2+(1-y-z)^2} + \frac{x}{2x^2+(1-y-z)^2}(e_1+e_2).$$

Отже, маємо два часткові розв'язки рівняння (2.53):

$$u_1(x,y,z) = \mathrm{Re}\big(f(x,y,z)\big) = \frac{y+z-2x^2-(y+z)^2}{2x^2+(1-y-z)^2},$$

$$u_2(x,y,z) = \mathrm{Im}\big(f(x,y,z)\big) = \frac{x}{2x^2+(1-y-z)^2}.$$

Розглянемо алгебру Кліффорда $\mathbb{Cl}_{1,3}^{\mathbb{R}}$ з вкладеним векторним простором $\mathbb{E}^4$, базис якого $\{I, e_1, e_2, e_3\}$, I – одиничний елемент, і виконується умова

$$e_k e_l + e_l e_k = -2I\delta_{kl}, \quad 1 \le k, \quad l \le 3,$$

де $\delta_{kl}(k \ne l)$ – елементи відповідної діагональної матриці 4-го порядку.

У цьому випадку рівняння (2.53) має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(w) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(w) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(w) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(w) = 0, \tag{2.54}$$

де $f(w) = f(t,x,y,z)$.

Розглянемо функцію

$$f(w) = \frac{w}{1-w},$$

де

$$w = (e_1+e_2+e_3)t - x - y - z.$$

З (2.50) випливає, що для $w \ne 1$ функція $f(w)$ є моногенною.

Знайдемо дійсну $\mathrm{Re}(f)$ та уявну $\mathrm{Im}(f)$ частини функції $f(w)$.

$$f(w) =$$

$$= \left(\frac{(e_1+e_2+e_3)t - x - y - z}{1-(e_1+e_2+e_3)t + x + y + z}\right) \cdot \left(\frac{1+(e_1+e_2+e_3)t + x + y + z}{1+(e_1+e_2+e_3)t + x + y + z}\right) =$$

$$= \frac{3t^2 - (x+y+z) + x + y + z}{(1-x-y-z)^2 - 3t^2} + \frac{t(e_1+e_2+e_3)}{(1-x-y-z)^2 - 3t^2}.$$

Отже, маємо два часткові розв’язки рівняння (2.54):

$$u_1(t,x,y,z) = \mathrm{Re}\big(f(w)\big) = \frac{3t^2 - (x+y+z) + x + y + z}{(1-x-y-z)^2 - 3t^2},$$

$$u_2(t,x,y,z) = \mathrm{Im}\big(f(w)\big) = \frac{t}{(1-x-y-z)^2 - 3t^2}.$$

Висновки до другого розділу

У другому розділі показано зображення алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ у вигляді дійсної восьмивимірної алгебри Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ та наведено основні алгебраїчні властивості цієї алгебри. Запропоновано метод знаходження розв’язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, шляхом їх зведення до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$.

З використанням алгебраїчно-аналітичного методу моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) функцій зі значеннями у скінченновимірних комутативних алгебрах знайдено формулу узагальненої функції щільності $f(t,x)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку, що описує розподіл випадкового одновимірного руху $x(t)$ частинки в момент часу t у випадку, коли проміжок часу між двома послідовними перемиканнями швидкості частинки має розподіл Ерланга 3-го порядку (узагальнене телеграфне рівняння). Показано застосування цього методу для знаходження часткових розв’язків ДРЧП четвертого порядку (так зване узагальнене біхвильове рівняння), часткових розв’язків лінійних систем

ДРЧП та наведено приклади розв’язування таких систем ДРЧП, зокрема з ДРЧП, асоційованими з алгеброю комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$.

Досліджено властивості ліводиференційовних функцій $f(\cdot)$ (лівих власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$, тобто $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$), зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p + q = d + 1)$, що породжена $(d + 1)$ -вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}, d = 0,1, \ldots$, над полем $\mathbb{R}$. Знайдено розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної як розв’язку рівняння $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) в ряд за поліномами типу Фуетера. Наведено приклади застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ -значної функції в ряд для знаходження часткових розв’язків ДРЧП другого порядку.

Основний зміст другого розділу дисертації висвітлено в наукових публікаціях здобувачки [12–14; 17; 66; 68; 70; 71; 100–103].

РОЗДІЛ 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МІРИ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ АЛГЕБРАХ

3.1. Властивості ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ зі значеннями в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$

3.1.1. Відношення часткового порядку в алгебрі $\mathbb{W}_4$

Розглянемо алгебру бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$, визначену в першому розділі (означення 1.1.4). З урахуванням леми 1.1.2 будемо використовувати запис бігіперболічного числа $\alpha \in \mathbb{W}_4$ у вигляді

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4, \qquad (3.1)$$

де i_k – ідемпотенти (1.3), $r_k,\ k = 1,2,3,4$ – дійсні числа $\mathbb{R}$.

Позначимо множину невід’ємних бігіперболічних чисел через

$$\mathbb{W}_4^+ := \{x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 \mid x_k \geq 0 \in \mathbb{R}, \quad k = 1,2,3,4\}.$$

Означення 3.1.1. *Відношення* $\preccurlyeq_{\mathbb{W}_4}$ (далі $\preccurlyeq$)*, для якого виконується умова*

$$\alpha \preccurlyeq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{W}_4^+ \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{W}_4$$

будемо називати відношенням часткового порядку в алгебрі $\mathbb{W}_4$.

Легко перевірити, що це відношення є рефлексивним, транзитивним і антисиметричним.

Якщо $\alpha \preccurlyeq \beta$ $(\beta \succcurlyeq \alpha)$, але $\alpha \neq \beta$, то позначимо $\alpha \prec \beta$ $(\beta \succ \alpha)$.

Якщо ж $\alpha \npreceq \beta$ і $\beta \npreceq \alpha$, то вважатимемо, що α і β є непорівнюваними.

Позначимо множину бігіперболічних чисел, які є $\mathbb{W}_4$-непорівнюваними з $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 \in \mathbb{W}_4$ через A_x.

Тоді алгебру бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$ можна зобразити у вигляді

$$\mathbb{W}_4 = \{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \preccurlyeq x\} \cup \{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \succ x\} \cup \{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \in A_x\}. \qquad (3.2)$$

Основні властивості відношення часткового порядку $\preccurlyeq$.

Нехай $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{W}_4$. Тоді:

1^0 *якщо* $\alpha \preccurlyeq \beta$ *і* $\gamma \in \mathbb{W}_4^+$, *то* $\alpha\gamma \preccurlyeq \beta\gamma$;

2^0 *якщо* $\alpha \preccurlyeq \beta$ *і* $\gamma \preccurlyeq \delta$, *то* $\alpha + \gamma \preccurlyeq \beta + \delta$;

3^0 *якщо* $\alpha \preccurlyeq \beta$, *то* $-\beta \preccurlyeq -\alpha$.

Доведення. Доведення властивостей $1^0 - 3^0$ випливає безпосередньо з означення 3.1.1. Властивості доведено.

Означення 3.1.2. *Бігіперболічнозначним модулем* $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$ *бігіперболічного числа* $\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4$ *будемо називати величину*

$$\begin{aligned} |\alpha|_{\mathbb{W}_4} &= |r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4|_{\mathbb{W}_4} = \\ &= |r_1| i_1 + |r_2| i_2 + |r_3| i_3 + |r_4| i_4 \in \mathbb{W}_4^+, \end{aligned} \tag{3.3}$$

де $|r_1|, |r_2|, |r_3|, |r_4|$ *є модулями дійсних чисел* $\mathbb{R}$.

Лема 3.1.1. *Для бігіперболічнозначного модуля* $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$ *виконуються умови:*

(1) $|\alpha|_{\mathbb{W}_4} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$;

(2) $|\alpha\beta|_{\mathbb{W}_4} = |\alpha|_{\mathbb{W}_4} \cdot |\beta|_{\mathbb{W}_4}$;

(3) $|\alpha + \beta|_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq |\alpha|_{\mathbb{W}_4} + |\beta|_{\mathbb{W}_4} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{W}_4$.

Доведення. З використанням формули (3.3) маємо:

(1) $|\alpha|_{\mathbb{W}_4} = 0 \Leftrightarrow |r_1| i_1 + |r_2| i_2 + |r_3| i_3 + |r_4| i_4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |r_1| = |r_2| = |r_3| = |r_4| = 0$ (оскільки i_1, i_2, i_3, i_4 – лінійно незалежні) $\Leftrightarrow \alpha = 0$;

(2) $|\alpha\beta|_{\mathbb{W}_4} =$

$$= |(r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4)(q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3 + q_4 i_4)|_{\mathbb{W}_4} =$$

$$= |r_1 q_1 i_1 + r_2 q_2 i_2 + r_3 q_3 i_3 + r_4 q_4 i_4|_{\mathbb{W}_4} =$$

$$= |r_1 q_1| i_1 + |r_2 q_2| i_2 + |r_3 q_3| i_3 + |r_4 q_4| i_4 =$$

$$= |r_1||q_1| i_1 + |r_2||q_2| i_2 + |r_3||q_3| i_3 + |r_4||q_4| i_4 =$$

$$= (|r_1| i_1 + |r_2| i_2 + |r_3| i_3 + |r_4| i_4) \times$$

$$\times (|q_1| i_1 + |q_2| i_2 + |q_3| i_3 + |q_4| i_4) = |\alpha|_{\mathbb{W}_4} \cdot |\beta|_{\mathbb{W}_4};$$

(3) $|\alpha+\beta|_{\mathbb{W}_4} =$

$$= |(r_1+q_1)i_1+(r_2+q_2)i_2+(r_3+q_3)i_3+(r_4+q_4)i_4|_{\mathbb{W}_4} =$$

$$= |r_1+q_1|i_1+|r_2+q_2|i_2+|r_3+q_3|i_3+|r_4+q_4|i_4. \qquad (*)$$

З іншого боку

$$|\alpha|_{\mathbb{W}_4}+|\beta|_{\mathbb{W}_4} = (|r_1|+|q_1|)i_1+(|r_2|+|q_2|)i_2+$$

$$+(|r_3|+|q_3|)i_3+(|r_4|+|q_4|)i_4. \qquad (**)$$

Оскільки

$$|r_k+q_k| \le |r_k|+|q_k|, \quad r_k, q_k \in \mathbb{R}, \quad k=1,2,3,4,$$

то з рівностей $(*)$ і $(**)$ одержуємо нерівність

$$|\alpha+\beta|_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq |\alpha|_{\mathbb{W}_4}+|\beta|_{\mathbb{W}_4} \quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{W}_4.$$

Лему доведено.

Варто зазначити, що на бігіперболічнозначному модулі $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$ визначена бігіперболічнозначна норма $\|\cdot\|_{\mathbb{W}_4}$, яка набуває значень у множині невід'ємних бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4^+$.

Лема 3.1.2. *Якщо бігіперболічнозначний модуль $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$ має бігіперболічнозначну норму $\|\cdot\|_{\mathbb{W}_4}$, то ця норма задовольняє умови:*

(1) $\|x\|_{\mathbb{W}_4} \succcurlyeq 0 \quad \forall\, x \in |\cdot|_{\mathbb{W}_4}; \quad \|x\|_{\mathbb{W}_4} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in |\cdot|_{\mathbb{W}_4};$

(2) $\|\alpha x\|_{\mathbb{W}_4} = |\alpha|_{\mathbb{W}_4}\|x\|_{\mathbb{W}_4} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{W}_4, \quad \forall\, x \in |\cdot|_{\mathbb{W}_4};$

(3) $\|x+y\|_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq \|x\|_{\mathbb{W}_4}+\|y\|_{\mathbb{W}_4} \quad \forall\, x,y \in |\cdot|_{\mathbb{W}_4}.$

Доведення. Хід доведення проводиться аналогічно до леми 3.1.1. Лему доведено.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

Означення 3.1.3. *Послідовність бігіперболічних чисел*

$$\{\alpha_n\}_{\mathbb{W}_4}, \quad n = 1,2\ldots,$$

будемо називати збіжною до $\alpha \in \mathbb{W}_4$, *якщо*

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{W}_4^+ \setminus \{0\} \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ |\alpha_n-\alpha|_{\mathbb{W}_4} \prec \varepsilon \quad \forall\, n > N.$$

Позначимо

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

3.1.2. Бігіперболічнозначна ймовірнісна міра $P_{\mathbb{W}_4}$

Нехай A – випадкова подія, (Ω, Σ) – вимірний простір (Ω – простір елементарних подій ω), Σ – σ-алгебра подій (безліч підмножин Ω, які називаються випадковими подіями), $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ – область дільників нуля алгебри $\mathbb{W}_4$.

