Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Погоруй Анатолій Олександрович
Коломієць Таміла Юріївна

ТЕОРІЯ МІРИ. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Житомир
2023

УДК: 517.518.11+519.21

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 20 від 24 листопада 2023 року)*

Рецензенти:

Валерій ЖУРАВЛЬОВ – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету.

Олександр ПРИЛИПКО – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету «Житомирська політехніка».

Євген СЕВОСТЬЯНОВ – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка.

Погоруй А. О., Коломієць Т. Ю. Теорія міри. Теорія ймовірностей: Навчальний посібник. Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2023. 134 с.

У навчальному посібнику подано курс лекцій з теорії міри та теорії ймовірностей для здобувачів вищої освіти фізико-математичних факультетів, а також аспірантів, викладачів, науковців, докторантів.

УДК: 517.518.11+519.21

ЗМІСТ

Вступ

Загальна теорія міри та інтеграла все більше проникає в навчальні програми університетів і стає невід'ємною частиною обов'язкових для вивчення розділів математики не лише для студентів математичного профілю, але й для фізичних та економічних спеціальностей. Це пояснюється важливими застосуваннями цієї теорії як у різних напрямах математики, так і для дослідження фізичних та економічних моделей. З початку своєї появи на зорі 20 століття й до сьогодні теорія міри інтенсивно розвивається і заслужено посідає ключове місце у сучасній математиці. Теорія міри є основою таких базових курсів сучасної математики: функціональний аналіз, теорія ймовірностей та математична статистика, теорія випадкових процесів, теорія оптимізації, теорія фракталів, математична фізика тощо.

Перша частина посібника присвячена початковому ознайомленню з абстрактною теорією міри та інтеграла, проте вивчення цього матеріалу потребує від студентів базової підготовки з математичного аналізу, теорії множин та загальної алгебри.

У другій частині розглядаються основні поняття та теореми теорії ймовірностей, що базуються на результатах теорії міри та інтеграла Лебега.

ЧАСТИНА 1. ТЕОРІЯ МІРИ

Лекція 1. *Проблеми побудови міри*

1.1. Скінченно-адитивна міра

Інтуїтивно міра інтерпретується як розмір (об'єм) множини. Власне, міра – це деяка числова функція, яка ставить у відповідність кожній множині певне невід'ємне число. Крім невід'ємності міра як функція повинна також мати властивість адитивності – міра об'єднання множин, що не перетинаються, повинна дорівнювати сумі їх мір.

Враховуючи сказане вище, перейдемо до строгих означень: Нехай X – непорожня фіксована множина. Позначимо через 2^X множину всіх підмножин множини X. Знаком $\sqcup$ будемо позначати об'єднання двох множин, які не перетинаються. Зауважимо, що $\sqcup$ не символ операції над множинами: якщо у множин A та B не порожній перетин, то утворити множину $A \sqcup B$ не можна.

Означення 1.1. *Скінченно-адитивною мірою називається функція* $\mu\colon 2^X \to [0, +\infty]$, *яка задовольняє умову адитивності:*

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{1.1}$$

Неважко переконатись, що якщо існує $A \in 2^X$ така, що $\mu(A) < +\infty$, то для адитивної міри $\mu(\emptyset) = 0$. Дійсно, це безпосередньо випливає із рівності

$$\mu(A) = \mu(A \sqcup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

Вправи:

Нехай μ – скінченно-адитивна міра.

а) Довести, що якщо $\mu(\emptyset) = 0$, то (1.1) еквівалентно

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

б) Довести, що довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n).$$

в) Навести приклад адитивної міри для $X = \mathbb{R}$.

Неважко побудувати скінченно-адитивну міру на 2^X для довільного $X \neq \emptyset$. Дійсно, зафіксуємо деяке $x \in X$ і для $A \in 2^X$ покладемо $\mu(A) = 1$, якщо $x \in A$ і $\mu(A) = 0$ в іншому випадку. Легко переконатись, що μ – скінченно-адитивна міра, але така міра навряд чи може викликати якийсь інтерес, особливо для практичного застосування. Для побудови більш змістовної міри, крім властивості скінченної адитивності, визначимо міру μ на множині всіх обмежених підмножин $\mathbb{R}^n$ так, щоб виконувалися властивості:

1) $\mu(I) = 1$, *якщо* I – n-*мірний одиничний куб*;

2) $\mu(A) = \mu(B)$, *якщо* A *і* B *такі, що одну множину можна сумістити з іншою за допомогою деякої групи ізометрій* G *в* $\mathbb{R}^n$.

Проста задача теорії вимірювання полягає в тому, щоб визначити скінченно-адитивну міру μ на множині всіх обмежених підмножин простору $\mathbb{R}^n$ так, щоб вона задовольняла умови 1 і 2.

Вирішення поставленої задачі у випадку, коли G є група рухів $\mathbb{R}^n$ дають такі теореми:

Теорема 1.1 (Банах). *Якщо 2) має виконуватись коли* G *є група всіх рухів* $\mathbb{R}^n$, *тобто, для всіх конгруентних* A *і* B, *то просту задачу теорії вимірювання можна вирішити для* $\mathbb{R}^1$ *та* $\mathbb{R}^2$, *але не єдиним чином.*

Теорема 1.2 (Хаусдорф). *Якщо 2) має виконуватись коли* G *є група всіх рухів* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *то проста задача теорії вимірювання не розв'язувана.*

Різниця в результатах вирішення простої задачі теорії вимірювання для просторів $\mathbb{R}^1$ і $\mathbb{R}^2$ та просторів $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$ пояснюється тим, що групи руху просторів $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$ є багатшими від груп руху просторів $\mathbb{R}^1$ і $\mathbb{R}^2$.

Теорему 1.1 приймемо без доведення, а щодо теореми Хаусдорфа, то досить показати, що вже в $\mathbb{R}^3$ проста задача не розв'язувана. Для цього розглянемо парадокс, який створили у 1920-х роках польсько-український математик С. Банах та польсько-американський математик єврейського походження А. Тарський.

Слід відзначити, що Хаусдорф довів теорему 1.2 у 1914 році, тобто перед тим, як було виявлено парадокс Банаха-Тарського, і його доведення не могло спиратись на цей парадокс.

1.2. Однаково-складені множини

Нехай X та Y дві підмножини простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.1. *Бієктивне відображення* $f : X \to Y$ *називається припустимим, якщо існує розбиття* $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ *на скінченну кількість підмножин* A_i *із* 2^X *таких, що обмеження* f *на* A_i *є ізометрія і*

$$f(A_i) \cap f(A_j) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

У цьому випадку кажуть, що X і Y є однаково-складеними і позначають $X \sim Y$.

Вправа 1.1. *Довести, що відношення* $\sim$ *є відношенням еквівалентності. З урахуванням цього, далі такі множини будемо називати еквівалентними*.

Теорема 1.3. (Шредер-Бернштейн) *Якщо* $A \subset B \subset C$ *і* $A \sim C$*, то* $C \sim B$.

Доведення. Нехай $f : C \to A$ припустиме. Позначимо C через C_0, B через B_0, а A через C_1. Далі покладемо $C_{i+1} = f(C_i)$, $B_{i+1} = f(B_i)$, $i \geq 0$.

Неважко переконатись, що

$$C_0 \supset B_0 \supset C_1 \supset B_1 \supset \cdots \supset Z,$$

де $Z = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i \cap \bigcap_{j=0}^{\infty} B_j$.

Відзначимо, що C і B (тобто, C_0 і B_0) можна розкласти в такі об'єднання:

$$C = (C_0 \setminus B_0) \cup (B_0 \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus B_1) \cup \ldots \cup Z,$$

$$B = (B_0 \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus C_2) \cup \ldots \cup Z.$$

Зауважимо, що у кожному із об'єднань множини, що входять в об'єднання, не перетинаються. Оскільки $C_0 \sim C_1$, $B_0 \sim B_1$, то $C_0 \setminus B_0 \sim C_1 \setminus B_1$, далі, оскільки $C_1 \sim C_2$, $B_1 \sim B_2$, то $C_1 \setminus B_1 \sim C_2 \setminus B_2$ і т. д. Отже, непарні частини розкладу C еквівалентні парним розкладу B, а парні – дорівнюють відповідним непарним.

Для завершення доведення побудуємо припустиму функцію $h : C \to B$ так:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(C_i \setminus B_i), \\ x,\ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_i \setminus C_{i+1}) \cup Z. \end{cases}$$

Неважко переконатись, що h є припустиме відображення.

Вправа 1.2. *Використовуючи доведення цієї теореми, доведіть теорему Кантора-Бернштейна*: *Якщо* $A \subset B \subset C$ *і* $|A| = |C|$, *то* $|B| = |C|$.

Підказка: Це доведення повністю збігається з доведенням теореми Банаха-Бернштейна до побудови функції h.

1.3. Парадокс Банаха-Тарського

Означення 1.2. *Група* G *називається вільною групою, якщо існує підмножина* $S \subset G$ *така, що кожен елемент* G *записується єдиним чином як добуток скінченного числа елементів* S *та їх обернених при цьому для будь-якого* $\psi \in S$ $\psi^{\alpha}\psi^{-\alpha} = 1$, *тобто скорочується.*

Елементи множини S називаються твірними.

Приклад. Нехай твірними групи є φ та ψ. Тоді елементи вільної групи G – це записи вигляду

$$\varphi^{\alpha_1}\psi^{\alpha_2}\varphi^{\alpha_3}\psi^{\alpha_4} \dots \varphi^{\alpha_n},$$

де $\alpha_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Розглянемо одиничну сферу S^2 в $\mathbb{R}^3$ і будемо вважати, що φ та ψ – це повороти на цій сфері відносно різних осей. Крім цього, будемо вважати, що $\varphi^2 = 1$ і $\psi^3 = 1$, наприклад, $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi/3$ і осі взяті так, що немає інших співвідношень. Розглянемо орбіту точки $x \in S^2$.