Означення 3.1.4. *Бігіперболічнозначною ймовірнісною мірою називається бігіперболічнозначна функція, визначена на σ-алгебрі подій Σ*

$$P_{\mathbb{W}_4} = P_{\mathbb{W}_4}(\cdot) : \Sigma \to \mathbb{W}_4,$$

для якої виконуються умови:

1) $P_{\mathbb{W}_4}(A) \succcurlyeq 0 \quad \forall\, A \in \Sigma$;

2) $P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \zeta$, *де* ζ *набуває одне з п'яти можливих значень:*

$$\zeta = \{1, i_1, i_2, i_3, i_4\};$$

3) *Для будь-якої послідовності* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ *попарно несумісних випадкових подій виконується рівність*

$$P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_n).$$

Триплет $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$ *будемо називати* $\mathbb{W}_4$*-ймовірнісним простором.*

З урахуванням запису бігіперболічного числа (3.1), бігіперболічнозначну ймовірнісну міру $P_{\mathbb{W}_4}$ можна записати у вигляді:

$$P_{\mathbb{W}_4}(A) = p_1(A) + p_2(A)e + p_3(A)f + p_4(A)g =$$
$$= P_1(A)i_1 + P_2(A)i_2 + P_3(A)i_3 + P_4(A)i_4,$$

де

$$P_1(A) = p_1(A) + p_2(A) + p_3(A) + p_4(A),$$
$$P_2(A) = p_1(A) - p_2(A) - p_3(A) + p_4(A),$$
$$P_3(A) = p_1(A) + p_2(A) - p_3(A) - p_4(A),$$
$$P_4(A) = p_1(A) - p_2(A) + p_3(A) - p_4(A)$$

є дійснозначними ймовірнісними мірами.

З умови 1) означення 3.1.4 випливає, що якщо $P_{\mathbb{W}_4}(A) \succcurlyeq 0$, то

$$P_k(A) \geq 0 \quad \forall\, A \in \Sigma, \quad k = 1,2,3,4.$$

З умови 2) означення 3.1.4 маємо

$$P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \zeta = P_1(\Omega)i_1 + P_2(\Omega)i_2 + P_3(\Omega)i_3 + P_4(\Omega)i_4,$$

причому:

a) якщо $\zeta = 1$, то

$$P_1(\Omega) = P_2(\Omega) = P_3(\Omega) = P_4(\Omega) = 1;$$

b) якщо $\zeta = i_k$, то

$$P_k(\Omega) = 1, \quad P_l(\Omega) = 0, \quad l \neq k, \quad k, l = 1,2,3,4.$$

Із умови 3) означення 3.1.4 безпосередньо випливає рівність

$$P_k\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_k(A_n),$$

де $P_k,\ k = 1,2,3,4$ – дійснозначні ймовірнісні міри.

Отже, щоб визначити бігіперболічнозначну ймовірнісну міру $P_{\mathbb{W}_4}$ на вимірному просторі (Ω, Σ) достатньо ввести на цьому ж просторі чотири дійснозначні ймовірнісні міри $P_k(\Omega),\ k = 1,2,3,4$. У випадку a) всі $P_k(\Omega)$, $k = 1,2,3,4$, є дійснозначними ймовірнісними мірами. Випадок b) можна розглядати як чотири варіанти вкладення дійснозначних ймовірнісних мір $P_k(\Omega),\ k = 1,2,3,4$, у поняття бігіперболічнозначних ймовірнісних мір $P_{\mathbb{W}_4}(\Omega)$. Такі дійснозначні ймовірнісні міри будемо ототожнювати з бігіперболічнозначними ймовірнісними мірами, які набувають значень в області дільників нуля $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ алгебри $\mathbb{W}_4$.

Основні властивості бігіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$.

I. *Нехай* $A \in \Sigma$. *Тоді*

$$P_{\mathbb{W}_4}(A) + P_{\mathbb{W}_4}(\bar{A}) = \zeta,$$

де $\bar{A} \in \Sigma$ *є доповненням до* A.

Доведення.

$$\zeta = P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = P_{\mathbb{W}_4}(A \cup \bar{A}) = P_{\mathbb{W}_4}(A) + P_{\mathbb{W}_4}(\bar{A}).$$

II. $P_{\mathbb{W}_4}(\emptyset) = 0$.

Доведення. Оскільки $\emptyset = \bar{\Omega}$, то за властивістю I маємо

$$P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) + P_{\mathbb{W}_4}(\emptyset) = \zeta.$$

З урахуванням умови 2) означення 3.1.4 одержуємо, що $P_{\mathbb{W}_4}(\emptyset) = 0$.

III. *Якщо* $A, B \in \Sigma$ *і* $A \subset B$, *то* $P_{\mathbb{W}_4}(A)$ *і* $P_{\mathbb{W}_4}(B)$ *є порівнюваними з відношенням часткового порядку* $\preccurlyeq$, *причому*

$$P_{\mathbb{W}_4}(A) \preccurlyeq P_{\mathbb{W}_4}(B).$$

Доведення. Оскільки $B = A \cup (B \setminus A)$, враховуючи адитивність $P_{\mathbb{W}_4}$ за умовою 3) означення 3.1.4, маємо

$$P_{\mathbb{W}_4}(B) = P_{\mathbb{W}_4}(A) + P_{\mathbb{W}_4}(B \setminus A).$$

За умовою 1) означення 3.1.4 маємо

$$P_{\mathbb{W}_4}(B \setminus A) \in \mathbb{W}_4^+.$$

Отже, $P_{\mathbb{W}_4}(A) \preccurlyeq P_{\mathbb{W}_4}(B)$.

Наслідок 3.1.1. *Бігіперболічнозначна ймовірнісна міра* $P_{\mathbb{W}_4}$ *будь-якої випадкової події* A *є порівнюваною з* ζ *і* $\mathbb{W}_4$*-меншою або рівною* $(\preccurlyeq)$ ζ.

Доведення. Дійсно, якщо $A \in \Sigma$, $A \subseteq \Omega$, то $P_{\mathbb{W}_4}(A)$ є порівнюваною з $P_{\mathbb{W}_4}(\Omega)$, тобто

$$P_{\mathbb{W}_4}(A) \preccurlyeq P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \zeta.$$

Наслідок доведено.

Наслідок 3.1.2. *Якщо*

$$P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = i_k, \quad k = 1,2,3,4,$$

то для будь-якої випадкової події A *виконується*

$$P_{\mathbb{W}_4}(A) = c_k i_k, \quad c_k \in [0,1].$$

Доведення. Згідно з наслідком 3.1.1, якщо $P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = i_k, k = 1,2,3,4$, то

$$P_{\mathbb{W}_4}(A) \preccurlyeq P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = i_k \Leftrightarrow P_{\mathbb{W}_4}(A) = c_k i_k, \quad c_k \in [0,1].$$

Наслідок доведено.

IV. *Півадитивність бігіперболічнозначної ймовірнісної міри* $P_{\mathbb{W}_4}$, *тобто для будь-яких випадкових подій* $A_1, \dots, A_n$ *виконується нерівність*

$$P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \preccurlyeq \sum_{i=1}^{n} P_{\mathbb{W}_4}(A_i).$$

Доведення. З урахуванням адитивності $P_{\mathbb{W}_4}$ згідно умови 3) означення 3.1.4 й властивості III одержуємо

$$P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P_{\mathbb{W}_4}\left(A_1 \cup \bigcup_{k=2}^{n}\left(A_1 \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1}(A_l)\right)\right) =$$

$$= P_{\mathbb{W}_4}(A_1) + \sum_{k=2}^{n} P_{\mathbb{W}_4}\left(A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1}(A_l)\right) \preccurlyeq \sum_{i=1}^{n} P_{\mathbb{W}_4}(A_i).$$

V. *Неперервність знизу бігіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$: якщо послідовність $\{A_n\}$, $n = 1,2 \dots$, неспадна, то*

$$\lim_{n\to\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_n) = P_{\mathbb{W}_4}(A) = P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Відзначимо, що збіжність визначено в сенсі бігіперболічнозначного модуля $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$.

Доведення. Оскільки

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots,$$

то

$$P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P_{\mathbb{W}_4}(A_1) + P_{\mathbb{W}_4}(A_1 \setminus A_2) + P_{\mathbb{W}_4}(A_2 \setminus A_3) + \cdots =$$

$$= P_{\mathbb{W}_4}(A_1) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\Big(P_{\mathbb{W}_4}(A_k) - P_{\mathbb{W}_4}(A_{k-1})\Big) = \lim_{n\to\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_n).$$

VI. *Неперервність зверху бігіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$: якщо послідовність випадкових подій $\{A_n\}, n = 1,2 \dots$, незростаюча, то*

$$\lim_{n\to\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_n) = P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Доведення. Доведення випливає з властивості V.

Властивості доведено.

3.1.3. Бігіперболічнозначна випадкова величина $X_{\mathbb{W}_4}$

Топологія, індукована бігіперболічнозначною нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{W}_4}$ в алгебрі $\mathbb{W}_4$, породжує борелівську σ-алгебру $\mathfrak{B}_{\mathbb{W}_4}$ у $\mathbb{W}_4$.

Нехай

$$\rho_0 = a_0 i_1 + b_0 i_2 + c_0 i_3 + d_0 i_4 \in \mathbb{W}_4^+,$$

$$\alpha_0 = x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3 + u_0 i_4 \in \mathbb{W}_4.$$

Тоді відкритою бігіперболічною кулею радіуса ρ_0 з центром в α_0 є

$$B(\alpha_0, \rho_0) = \{\alpha = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 + \alpha_4 i_4 : |\alpha - \alpha_0| \prec \rho_0\}.$$

Якщо $\rho_0 \neq 0$, тобто

$$a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad c_0 \neq 0, \quad d_0 \neq 0,$$

то

$$B(\alpha_0, \rho_0) =$$
$$= \{\alpha = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 + \alpha_4 i_4 :$$
$$|\alpha_1 - x_0| \prec a_0, \quad |\alpha_2 - y_0| \prec b_0, \quad |\alpha_3 - z_0| \prec c_0, \quad |\alpha_4 - u_0| \prec d_0\}.$$

Отже, бігіперболічна куля $B(\alpha_0, \rho_0)$ визначається відкритими інтервалами

$$(x_0 - a_0, x_0 + a_0), (y_0 - b_0, y_0 + b_0), (z_0 - c_0, z_0 + c_0), (u_0 - d_0, u_0 + d_0)$$

з радіусами відповідно

$$\rho_0 \in \mathbb{W}_4^+(i_1), \quad \rho_0 \in \mathbb{W}_4^+(i_2), \quad \rho_0 \in \mathbb{W}_4^+(i_3), \quad \rho_0 \in \mathbb{W}_4^+(i_4),$$

де

$$\mathbb{W}_4^+(i_k) := \mathbb{W}_4(i_k) \cap \mathbb{W}_4^+ \setminus \{0\}, \quad k = 1,2,3,4.$$

Нехай $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$ – $\mathbb{W}_4$-ймовірнісний простір, ω – елементарна подія простору елементарних подій Ω, тобто ω ∈ Ω.

Означення 3.1.5. *Функція*

$$X_{\mathbb{W}_4} = X_{\mathbb{W}_4}(\omega) : \Omega \to \mathbb{W}_4$$

така що

$$X_{\mathbb{W}_4}^{-1}(E) \in \Sigma$$

для будь-якої відкритої множини E у $\mathbb{W}_4$ називається бігіперболічнозначною ($\mathbb{W}_4$-значною) випадковою величиною.

Згідно з означенням 1.1.4 та лемою 1.1.2 $\mathbb{W}_4$-значну випадкову величину $X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω})$ можна записати у вигляді:

$$X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω}) = x_1(\text{ω}) + x_2(\text{ω})e + x_3(\text{ω})f + x_4(\text{ω})g =$$
$$= X_1(\text{ω})i_1 + X_2(\text{ω})i_2 + X_3(\text{ω})i_3 + X_4(\text{ω})i_4,$$

де

$$X_1(\text{ω}) = x_1(\text{ω}) + x_2(\text{ω}) + x_3(\text{ω}) + x_4(\text{ω}),$$
$$X_2(\text{ω}) = x_1(\text{ω}) - x_2(\text{ω}) - x_3(\text{ω}) + x_4(\text{ω}),$$
$$X_3(\text{ω}) = x_1(\text{ω}) + x_2(\text{ω}) - x_3(\text{ω}) - x_4(\text{ω}),$$
$$X_4(\text{ω}) = x_1(\text{ω}) - x_2(\text{ω}) + x_3(\text{ω}) - x_4(\text{ω})$$

є дійснозначними випадковими величинами в Ω.

Таким чином, будь-яка $\mathbb{W}_4$-значна випадкова величина $X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω})$ у просторі Ω визначає чотири дійснозначні випадкові величини

$$X_1(\text{ω}),\ X_2(\text{ω}),\ X_3(\text{ω}),\ X_4(\text{ω})$$

такі, що

$$X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω}) = X_1(\text{ω})i_1 + X_2(\text{ω})i_2 + X_3(\text{ω})i_3 + X_4(\text{ω})i_4,$$

і навпаки.