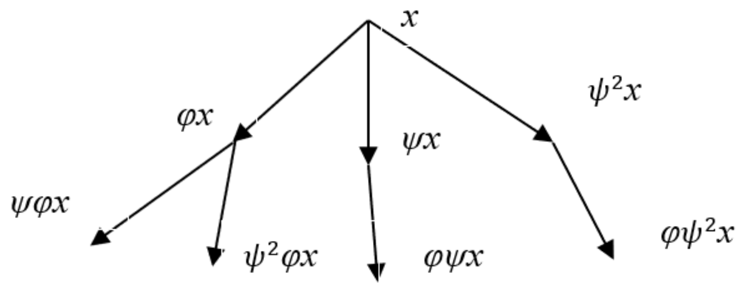

Рис. 1

Точки орбіти x можна розбити на три множини A, B і C так, що:

$$A \sim B \cup C;\ A \sim B \sim C \tag{1.2}$$

і

$$\varphi(A) = B \cup C;\ \psi(A) = B;\ \psi^2(A) = C. \tag{1.3}$$

Дійсно, задаємо переходи між множинами такою таблицею:

	$a \in A$	$a \in B$	$a \in C$
$a = \psi \dots$	$\varphi a \in B$	$\varphi a \in A$	$\varphi a \in A$
$a = \varphi \dots$	$\psi a \in B$	$\psi a \in C$	$\psi a \in A$
	$\psi^2 a \in C$	$\psi^2 a \in A$	$\psi^2 a \in B$

Перевіримо виконання (1.3). Якщо $A \ni a = \psi \dots$, то $\varphi a \in B$. Якщо ж $A \ni a = \varphi \dots$, то легко бачити, що a має вигляд $a = \varphi\psi b$, звідки $\varphi a = \psi b$, тобто ψb належало до рядка, де a має вигляд $a = \psi \dots$. Оскільки $\varphi\psi b \in A$ то $\psi b \in B$ або $\psi b \in C$. Отже, $\varphi(A) = B \cup C$. Аналогічно перевіряються рівності $\psi(A) = B;\ \psi^2(A) = C$.

Розфарбуємо точки орбіти у кольори A, B і C. Наприклад, якщо x зафарбовано в колір A, то φx та ψx будуть кольору B, а $\psi^2 x$ кольору C і т. д. Так зафарбуємо всю орбіту.

Вправа 1.3. *Розфарбувати точки орбіти x, представлені на рисунку 1, при $x \in C$.*

Далі застосуємо теорему вибору і виберемо точки кольорів A, B і C із кожної орбіти на сфері. Але слід відзначити, що є «погані» точки, орбіти яких проходять через осі поворотів. Орбіти таких точок відрізняються від звичайних тим, що попадаючи на осі, вони не змінюються при поворотах відносно цих осей. Відзначимо, що множина таких «поганих» точок Q є зліченною, оскільки всього чотири точки на сфері належать осям поворотів, а кількість всіх можливих поворотів є зліченною множиною.

Отже, ми розбили сферу на чотири множини $S^2 = A \sqcup B \sqcup C \sqcup Q$.

Відзначимо, що існує поворот не рівний φ та ψ, який Q переводить в Q_0 так, що $Q \cap Q_0 = \emptyset$, тобто, $Q_0 \subset A \sqcup B \sqcup C$. Дійсно, всіх поворотів, що переводять якусь точку в неї ж, злічена кількість, отже, сукупність всіх поворотів, що переводять хоч якусь точку Q в себе, є зліченною і серед континуума поворотів знайдеться потрібний). Оскільки $B \sqcup C \sim A \sim C$, можна вважати, що $Q_0 \subset C$. Сфера розбивається в обєднання

$$S^2 = (A \cup Q) \cup (B \cup Q_0) \cup (C \setminus Q_0).$$

Далі, $A \cup Q \sim B \cup C \cup Q \sim A \cup C \cup Q \sim A \cup B \cup C \cup Q \sim S^2$, аналогічно $B \cup Q_0 \sim A \cup Q \sim S^2$. Таким чином, із сфери S^2 ми отримали дві сфери S^2 плюс образ множини $C \setminus Q_0$. Тому за теоремою Банаха-Бернштейна ми можемо із однієї сфери отримати дві.

Аналогічно можна довести твердження, яке, зокрема, є доведенням теореми 1.2:

Теорема 1.4. (парадокс Банаха-Тарського). *Довільну кулю B в $\mathbb{R}^3$ можна розбити на 5 множин A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, що не перетинаються, і побудувати множини B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, які не перетинаються, і такі, що*

1. *Множина B_i конгруентна множині A_i, $i = 1,2,3,4,5$.*
2. *Об'єднання B_1 та B_2 дорівнює B.*
3. *Об'єднання B_3, B_4 та B_5 дорівнює B.*

Отже, підсумовуючи цю лекцію, доходимо такого висновку: взагалі кажучи, якщо X досить велика множина з багатою групою ізометрій, то розв'язати просту задачу теорії вимірювання на 2^X неможливо. Тому ми будемо будувати спеціальні класи підмножин із 2^X, для яких така міра існує.

Лекція 2. ***Класи множин***

2.1. Основні класи множин

Нехай X – непорожня фіксована множина, 2^X – множина всіх підмножин множини X.

Означення 2.1. *Система $\mathbb{S}$ підмножин із 2^X називається* *<u>півкільцем</u>* *множин, якщо для будь-яких $A, B \in \mathbb{S}$ виконуються умови:*

1. $A \cap B \in \mathbb{S}$.
2. $\exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathbb{S}$*:* $C_k \cap C_l = \emptyset, k \neq l,$ *і виконується рівність* $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

Приклад. $X = \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N},\ \mathbb{S} = \{\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \colon a_i < b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\} \cup \{\emptyset\}$ *– півкільце підмножин* $\mathbb{R}^n$.

Означення 2.2. *<u>Півалгебра</u> множин – це півкільце множин $\mathbb{S}$, таке, що $X \in \mathbb{S}$.*

Означення 2.3. *Нехай $\mathbb{K} \subset 2^X$ – непорожня система множин. $\mathbb{K}$ називається <u>кільцем</u> множин, якщо $\forall\, A, B \in \mathbb{K}$ виконані умови:*

1. $A \cup B \in \mathbb{K}$.
2. $A \setminus B \in \mathbb{K}$.

Означення 2.4. *Якщо $X \in \mathbb{A}$, де $\mathbb{A}$ – кільце множин, то $\mathbb{A}$ називають <u>алгеброю</u> множин.*

Означення 2.5. *Нехай $\mathcal{K} \subset 2^X$ – непорожня система множин. $\mathcal{K}$ називається <u>$\sigma-$кільцем</u> множин, якщо:*

1. $\forall\, \{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$,
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{K}$.

Означення 2.6. *Якщо σ-кільце $\mathcal{A}$ містить X, то $\mathcal{A}$ називається <u>σ-алгеброю</u>.*

Означення 2.7. *Якщо кільце $\mathbb{K}$ разом із довільною послідовністю $\{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{K}$ містить $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\mathbb{K}$ називають <u>δ-кільцем.</u>*

Зауваження. Назва алгебра (кільце) множин тісно пов’язана з поняттям булевої алгебри (кільця). Нагадаємо коротко ці поняття:

Нехай $\mathcal{R} \neq \emptyset$ – деяка множина елементів.

Означення 2.8. *Трійка* $(\mathcal{R}, +, \times)$, *де* $+$ *і* $\times$ *бінарні операції на* $\mathcal{R}$, *називається асоціативним <u>кільцем</u>, якщо* $(\mathcal{R}, +)$ *– адитивна абелева (комутативна) група і при цьому виконуються умови:*

1. $\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} : (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ *(асоціативність множення);*

2. $\forall\, a, b, c \in \mathcal{R} : (a + b) \times c = a \times c + b \times c,\, c \times (a + b) = c \times a + c \times b$ *(дистрибутивність множення відносно додавання).*

Означення 2.9. *Нехай в асоціативному кільці* $(\mathbb{B}, +, \times)$ *виконується умова* $\forall\, x \in \mathbb{B},\, x \times x = x$, *тоді кільце* $\mathbb{B}$ *називається <u>булевим кільцем</u>.*

Теорема 2.1. *Нехай* $\mathbb{B}$ - булеве кільце, тоді

$$\forall\, x, y \in \mathbb{B},\;\; x \times y = y \times x \quad i \quad x + x = 0.$$

Доведення. $(x + y)(x + y) = x + y$, звідки $x \times y + y \times x = 0$. Підставивши $y = x$, отримаємо $x + x = 0$. Далі, оскільки $x \times y + y \times x = 0$ та $x \times y + x \times y = 0$, то $x \times y = y \times x$.

Якщо в кільці множин $\mathbb{K}$ в якості суми множин A і B взяти симетричну різницю $A + B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, а в якості добутку перетин $A \times B \overset{\text{def}}{=} A \cap B$, то отримаємо булеве кільце.

Нижче терміни півкільце, півалгебра, кільце, алгебра будуть стосуватись певних систем підмножин деякої універсальної множини $X \neq \emptyset$.

Означення 2.8. *Нехай* $\mathbb{M} \subset 2^X$ і $\mathbb{M} \neq \emptyset$. *Клас множин* $\mathbb{M}$ *називається <u>монотонним</u>, якщо*: $\forall\, \{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{M}$: $\forall\, n\ \geq 1,\, A_n \subset A_{n+1}$, *і* $\forall\, \{B_j, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{M}$, $B_{n+1} \subset B_n$, *виконується*

$$\lim_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{M}, \qquad \lim_{n\to\infty} B_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathbb{M}.$$

При цьому послідовність $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ називають послідовністю, що *монотонно зростає*, а послідовність $\{B_j, j \in \mathbb{N}\}$ називають *монотонно спадною*.

2.2. Породжені класи множин

Означення 2.9. *Кільцем (алгеброю, σ- кільцем, σ-алгеброю, монотонним класом), породженим класом $\mathbb{H}$, називається кільце (алгебра, σ-кільце, σ-алгебра, монотонний клас), яке містить $\mathbb{H}$ і міститься в будь-якому кільці (алгебрі, σ-кільці, σ-алгебрі, монотонному класі), що містить $\mathbb{H}$.*

Позначимо через $k(\mathbb{H})$ ($a(\mathbb{H})$, $\sigma k(\mathbb{H})$, $\sigma a(\mathbb{H})$, $m(\mathbb{H})$) кільце (відповідно алгебру, σ-кільце, σ-алгебру, монотонний клас), породжене набором множин $\mathbb{H}$.