Теорема 3.1.1. *Бігіперболічнозначна ($\mathbb{W}_4$-значна) функція $X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω})$, визначена у вимірному просторі (Ω, Σ), є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною тоді і тільки тоді, якщо*

$$\{\text{ω} \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω}) \succ x \text{ або } X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω}) \in A_x\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4.$$

Доведення. З використанням результатів Р. Кумара та К. Шарми [74] для гіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}}(\text{ω})$ доведемо цю теорему для бігіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω})$.

Нехай $X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω})$ – $\mathbb{W}_4$-значна функція на вимірному просторі (Ω, Σ) така, що

$$\{\text{ω} \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω}) \succ x \text{ або } X_{\mathbb{W}_4}(\text{ω}) \in A_x\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4.$$

Нехай S – сукупність всіх відкритих множин $E \in \mathbb{W}_4$, для яких

$$X_{\mathbb{W}_4}^{-1}(E) \in \Sigma.$$

Для будь-якого $x \in \mathbb{W}_4$ виберемо

$$x_n \in \mathbb{W}_4, \quad x_n \prec x, \quad n \in \mathbb{N},$$

де

$$x_n \to x, \quad n \to \infty.$$

Оскільки

$$\left\{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \succ x_n \ \in A_{x_n}\right\} \in S \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

і

$$\{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \prec x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \preccurlyeq x_n\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\left\{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \succ x_n \text{ або } \alpha \in A_{x_n}\right\}},$$

а S – σ-алгебра, то маємо

$$\{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \prec x\} \in S.$$

Тоді будь-яку кулю $B(\alpha_0, \rho_0) \in S$ з центром

$$\alpha_0 = \alpha_{01} i_1 + \alpha_{02} i_2 + \alpha_{03} i_3 + \alpha_{04} i_4$$

радіуса

$$\rho_0 = \rho_{01} i_1 + \rho_{02} i_2 + \rho_{03} i_3 + \rho_{04} i_4$$

можна зобразити як перетин множин

$$\{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \prec$$

$$\prec (\alpha_{01} + \rho_{01}) i_1 + (\alpha_{02} + \rho_{02}) i_2 + (\alpha_{03} + \rho_{03}) i_3 + (\alpha_{04} + \rho_{04}) i_4\}$$

і

$$\{\alpha \in \mathbb{W}_4 \mid \alpha \succ$$

$$\succ (\alpha_{01} - \rho_{01}) i_1 + (\alpha_{02} - \rho_{02}) i_2 + (\alpha_{03} - \rho_{03}) i_3 + (\alpha_{04} - \rho_{04}) i_4\}.$$

Оскільки будь-яка відкрита множина E у $\mathbb{W}_4$ є зчисленним об'єднанням куль такого типу, то S містить будь-яку відкриту множину $(E \subset S)$.

Отже, $X_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною у (Ω, Σ).

Навпаки, припустимо, що $X_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ – $\mathbb{W}_4$-значна випадкова величина. Тоді

$$X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ X_3(\omega),\ X_4(\omega)$$

є дійснозначними випадковими величинами.

Множина

$$\left\{\omega \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \succ x \text{ або } X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \in A_x\right\}$$

є об’єднанням множин

$$\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) > x_1\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_2(\omega) > x_2\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_3(\omega) > x_3\} \cap$$
$$\cap \{\omega \in \Omega \mid X_4(\omega) > x_4\},$$
$$\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) > x_1\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_2(\omega) < x_2\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_3(\omega) < x_3\} \cap$$
$$\cap \{\omega \in \Omega \mid X_4(\omega) < x_4\},$$
$$\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) > x_1\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_2(\omega) > x_2\} \cap \{\omega \in \Omega \mid X_3(\omega) < x_3\} \cap$$
$$\cap \{\omega \in \Omega \mid X_4(\omega) < x_4\}, \ldots$$

для всіх

$$x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4$$

і будь-яка з цих множин є вимірною, оскільки

$$X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ X_3(\omega),\ X_4(\omega)$$

є дійснозначними випадковими величинами.

Отже,

$$\left\{\omega \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \succ x \text{ або } X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \in A_x\right\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4.$$

Теорему доведено.

Теорема 3.1.2. *Нехай* $X_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ *є бігіперболічнозначною випадковою величиною на вимірному просторі* $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$.

Тоді еквівалентними є умови:

(i) $\left\{\omega \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \preccurlyeq x\right\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4;$

(ii) $\left\{\omega \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \succ x \text{ або } X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \in A_x\right\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4;$

(iii) $\left\{\omega \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \succcurlyeq x \text{ або } X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \in A_x\right\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4;$

(iv) $\left\{\omega \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \prec x\right\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4.$

Доведення. Для доведення використаємо теорему 3.1.1.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$. Нехай $x \in \mathbb{W}_4$, V_1, V_2 – дві множини відповідно в (i) та (ii). Тоді

$$V_1 \cup V_2 = \mathbb{W}_4 \in \Sigma, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset,$$

оскільки

$$V_1 = \mathbb{W}_4 \setminus V_2, \quad V_2 = \mathbb{W}_4 \setminus V_1.$$

Отже,

$$V_1 \in \Sigma \Leftrightarrow V_2 \in \Sigma.$$

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$. Доведення випливає з тих же міркувань.

$(iv) \Leftrightarrow (i)$. Відмітимо, що для всіх $\omega \in \Omega$ і $x \in \mathbb{W}_4$ маємо

$$X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \preccurlyeq x \Leftrightarrow X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \preccurlyeq x + \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Таким чином,

$$\left\{\omega \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \preccurlyeq x\right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega \mid X_{\mathbb{W}_4}(\omega) \prec x + \frac{1}{n}\right\}.$$

Якщо $X_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ задовольняє (iv), то кожна множина перетину, а значить і зчисленного перетину, належить Σ.

Отже, $X_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ задовольняє (i).

$(i) \Leftrightarrow (iv)$. Доведення випливає з тих же міркувань.

Теорему доведено.

Надалі замість $X_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ будемо писати $X_{\mathbb{W}_4}$.

Основні властивості бігіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$.

Нехай $\alpha = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 + \alpha_4 i_4$, $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4$ є будь-якими бігіперболічними числами, а $X_{\mathbb{W}_4} = X_1 i_1 + X_2 i_2 + X_3 i_3 + X_4 i_4$, $Y_{\mathbb{W}_4} = Y_1 i_1 + Y_2 i_2 + Y_3 i_3 + Y_4 i_4$ – $\mathbb{W}_4$-значними випадковими величинами на $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$. Тоді:

(I) $\forall\, \alpha \in \mathbb{W}_4$:

A) $\alpha + X_{\mathbb{W}_4}$; B) $\alpha - X_{\mathbb{W}_4}$; C) $\alpha X_{\mathbb{W}_4}$; D) $\frac{X_{\mathbb{W}_4}}{\alpha}$, $\alpha \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$,

є $\mathbb{W}_4$*-значними випадковими величинами на* $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$;

(II) $X^2_{\mathbb{W}_4}$ *є* $\mathbb{W}_4$*-значною випадковою величиною на* $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$;

(III) $X_{\mathbb{W}_4} \pm Y_{\mathbb{W}_4}$ *є* $\mathbb{W}_4$*-значними випадковими величинами на* $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$;

(IV) $X_{\mathbb{W}_4} \cdot Y_{\mathbb{W}_4}$ *є* $\mathbb{W}_4$*-значною випадковою величиною на* $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$;

(V) $\frac{1}{Y_{\mathbb{W}_4}}\left(Y_{\mathbb{W}_4} \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}\right)$ – $\mathbb{W}_4$*-значна випадкова величина на* $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$;

(VI) $\frac{X_{\mathbb{W}_4}}{Y_{\mathbb{W}_4}}\left(Y_{\mathbb{W}_4} \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}\right)$ – $\mathbb{W}_4$*-значна випадкова величина на* $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$.

Доведемо властивість (I) для всіх можливих випадків.

(I) *Доведення*. Оскільки

$$\left\{\omega : X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x \right\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4,$$

і число $\alpha \in \mathbb{W}_4$ може бути як порівнюваним, так і непорівнюваним з x (3.2), то можливі випадки:

a) $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x,\ \ \alpha \preccurlyeq x$;

b) $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x,\ \ \alpha \succ x$;

c) $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x,\ \ \alpha \in A_x$.

I.A) Покажемо, що якщо $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x$, то $\alpha + X_{\mathbb{W}_4}$ є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною на $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$, тобто

$$\left\{\omega : \alpha + X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x\right\} \in \Sigma \quad \forall\, \alpha, x \in \mathbb{W}_4.$$

Aa) Якщо $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x$, $\alpha \preccurlyeq x$, то з використанням властивості 2^0 відношення часткового порядку маємо

$$\alpha + X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq 2x \Rightarrow X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq 2x - \alpha.$$

Оскільки $2x - \alpha \in \mathbb{W}_4$, то

$$\left\{\omega : X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq 2x - \alpha\right\} \in \Sigma.$$

Ab) Якщо $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x$, $\alpha \succ x$, то з врахуванням означення 3.1.1 і властивості 2^0 відношення часткового порядку одержуємо:

$$\begin{Bmatrix} X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \\ \alpha \succ x \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \\ x \prec \alpha \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \\ x \preccurlyeq \alpha, x \neq \alpha \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_{\mathbb{W}_4} + x \preccurlyeq x + \alpha, \\ x \neq \alpha \end{Bmatrix} \Rightarrow X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq \alpha,$$

звідки $\alpha + X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq 2\alpha \Rightarrow X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq \alpha \Rightarrow \left\{\omega : X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq \alpha\right\} \in \Sigma$.

Ac) Якщо $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x,\ \alpha \in A_x$, то маємо

$$\begin{cases} X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x \Rightarrow x - X_{\mathbb{W}_4} \in \mathbb{W}_4^+, \\ \alpha \in A_x \end{cases} \Rightarrow x - \alpha - X_{\mathbb{W}_4} \in (\mathbb{W}_4^+ \cup A_x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X_{\mathbb{W}_4} \in A_{x-\alpha}, \\ X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x - \alpha. \end{array}\right.$$

Оскільки $x - \alpha \in \mathbb{W}_4$, то

$\left\{\omega : X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x - \alpha\right\} \in \Sigma$ і $\left\{\omega : X_{\mathbb{W}_4} \in A_{x-\alpha}\right\} \in \Sigma$ (теорема 3.1.2, (i-ii)).

Отже, для всіх випадків властивості I.A) величина $\alpha + X_{\mathbb{W}_4}$ є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною.

I.B) Властивість, що

$$\alpha - X_{\mathbb{W}_4} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{W}_4$$

є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною, доводиться аналогічно.

I.C) Покажемо, що якщо $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x$, то $\alpha X_{\mathbb{W}_4}$ – $\mathbb{W}_4$-значна випадкова величина, тобто

$$\left\{\omega : \alpha X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x\right\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4.$$

Розглянемо всі можливі випадки.

1. Нехай α і $X_{\mathbb{W}_4}$ не є дільниками нуля алгебри $\mathbb{W}_4$, тобто

$$\alpha \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}, \quad X_{\mathbb{W}_4} \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}.$$

Ca1) Якщо $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x,\ \alpha \preccurlyeq x$, то множину

$$\left\{\omega : \alpha X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x\right\}$$

можна записати у вигляді

$$\left\{\omega : \alpha X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\omega : r_1 X_1 i_1 + r_2 X_2 i_2 + r_3 X_3 i_3 + r_4 X_4 i_4 \preccurlyeq x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4,\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\omega : (r_1 X_1 \leq x_1) i_1 + (r_2 X_2 \leq x_2) i_2 + (r_3 X_3 \leq x_3) i_3 + (r_4 X_4 \leq x_4) i_4\}.$$

Для дійснозначної випадкової величини доведено, що якщо

$$X_k, \quad k = 1{,}2{,}3{,}4,$$

є випадковими величинами, то

$$r_k X_k, \quad k = 1{,}2{,}3{,}4,$$

також є випадковими величинами.

Тоді одержуємо

$$\{\omega : (r_1X_1 \leq x_1)i_1 + (r_2X_2 \leq x_2)i_2 + (r_3X_3 \leq x_3)i_3 + (r_4X_4 \leq x_4)i_4\} \in \Sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\omega : \alpha X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x\right\} \in \Sigma.$$

Для випадків

$$\text{Cb1)} \quad X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \quad \alpha \succ x,$$

і

$$\text{Cc1)} \quad X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \quad \alpha \in A_x,$$

та при умові, що $\alpha \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ і $X_{\mathbb{W}_4} \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, отримуємо той же результат, що й у випадку Ca1).

2. Нехай $\alpha \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $X_{\mathbb{W}_4} \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ (або навпаки).