Теорема 2.2. *Перетин довільної множини кілець є кільцем.*

Доведення. Нехай $\{\mathbb{K}_\alpha : \alpha \in I\}$ – множина кілець. Тоді

$$\forall\, A, B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathbb{K}_\alpha \Rightarrow\ A, B \in \mathbb{K}_\alpha,\ \ \forall\, \alpha \in I \Rightarrow A \setminus B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathbb{K}_\alpha\,,$$

$$A \cup B \in \mathbb{K}_\alpha \Rightarrow A \setminus B, A \cup B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathbb{K}_\alpha.$$

Зауваження. *Теорема 2.2 доводить існування породженого деяким класом кільця та задає метод отримання цього кільця, якщо відомі всі інші кільця, що містять цей клас.*

Вправа 2.1. *Чи справедлива теорема 2.2 для алгебр, σ-кілець, σ-алгебр, монотонних класів?*

Вправа 2.2. *Показати, що для півкілець теорема 2.2, загалом, не має місця.*

Лекція 3. ***Побудова кільця, породженого півкільцем, та σ-кільця, породженого кільцем***

3.1. Кільце, породжене півкільцем

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbb{S}$ *– півкільце. Тоді*

$$k(\mathbb{S}) = \mathbb{L} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i\,,\ A_i \in \mathbb{S},\ n \in \mathbb{N},\ i = 1,2,\dots,n,\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \right\}.$$

Доведення. Очевидно, що $\mathbb{S} \subset \mathbb{L} \subset k(\mathbb{S})$. Перевіримо, що $\mathbb{L}$ – кільце. Нехай $A, B \in \mathbb{L}$, тоді існують набори $\{A_i, i = 1,\dots,n\}, \{B_j, j = 1,\dots.,m\} \subset \mathbb{S}$ такі, що

$$A = \cup_{i=1}^{n} A_i\,, \quad B = \cup_{j=1}^{m} B_j,$$

причому $A_i \cap A_k = \emptyset, i \neq k, B_j \cap B_l = \emptyset, j \neq l.$

Покажемо, що $A \cap B \in \mathbb{L}$. Дійсно, оскільки $(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = \emptyset$, якщо $i \neq k$ або $j \neq l$, то

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \in \mathbb{L}.$$

Тут ми скористались означенням півкільця, за яким $A_i \cap B_j \in \mathbb{S}$.

Очевидно, що для довільного набору $\{D_k, k = 1,\dots,r\} \subset \mathbb{L}$, $\cap_{k=1}^{r} D_k \in \mathbb{L}$.

Далі, з означення півкільця випливає, що існує набір множин $C_{ijk} \in \mathbb{S}$ таких, що

$$A_i \setminus B_j = \bigcup_{k=1}^{l(i,j)} C_{ijk},$$

де $C_{ijr} \cap C_{ijs} = \emptyset, r \neq s.$

Звідки

$$A \setminus B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \left(\overline{\bigcup_{j=1}^{m} B_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (A_i \setminus B_j)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{l(i,j)} C_{ijk} = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{l(i,j)} C_{ijk} \in \mathbb{L}.$$

Очевидно, що $A \cup B \in \mathbb{L}$. Отже, $\mathbb{L}$ – кільце, що з урахуванням

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{L} \subset k(\mathbb{S})$$

завершує доведення.

3.2. Ознака σ-кільця

Лема 3.1. *Кільце $\mathbb{K}$ є σ-кільцем тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{K}$ є монотонним класом.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\mathbb{K}$ є σ-кільцем. Покажемо, що кожне σ-кільце є монотонним класом. Дійсно, для довільної послідовності $\{A_n, n \geq 1\} \subset$ $\subset \mathbb{K}$, яка є монотонно зростаючою, маємо

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}.$$

Якщо ж $\{A_n, n \geq 1\}$ є монотонно спадною, тоді

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \in \mathbb{K}.$$

Достатність. Нехай $\mathbb{K}$ є монотонним класом і $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{K}$. Очевидно, що $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{K}$ і $B_n \subset B_{n+1}$, тобто $\{B_n, n \geq 1\}$ монотонно зростаюча послідовність із $\mathbb{K}$ і, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{K}$, а, оскільки $\mathbb{K}$ – кільце, то $\mathbb{K}$ є σ-кільцем.

Теорема 3.2. *Нехай $\mathbb{K}$ – кільце, тоді $\sigma k(\mathbb{K}) = m(\mathbb{K})$.*

Доведення. За лемою 3.1 $\sigma k(\mathbb{K})$ монотонний клас, отже, $m(\mathbb{K}) \subset \sigma k(\mathbb{K})$. Тому достатньо показати, що $m(\mathbb{K})$ є σ-кільцем.

Для $A \in m(\mathbb{K})$ покладемо

$$M(A) = \{B \in 2^X : \{A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\} \subset m(\mathbb{K})\}.$$

Оскільки $\mathbb{K}$ – кільце і $\mathbb{K} \subset m(\mathbb{K})$, то для будь-якого $A \in \mathbb{K}$ маємо $\mathbb{K} \subset M(A)$.

Покажемо, що $\forall\, A \in m(\mathbb{K})$, $M(A)$ – монотонний клас.

Нехай

$$\{B_n, n \in \mathbb{N}\} \subset M(A),\ B_n \subset B_{n+1},\ n \geq 1.$$

Тоді для всіх $n \geq 1$:

$$(B_n \cup A) \subset (B_{n+1} \cup A), (B_n \setminus A) \subset (B_{n+1} \setminus A), (A \setminus B_n) \supset (A \setminus B_{n+1});$$

$$\{B_n \cup A,\ A \setminus B_n, B_n \setminus A\} \subset m(\mathbb{K}).$$

Оскільки $m(\mathbb{K})$ – монотонний клас, то

$$m(\mathbb{K}) \ni \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup A,$$

$$m(\mathbb{K}) \ni \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \setminus A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \setminus A,$$

$$m(\mathbb{K}) \ni \bigcap_{n=1}^{\infty}(A \setminus B_n) = A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Отже, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in M(A)$.

Аналогічно для монотонно спадної послідовності.

Далі, оскільки $\forall\, A \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \subset M(A)$ і $M(A)$ – монотонний клас, то $\forall\, A \in \mathbb{K}$ має місце $m(\mathbb{K}) \subset M(A)$. Звідки випливає, що $\forall\, A \in \mathbb{K}$, $\forall\, B \in m(\mathbb{K})$ виконується

$$\{A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\} \subset m(\mathbb{K}) \Longrightarrow \mathbb{K} \subset M(B),$$

а отже, $m(\mathbb{K}) \subset M(B)$.

Тобто

$$\forall\, B_1, B \in m(\mathbb{K}),\ \{B_1 \cup B,\ B_1 \setminus B,\ B \setminus B_1\} \subset m(\mathbb{K})),$$

звідки $m(\mathbb{K})$ є кільце. З урахуванням леми 3.1 $m(\mathbb{K})$ є σ-кільце, а значить $m(\mathbb{K}) = \sigma k(\mathbb{K})$.

Означення 3.1. *Функція множини $\alpha(\cdot)$, визначена на деякому класі множин $\mathbb{H}$ із X, яка приймає скінченні або нескінченні значення, називається:*

1. *Невід'ємною, якщо* $\forall\, A \in \mathbb{H},\ \alpha(A) \geq 0$;
2. *Скінченно-півадитивною, якщо* $\forall\, A_i \in \mathbb{H}, i = 1,2,\dots,n,$ і $A \in \mathbb{H}$ такого, що $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$\alpha(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i).$$

3. *Скінченно-адитивною (або далі просто «адитивною»), якщо*

$$\forall\, A_i \in \mathbb{H}, \quad i = 1,\dots,n, \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{H}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$$\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i).$$

4. σ-*півадитивною, якщо* $\forall\, A, A_i \in \mathbb{H},\ i \in \mathbb{N}$, таких що $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\alpha(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i).$$

5. σ-*адитивною, якщо* $\forall\, A_i \in \mathbb{H}$, $i = 1,2,\dots$, *таких що* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{H}$ *та* $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

$$\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i).$$

6. *Монотонною, якщо* $\forall\, A, B \in \mathbb{H}$ і $A \subset B$, то $\alpha(A) \leq \alpha(B)$;
7. *Скінченною, якщо* $\forall\, A \in \mathbb{H},\ |\alpha(A)| < \infty$.
8. σ-*скінченною, якщо* $\exists\, \{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{H},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ і $|\alpha(A_n)| < \infty$.

Вправа 3.1. *Довести, що $k(\mathbb{S})$ із теореми 3.1 не завжди є σ-кільцем.*

Вправа 3.2. *Довести, що декартовий добуток кілець, взагалі кажучи, не є кільцем.*

Вправа 3.3. *Навести приклад скінченно-адитивної функції, яка не є* σ-*адитивною.*

Лекція 4. ***Передміра, міра. Основні властивості***

4.1. Передміра та її основні властивості

Означення 4.1. *Функція множин $\mu(\cdot)$ називається передмірою, якщо вона визначена на півкільці, є невід'ємною, адитивною і скінченна хоча б на одній множині півкільця.*

Відзначимо, що для $\mu(A) < +\infty$ з рівності $A = A \cup \emptyset$ і адитивності передміри випливає, що $\mu(\emptyset) = 0$.

Теорема 4.1. *Нехай* $\mathbb{K}$ *– кільце і* μ *– передміра на* $\mathbb{K}$. *Тоді:*

1. μ *– монотонна на* $\mathbb{K}$, тобто $\forall\, A, B \in \mathbb{K}$ таких, що $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$, маємо $\mu(A) \le \mu(B)$.

2. $\forall\, A, B \in \mathbb{K}$ таких, що $\min\big(\mu(A), \mu(B)\big) < +\infty$,
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

3. μ *– півадитивнна на* $\mathbb{K}$, тобто, $\forall\, \{A_k, k = 1,2, \dots, n\} \subset \mathbb{K}$ і $B \in \mathbb{K}$ такого, що $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
$$\mu(B) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Доведення. 1. Нехай $A, B \in \mathbb{K}$ і $A \subset B$. Тоді
$$B = A \cup (B \setminus A), A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

З урахуванням адитивності μ маємо:
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A). \tag{3.1}$$

Отже, $\mu(A) \le \mu(B)$.

2. Нехай $\mu(A) < +\infty$. Тоді з (3.1) випливає $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Якщо $\min\big(\mu(A), \mu(B)\big) < +\infty$, то із пункту 1 випливає, що
$$\mu(A \cap B) \;\le\; \min(\mu(A), \mu(B)\,) < +\infty,$$
крім того, $A \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup B$ і $\big(A \setminus (A \cap B)\big) \cap B = \emptyset$.
Враховуючи (3.1), маємо
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

3. З адитивності і монотонності μ випливає, що

$$\mu(B) \le \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\left(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)\right) \cup \dots \cup \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right)$$

$$= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \dots + \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

4.2. Міра та її основні властивості

Означення 4.2. *Передміра μ називається мірою, якщо вона має властивість σ-адитивності, тобто*

$\forall\, A_i \in \mathbb{S}$, $i = 1,2,\dots$, *таких, що* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{S}$, *для* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Теорема 4.2. *Нехай* $\mathbb{K}$ *– кільце і* μ *–міра на* $\mathbb{K}$. *Тоді* μ *–* σ*-півадитивна на* $\mathbb{K}$.

Доведення. Оскільки

$$\forall\, A_i \in \mathbb{K},\ i = 1,2,\dots,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

і для $l \ne k$ $\left(A_l \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} A_i\right) \cap \left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \emptyset$, то, якщо $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}$, маємо

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Тут $\bigcup_{i=1}^{0} A_i = \emptyset$.

Теорема 4.3. *Нехай* μ *– скінченна передміра на кільці* $\mathbb{K}$. *Тоді такі чотири умови еквівалентні:*

1) μ *є міра*;

2) μ *неперервна знизу, тобто* $\forall\, A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\dots$, *таких, що*

$$A_n \subset A_{n+1},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}:$$

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right);$$

3) μ *неперервна зверху, тобто* $\forall\, A_i\in\mathbb{K}$, $i\ =\ 1,2,\dots$, *таких, що* $A_n\supset\ A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathbb{K}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right);$$

4) μ неперервна *в «нулі», тобто для* $\forall\, A_i\in\mathbb{K}$, $i\ =\ 1,2,\dots$, *таких, що* $A_n\supset\ A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$:

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=0.$$

Доведення. 1) ⇒ 2). Оскільки $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup(A_2\setminus A_1)\cup(A_3\setminus A_2)\cup\dots$, то, з урахуванням σ-адитивності міри, маємо

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu(A_1)+\mu(A_2\setminus A_1)+\mu(A_3\setminus A_2)+\cdots$$

$$=\mu(A_1)+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\big(\mu(A_k)-\mu(A_{k-1})\big)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n).$$

2) ⇒ 3). Нехай $A_n\supset\ A_{n+1}$ для $\forall\, n\geq 1$, тоді

$$\mu(A_n)=\mu\big(A_1\setminus(A_1\setminus A_n)\big)=\mu(A_1)-\mu(A_1\setminus A_n).$$

Послідовність $\{A_1\setminus A_n, n\in N\}$ – неспадна і $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1\setminus A_n)=A_1\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$, тому в силу 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_1\setminus A_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1\setminus A_n))$.

Звідки

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_1\setminus A_n)=\mu(A_1)-\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1\setminus A_n)\right)$$

$$=\mu(A_1)-\mu\left(A_1\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu(A_1)-\mu(A_1)+\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

$$=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

3) ⇒ 4) оскільки 4) є частинний випадок 3).

4) $\Rightarrow$ 1) Нехай $\forall A_i \in \mathbb{K}$, $i \in \mathbb{N}$, попарно не перетинаються і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}$. Тоді

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\right).$$

Оскільки $\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n \downarrow \emptyset$ при $m \to \infty$, то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{m\to+\infty}\left[\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\right)\right]$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\mu(A_n) + \lim_{m\to+\infty}\mu\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

У теоремі 4.3 розглядалась скінченна міра. У загальному випадку справедливі такі твердження:

Лема 4.1. *Міра μ на кільці $\mathbb{K}$ неперервна зверху, тобто для будь-яких $A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\ldots$, таких, що $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}$ i $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\mu\left(A_{n_0}\right) < +\infty$, має місце*

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Лема 4.2. *Міра μ на кільці $\mathbb{K}$ неперервна знизу, тобто для будь-яких $A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\ldots$, таких, що $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}$, має місце*

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Вправа 4.1. *Довести леми* 4.1 *та* 4.2.

Вправа 4.2. *Нехай μ − міра на кільці $\mathbb{K}$. Довести, що функція d: $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \to [0,+\infty)$, де $d(A,B) = \mu(A\,\Delta\,B)$ є псевдометрикою (тобто виконуються аксіоми метрики, тільки із $d(A,B) = 0$ не випливає, що $A = B$).*

4.3. Ознаки σ-адитивності передмір

Означення 4.3. *Нехай* $\mathbb{H} \subset 2^X$ - *клас підмножин* X. $\mathbb{H}$ *називається* *<u>компактним</u>, якщо для будь-якої послідовності* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{H}$, *для якої* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, *існує* $n_0 \in \mathbb{N}$ *таке, що і* $\bigcap_{n=1}^{n_0} A_n = \emptyset$.

Означення 4.4. *Нехай* μ *– передміра на кільці* $\mathbb{K}$. *Клас множин* $\mathbb{H} \subset \mathbb{K}$ *апроксимує* μ *знизу, якщо* $\forall\, A \in \mathbb{K}$ *і* $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A_\varepsilon \in \mathbb{H}$: $A_\varepsilon \subset A$ *і* $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Теорема 4.4. *Нехай* $\mathbb{K}$ *– кільце підмножин* X, μ *–скінченна передміра на* $\mathbb{K}$. *Для того, щоб* μ *була мірою досить, щоб* $\mathbb{K}$ *містила компактний клас* $\mathbb{H}$, *який апроксимує* μ *знизу.*

Доведення. В силу теореми 4.3, для доведення досить встановити, що μ неперервна в «нулі». Отже, нехай $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{K}$, $\forall\, n \geq 1$, $A_n \supset A_{n+1}$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Для деякого $\varepsilon > 0$ і для всіх $n \in \mathbb{N}$ вибираємо $B_n \in \mathbb{H}$: $B_n \subset A_n$ *та* $\mu(A_n \setminus B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$. Оскільки $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\exists\, p \in \mathbb{N}$: $\bigcap_{n=1}^{p} B_n = \emptyset$, тому

$$A_p = A_p \setminus \bigcap_{n=1}^{p} B_n = \bigcup_{n=1}^{p} (A_p \setminus B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{p} (A_n \setminus B_n) \Rightarrow$$

$$\mu(A_p) \leq \sum_{n=1}^{p} \mu(A_n \setminus B_n) \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{\varepsilon}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

4.4. Міра Жордана

Прикладом міри в $\mathbb{R}^n$ може служити міра Жордана μ_J, яка розглядається в курсі математичного аналізу. Нагадаємо стисло означення та деякі властивості цієї міри.

Розглянемо півкільце множин

$$\mathbb{S} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] : a_i < b_i \in \mathbb{R}, \ \ i = 1, \dots, n \right\} \cup \{\emptyset\},$$

де через $\prod_{i=1}^{n}$ ми позначаємо декартовий добуток n множин. Міра Жордана довільної множини $\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$ із півкільця $\mathbb{S}$ визначається так:

$$\mu_J \left(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \right) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Очевидно, що при $n = 1$ це довжина відрізка, при $n = 2$ – площа прямокутника і т. д. Легко бачити, що μ_J – передміра на $\mathbb{S}$.

Оскільки $\forall A \in k(\mathbb{S})$ $\exists \{C_1, \dots, C_n\} \subset \mathbb{S}$, що $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$ і $A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, то покладають

$$\mu_J(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu_J(C_i).$$

Означення 4.5. *Множина* $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ *називається вимірною за Жорданом, якщо* $\forall \varepsilon > 0$ *знайдуться множини* $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in k(\mathbb{S})$ *такі, що* $A_\varepsilon \subset \Phi \subset B_\varepsilon$ *і*

$$\mu_J(B_\varepsilon) - \mu_J(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Очевидно, що якщо множина Φ вимірна за Жорданом, то

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_J(B_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_J(A_\varepsilon)$$

і ця границя приймається за Жорданову міру множини Φ, тобто

$$\mu_J(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_J(B_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_J(A_\varepsilon).$$

Із означення 4.5 випливає **критерій вимірності множини за Жорданом:**

Множина Φ *вимірна за Жорданом тоді і тільки тоді, коли*

$$\mu_J(\partial\Phi) = 0,$$

де $\partial\Phi$ *– границя множини* Φ.

Лема 4.3. *Множина* $\mathbb{K}_J$ *всіх вимірних за Жорданом множин є кільцем*.

Доведення. Якщо $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{K}_J$, то, оскільки $\partial(\Phi_1 \cup \Phi_2) \subset \partial\Phi_1 \cup \partial\Phi_2$ та $\partial(\Phi_1 \setminus \Phi_2) \subset \partial\Phi_1 \cup \partial\Phi_2$, маємо $\mu_J\big(\partial(\Phi_1 \cup \Phi_2)\big) = 0$ та $\mu_J\big(\partial(\Phi_1 \setminus \Phi_2)\big) = 0$.

Отже, за критерієм вимірності за Жорданом $\Phi_1 \cup \Phi_2 \in \mathbb{K}_J$ і $\Phi_1 \setminus \Phi_2 \in \mathbb{K}_J$.

Теорема 4.5. *Нехай $\mathbb{K}_J$ – кільце всіх вимірних за Жорданом підмножин $\mathbb{R}^n$ і μ_J – n-мірна міра Жордана на $\mathbb{K}_J$. Тоді μ_J σ-адитивна на $\mathbb{K}_J$, тобто, μ_J – міра.*

Доведення. Нехай $\mathbb{H} = \{F: F \subset \mathbb{R}^n$ – компактна множина, вимірна за Жорданом$\}$. (У якості вправи доведіть, що $\mathbb{H}$ – компактний клас.) Далі, відподно до конструкції міри Жордана, для множини $\forall\, A \in \mathbb{K}_J$ і $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{H}$: $\mu_J(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. Звідки, з урахуванням теореми 4.4, випливає твердження теореми.