Ca2) Якщо $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x$, $\alpha \preccurlyeq x$ і

$$\alpha = r_k i_k, \quad r_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1,2,3,4,$$

маємо:

$$\left\{\omega : \alpha X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x\right\} = \left\{\omega : r_k i_k X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \ k = 1,2,3,4\right\} =$$

$$= \left\{\omega : r_k X_{\mathbb{W}_4} i_k \preccurlyeq x i_k, \ k = 1,2,3,4\right\} \Rightarrow \left\{\omega : r_k X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \ k = 1,2,3,4\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\omega : X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq \frac{x}{r_k}, \ r_k \neq 0, \ k = 1,2,3,4\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\omega : X_{\mathbb{W}_4} \succ \frac{x}{r_k}, \ r_k \neq 0, \ k = 1,2,3,4\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\omega : X_{\mathbb{W}_4} \in A_{\frac{x}{r_k}}, \ k = 1,2,3,4\right\} \in \Sigma.$$

Для випадків

$$\text{Cb2)}\ X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \quad \alpha \succ x, \quad \alpha \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}, \quad X_{\mathbb{W}_4} \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},$$

і

$$\text{Cc2)}\ X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \quad \alpha \in A_x, \quad \alpha \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}, \quad X_{\mathbb{W}_4} \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},$$

маємо той же результат, що й у випадку Ca2).

3. Нехай α і $X_{\mathbb{W}_4}$ є дільниками нуля алгебри $\mathbb{W}_4$, тобто

$$\alpha \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0} \text{ і } X_{\mathbb{W}_4} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}.$$

Ca3) Для $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x$, $\alpha \preccurlyeq x$ маємо:

- якщо

$$\alpha = r_k i_k, r_k \in \mathbb{R}, \quad X_{\mathbb{W}_4} = q_k i_k, q_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1,2,3,4,$$

тоді (п. Ca2)

$$\left\{\omega : \alpha X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x\right\} = \{\omega : r_k i_k q_k i_k \preccurlyeq x,\ k = 1,2,3,4\} =$$

$$= \{\omega : r_k q_k i_k \preccurlyeq x,\ k = 1,2,3,4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\omega : r_k X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x,\ k = 1,2,3,4\right\} \in \Sigma;$$

- якщо

$$\alpha = r_k i_k, \quad r_k \in \mathbb{R},$$

$$X_{\mathbb{W}_4} = q_l i_l, \quad q_l \in \mathbb{R},$$

$$k, l = 1,2,3,4, \quad k \neq l,$$

тоді

$$\left\{\omega : \alpha X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x\right\} =$$

$$= \{\omega : r_k i_k q_l i_l \preccurlyeq x,\ k = 1,2,3,4\} =$$

$$= \{\omega : 0 \preccurlyeq x\} \in \Sigma.$$

Для випадків

$$\text{Cb3)}\ X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \quad \alpha \succ x, \quad \alpha \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}, \quad X_{\mathbb{W}_4} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},$$

і

$$\text{Cc3)}\ X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x, \quad \alpha \in A_x, \quad \alpha \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}, \quad X_{\mathbb{W}_4} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},$$

маємо такий же результат, що й у випадку Ca3).

Отже, $\alpha X_{\mathbb{W}_4}$ є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною.

I.D) Властивість, що якщо $X_{\mathbb{W}_4} \preccurlyeq x$, то

$$\frac{X_{\mathbb{W}_4}}{\alpha}, \quad \alpha \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},$$

є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною, тобто

$$\left\{\omega : \frac{X_{\mathbb{W}_4}}{\alpha} \preccurlyeq x, \quad \alpha \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}\right\} \in \Sigma \quad \forall\, x \in \mathbb{W}_4,$$

доводиться аналогічно до I.C).

Властивість I доведено.

Властивості (II) – (VI) мають аналогічну схему доведення.

3.2. Властивості міри $\boldsymbol{\omega}$ зі значеннями в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$

3.2.1. Кватерніоннозначна міра $\boldsymbol{\omega}$ та її повна варіація $\mathbf{var}[\boldsymbol{\omega}]$

Нехай $\mathfrak{M}$ − σ-алгебра підмножин непорожньої множини X, $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел. Введемо послідовність множин у вигляді

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Надалі всі індекси n такого виду послідовностей будемо вважати натуральними числами $\mathbb{N}$.

Означення 3.2.1. *Кватерніоннозначною мірою ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ називається кватерніоннозначна функція, визначена на $\mathfrak{M}$*

$$\omega : \mathfrak{M} \to \mathbb{H}$$

така, що для будь-якої сукупності множин

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M},$$

де

$$A_n \cap A_m = \emptyset, \quad n \neq m,$$

виконується рівність

$$\omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n). \tag{3.4}$$

Зауваження 3.2.1. *Оскільки об'єднання множин сукупності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ не змінюється при перестановці індексів* n, *то кожна перестановка ряду* (3.4) *повинна збігатися до*

$$\omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Тому будемо вважати, що ряд (3.4) *є абсолютно збіжним.*

Визначимо функцію множин $\mathrm{var}[\omega](\cdot)$ на $\mathfrak{M}$ у вигляді

$$\mathrm{var}[\omega](A) \ := \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\omega(A_n)|,$$

де супремум береться за всіма розбиттями множини

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Зрозуміло, що

$$|\omega(A)| \leq \mathrm{var}[\omega](A).$$

Означення 3.2.2. *Функцію* $\mathrm{var}[\omega]$ *будемо називати повною варіацією кватерніоннозначної міри* ω.

Теорема 3.2.1. *Повна варіація* $\mathrm{var}[\omega]$ *кватерніоннозначної міри* ω *на вимірному просторі* $(X, \mathfrak{M})$ *є невід'ємною мірою на* $(X, \mathfrak{M})$.

Доведення. Припустимо, що сукупність множин

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$$

є розбиттям множини A.

Нехай сукупність $\{A_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$ є розбиттям $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Тоді маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\omega(A_{nm})| \leq \mathrm{var}[\omega](A).$$

Враховуючи, що

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm},$$

одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup \sum_{m=1}^{\infty} |\omega(A_{nm})| \leq \mathrm{var}[\omega](A).$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{var}[\omega](A_n) \leq \mathrm{var}[\omega](A). \tag{3.5}$$

Покажемо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{var}[\omega](A_n) \geq \mathrm{var}[\omega](A).$$

Припустимо, що сукупність множин $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ є розбиттям множини A.

Тоді для фіксованого натурального $m \in \mathbb{N}$ сукупність $\{B_m \cap A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є розбиттям $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ і для фіксованого натурального $n \in \mathbb{N}$ сукупність $\{B_m \cap A_n\}_{m=1}^{\infty}$ є розбиттям $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді отримуємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\omega(B_m)| = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \omega(B_m \cap A_n) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega(B_m \cap A_n)| = \tag{3.6}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\omega(B_m \cap A_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}[\omega](A_n).$$

Оскільки вираз (3.6) виконується для будь-якого розбиття $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ множини A, то виконується нерівність

$$\operatorname{var}[\omega](A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}[\omega](A_n).$$

Отже, з врахуванням (3.5) маємо

$$\operatorname{var}[\omega](A) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}[\omega](A_n).$$

Легко бачити, що $\operatorname{var}[\omega](\emptyset) = 0$. Теорему доведено.

Теорема 3.2.2. *Якщо ω є кватерніоннозначною мірою на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$, то*

$$\operatorname{var}[\omega](X) < +\infty.$$

Доведення. Спочатку доведемо допоміжну нерівність (3.7).

Добре відомо, що будь-який кватерніон алгебри $\mathbb{H}$ (означення 1.1.1) можна зобразити у вигляді

$$q = q_0 + \tilde{q}_1 i + \tilde{q}_2 j + \tilde{q}_3 k = q_0 + \vec{q},$$

де $q_0 = \operatorname{Re}(q)$ – скалярна (або дійсна $q_0 \in \mathbb{R}$) частина кватерніона q;

$\vec{q} = \operatorname{Im}(q) = \tilde{q}_1 i + \tilde{q}_2 j + \tilde{q}_3 k$ – векторна (або уявна $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$) частина кватерніона q.

Нехай $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{H}$ – будь-які кватерніони. Тоді існує підмножина S множини $\{1,2,\dots,n\}$ така, що

$$\left|\sum_{l\in S} q_l\right| \geq \frac{3(\pi^2-8)}{4\pi^3}\sum_{l=1}^{n}|q_l|. \qquad (3.7)$$

Будь-який кватерніон $q = q_0 + \vec{q}$ можна записати у вигляді

$$q = \frac{q_0}{|q|} + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\frac{|\vec{q}|}{|q|} = |q|\left(\cos\alpha + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\sin\alpha\right),$$

де α – кут, який утворює кватерніон $q \in \mathbb{H} \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ з додатною дійсною віссю, і α є розв’язком системи рівнянь

$$\begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{q_0}{|q|},\\ \sin\alpha = \dfrac{|\vec{q}|}{|q|}.\end{cases}$$

Ця система має єдиний розв’язок α_0 на проміжку $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Можна перевірити існування єдиного вектора $\vec{v}_0$ такого, що $\vec{v}_0$ і $\vec{q}$ мають однаковий напрямок і $|\vec{v}_0| = \alpha_0$.

Таким чином, кожен кватерніон q має єдине зображення

$$q = |q|\left(\cos|\vec{v}_0| + \frac{\vec{v}_0}{|\vec{v}_0|}\sin|\vec{v}_0|\right), \quad 0 \leq |\vec{v}_0| \leq \pi. \qquad (3.8)$$

Запишемо

$$q_l = |q_l|\left(\cos|\vec{v}_l| \ + \frac{\vec{v}_l}{|\vec{v}_l|}\sin|\vec{v}_l|\right),$$

де

$$\vec{v}_l = \alpha_l i + \beta_l j + \gamma_l k, \quad 0 \leq |\vec{v}_l| \leq \pi,$$

є вектором як $\vec{v}_0$ у формулі (3.8).

Розглянемо векторну частину кватерніона q у вигляді

$$\vec{\theta} = \theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k,$$

де

$$0 \leq \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \leq \pi.$$

Нехай $S(\vec{\theta})$ – множина всіх $l \in S$ таких, що

$$\cos(|\vec{v}_l - \vec{\theta}|) > 0.$$

Тоді

$$\left|\sum_{l \in S(\vec{\theta})} q_l\right| = \left|\sum_{l \in S(\vec{\theta})} q_l e^{-\vec{\theta}}\right| \geq$$

$$\geq \operatorname{Re}\left(\sum_{l \in S(\vec{\theta})} q_l e^{-\vec{\theta}}\right) = \sum_{l=1}^{n} |q_l| \cos^{+}(|\vec{v}_l - \vec{\theta}|),$$

де

$$\cos^{+}(|\vec{v}_l - \vec{\theta}|) = \cos(|\vec{v}_l - \vec{\theta}|)\, I_{(\cos(|\vec{v}_l - \vec{\theta}|) > 0)},$$

$I_{(\cos(|\vec{v}_l - \vec{\theta}|) > 0)}$ – інтеграл по $\vec{\theta}$.

Візьмемо таке значення $\vec{\theta}_0$, що максимізує останню суму, і розглянемо максимум $S(\vec{\theta}_0)$. Цей максимум буде не меншим середнього значення суми $\vec{\theta} = \theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k$. Середнє значення визначається як

$$\frac{3(\pi^2 - 8)}{4\pi^3} \sum_{i=1}^{n} |q_l|,$$

оскільки

$$\frac{1}{m(B(\pi))} \iiint_{|\vec{v}_l - \vec{\theta}| \leq \pi} \cos^{+}(|\vec{v}_l - \vec{\theta}|)\; d\vec{\theta} =$$

$$= \frac{1}{m(B(\pi))} \iiint_{|\vec{\theta}| \leq \pi} \cos^{+}(|\vec{\theta}|)\; d\vec{\theta} = \frac{1}{m(B(\pi))} \iiint_{|\vec{\theta}| \leq \frac{\pi}{2}} \cos(|\vec{\theta}|)\; d\vec{\theta} =$$

$$= \frac{3}{4\pi^4} \int_{0}^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \cos(\pi\rho) \rho^2 d\rho d\theta d\varphi = \frac{3(\pi^2 - 8)}{4\pi^3},$$

де $m(B(\pi)) = \frac{4}{3}\pi^4$ – об’єм кулі $B(\pi)$ радіуса π.

Таким чином, нерівність (3.7) виконується.

Доведемо теорему 3.2.2. Нехай існує множина $A \in \mathfrak{M}$, для якої

$$\operatorname{var}[\omega](A) = +\infty.$$

Покладемо

$$t = \frac{4\pi^3}{3(\pi^2 - 8)}(1 + |\omega(A)|).$$

Оскільки $\operatorname{var}[\omega](A) > t$, то існує розбиття $\{A_i\}_{i=1}^n$ множини A:

$$\sum_{i=1}^{n} |\omega(A_i)| > t \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Застосуємо нерівність (3.7) для $q_i = \omega(A_i),\ i = 1 \dots n$.

Можна зробити висновок, що існує множина $E \subset A$, яка є об'єднанням множин $\{E\}_{i=1}^n$, і виконується нерівність

$$|\omega(E)| > \frac{3(\pi^2 - 8)}{4\pi^3} t > 1.$$

Для $F = A \setminus E$ знаходимо

$$|\omega(F)| = |\omega(A) - \omega(E)| \geq |\omega(E)| - |\omega(A)| >$$

$$> \frac{3(\pi^2 - 8)}{4\pi^3} t - |\omega(A)| = 1.$$

Таким чином, одержуємо розбиття множини A на неперетинні множини E і F такі, що $|\omega(E)| > 1,\ |\omega(F)| > 1$.

Тоді, якщо

$$\operatorname{var}[\omega](X) = +\infty,$$

то множину X можна розбити на множини E_1 і F_1, для яких

$$|\omega(E_1)| > 1, \quad \operatorname{var}[\omega](F_1) = +\infty.$$

Далі множину F_1 розіб'ємо на множини E_2 і F_2, для яких

$$|\omega(E_2)| > 1, \quad \operatorname{var}[\omega](F_2) = +\infty.$$

Продовжуючи таким чином, одержуємо нескінченну зліченну сукупність неперетинних множин $\{E_i\}_{i=1}^n$

$$|\omega(E_n)| > 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Із зчисленної адитивності кватерніоннозначної міри ω випливає, що

$$\omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(E_n).$$

Але цей ряд не є збіжним, оскільки

$$\omega(E_n) \nrightarrow 0, \quad n \to +\infty.$$

Приходимо до протиряччя. Отже,

$$\operatorname{var}[\omega](X) < +\infty.$$

Теорему доведено.

Зауваження 3.2.2. *Загальний термін дійснозначної міри включає $+\infty$ як допустиме значення. Таким чином, класичні дійснозначні міри, які можуть набувати значень $+\infty$, не утворюють підклас кватерніоннозначних мір.*

3.2.2. Абсолютна неперервність та сингулярність кватерніоннозначної міри ω

Нехай μ – дійснозначна (невід'ємна) міра, λ – дійснозначна міра (заряд), ω – кватерніоннозначна міра на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$.

Означення 3.2.3. *Кватерніоннозначна міра ω називається абсолютно неперервною відносно дійснозначної (невід'ємної) міри μ, якщо для будь-якої множини $A \in \mathfrak{M}$ такої, що $\mu(A) = 0$, виконується $\omega(A) = 0$. Позначимо $\omega \ll \mu$.*

Означення 3.2.4. *Кватерніоннозначна міра ω називається зосередженою на множині F, якщо:*

$$\forall\, A \in \mathfrak{M} \quad \exists\, F \in \mathfrak{M} : \ \omega(A) = \omega(A \cap F).$$

Це еквівалентно тому, що $\omega(A) = 0$, якщо $A \cap F = \emptyset$.

Означення 3.2.5. *Нехай ω_1, ω_2 – кватерніоннозначні міри на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$. Якщо існує пара неперетинних множин F і G таких, що ω_1 є зосередженою на F і ω_2 є зосередженою на G, то ω_1 і ω_2 називаються взаємно сингулярними кватерніоннозначними мірами. Позначимо $\omega_1 \perp \omega_2$.*

Теорема 3.2.3. (Властивості взаємно сингулярних кватерніонно-значних мір). *Нехай* μ *– дійснозначна (невід'ємна) міра,* $\omega, \omega_1, \omega_2$ *– кватерніоннозначні міри на вимірному просторі* $(X, \mathfrak{M})$. *Тоді:*

1) *Якщо* ω *зосереджена на* F, *то* $\mathrm{var}[\omega]$ *є зосередженою на* F.

2) *Якщо* $\omega_1 \perp \omega_2$, *то* $\mathrm{var}[\omega_1] \perp \mathrm{var}[\omega_2]$.

3) *Якщо* $\omega_1 \perp \mu$ *і* $\omega_2 \perp \mu$, *то* $(\omega_1 + \omega_2) \perp \mu$.

4) *Якщо* $\omega_1 \ll \mu$ *і* $\omega_2 \ll \mu$, *то* $(\omega_1 + \omega_2) \ll \mu$.

5) *Якщо* $\omega \ll \mu$, *то* $\mathrm{var}[\omega] \ll \mu$.

6) *Якщо* $\omega_1 \ll \mu$ *і* $\omega_2 \perp \mu$, *то* $\omega_1 \perp \omega_2$.

7) *Якщо* $\omega \ll \mu$ *і* $\omega \perp \mu$, *то* $\omega \equiv 0$.

Доведення.

1) Якщо $A \cap F = \emptyset$, то для будь-якого розбиття $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ множини A маємо:

$$\omega(A_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

тоді

$$\mathrm{var}[\omega](A) = 0 \quad \forall\, A.$$

2) Доведення випливає з 1).

3) Існує множина $B \in \mathfrak{M}$, на якій μ є зосередженою. Існують множини $F, G \in \mathfrak{M}$ такі, що ω_1 зосереджена на F і ω_2 зосереджена на G. Якщо

$$A \subset (F \cup G)^c = F^c \cap G^c,$$

то

$$(\omega_1 + \omega_2)(A) = \omega_1(A) + \omega_2(A) = 0,$$

тобто сума $\omega_1 + \omega_2$ є зосередженою на $F \cup G$. Зрозуміло, що $B \subset (F \cup G)^c$, і тоді

$$(\omega_1 + \omega_2) \perp \mu.$$

4) Випливає безпосередньо з означень вище.

5) Припустимо, що $\mu(A) = 0$ і сукупність множин $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є розбиттям множини A. Тоді $\mu(A_n) = 0$. Оскільки $\omega \ll \mu$, то

$$\omega(A_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega(A_n)|.$$

Це означає, що

$$\mathrm{var}[\omega](A) = 0.$$

6) Оскільки $\omega_2 \perp \mu$, то існує множина $E \in \mathfrak{M}$ така, що $\mu(E) = 0$ і ω_2 є зосередженою на E.

Оскільки $\omega_1 \ll \mu$, то для будь-якої множини $A \in \mathfrak{M},\ A \subset E$

$$\omega_1(A) = 0.$$

Таким чином, ω_1 є зосередженою на E^c.

7) Із властивості 6) випливає, що $\omega \perp \omega$. Отже, $\omega = 0$.

Теорему доведено.

Теорема 3.2.4. (Розклад Лебега кватерніоннозначної міри). *Нехай λ – дійснозначна σ-скінченна міра (σ-скінченний заряд) і ω – кватерніоннозначна міра на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$. Тоді існує єдина пара кватерніоннозначних мір $(\omega_a, \omega_s) \in (X, \mathfrak{M})$ така, що*

$$\omega = \omega_a + \omega_s, \quad \omega_a \ll \lambda, \quad \omega_s \perp \lambda. \tag{3.9}$$

Пара (ω_a, ω_s) називається розкладом Лебега кватерніоннозначної міри ω відносно λ, де ω_a – абсолютно неперервна, а ω_s – сингулярна частини розкладу (3.9).

Доведення. Оскільки ω – кватерніоннозначна σ-скінченна міра на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ (теорема 3.2.2), то ω можна записати у вигляді

$$\omega = \lambda_0 + i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3,$$

де $\lambda_k,\ k = 0,1,2,3,$ є дійснозначними σ-скінченними мірами.

З використанням теореми Лебега про розклад дійснозначної σ-скінченної міри для кожного $\lambda_k,\ k = 0,1,2,3,$ маємо

$$\lambda_k = \lambda_a^{(k)} + \lambda_s^{(k)},$$

де $\lambda_a^{(k)} \ll \lambda,\ \lambda_s^{(k)} \perp \lambda.$

Доведемо існування пари (ω_a, ω_s). Нехай

$$\omega_a = \lambda_a^{(0)} + i\lambda_a^{(1)} + j\lambda_a^{(2)} + k\lambda_a^{(3)},$$

$$\omega_s = \lambda_s^{(0)} + i\lambda_s^{(1)} + j\lambda_s^{(2)} + k\lambda_s^{(3)}.$$

Припустимо, що існує ще одна пара (ω'_a, ω'_s), яка задовольняє умови (3.9). Тоді

$$\omega'_a - \omega_a = \omega_s - \omega'_s.$$

Легко бачити, що

$$(\omega'_a - \omega_a) \ll \lambda,$$

$$(\omega_s - \omega'_s) \perp \lambda.$$

З використанням умови пункту 7) теореми 3.2.3 маємо

$$\omega'_a - \omega_a = \omega_s - \omega'_s = 0.$$

Теорему доведено.

Теорема 3.2.5. (Теорема Радона-Нікодима для кватерніоннозначної міри). *Нехай μ – дійснозначна (невід'ємна) σ-скінченна міра, ω – кватерніоннозначна міра на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ і ω_a – абсолютно неперервна частина розкладу Лебега кватерніоннозначної міри ω відносно μ. Тоді існує вимірна кватерніоннозначна функція $h(x)$ на множині X така, що*

$$\omega_a(A) = \int\limits_A h(x) d\mu(x) \quad \forall\, A \in \mathfrak{M},$$

де $h(x)$ є однозначно визначеною з точністю до μ-нульової множини.

Зауваження 3.2.3. *Нагадаємо, що кватерніоннозначна функція $\omega(\cdot) : \mathfrak{M} \to \mathbb{H}$ є вимірною на $(X, \mathfrak{M})$, якщо прообраз будь-якої борелівської множини в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$ належить $\mathfrak{M}$.*

Доведення. Оскільки $\omega_a \ll \mu$ і з урахуванням

$$\omega_a = \omega_a(\cdot) := \lambda_a^{(0)}(\cdot) + i\lambda_a^{(1)}(\cdot) + j\lambda_a^{(2)}(\cdot) + k\lambda_a^{(3)}(\cdot),$$

де $\lambda_a^{(k)}, k = 0,1,2,3$ – дійснозначні міри (заряди), отримуємо

$$\lambda_a^{(k)} \ll \mu \quad \forall\, k = 0,1,2,3.$$

З урахуванням теореми Радона-Нікодима для дійснозначної міри (заряду), існують вимірні дійснозначні функції $h_k(x), k = 0,1,2,3,$ для яких

$$\lambda_a^{(k)}(A) = \int_A h_k(x)d\mu(x) \quad \forall\, A \in \mathfrak{M}, \qquad k = 0,1,2,3.$$

Отже,

$$\omega_a(A) = \int_A \big(h_0(x) + ih_1(x) + jh_2(x) + kh_3(x)\big)d\mu(x).$$

Теорему доведено.

Зауваження 3.2.4. *Кватерніоннозначну* функцію

$$h(x) := h_0(x) + ih_1(x) + jh_2(x) + kh_3(x)$$

будемо називати похідною Радона-Нікодима від абсолютно неперервної функції ω_a *відносно* μ *і позначимо* $\frac{d\omega_a}{d\mu}$.

У кватерніонному випадку теорема Радона-Нікодима має багато наслідків. Наведемо один із них.

Теорема 3.2.6. *Нехай* ω − *кватерніоннозначна міра на вимірному просторі* $(X, \mathfrak{M})$. *Тоді існує кватерніоннозначна вимірна функція* $h(x)$ *така, що*

$$|h(x)| = 1 \quad \forall\, x \in X,$$

і

$$\frac{d\omega}{d\mathrm{var}[\omega]} = h.$$

Доведення. Оскільки $\omega \ll \mathrm{var}[\omega]$, то за теоремою 3.2.5 існує кватерніоннозначна вимірна функція $h(x)$, для якої

$$\frac{d\omega}{d\mathrm{var}[\omega]} = h.$$

Для будь-якого додатного дійсного $p > 0$ введемо множину

$$S_p := \{x \in X : |h(x)| < p\}.$$

Тоді для будь-якого розбиття $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ множини S_p маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} h(x) d\mathrm{var}[\omega](x) \right| \le$$

$$\le p \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{var}[\omega](A_n) = p\mathrm{var}[\omega](S_p).$$

Отже,

$$\mathrm{var}[\omega](S_p) \le p\mathrm{var}[\omega](S_p).$$

Якщо $p < 1$, то $\mathrm{var}[\omega](S_p) = 0$.

Таким чином,

$$|h(x)| \ge 1.$$

З іншого боку, якщо для будь-якої множини $A \in \mathfrak{M}$

$$\mathrm{var}[\omega](A) > 0,$$

то одержуємо

$$\frac{1}{\mathrm{var}[\omega](A)} \left| \int_{A} h(x) d\mathrm{var}[\omega](x) \right| = \frac{|\omega(A)|}{\mathrm{var}[\omega](A)} \le 1.$$

Таким чином, інтеграл

$$I_A(h) = \frac{1}{\mathrm{var}[\omega](A)} \int_{A} h(x) d\mathrm{var}[\omega](x)$$

лежить у 4-вимірній кулі $B_1(0)$ радіуса 1 для кожної множини $A \in \mathfrak{M}$, такої що

$$\mathrm{var}[\omega](A) > 0.$$

Нехай $B_r(a)$ – куля радіуса r з центром в точці a, причому

$$B_r(a) \cap B_1(0) = \emptyset.$$

Покажемо, що

$$\mathrm{var}[\omega](C) = 0,$$

де

$$C = h^{-1}(x)\big(B_r(a)\big).$$

Дійсно, якщо $\mathrm{var}[\omega](C) > 0$, то

$$\left|I_C\big(h(x)\big) - a\right| = \frac{1}{\mathrm{var}[\omega](C)}\left|\int_C (h(x) - a)d\mathrm{var}[\omega](x)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mathrm{var}[\omega](C)}\int_C |h(x) - a|d\mathrm{var}[\omega](x) \leq r,$$

що неможливо, оскільки

$$I_C\big(h(x)\big) \in B_1(0),$$

і тоді $|h(x)| \leq 1$.