Вправа 4.3. *На множині всіх підмножин раціональних чисел $\mathbb{Q}$ задати міру μ так, щоб кожне раціональне число мало міру більшу від нуля, причому* $\mu(\mathbb{Q}) = 1$.

Вправа 4.4. *Навести приклад нескінченної множини на площині, міра Жордана якої дорівнює нулю.*

Лекція 5. *Продовження міри з півкільця на кільце та з кільця на σ-кільце. Теорема Каратеодорі*

5.1. Продовження міри з півкільця на породжене ним кільце

Означення 5.1. *Нехай $H_1, H_2 \subset 2^X$, $\mu_i: H_i \to\,]-\infty, +\infty]$, $i = 1{,}2$. Функція μ_2 називається продовженням функції μ_1, якщо $H_1 \subset H_2$ і $\forall\, A \in H_1$,* $\mu_1(A) = \mu_2(A)$.

Теорема 5.1. *Для передміри μ на півкільці $\mathbb{S}$ існує єдине продовження до передміри $\tilde{\mu}$ на $k(\mathbb{S})$.*

Доведення. Оскільки за теоремою 3.1 для довільного $A \in k(\mathbb{S})$ існує набір $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{S}$ такий, що $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Покладемо $\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Перевіримо, що це продовження коректне, тобто не залежить від вибору підмножин із $\mathbb{S}$, що не перетинаються і в об'єднанні дають A. Дійсно, якщо $A = \bigcup_{j=1}^m B_j$, $B_j \in \mathbb{S}$, $B_j \cap B_i = \emptyset$, $i \neq j$, то $A_i = A_i \cap A = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$,

$B_j = A \bigcap B_j = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \bigcap B_j\right)$ причому $A_i \bigcap B_j \in \mathbb{S}, \forall\, i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m.$

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} \left(A_i \cap B_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu\left(A_i \cap B_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \cap B_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Продовження єдине. Дійсно, нехай існує інше продовження μ_2 на $k(\mathbb{S})$. Тоді $\forall\, A \in k(\mathbb{S})\ A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\,,\ A_i \in \mathbb{S},\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, звідки

$$\mu_2(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \tilde{\mu}(A).$$

Теорема 5.2. *Для міри μ на півкільці $\mathbb{S}$ існує єдине продовження до міри $\tilde{\mu}$ на $k(\mathbb{S})$.*

Доведення. Оскільки міра μ є передмірою, то за теоремою 5.1 вона продовжується до перед міри $\tilde{\mu}$ на $k(\mathbb{S})$. Залишається перевірити, що продовження $\tilde{\mu}$ σ-адитивне. Нехай

$$\{A_n, n \in N\} \subset k(\mathbb{S}), A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in k(\mathbb{S}).$$

Тоді

$A = \bigcup_{j=1}^{m} B_j,\ B_j \in \mathbb{S},\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j$ і для $\forall\, n \geq 1\ A_n = \bigcup_{i=1}^{l(n)} C_{ni}\,, C_{ni} \in \mathbb{S}$, $C_{ni} \cap C_{nj} = \emptyset, i \neq j$. Отже, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{l(n)} C_{ni}$.

Оскільки μ σ-адитивна на $\mathbb{S}$, маємо

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(B_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(B_j \cap A\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(B_j \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{l(n)} C_{ni}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{l(n)} \left(C_{ni} \cap B_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(n)} \mu\left(B_j \cap C_{ni}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l(n)} \mu\left(B_j \cap C_{ni}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n).$$

5.2. Зовнішня міра. Теорема Каратеодорі

Означення 5.2. *Невід'ємна функція* $\boldsymbol{\mu}^*(\cdot)$ *на* $\mathbf{2}^X$*, яка приймає скінченні або нескінченні значення, називається зовнішньою мірою, якщо*:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $\forall \{A,\ A_n, n \geq 1\} \subset 2^X,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Лема 5.1. *Зовнішня міра монотонна, тобто, якщо* $A \subset B$*, то*

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B).$$

Доведення. Покладемо $A_1 = B$, $A_n = \emptyset, n \geq 2$. Тоді

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(B) + \mu^*(\emptyset) + \cdots = \mu^*(B).$$

Теорема 5.3. *Якщо* μ *– міра на півкільці* $\mathbb{S} \subset 2^X$*, то функція*

$$\mu^*(E) = \begin{cases} inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\colon\ E_i \in \mathbb{S},\ i \geq 1,\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\} \\ +\infty,\ \text{якщо покриття множини } E \text{ не існує,} \end{cases} \tag{5.1}$$

де інфімум береться по всіх можливих покриттях множинами $\{E_i\}$ *з* $\mathbb{S}$ *множини* E*, є зовнішньою мірою, яка збігається на* $\mathbb{S}$ *з мірою* μ.

Доведення. Умова 1 виконана, оскільки $\emptyset \in \mathbb{S}$ і $\mu^*(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0$.

Перевіримо умову 2. Нехай $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ E,\ E_i \in 2^X,\ i \geq 1$. Якщо для деякого $j \in \mathbb{N}$, $\mu\left(E_j\right) = +\infty$, то умова 2 виконана. Тому припустимо, що $\mu(E_i) < +\infty$ для всіх $i \geq 1$. З означення зовнішньої міри і властивості точної нижньої межі випливає, що для $\forall\, i \in \mathbb{N}$ та $\forall\, \varepsilon > 0$ існує послідовність $\{E_{ij}\} \subset \mathbb{S}$ така, що $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij}$ і

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(E_{ij}\right) \leq \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Звідки, оскільки $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij}$, маємо

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(E_{ij}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

В силу довільності ε маємо $\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$.

Означення 5.3. *Функція μ^*, яка визначається співвідношенням* (5.1), *називається зовнішньою мірою, породженою мірою μ.*

Означення 5.4. *Множина $E \in 2^{X}$ називається μ^*-вимірною, якщо для* $\forall\, A \in 2^{X}$, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$.

Означення 5.5. *Нехай μ – міра на σ-алгебрі $\mathfrak{A}$. Міра μ називається повною, якщо $\forall\, A \in \mathfrak{A}$ такої, що $\mu(A) = 0$, для будь-якої підмножини $B \subset A$,* $\mu(B) = 0$.

Теорема 5.4 (Каратеодорі). *Якщо μ^* – зовнішня міра* на 2^{X} *і $\mathfrak{A}$ – клас всіх μ^*- вимірних множин, то $\mathfrak{A}$ це σ-алгебра, а звуження μ^* на $\mathfrak{A}$ є повною мірою.*

Доведення. Покажемо, що $\mathfrak{A}$ – алгебра. Дійсно, $\emptyset \in \mathfrak{A}$, оскільки $\forall\, A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \setminus \emptyset).$$

Якщо $E \in \mathfrak{A}$, то $\overline{E} \in \mathfrak{A}$ (у цьому легко переконатися, враховуючи, що $A \setminus E = A \cap \overline{E}$). Нехай $E, F \in \mathfrak{A}$, тоді для $\forall\, A \subset X$.

$$\mu^*(A) = (\mu^*\text{- вимірність } E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = (\mu^*\text{- вимірність } F)$$
$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*\big(A \cap \overline{E} \cap F\big) + \mu^*\big(A \cap \overline{E} \cap \overline{F}\big). \qquad (5.2)$$

Далі, враховуючи μ^*- вимірність множини E, маємо

$$\mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) = \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*\big(A \cap (E \cup F) \cap \overline{E}\big)$$
$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*\big(A \cap F \cap \overline{E}\big).$$

Тобто

$$\mu^*\big(A \cap \overline{E} \cap F\big) = \mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) - \mu^*(A \cap E) \qquad (5.3)$$

Беручи до уваги (5.2), із (5.3) отримуємо рівність

$$\mu^*(A) = \mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) + \mu^*\Big(A \cap \big(\overline{E} \cap \overline{F}\big)\Big).$$

Оскільки $\overline{E} \cap \overline{F} = \overline{E \cup F}$, то $E \cup F \in \mathfrak{A}$, а, значить, $E \cap F = \overline{\overline{E} \cup \overline{F}} \in \mathfrak{A}$. Звідки $E \setminus F = (E \cap \overline{F}) \in \mathfrak{A}$.

Доведемо, що $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра. Нехай $A_k \in \mathfrak{A}$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки $\mathfrak{A}$ – алгебра, то припустимо, що $A_m \cap A_n = \emptyset$, якщо $m \neq n$. Із того, що $A_1 \in \mathfrak{A}$ випливає, що $\forall\, B \subset X$

$$\mu^*\big(B\cap(A_1\cup A_2)\big)=\mu^*(B\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1)+\mu^*\big(B\cap(A_1\cup A_2)\cap\overline{A}_1\big)$$
$$=\mu^*(B\cap A_1)+\mu^*(B\cap A_2).$$

Із $A_3\in\mathfrak{A}$ випливає, що $\forall\, B\subset X$

$$\mu^*\big(B\cap(A_1\cup A_2\cup A_3)\big)$$
$$=\mu^*(B\cap(A_1\cup A_2\cup A_3)\cap A_3)+\mu^*\big(B\cap(A_1\cup A_2\cup A_3)\cap\overline{A}_3\big)$$
$$=\mu^*(B\cap A_3)+\mu^*\big(B\cap(A_1\cup A_2)\big)=\sum_{i=1}^{3}\mu^*(B\cap A_i).$$

За індукцією легко переконатись, що для всіх $n\geq 1$

$$\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(B\cap A_i). \tag{5.4}$$

Використовуючи μ^*-вимірність $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ і монотонність зовнішньої міри та враховуючи (5.4), маємо

$$\mu^*(B)=\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\mu^*\left(B\cap\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(B\cap A_i)+\mu^*\left(B\cap\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right)$$
$$\geq\sum_{i=1}^{n}\mu^*(B\cap A_i)+\mu^*\left(B\cap\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}\right).$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mu^*(B)&\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(B\cap A_i)+\mu^*\left(B\cap\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}\right)\\&\geq\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)+\mu^*\left(B\cap\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}\right).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Для будь-яких $A,B\subset X$ в силу півадитивності μ^*

$$\mu^*(B)\leq\mu^*(B\cap A)+\mu^*\left(B\cap\bar{A}\right),$$

зокрема для $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$. Тому, з урахуванням (5.5), для $\forall\, B\subset X$

$$\mu^*(B)=\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)+\mu^*\left(B\cap\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}\right).$$

Отже, $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathfrak{A}$.