Отже,

$$|h(x)| = 1.$$

Введемо множину

$$M := \{x \in X : |h(x)| \neq 1\}.$$

Оскільки $\mathrm{var}[\omega](M) = 0$ (як показано вище), то перевизначимо функцію $h(x)$ на множині M так, щоб

$$h(x) = 1 \quad \forall\, x \in M$$

і одержуємо функцію з бажаними властивостями. Теорему доведено.

3.2.3. Кватерніонний лінійний і кватерніонний банаховий простори

Нехай ω_1 і ω_2 – кватерніоннозначні міри на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$. Для будь-якого кватерніона $q \in \mathbb{H}$ і для будь-якої множини $A \in \mathfrak{M}$ визначимо кватерніоннозначні міри $q\omega_1$, $\omega_1 q$ і $\omega_1 + \omega_2$ за формулами:

$$\begin{gathered}(q\omega_1)(A) \coloneqq q\omega_1(A),\\ (\omega_1 q)(A) \coloneqq \omega_1(A)q,\\ (\omega_1 + \omega_2)(A) := \omega_1(A) + \omega_2(A).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Означення 3.2.6. *Сукупність всіх кватерніоннозначних мір ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$, для яких виконуються умови (3.10), утворює двосторонній кватерніоннозначний модуль, який будемо називати кватерніонним лінійним простором.*

Нехай покладемо

$$\|\omega\| = \mathrm{var}[\omega](X). \tag{3.11}$$

Враховуючи властивості повної варіації $\mathrm{var}[\omega](X)$, легко бачити, що формула (3.11) задовольняє означенню норми у лівокватерніонному (відповідно правокватерніонному) лінійному просторі.

Теорема 3.2.7. *Ліволінійний простір кватерніоннозначних мір ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ з нормою* (3.11) *є кватерніонним банаховим простором.*

Доведення. Нехай множина $A \in \mathfrak{M}$ і $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}, n \in \mathbb{N}$, де $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, є послідовністю Коші кватерніоннозначних мір ω, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \, n > N, \; m > N, \; n, m \in \mathbb{N} : \, \|\omega_n - \omega_m\| < \varepsilon.$$

За теоремою про поповнення нормованого простору (С. Ус [25]) існує границя $\omega \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n$.

Доведемо, що ω – кватерніоннозначна міра. Припустимо, що $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ є розбиттям множини A, і нехай

$$C_m = A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \omega(C_m) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(C_m) = \lim_{n\to\infty} \left(\omega_n(A) - \sum_{k=1}^{m} \omega_n(B_k) \right) = \\ = \omega(A) - \sum_{k=1}^{m} \omega(B_k). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отже,

$$\omega(A) = \omega(C_m) + \sum_{k=1}^{m} \omega(B_k),$$

звідки випливає скінченна адитивність кватерніоннозначної міри ω.

Оскільки $\mathrm{var}[\omega]$ є обмеженою (теорема 3.2.2) і $C_m \downarrow \emptyset, \; m \to \infty$, то

$$\mathrm{var}[\omega](C_m) \to 0, \quad m \to \infty.$$

Враховуючи нерівність

$$|\omega(C_m)| \leq \mathrm{var}[\omega](C_m),$$

одержуємо, що $\omega(C_m) \to 0,\ m \to \infty$.

Із рівності (3.12) випливає, що

$$\omega(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \omega(B_k) = 0.$$

Таким чином, ω є кватерніоннозначною мірою і ліволінійний простір кватерніоннозначних мір ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ з нормою $\|\omega\|$ є кватерніонним банаховим простором. Теорему доведено.

Випадок праволінійного кватерніонного простору досліджується аналогічно.

Отже, лінійний простір кватерніоннозначних мір ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ з нормою $\|\omega\|$ є кватерніонним банаховим простором.

Висновки до третього розділу

У третьому розділі вивчено основні властивості ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ і випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$ зі значеннями в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$ та міри ω зі значеннями в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$.

Введено поняття відношення часткового порядку $\preccurlyeq_{\mathbb{W}_4}$ в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$. Визначено бігіперболічнозначний модуль $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$, бігіперболічнозначну норму $\|\cdot\|_{\mathbb{W}_4}$, збіжну послідовність бігіперболічних чисел $\{\alpha_n\}_{\mathbb{W}_4},\ n = 1,2,\ldots,$ та доведено всі необхідні властивості. Проаналізовано означення ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$, яка набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$. Показано, що бігіперболічнозначна ймовірнісна міра $P_{\mathbb{W}_4}$, визначена на σ-алгебрі випадкових подій Σ простору елементарних подій $\omega \in \Omega$, задовольняє основні властивості класичної дійснозначної ймовірності P. Введено поняття бігіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$, яка визначена на $\mathbb{W}_4$-ймовірнісному просторі $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$, та доведено її основні властивості. Досліджено особливі випадки, коли відповідно бігіперболічнозначна ймовірнісна міра $P_{\mathbb{W}_4}$ та бігіперболічнозначна випадкова величина $X_{\mathbb{W}_4}$ набувають значень в області дільників нуля $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ алгебри $\mathbb{W}_4$.

Подано означення кватерніоннозначної міри ω та її повної варіації $\operatorname{var}[\omega]$. Доведено, що повна варіація $\operatorname{var}[\omega]$ кватерніоннозначної міри ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ є невід'ємною мірою на $(X, \mathfrak{M})$, де $\mathfrak{M}$ – σ-алгебра підмножин непорожньої множини X. Зокрема, доведено, що $\operatorname{var}[\omega](X) < +\infty$, тобто класичні дійснозначні міри, які можуть набувати значення $+\infty$, не утворюють підклас кватерніоннозначних мір.

Визначено абсолютно неперервну ω_a і сингулярну ω_s кватерніоннозначні міри відносно класичної дійснозначної міри μ та наведено їх властивості. Доведено аналоги теореми про розклад Лебега, теореми Радона-Нікодима та одного з її наслідків для кватерніоннозначної міри ω.

Введено поняття ліволінійного (відповідно праволінійного) простору кватерніоннозначних мір ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$. В якості норми $\|\omega\|$ міри ω на $(X, \mathfrak{M})$ береться її повна варіація, тобто $\|\omega\| = \operatorname{var}[\omega](X)$. Доведено, що ліволінійний (відповідно праволінійний) простір кватерніоннозначних мір ω на вимірному просторі $(X, \mathfrak{M})$ з нормою $\|\omega\| = \operatorname{var}[\omega](X)$ є кватерніонним банаховим простором.

Основний зміст третього розділу дисертації висвітлено в наукових публікаціях здобувачки [15; 16; 67; 69; 79].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних у відповідному сенсі) функцій зі значеннями в гіперкомплексних системах, які є скінченновимірними комутативними та некомутативними (зокрема, кліффордовими $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$) алгебрами над полем $\mathbb{K}$ (дійсних $\mathbb{R}$ або комплексних $\mathbb{C}$ чисел), і застосуванню цих властивостей для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь з частковими похідними (ДРЧП) та лінійних систем ДРЧП, з використанням відповідних алгебраїчно-аналітичних методів. Крім цього, у дисертації досліджено поліноміальні рівняння в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, яка є дійсним восьмивимірним зображенням алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$. Вивчено основні властивості ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ зі значеннями в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$ та міри ω зі значеннями в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$.

***Основні результати, що визначають наукову новизну дослідження*:**

- *розроблено* метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, яка є дійсним восьмивимірним зображенням алгебри комплексних кватерніонів Сегре $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$, шляхом зведення цих рівнянь до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами $\mathbb{C}$;

- алгебраїчно-аналітичним методом моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) функцій, визначених у скінченновимірних комутативних алгебрах, *знайдено* формулу узагальненої функції щільності $f(t, x)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку, що описує розподіл випадкового одновимірного руху $x(t)$ частинки в момент часу t у випадку, коли проміжок часу між двома послідовними перемиканнями швидкості частинки має розподіл Ерланга 3-го порядку (узагальнене телеграфне рівняння);

- *знайдено* розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана $\mathcal{D}$, тобто $\mathcal{D}f(\cdot)=0$) зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}(p+q=d+1)$, породженої $(d+1)$-вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}, d=0,1,\ldots$, над полем $\mathbb{R}$, у ряд за поліномами типу Фуетера; *наведено* приклади застосування розвинення $\mathbb{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$-значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП другого порядку;

- *досліджено* аналог класичної дійснозначної ймовірнісної міри P у випадку, коли ця міра набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел $\mathbb{W}_4$; *вивчено* основні властивості бігіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ та бігіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$;

- *узагальнено* поняття класичної дійснозначної міри μ на випадок кватерніоннозначної міри ω, тобто міри, яка набуває значень в алгебрі кватерніонів $\mathbb{H}$; *вивчено* основні властивості кватерніоннозначної міри ω.

Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер. На практиці одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані під час вивчення додаткових розділів алгебри, математичного, комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії міри, теорії диференціальних рівнянь студентами фізико-математичних спеціальностей, а також можуть бути застосованими у процесі досліджень за відповідними напрямами, зокрема для задач математичної фізики, теорії випадкових процесів, термодинаміки та статистичної фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бойчук О. А., Журавльов В. П. Розв’язність лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з невиродженим ядром у гільбертових просторах. *Український математичний журнал*. 2023. Т. 75, № 1. С. 52–61; English translation: Boichuk A. A., Zhuravlev V. P. Solvability of linear integrodifferential equations with nondegenerate kernel in Hilbert spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2023. Vol. 75, No. 1. P. 56–67.

2. Грищук С. В. Гіперкомплексні моногенні функції бігармонічної змінної в деяких задачах плоскої теорії пружності. *Доповіді НАН України*. 2015. № 6. С 7–12.

3. Грищук С. В. Одновимірність ядра системи інтегральних рівнянь Фредгольма для однорідної бігармонічної задачі. *Збірник праць Інституту математики НАН України. Аналіз та застосування*. 2017. Т. 14, № 1. С. 128–139.

4. Грищук С. В. Моногенні функції у двовимірних комутативних алгебрах для рівнянь плоскої ортотропії. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2018. Т. 32. С. 18–29.

5. Грищук С. В. Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. I. *Український математичний журнал*. 2018. Т. 70, № 8. С. 1058–1071; English translation: Gryshchuk S. V. Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. I. *Ukraine Mathematics Journal*. 2019. Vol. 70, No. 8. P. 1221–1236.

6. Грищук С. В. Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії. II. *Український математичний журнал*. 2018. Т. 70, № 10. С. 1382–1389; English translation: Gryshchuk S. V. Commutative complex algebras of the second rank with unity and some cases of plane orthotropy. II. *Ukraine Mathematics Journal*. 2019. Vol. 70, No. 10. P. 1594–1603.

7. Грищук С. В. Моногенні функції зі значеннями у комутативних комплексних алгебрах другого рангу з одиницею та узагальнене бігармонічне рівняння з ненульовими простими характеристиками. *Український математичний журнал*. 2021. Т. 73, № 4. С. 474–487; English translation: Gryshchuk S. V. Monogenic functions with values in commutative complex algebras of the second rank with unit and a generalized biharmonic equation with simple nonzero characteristics. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2021. Vol. 73, No. 4. P. 556–571.

8. Грищук С. В. Моногенні функції зі значеннями у комутативних комплексних алгебрах другого рангу з одиницею та узагальнене бігармонічне рівняння з подвійною характеристикою. *Український математичний журнал*. 2022. Т. 74, № 1. С. 14–23; English translation: Gryshchuk S. V. Monogenic functions with values in commutative algebras of the second rank with unit and the generalized biharmonic equation with double characteristic. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2022. Vol. 74, No. 1. P. 15–26.

9. Грищук С. В., Плакса С. А. Бігармонічна задача для кута і моногенні функції. *Український математичний журнал*. 2022. Т. 74, № 11. С. 1478–1491; English translation: Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Biharmonic problem for an angle and monogenic functions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2023. Vol. 74, No. 11. P. 1686–1700.

10. Журавльов В. П., Фомін М. П. Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах. Нелінійні коливання. 2021. Т. 24, № 1. С. 83–98; English translation: Zhuravlev V. P, Fomin N. P. Boundary-value problems with control for Fredholm integral equations with degenerate kernels in Banach spaces. *Ukrainian Mathematical Journal, New York*. 2022. Vol. 265, No. 4. P. 651–668.

11. Каліновський Я. О., Боярінова Ю. Є., Туренко А. С. Обчислювальні властивості одного класу некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності. *Реєстрація, зберігання і обробка даних*. 2014. Т. 16, № 3. С. 12–24.