Підставимо в першу частину (5.5) $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, маємо

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

звідки, в силу σ-півадитивності μ^*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Звуження міри μ^* на $\mathfrak{A}$ є повною мірою, оскільки, якщо $A \in \mathfrak{A}$, $\mu^*(A) = 0$ і $C \subset A$, то для будь-якого $B \subset X$ маємо:

$$\mu^*(B) \geq \mu^*\left(B \cap \overline{C}\right) \geq \mu^*\left(B \cap \overline{A}\right) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*\left(B \cap \overline{A}\right) \geq \mu^*(B),$$

оскільки $0 \leq \mu^*(B \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$. Тобто, $\mu^*\left(B \cap \overline{C}\right) = \mu^*(B)$. Далі, оскільки $\mu^*(B \cap C) \leq \mu^*(B \cap A) = 0$, то $\mu^*(B \cap C) + \mu^*\left(B \cap \overline{C}\right) = \mu^*(B)$, і отже, $C \in S$. Враховуючи монотонність μ^*, маємо $\mu^*(C) = 0$.

Для довільної зовнішньої міри сукупність вимірних множин може бути досить бідною, наприклад, $\mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$, якщо $\mu^*(A) = 1$, $\forall A \in 2^X$, $A \neq \emptyset$ і $\mu^*(\emptyset) = 0$ (переконайтесь!). Тому зазвичай розглядаються зовнішні міри, індуковані мірами на породжених класах множин.

5.3. Продовження міри з кільця на породжене ним $\boldsymbol{\sigma}$-кільце

Лема 5.2. *Нехай μ^* – зовнішня міра на 2^X, породжена мірою μ на півкільці $\mathbb{S} \subset 2^X$, а $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра μ^*-вимірних множин. Тоді*

$$\forall E \in \mathbb{S}, \mu(E) = \mu^*(E) \text{ і } \mathbb{S} \subset \mathfrak{A}.$$

Доведення. Із означення 5.3 випливає, що якщо $E \in \mathbb{S}$, то

$$\mu^*(E) \leq \mu(E).$$

З іншого боку, якщо $\mathbb{S} \ni E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathbb{S}$, $i \geq 1$, то $E = \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cap E)$ і

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Отже, згідно (5.1) $\mu(E) \leq \mu^*(E)$ на $\mathbb{S}$, звідки $\mu(E) = \mu^*(E)$ на $\mathbb{S}$.

Покажемо, що якщо $E \in \mathbb{S}$, то $E \in \mathfrak{A}$, тобто, $\forall\, A \in 2^{X}$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Нехай $\mu^*(A) < +\infty$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо покриття $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathbb{S},\ i \geq 1$, таке що

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Оскільки $\mathbb{S}$ півкільце, то $A_i \setminus E = \bigcup_{k=1}^{r_i} C_{ik}$, де $C_{ik} \in \mathbb{S}$ не перетинаються. Звідки, з урахуванням $A \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap E)$ і $A \setminus E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{r_i} C_{ik}$, маємо

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\big(\mu(A_i \cap E) + \mu(A_i \cap \bar{E})\big) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu(A_i \cap E) + \sum_{k=1}^{r_i} \mu(C_{ik})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{r_i} \mu(C_{ik}) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Отже, для довільних $A \in 2^X$ та $\varepsilon > 0$ виконується

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E). \qquad (5.6)$$

Переходячи в (5.6) до границі при $\varepsilon \to 0$, маємо

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E). \qquad (5.7)$$

Оскільки $A \subset (A \cap E) \cup (A \setminus E)$ і зовнішня міра півадитивна, маємо

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Звідки, враховуючи (5.7),

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E),$$

тобто E – μ^*-вимірна множина.

Теорема 5.5 (про єдиність продовження міри з півкільця на породжене ним σ-кільце). *Нехай μ – σ-скінченна міра на півкільці $\mathbb{S} \subset 2^X$, а μ^* – зовнішня міра, індукована мірою μ. Тоді існує і до того ж єдина міра $\bar{\mu}$ на $\sigma k(\mathbb{S})$, яка є продовженням міри μ і $\forall\, A \in \sigma k(\mathbb{S})$, $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра всіх μ^*-вимірних множин. Відзначимо, що $\sigma k(\mathbb{S}) \subset \mathfrak{A}$, оскільки $\mathbb{S} \subset \mathfrak{A}$ за лемою 5.2. Позначимо через $\bar{\mu}$ продовження міри з $\mathbb{S}$ на $\mathfrak{A}$, побудоване згідно теореми 5.4. Оскільки $\sigma k(\mathbb{S}) \subset \mathfrak{A}$, то $\bar{\mu}$ є продовженням міри μ на $\sigma k(\mathbb{S})$. Припустимо, що $X \in \mathbb{S}$ і $\mu(X) < \infty$. Нехай існує інше продовження $\tilde{\mu}$ міри μ на $\sigma k(\mathbb{S})$. Покладемо

$$M \coloneqq \{A \in \sigma k(\mathbb{S}): \bar{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A)\}.$$

Очевидно, що $k(\mathbb{S}) \subset M \subset \sigma k(\mathbb{S})$. Покажемо, що M – монотонний клас. Нехай $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset M$ – монотонна послідовність. Тоді із неперервності міри для монотонно зростаючої послідовності $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ випливає

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

і для монотонно спадної $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\bar{\mu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Отже, для монотонно зростаючої послідовності $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$ і для монотонно спадної $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$, тобто, M – монотонний клас. Із леми 3.1 і $k(\mathbb{S}) \subset M \subset \sigma k(\mathbb{S})$ випливає, що $M = \sigma k(\mathbb{S})$, тобто $\bar{\mu}$ і $\tilde{\mu}$ збігаються на $\sigma k(\mathbb{S})$.

Розглянемо загальний випадок теореми. Оскільки μ σ-скінченна, то існує $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{S}$, така, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ і $\mu(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Введемо послідовність $Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$, де $\bigcup_{k=1}^{0} = \emptyset$. Легко бачити, що $Y_n \cap Y_m = \emptyset$, при $n \neq m$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$, $Y_n \in k(\mathbb{S})$ і $\mu(Y_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Із доведеного вище випливає, що на $Y_n \cap \sigma k(\mathbb{S}) = \sigma k(Y_n \cap \mathbb{S})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, міри $\bar{\mu}$ і $\tilde{\mu}$ збігаються. Оскільки $\forall\, A \in \sigma k(\mathbb{S})$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n \cap A)$, причому $(Y_n \cap A) \cap (Y_m \cap A) = \emptyset$, при $n \neq m$, маємо

$$\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n \cap A)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(Y_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(Y_n \cap A) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n \cap A)\right)$$
$$= \tilde{\mu}(A).$$

Зауваження 5.1. *Вимога σ-скінченності міри у теоремі 5.5 є суттєвою. Дійсно, на множині раціональних чисел відрізка $[0,1]$ розглянемо півкільце $\mathbb{S}$, що складається із півінтервалів $[a, b)$ з раціональними кінцями $a < b$ та $\emptyset$.*

Задаємо міру μ на $\mathbb{S}$ так: для довільного $A \in \mathbb{S}$ $\mu(A)$ дорівнює кількості елементів множини A і $\mu'(A) = c\mu(A)$, де $1 \neq c > 0$ дійсне. Тоді обидві міри збігаються на $\mathbb{S}$ але не збігаються на $\sigma k(\mathbb{S})$.

Теорема 5.6 (про наближення міри). *Якщо μ – σ-скінченна міра на півкільці $\mathbb{S}$, μ^* – зовнішня міра індукована мірою μ, $\bar{\mu}$ продовження міри μ на σ-алгебру $\mathfrak{A}$ усіх μ^*-вимірних множин (згідно теореми 5.4). Тоді для всякої множини $A \in \mathfrak{A}$ такої, що $\bar{\mu}(A) < +\infty$ і $\forall\, \varepsilon > 0$ існує множина $B \in k(\mathbb{S})$, що*

$$\bar{\mu}\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) < \varepsilon.$$

Доведення. За лемою 5.2 μ^* збігається з $\bar{\mu}$ на $\mathbb{S}$, тому $\exists\, \{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{S}$:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ і } \bar{\mu}(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \varepsilon/2.$$

В силу збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon/2.$$

Покладемо $B = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$. Тоді очевидно, що $B \in k(\mathbb{S})$ і

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) &\leq \bar{\mu}(A \setminus B) + \bar{\mu}(B \setminus A) \\
&\leq \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) + \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) \\
&= \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\right) + \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \bar{\mu}(A) \\
&\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \bar{\mu}(A) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Вправа 5.1. *Нехай μ міра на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Довести, що клас множин*

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$$

є σ-кільцем.

Лекція 6. ***Міра Лебега в n-вимірному просторі. Міра Лебега-Стилтьєса***

6.1. Міра Лебега в n-вимірному просторі

Нехай

$$X = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, \mathbb{S} = \{\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] : a_i < b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} \cup \{\emptyset\}$$

є півкільцем підмножин $\mathbb{R}^n$. Покладемо

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i).$$

Оскільки μ збігається з мірою Жордана на $\mathbb{S}$, то μ міра на півкільці $\mathbb{S}$. Ця міра, з урахуванням теореми про продовження міри з півкільця на кільце, єдиним чином продовжується до міри (також будемо позначати через μ) на $k(\mathbb{S})$. Нехай μ^* зовнішня міра, індукована мірою μ. Множина $\mathfrak{A}$ всіх μ^*-вимірних підмножин $\mathbb{R}^n$ є σ-алгеброю, а звуження μ^* на $\mathfrak{A}$ є мірою на $\mathfrak{A}$. Цю міру також позначимо через μ.