12. Коломієць Т. Ю. Розподіл одновимірного блукання частинки в ерлангівському середовищі 3-го порядку. *Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики*: матеріали XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, м. Київ, 14-15 трав. 2015 р. Київ, 2015. Т. 3. С. 37–38.

13. Коломієць Т. Ю., Погоруй А. О. Дослідження розв'язків систем диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою моногенних функцій на комутативних алгебрах. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях*: тези доп. XIII Міжнар. наук. конф. для молодих вчених, м. Харків, 16-17 берез. 2018 р. Харків, 2018. С. 6–7.

14. Коломієць Т. Ю., Погоруй А. О. Деякі алгебраїчні та аналітичні властивості комплексних кватерніонів Сегре. *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання*: зб. тез доп. Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів і молодих учених, м. Чернігів, 27 листоп. 2019 р. Чернігів, 2019. С. 35–36.

15. Коломієць Т. Ю. Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2020. Т. 34. С. 36–49.

16. Коломієць Т., Погоруй А. Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. *Підстригачівські читання – 2021*: матеріали конф. молодих учених, м. Львів, 26-28 трав. 2021 р. Львів, 2021. С. 1–2.

17. Коломієць Т. Ю. Алгебраїчний метод дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними. *Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів*. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2023. Вип. 15. С. 30–35.

18. Кузьменко Т. С. *Моногенні відображення в алгебрі комплексних кватерніонів*: дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. Київ, 2018. 130 с.

19. Плакса С. А. *Моногенні функції в крайових задачах для рівнянь еліптичного типу з виродженням на осі*: автореф. дис. … д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.01. Київ, 2006. 36 с.

20. Плакса С. А. Моногенні функції в комутативних алгебрах і еліптичні рівняння математичної фізики. *Сучасні проблеми математики та її застосувань, II: Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2021. Т. 18, № 1. С. 508–554.

21. Плакса С. А., Пухтаєвич Р. П. Конструктивний опис моногенних функцій в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі. *Доповіді Національної академії наук України*. 2014. № 1. С. 14–21.

22. Плакса С., Шпаківський В. Інтегральні теореми в скінченновимірній комутативній алгебрі. *Збірник Праць Інституту математики НАН України*. 2023. Т. 3, № 1. С. 911–946.

23. Синьков М. В., Боярінова Ю. Є., Каліновський Я. О., Постнікова Т. Г., Синькова Т. В., Федоренко О. В. Розвиток теорії гіперкомплексного представлення інформації та її застосування. *Реєстрація, зберігання і обробка даних*. 2007. Т. 9, № 4. С. 28–48.

24. Таргонський А. Л. Оцінки узагальнених внутрішніх радіусів для поліциліндричних областей. *Український математичний вісник*. 2022. Т. 19, № 1. С. 121–134; English translation: Targonskii A. L. Estimates of generalized internal radii for polycylindrical domains. *Journal of Mathematical Sciences, New York*. 2022. Vol. 262, No. 2. P. 222–231.

25. Ус С. А. *Функціональний аналіз*: навч. посіб. Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2013. 236 с.

26. Шпаківський В. С. *Інтегральні теореми для моногенних функцій в тривимірній гармонічній алгебрі*: дис. … канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. Київ, 2011. 122 с.

27. Шпаківський В. С. Про моногенні функції, визначені в різних комутативних алгебрах. *Український математичний вісник*. 2018. Т. 15, № 2, С. 272–294; English translation: Shpakivskyi V. S. On monogenic functions

defined in different commutative algebras. *Journal of Mathematical Sciences, New York*. 2019. Vol. 239, No. 1. C. 92–109.

28. Шпаківський В. С. *Моногенні функції в асоціативних алгебрах*: дис. … докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. Київ, 2020. 357 с.

29. Шпаківський В. С., Кузьменко Т. С. Про один клас кватерніонних відображень. *Український математичний журнал*. 2016. Т. 68, № 1. С. 117–130; English translation: Shpakivskyi V. S., Kuzmenko T. S. On one class of quaternionic mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2016. Vol. 68, No. 1. P. 127–143.

30. Alpay D., Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M. Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2017. Vol. 27, No. 2. P. 913–929.

31. Alpay D., Shapiro M., Volok D. Rational hyperholomorphic functions в $\mathbb{R}^4$. *Journal of Functional Analysis*. 2005. Vol. 221, No. 1. P. 122–149.

32. Blum E. K. A theory of analytic functions in Banach algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1955. Vol. 78. P. 343–370.

33. Bory-Reyes J., Shapiro M. Clifford analysis versus its quaternionic counterparts. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2010. Vol. 33, No. 9. P. 1089–1101.

34. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. *Clifford analysis*. Research Notes in Mathematics, 76. Boston – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. X, 1982. 308 p.

35. Carmody K. Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions – further results. *Applied Mathematics and Computation*. 1997. Vol. 84, No. 1. P. 27–47.

36. Cartan E. Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques*. 1898. Serie 1. Vol. 12, No. 2. P. B65–B99.

37. Catoni F., Cannata R., Zampetti P. An introduction to commutative quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2006. Vol. 16, No. 1. P. 1–28.

38. Clifford W. K. Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*. 1878. Vol. 1, No. 4. P. 350–358.

39. Delanghe R., Krausshar R. S., Malonek H. R. Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*. 2001. Vol. 70, No. 4-6. P. 231–249.

40. De Morgan A. *Trigonometry and double algebra*: London: Taylor, Walton and Maberly, 1849. 167 p.

41. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization. *Acta Mathematica Hungarica*. 2023. Vol. 170. P. 244–260.

42. Fueter R. Die funktionentheorie der differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen variablen. *Commentarii Mathematici Helvetici*. 1935. Vol. 7. P. 307–330.

43. Fueter R. Zur theorie der regulären funktionen einer quaternionenvariablen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1936. Vol. 43. P. 69–74.

44. Ghosh Ch., Biswas S., Yasin T. Hyperbolic valued signed measure. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*. 2018. Vol. 55, No. 7. P. 515–522.

45. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Table of integrals, series, and products*. 7th ed. Amsterdam: Elsevier / Academic Press, 2007. 1171 p.

46. Grassmann H. *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: Dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*. Leipzig: Verlag von Otto Wigand, 1844. 340 p.

47. Gryshchuk S. V. $\mathbb{B}$-valued monogenic functions and their applications to boundary value problems in displacements of 2-D elasticity. *Analytic methods of analysis and differential equations*: AMADE 2015. Selected papers of the 8th

international workshop, September 14-19, 2015. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2016. P. 37–47.

48. Gryshchuk S. V. Bases in commutative algebras of the second rank and monogenic functions related to some cases of plane orthotropy. *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation*. Trends in Mathematics Research Perspectives. Birkhäuser, Cham. 2022. P. 163–171.

49. Gryshchuk S. V. Monogenic functions with values in algebras of the second rank over the complex field and a generalized biharmonic equation with a triple characteristic. *Journal of Mathematical Sciences, New York*. 2022. Vol. 262, No. 2. P. 154–164.

50. Gryshchuk S. Representations of solutions of Lamé system with real coefficients via monogenic functions in the biharmonic algebra. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2023. Vol. 16, No. 1. P. 78-90.

51. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Monogenic functions in a biharmonic algebra. *Ukraine Mathematics Journal*. 2009. Vol. 61, No. 12. P. 1865–1876.

52. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Schwartz-type integrals in a biharmonic plane. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2013. Vol. 81, No. 1. P. 193–211.

53. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Basic properties of monogenic functions in a biharmonic plane. *Complex Analysis and Dynamical Systems V*: Proceedings of the 5th international conference on complex analysis and dynamical systems, Akko (Acre), Israel, May 22-27, 2011. Contemporary Mathematics, 591. Israel Mathematical Conference Proceedings, 2013. P. 127–134.

54. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2016. Vol. 39, No. 11. P. 2939–2952.

55. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. A Schwartz-type boundary value problem in a biharmonic plane. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2017. Vol. 38, No. 3. P. 435–442.

56. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Reduction of a Schwartz-type boundary value problem for biharmonic monogenic functions to Fredholm integral equations. *Open Mathematics*. 2017. Vol. 15, No. 1. P. 374–381.

57. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Schwartz-type boundary value problems for monogenic functions in a biharmonic algebra. *Analysis as a life*: Dedicated to Heinrich Begehr on the occasion of his 80th birthday. Cham: Birkhäuser. Trends in Mathematics, 2019. P. 193-211.

58. Hamilton W. R. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*. 1844. Vol. 2. P. 424–434.

59. Hamilton W. R. *Elements of quaternions*. London: Longmans, Green and Company. 1866. 762 p.

60. Herus O. F. On hyperholomorphic functions of the space variable. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2011. Vol. 63, No. 4. P. 530–537.

61. Kantor I. L., Solodovnikov A. S. *Hypercomplex numbers. An elementary introduction to algebras*. Translated by A. Shenitzer. New York etc.: Springer-Verlag. 1989. 169 p.

62. Keller J. Quaternionic, complex, duplex and real Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 1994. Vol. 4, No. 1. P. 1–12.

63. Ketchum P. W. Analytic functions of hypercomplex variables. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1928. Vol. 30. P. 641–667.

64. Ketchum P. W. A complete solution of La Place’s equation by an infinite hypervariable. *American Journal of Mathematics*. 1929. Vol. 51. P. 179–188.

65. Ketchum P. W. Solution of partial differential equations by means of hypervariables. *American Journal of Mathematics*. 1932. Vol. 54. P. 253–264.

66. Kolomiiets T. An algebraic approach for solving fourth-order partial differential equations. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях*: тези доп. XIV Міжнар.

наук. конф. для молодих вчених, м. Харків, 15-16 берез. 2019 р. Харків, 2019. С. 9–11.

67. Kolomiiets T. Quaternion-valued measure and its total variation. *Information and innovative technologies in education in modern conditions*: Proceedings of the XXIV International Scientific and Practical Conference, Varna, June 20-23, 2023. Varna, 2023. P. 277–281.

68. Kolomiiets T. Yu., Pogorui A. A. Monogenic functions in Clifford algebras and their applications. *Математика в сучасному технічному університеті*: матеріали IX Міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 28-29 груд. 2020 р. Вінниця, 2021. С. 13–16.

69. Kolomiiets T., Pogorui A. Elements of probability theory and measures with values in hypercomplex algebras. *Algebraic and Geometric Methods of Analysis*: dedicated to the memory of Yu. Trokhymchuk (17.03.1928-18.12.2019): International Online Conference, Odesa, May 25-28, 2021. Odesa, 2021. P. 81–83.

70. Kolomiiets T., Pogorui A., Rodríguez-Dagnino R. M. The distribution of random motion with Erlang-3 sojourn times. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2015. Vol. 23, iss. 2. P. 69–79.

71. Kolomiiets T., Pogorui A., Rodríguez-Dagnino R. M. Solution of systems of partial differential equations by using properties of monogenic functions on commutative algebras. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 239, No. 1. P. 43–50.

72. Kovalev V. F., Mel’nichenko I. P. Biharmonic potentials and plane isotropic displacement fields. Ukrainian Mathematical Journal. 1988. Vol. 40, No. 2. P. 197–199.

73. Kravchenko V. V., Shapiro M. V. *Integral representations for spatial models of mathematical physics*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 351. Harlow: Longman, 1996. 247 p.

74. Kumar R., Sharma K. Hyperbolic valued random variables and conditional expectation. *arXiv:1611.06850v2 [math.PR] 27 Mar 2017.*

75. Kumar R., Sharma K. Hyperbolic valued measures and Fundamental law of probability. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 13, No. 10. P. 7163–7177.

76. Kunz K. S. Application of an algebraic technique to the solution of Laplace’s equation in three dimensions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1971. Vol. 21, No 1-2. P. 425–441.

77. Lorch E. R. The theory of analytic function in normed Abelian vector rings. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1943. Vol. 54. P. 414–425.

78. Luna-Elizarrarás M. E. Integration of functions of a hyperbolic variable. *Complex Analysis and Operator Theory*. 2022. Vol. 16, iss. 3, art. 35. P. 1–21.

79. Luna-Elizarrarás M. E., Pogorui A., Shapiro M., Kolomiiets T. On Quaternionic Measure. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2020. Vol. 30, iss. 4, art. 63. P. 1–17.

80. Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M., Struppa D. C., Vajiac A. *Bicomplex holomorphic functions*. *The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers*. Frontiers in Mathematics. Cham: Birkhäuser / Springer, 2015. 231 p.

81. Mel’nichenko I. P. The representation of harmonic mappings by monogenic functions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1975. Vol. 27, No. 5. P. 499–505.

82. Mel’nichenko I. P. Biharmonic bases in algebras of the second rank. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1986. Vol. 38, No. 2. P. 224–226.

83. Mel’nichenko I. P. Algebras of functionally invariant solutions of the three-dimensional Laplace equation. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2003. Vol. 55, No. 9. P. 1551–1557.