Означення 6.1. *Множина із $\mathfrak{A}$ називається лебеговою, а міра μ на $\mathfrak{A}$ – лебеговою мірою на $\mathbb{R}^n$ (або n-вимірною мірою Лебега).*

Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ найменшу σ-алгебру, породжену півкільцем $\mathbb{S}$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ називається борелевською σ-алгеброю. Очевидно, що

$$\mathbb{S} \subset k(\mathbb{S}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{A}.$$

6.2. Міра Лебега-Стилтьєса на прямій

Нехай $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, неперервна справа функція. На півкільці

$$\mathbb{S} = \{\langle a, b\rangle : -\infty < a < b < +\infty\} \cup \{\emptyset\},$$

де $\langle a, b\rangle$ позначає будь-яку із множин $[a, b], (a, b], (a, b), [a, b)$, розглянемо функцію μ_F таку, що $\mu_F(\emptyset) = 0$, і

$$\mu_F\big((a, b]\big) = F(b) - F(a), \mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-),$$

$$\mu_F\big((a,b)\big) = F(b-) - F(a),\ \mu_F([a,b)) = F(b-) - F(a-),$$

де $F(x-)$ лівостороння границя функції F у точці x.

Теорема 6.1. *Функція μ_F є мірою на півкільці $k(\mathbb{S})$.*

Доведення. Функція μ_F невід'ємна і адитивна на $\mathbb{S}$ (перевірити!) і стандартно продовжується на $k(\mathbb{S})$.

Нехай $\mathbb{H} = \{[a,b]: a < b\}$. Легко бачити, що $\mathbb{H}$ - компактний клас і, оскільки F неперервна справа, то $\mathbb{H}$ апроксимує μ_F знизу. Тому за теоремою 4.4 μ_F є мірою.

Через μ_F^* позначимо зовнішню міру, індуковану мірою μ_F, а через $\mathfrak{A}_F$ множину всіх μ_F^* - вимірних підмножин $\mathbb{R}$.

Означення 6.2. *Звуження μ_F^* на $\mathfrak{A}_F$ називається мірою Лебега-Стилтьєса на $\mathbb{R}$, а множина з σ-алгебри $\mathfrak{A}_F$-вимірними.*

Проста задача теорії вимірювання розглядалась у лекції 1. Крім цієї задачі, в теорії вимірювання вивчається складна задача теорії вимірювання: визначити злічено-адитивну міру μ на множині всіх обмежених підмножин $\mathbb{R}^n$ так, щоб виконувалися властивості:

1. $\mu(I) = 1$, якщо I – n-мірний куб;
2. $\mu(A) = \mu(B)$, якщо A і B, якщо одну множину можна сумістити з іншою за допомогою деякої групи ізометрій G в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 6.2. *Якщо G є група всіх рухів в $\mathbb{R}^n$, тобто, в умові 2) A і B конгруентні, то складна задача теорії вимірювання не розв'язувана в просторі $\mathbb{R}^n$ при будь-якому $n \in \mathbb{N}$.*

Вже для $\mathbb{R}^1$ доведення теореми 6.2 випливає із того, що для такої міри будується невимірна множина на колі [5]. Побудуємо невимірну множину на $[0,1]$. Припустимо, що існує зліченно-адитивна міра μ на $2^{[0,1]}$, яка задовольняє 1, 2. Введемо клас еквівалентності F_α, $\alpha \in [0,1]$:

$$F_\alpha = \{r \in \mathbb{R}: \alpha - r \in \mathbb{Q}\} \cap [0,1].$$

Множини F_α розбивають $[0,1]$ на класи еквівалентності. Використовуючи аксіому вибору, виберемо із кожного класу еквівалентності F_α по одній точці і множину таких точок позначимо через T.

Позначимо через $T_q = \{T + q\} \cap [0,1]$, $q \in \mathbb{Q}$

$$[0,1] \supset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} T_q.$$

Легко бачити, що $T_q \cap T_p = \emptyset$ для $q \neq p$, $q, p \in \mathbb{Q}$. Дійсно, якщо $t \in T_q \cap T_p$, то $t - q \in T$ і $t - p \in T$, тобто, T містить дві точки різниця між якими $p - q$ є раціональним числом, що неможливо за побудовою T.

Оскільки μ задовольняє 1, 2, то $\mu(T_q) = \mu(T_p)$, $\forall\, q, p \in \mathbb{Q}$ і

$$1 = \mu([0,1]) \geq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(T_q),$$

що неможливо ні при $\mu(T_q) > 0$ ні при $\mu(T_q) = 0$.

Вправа 6.1. *Нехай $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, неперервна справа функція, а μ_F – Лебега-Стилтьєса на прямій. Довести, що* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\mu_F(\{x_0\}) = F(x_0) - F(x_0 -).$$

Вправа 6.2. *Побудувати невимірну множину на колі.*

Лекція 7. ***Вимірні функції та їх властивості***

Нехай $f: X \to X'$ відображення множини X в множину X' (тобто $\forall x \in X$ поставлений відповідно один і тільки один елемент $y \in X'$). Образом множини $A \subset X$ при відображенні f називається множина

$$f(A) := \{f(x): x \in A\}, f(\emptyset) = \emptyset.$$

Прообразом множини $A' \subset X'$ при відображенні f називається множина

$$f^{-1}(A') := \{x: f(x) \in A'\}, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Означення 7.1. *Нехай* (X, E), (X', E') *– вимірні простори і* $f: X \to X'$. *Відображення* f *називається* (E, E') *вимірним, якщо* $f^{-1}(E') \subset E$, *тобто* $\forall A' \in E'$ $f^{-1}(A') \in E$. *Якщо* $X' = \mathbb{R}$, $E' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, (E, E')*-вимірне відображення* f *називається* E*- вимірною функцією або просто вимірною*.

Теорема 7.1. *Функція* $f(x)$ *буде* E*- вимірна тоді і тільки тоді, коли для* $\forall a \in \mathbb{R}$ *множина* $\{x: f(x) < a\} \in E$.

Доведення. Необхідність очевидна, тому що множина $(-\infty, a)$ є борелевою.

Достатність. Розглянемо клас множин $T := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): f^{-1}(B) \in E\}$, тоді $\forall a \in \mathbb{R}$, $(-\infty, a) \in T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Покажемо, що T – σ-алгебра. Нехай $M, N \in T \Rightarrow M \setminus N \in T$, оскільки $f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N) \in E$. Якщо $\{A_n, n \geq 1\} \subset T$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in T$, оскільки $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in T$, тобто T - σ-алгебра. І, оскільки, ця σ-алгебра, породжена множиною $\{(-\infty, a): a \in \mathbb{R}\}$, збігається з $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (перевірте!), то $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Лема 7.1. *Такі умови еквівалентні для* E*- вимірної функції* f:

1) $\{x: f(x) > a\} \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
2) $\{x: f(x) \geq a\} \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
3) $\{x: f(x) < a\} \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
4) $\{x: f(x) \leq a\} \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) тому, що $\{x: f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x: f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}$;

2) $\Rightarrow$ 3) тому, що $\{x: f(x) < a\} = X \setminus \{x: f(x) \geq a\}$;

3) $\Rightarrow$ 4) тому, що $\{x: f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x: f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}$;

4) $\Rightarrow$ 1) тому, що $\{x: f(x) > a\} = X \setminus \{x: f(x) \leq a\}$.

Означення 7.2. *Нехай X метричний простір і $\mathfrak{B}(X)$ – σ-алгебра борелевих множин. $\mathcal{B}(X)$- вимірна функція $f: X \to \mathbb{R}$ називається борелевою.*

Означення 7.3. *Нехай $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра вимірних за Лебегом множин з $\mathbb{R}^n$, тоді $\mathfrak{A}$-вимірна функція $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ називається вимірною за Лебегом.*

7.1. Дії над вимірними функціями

Теорема 7.2. *Сума, різниця і добуток двох E-вимірних функцій f та g вимірні. Частка двох E-вимірних функцій, за умови, що знаменник не перетворюється в нуль, також E-вимірна.*

Доведення. Очевидно, що якщо функція f є E-вимірна, то також E-вимірні є функції kf та $a + f$, де $a, k \in \mathbb{R}$. Далі,

$$\{x: f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x: f(x) > q_k\} \cap \{x: g(x) < q_k\}),$$

де об'єднання здійснюється по всіх раціональних числах. Отже, множина $\{x: f(x) > g(x)\}$ є вимірною. Звідки випливає, що множина

$$\{x: f(x) > a - g(x)\} = \{x: f(x) + g(x) > a\}$$

також E-вимірна, отже, $f + g$ E-вимірна функція. Добуток fg також E- вимірна функція, тому що $fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$. Вираз, що стоїть праворуч є E-вимірною функцією як суперпозиція вимірних функцій (див. вправу 7.1).

Вправа 7.1. *Нехай (X, E_X), $\left(Y, E_y\right)$, (Z, E_z) – вимірні простори, f – $\left(E_x, E_y\right)$-вимірна функція та g - $\left(E_y, E_z\right)$-вимірна функція. Показати, що суперпозиція $h(x) = g(f(x))$ - (E_x, E_z)-вимірною функцією.*

Далі, якщо $f(x)$ – вимірна і $f(x) \neq 0$, то і $\frac{1}{f(x)}$ вимірна, тому що, якщо $c > 0$, то $\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : f(x) > \frac{1}{c}\right\} \cup \{x : f(x) < 0\}$, якщо $c < 0$, то $\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : 0 > f(x) > \frac{1}{c}\right\}$, а при $c = 0$ $\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x : f(x) < c\}$.

Оскільки у всіх випадках справа знаходиться вимірна множина, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ (за умови, що $g(x) \neq 0$) є вимірною функцією.

Теорема 7.3. *Нехай* (X, E) *– вимірний простір,* $f_n : X \to \mathbb{R}, n \geq 1$ *– послідовність* E*- вимірних функцій. Тоді* E*- вимірними є такі функції:*

$$g_1(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x),\ \ g_2(x) = \inf_{n\geq 1} f_n(x),$$

$$g_3(x) = \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x),\ \ g_4(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x),\ x \in X.$$

Зокрема, функція $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in X,\ E$*- вимірна, якщо границя існує.*

Доведення. З урахуванням теореми 7.2 і леми 7.1, неважко переконатися в справедливості теореми 7.3, оскільки $\forall\ a \in \mathbb{R}$,

$$\{x : g_1(x) \leq a\} = \left\{x : \sup_{n\geq 1} f_n(x) \leq a\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \leq a\} \in E,$$

$$\{x : g_2(x) < a\} = \left\{x : \inf_{n\geq 1} f_n(x) < a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) < a\} \in E,$$

$$g_3(x) = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x)\ ,\ g_4(x) = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(x),\ x \in X.$$

Якщо границя існує, то $f(x) = g_3(x) = g_4(x),\ x \in X$.