84. Melnichenko I. P., Plaksa S. A. Commutative algebra of hypercomplex analytic functions and solutions of elliptic equations degenerating on an axis.

Збірник праць Інституту математики НАН України. 2004. Т. 1, № 3, С. 144–150.

85. Moisil G. C., Theodoresco N. Functions holomorphes dans l'espace. *Mathematica*. 1931. Vol. 5. P. 142–159.

86. Morin U. Ricerche sull'algebra bicomplessa. *Memorie della Reale Accademia d'Italia*. 1935. Vol. 6. P. 1241–1250.

87. Niven I. Equations in quaternions. *American Mathematical Monthly*. 1941. Vol. 48. P. 654–661.

88. Obolashvili E. *Higher-order partial differential equations in Clifford Analysis*: Effective solutions to problems. Progress in Mathematical Physics, 28. Boston, MA: Birkhäuser, 2003. 178 p.

89. Olariu S. *Complex numbers in N dimensions*. North-Holland Mathematics Studies, 190. Amsterdam: North-Holland, 2002. 269 p.

90. Peirce B. Linear associative algebra. *American Journal of Mathematics*. 1881. Vol. 4. P. 99–215; 1881. Addenda 4. P. 215–229.

91. Petrov E. On the uniqueness of continuation of a partially defined metric. *Theory and Applications of Graphs*. 2023. Vol. 10, iss. 1, art. 1. P. 1–6.

92. Plaksa S. A. On differentiable and monogenic functions in a harmonic algebra. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2017. Т. 14, № 1. С. 210–221.

93. Plaksa S. Monogenic functions and harmonic vectors. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2023. Vol. 16, No. 1. P. 59–77.

94. Plaksa S. A., Gryshchuk S. V., Shpakivskyi V. S. Commutative algebras of monogenic functions associated with classic equations of mathematical physic. *Complex analysis and dynamical systems IV*: Part 1. Function theory and optimization, proceedings of the 4th international conference on complex analysis and dynamical systems, 553. Nahariya, Israel, May 18-22, 2009. Contemporary Mathematics, Israel, 2011. P. 245–258.

95. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. An extension of monogenic functions and spatial potentials. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2017. Vol. 38, No. 2. P. 330–337.

96. Plaksa S. A., Shpakivskyi V. S. *Monogenic functions in spaces with commutative multiplication and applications*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser, Cham. 2023. 548 p.

97. Plaksa S. A., Pukhtaevich R. P. Constructive description of monogenic functions in a three-dimensional harmonic algebra with one-dimensional radical. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2013. Vol. 65, No. 5. P. 740–751.

98. Pogorui A. A. Hyperholomorphic functions on commutative algebras. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2007. Vol. 52, No. 12. P. 1155–1159.

99. Pogorui A. The distribution of random evolutions in Erlang semi-Markov media. *Theory of Stochastic Processes*. 2011. Vol. 17, No. 1. P. 90–99.

100. Pogorui A., Kolomiiets T. Some algebraic properties of complex Segre quaternions. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2019. Т. 33. С. 158–169.

101. Pogorui A., Kolomiiets T. Solution of biwave equations by using properties of monogenic functions. *Ахборот-коммуникация технологиялари ва телекоммуникацияларнинг замонавий муаммолари ва ечимлари*: I қисм, республика илмий-техник анжуманининг маърузалар тўплами, Фарғона, 30-31 май 2019 йил. Фарғона, 2019. P. 55–56.

102. Pogorui A. A., Kolomiiets T. Yu. Series expansions for monogenic functions in Clifford algebras and their application. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, No. 4. P. 502–507.

103. Pogorui A., Kolomiiets T., Rodríguez-Dagnino R. M. An algebraic approach for solving fourth-order partial differential equations. *Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Matematica*. 2019. T. 26, iss. No. 1. P. 153–160.

104. Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M. One-dimensional semi-Markov evolutions with general Erlang sojourn times. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2005. Vol. 13, No. 4. P. 399–405.

105. Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M. On the set of zeros of bicomplex polynomials. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2006. Vol. 51, No. 7. P. 725–730.

106. Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M. Some algebraic and analytical properties of coquaternion algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2010. Vol. 20, No. 1. P. 79–84.

107. Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M. Solutions of some partial differential equations with variable coefficients by properties of monogenic functions. *Journal of Mathematical Sciences, New York*. 2017. Vol. 220, No. 5. P. 624–632.

108. Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M., Rodríguez-Said R. D. On the set of zeros of bihyperbolic polynomials. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2008. Vol. 53, No. 7. P. 685–690.

109. Pogorui A., Rodríguez-Dagnino R. M., Shapiro M. Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2014. Vol. 37, No. 17. P. 2799–2810.

110. Pogorui A., Shapiro M. On the structure of the set of zeros of quarternionic polynomials. *Complex variables. Theory and Application*. 2004. Vol. 49, No. 6. P. 379–389.

111. Porteous I. R. *Clifford algebras and the classical groups*: Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 50. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 295 p.

112. Price G. B. *An Introduction to multicomplex spaces and functions*: Pure and Applied Mathematics, 140. New York etc: Marcel Dekker, 1991. 402 p.

113. Rochon D., Shapiro M. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Matematica*. 2004. Vol. 11. P. 71–110.

114. Rudin W. *Real and complex analysis. 3rd ed.*: New York, NY: McGraw-Hill, 1987. 416 p.

115. Segre C. Lerappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. *Mathematische Annalen*. 1892. Vol. 40. P. 413–467.

116. Serôdio R., Pereira E., Vitória J. Computing the zeros of quaternion polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*. 2001. Vol. 42, No. 8-9. P. 1229–1237.

117. Sevost'yanov. E. On the local and boundary behaviour of mappings of factor spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2022. Vol. 67, No. 2. P. 284–314.

118. Shapiro M., Struppa D. C., Vajiac A., Vajiac M. B. Hyperbolic numbers and their functions. *Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Matematica*. 2012. Vol. 19, No. 1. P. 265–283.

119. Shpakivskyi V. S. Linear quaternionic equations and their systems. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2011. Vol. 21, No. 3. P. 637–645.

120. Shpakivskyi V. S. Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2015. Т. 12, № 3. С. 251–268.

121. Shpakivskyi V. Monogenic functions in commutative algebras. *Analysis, probability, applications, and computation*: Proceedings of the 11th ISAAC congress, Växjö, Sweden, August 14-18, 2017. Cham: Birkhäuser. Trends in Mathematics. 2019. P. 171–178.

122. Shpakivskyi V. σ-monogenic functions in commutative algebras. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2023. Vol. 16, No. 1. P. 17–41.

123. Shpakivskyi V. S., Kuzmenko T. S. On monogenic mappings of a quaternionic variable. *Journal of Mathematical Sciences. New York*. 2017. Vol. 221, No. 5. P. 712–726.

124. Shpakivskyi V., Kuzmenko T. Hausdorff analytic functions in a three-dimensional associative noncommutative algebra. *Journal of Mathematical Sciences, New York*. 2022. Vol. 262, No. 2. P. 207–221.

125. Sobczyk G. *New foundations in mathematics. The geometric concept of number*: New York, NY: Birkhäuser, 2013. 370 p.

126. Sobrero L. Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata. *Ricerche di Ingegneria*. 1934. Vol. 2. P. 255–264.

127. Sommen F., De Schepper H. Introductory Clifford analysis. *Operator theory. In 2 volumes*. Basel: Springer. 2015. P. 1339–1367.

128. Sudbery A. Quaternionic analysis. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1979. Vol. 85. P. 199–225.

129. Wagner R. D. The generalized Laplace equations in a function theory for commutative algebras. *Duke Mathematical Journal*. 1948. Vol. 15. P. 455–461.

130. Ward J. A. From generalized Cauchy-Riemann equations to linear algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1953. Vol. 4. P. 456–461.

131. Yaglom I. M. *Complex numbers in geometry*: New York – London: Academic Press, 1966. 206 p.

ДОДАТОК
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Kolomiiets T., Pogorui A., Rodríguez-Dagnino R. M. The distribution of random motion with Erlang-3 sojourn times. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2015. Vol. 23, iss. 2. P. 69–79.

2. Kolomiiets T., Pogorui A., Rodríguez-Dagnino R. M. Solution of systems of partial differential equations by using properties of monogenic functions on commutative algebras. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 239, No. 1. P. 43–50.

3. Pogorui A., Kolomiiets T. Some algebraic properties of complex Segre quaternions. *Праці Інституту математики і механіки НАН України*. 2019. Т. 33. С. 158–169.

4. Luna-Elizarrarás M. E., Pogorui A., Shapiro M., Kolomiiets T. On Quaternionic Measure. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2020. Vol. 30, iss. 4, art. 63. P. 1–17.

5. Коломієць Т. Ю. Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. *Праці Інституту математики і механіки НАН України*. 2020. Т. 34. С. 36–49.

6. Pogorui A. A., Kolomiiets T. Yu. Series expansions for monogenic functions in Clifford algebras and their application. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, No. 4. P. 502–507.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

7. Коломієць Т. Ю. Розподіл одновимірного блукання частинки в ерлангівському середовищі 3-го порядку. *Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики*: матеріали XVI Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, м. Київ, 14-15 трав. 2015 р. Київ, 2015. Т. 3. С. 37–38.

8. Коломієць Т. Ю., Погоруй А. О. Дослідження розв’язків систем диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою моногенних функцій на комутативних алгебрах. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях*: тези доп. XIII Міжнар. наук. конф. для молодих вчених, м. Харків, 16-17 берез. 2018 р. Харків, 2018. С. 6–7.

9. Pogorui A., Kolomiiets T., Rodríguez-Dagnino R. M. An algebraic approach for solving fourth-order partial differential equations. *Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Matematica*. 2019. T. 26, iss. No. 1. P. 153–160.

10. Kolomiiets T. An algebraic approach for solving fourth-order partial differential equations. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях*: тези доп. XIV Міжнар. наук. конф. для молодих вчених, м. Харків, 15-16 берез. 2019 р. Харків, 2019. С. 9–11.

11. Pogorui A., Kolomiiets T. Solution of biwave equations by using properties of monogenic functions. *Ахборот-коммуникация технологиялари ва телекоммуни-кацияларнинг замонавий муаммолари ва ечимлари*: I қисм, республика илмий-техник анжуманининг маърузалар тўплами, Фарғона, 30-31 май 2019 йил. Фарғона, 2019. P. 55–56.

12. Коломієць Т. Ю., Погоруй А. О. Деякі алгебраїчні та аналітичні властивості комплексних кватерніонів Сегре. *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання*: зб. тез доп. Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів і молодих учених, м. Чернігів, 27 листоп. 2019 р. Чернігів, 2019. С. 35–36.

13. Kolomiiets T. Yu., Pogorui A. A. Monogenic functions in Clifford algebras and their applications. *Математика в сучасному технічному університеті*: матеріали IX Міжнар. наук.-практ. конф., м. Київ, 28-29 груд. 2020 р. Вінниця, 2021. С. 13–16.

14. Kolomiiets T., Pogorui A. Elements of probability theory and measures with values in hypercomplex algebras. *Algebraic and Geometric Methods of Analysis*: dedicated to the memory of Yu. Trokhymchuk (17.03.1928-18.12.2019): International Online Conference, Odesa, May 25-28, 2021. Odesa, 2021. P. 81–83.

15. Коломієць Т., Погоруй А. Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. *Підстригачівські читання – 2021*: матеріали конф. молодих учених, м. Львів, 26-28 трав. 2021 р. Львів, 2021. С. 1–2.

16. Коломієць Т. Ю. Алгебраїчний метод дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними. *Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів*. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2023. Вип. 15. С. 30–35.

17. Kolomiiets T. Quaternion-valued measure and its total variation. *Information and innovative technologies in education in modern conditions*: Proceedings of the XXIV International Scientific and Practical Conference, Varna, June 20-23, 2023. Varna, 2023. P. 277–281.

Апробація матеріалів дисертації

Основні положення дослідження оприлюднено на науково-практичних конференціях: *міжнародних*: «Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука» (Київ, 2015, очна), «Професійна підготовка фахівців в умовах неперервної освіти: креативний підхід» (Житомир, 2017, очна), «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 2018, очна; 2019, заочна), «Ахборот-коммуникация технологиялари ва телекоммуникацияларнинг замонавий муаммолари ва ечимлари» (Фергана, 2019, заочна), «Математика в сучасному технічному університеті» (Київ, 2020, заочна), «Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928-18.12.2019)» (Одеса, 2021, дистанційна), «Підстригачівські читання – 2021» (Львів, 2021, дистанційна), «Information and innovative technologies in education in modern conditions» (Варна, 2023, заочна); *всеукраїнських:* «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання» (Чернігів, 2019, очна); *наукових семінарах*: кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка «Теорія відображень і алгебр Лі» (Житомир, 2017, 2018, очна; 2021, дистанційна; 2023, очна), відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (Київ, 2018, очна; 2020, дистанційна), відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України (Слов’янськ, 2020, дистанційна).