Наслідок 7.1. *Якщо* f *і* g *є* E*-вимірні, то* $\max(f, g)$ *і* $\min(f, g)$ *–* E*-вимірні. Зокрема,* $f^+ = \max(f, 0),\ f^- = -\min(f, 0)$ – E *-вимірні.*

Вправа 7.2. *Довести наслідок* 7.1. *Вказівка*: Розглянути послідовність $f_1 = f, f_n = g, n \geq 2$ і застосувати теорему 7.3.

7.2. Прості функції

Нехай (X, E) – вимірний простір. E-вимірні функції будемо називати просто вимірними.

Означення 7.1. *Функція* $f: X \to \mathbb{R}$ *називається простою, якщо вона подана в вигляді*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x),$$

де $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$ *і* $A_i \in E,\ A_i \neq \emptyset,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ x_i \in R,$ $I_{A_j}(x)$ – *характеристична функція множини* A_j.

Покладемо

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty],$$

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, +\infty\} \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Означення 7.2. *Функція* $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ *називається вимірною, якщо для* $\forall\, A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),\ f^{-1}(A) \in E.$

Теорема 7.4. а) *Для будь-якої вимірної функції* $f: X \to \mathbb{R}$ (*в тому числі вимірної функції* $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$) *знайдеться послідовність простих функцій* $\{f_n\,, n \in \mathbb{N}\}$ *таких, що* $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ *і* $f_n(x) \to f(x), n \to \infty, \forall\, x \in X.$

б) *Якщо до того ж* $f(x) \geq 0$, *то* $\exists\,\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність простих функцій таких, що* $0 \leq f_n(x) \uparrow f(x),\ n \to \infty,\ \forall x \in X.$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок б): нехай $f(x) \geq 0$, покладемо

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}}(x) \;+\; n I_{\{f(x) \geq n\}}(x).$$

Неважко переконатися, що $f_n(x) \leq f_{n+1}(x),\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in X$. Покажемо, що $f_n(x) \to f(x), n \to \infty, \forall\, x \in X$. Дійсно, якщо x таке, що $f(x) = +\infty$, то

$$f_n(x) = n \to +\infty, n \to +\infty.$$

Нехай $x \in X: f(x) < +\infty$, тоді існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall\, n \geq N$ маємо $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$, тобто $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to +\infty$.

Доведемо а): розглянемо $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, де $f^+ = \max(f, 0) \geq 0$, $f^-(x) = -\min(f, 0) \geq 0$. Побудувавши послідовності $\{f_n^+(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ та $\{f_n^-(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ – простих невід'ємних функцій, таких, що $f_n^+ \uparrow f^+$ і $f_n^- \uparrow f^-$ та, взявши в якості $f_n = f_n^+ - f_n^-$, отримаємо послідовність простих функцій, що задовольняють твердженням а) теореми.

Означення 7.3. *Нехай $A \in E$ і $f, g: A \to \overline{\mathbb{R}}$. Функції f,g називають еквівалентними щодо міри μ на A, якщо*

$$B = \{x \in A: f(x) \neq g(x)\} \in E \text{ і } \mu(B) = 0.$$

Позначається: $f(x) = g(x)$ м.с. (майже скрізь) на A, або $f = g$ $(\mathrm{mod}\,\mu)$, або $f \sim g$.

Нехай (X, E, μ) – простір з мірою.

Означення 7.4. *Нехай $f, f_n: X \to \overline{\mathbb{R}},\ n \geq 1$. Кажуть, що $f_n(x)$ збігається майже всюди щодо міри μ на X до функції $f(x)$, якщо $\exists\, A \in E : \mu(A) = 0$ і $\forall\, x \in X \setminus A\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Позначається: $f_n \to f (\mathrm{mod}\,\mu)$ або $f_n \to f$ м. с. по μ на X.

Теорема 7.5. *Нехай (X, E, μ) – простір з повною мірою $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 1$ – послідовність E-вимірних функцій і $f_n \to f$ $(\mathrm{mod}\,\mu)$. Тоді f-вимірна функція.*

Доведення. Нехай $A \in E,\ \mu(A) = 0$ і $\forall x \in X \setminus A$: $f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty$. Тоді $f: X \setminus A \to \overline{\mathbb{R}}$ вимірна згідно теореми 7.3. Оскільки μ є повна міра, то $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ також вимірна.

Вправа 7.3. *Нехай $f_n \to f (\mathrm{mod}\,\mu)$ і $f_n \to g (\mathrm{mod}\,\mu)$. Довести, що*

$$f = g\ (\mathrm{mod}\,\mu).$$

Лекція 8. ***Теореми про збіжність***

Теорема 8.1 (Єгорова). *Нехай* (X, E, μ) *– простір з мірою і* $\mu(X) < +\infty$. $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ *–* E*-вимірні функції і* $f_n \to f(\mathrm{mod}\,\mu)$.

Тоді для $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, A_\varepsilon \in E : \mu(A_\varepsilon) \geq \mu(X) - \varepsilon$ *і на множині* A_ε $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *збігається до* $f(x)$ *рівномірно.*

Доведення. Згідно теореми 7.3 попередньої лекції функція $f(x)$ вимірна. Покладемо $A_n^m = \bigcap_{i \geq n} \left\{x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}$. При кожному m маємо $A_1^m \subset A_2^m \subset \cdots \subset A_n^m \subset \cdots$. Нехай $A^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^m$. З урахуванням теореми про неперервність міри для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ і $\forall\, \delta > 0$ знайдеться $n_0(m)$:

$$\mu\left(A^m \setminus A^m_{n_0(m)}\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}. \qquad (7.1)$$

Покладемо $A_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} A^m_{n_0(m)}$. Якщо $x \in A_\varepsilon$, то $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A^m_{n_0(m)}$, звідки

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \ \sup_{x \in A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A^m_{n_0(m)}} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, n \geq n_0(m).$$

Оцінимо міру множини

$$A^m \setminus A_\varepsilon = A^m \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{A^m_{n_0(m)}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(A^m \setminus A^m_{n_0(m)}\right)$$

з урахуванням σ -півадитивної міри μ і з урахуванням (7.1)

$$\mu(A^m \setminus A_\varepsilon) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(A^m \setminus A^m_{n_0(m)}\right) < \varepsilon.$$

Далі, оскільки $f_n \to f$ майже всюди по мірі μ, то $\mu(X \setminus A^m) = 0$. Дійсно, якщо $x_0 \in X \setminus A^m$, то існують як завгодно великі значення n, при яких $|f_n(x_0) - -f(x_0)| \geq \frac{1}{m}$, тобто, $f_n(x_0)$ не прямує до $f(x_0)$ при $n \to \infty$, а міра таких точок дорівнює нулю. Оскільки

$$X \setminus A_\varepsilon \subset (X \setminus A^m) \cup (A^m \setminus A_\varepsilon),$$

то

$$\mu(X \setminus A_\varepsilon) \leq \mu(X \setminus A^m) + \mu\,(A^m \setminus A_\varepsilon) = \varepsilon,$$
$$\mu(A_\varepsilon) = \mu(X \setminus (X \setminus A_\varepsilon)) = \mu(X) - \mu(X \setminus A_\varepsilon) \geq \mu(X) - \varepsilon.$$

Означення 8.1. *Нехай* $f, f_n : X \to \mathbb{R}, n \geq 1,$ *- E-вимірні функції. Послідовність* $\{f_n, n \geq 1\}$ *збігається по мірі* μ *до* f*, якщо*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Позначається $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *або* $\mu\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Теорема 8.2 (Лебега). *Якщо* $f_n \to f \ (\mathrm{mod}\, \mu), n \to \infty,$ *і* $\mu(X) < +\infty,$ *то* $f_n \xrightarrow{\mu} f, n \to \infty.$

Доведення. Для $\forall\, \varepsilon > 0$ фіксованого, розглянемо множину $A_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in E, B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in E, \forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n \supset B_{n+1}$. Нехай $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Оскільки

$$f_n \to f \ (\mathrm{mod}\, \mu), \text{ то } \mu(B) = 0. \ (\forall\, x \in B, f_n(x) \nrightarrow f(x), n \to \infty).$$

З урахуванням неперервності міри зверху,

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Теорема доведена.

<u>*Зауваження.*</u> Із збіжності $f_n \xrightarrow{\mu} f, n \to \infty$, взагалі кажучи, не випливає, що $f_n \to f \ (\mathrm{mod}\, \mu)$. Дійсно, нехай для $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$, де

$$f_n^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{k-1}{n} < x < \dfrac{k}{n}, \\ 0, & \text{для інших } x. \end{cases}$$

Занумеруємо ці функції поспіль і, спрямовуючи $n \to \infty$, отримаємо послідовність, яка збігається по мірі до $f(x) = 0$, але не збігається в жодній точці.

Теорема 8.3 (Ріс). *Нехай* $f_n \xrightarrow{\mu} f, n \to \infty,$ *тоді*

$$\exists\, \{f_{n_k}, k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_n, n \in \mathbb{N}\}, n_1 < \ldots < n_k <$$

така, що $f_{n_k} \to f \ (\mathrm{mod}\, \mu)$.

Доведення. Нехай $\{\varepsilon_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$ – послідовність чисел така, що $\lim\limits_{n\to 0} \varepsilon_n = 0$ і нехай $\{t_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$ така послідовність чисел, що $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < +\infty$. Побудуємо послідовність натуральних чисел $n_1 < n_2 < \ldots$, де n_1 таке, що

$\mu\{x : |f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_1\} < t_1, \quad n_2 > n_1 : \mu\{x : |f_{n_2}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_2\} < t_2$ і т. д. Тобто $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mu\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\} < t_k$.

Нехай $R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$, покладемо $Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$. Оскільки $R_n \supset R_{n+1}$, то $\mu(R_n) \to \mu(Q)$ і $\mu(R_n) < \sum_{k=n}^{\infty} t_k$, звідки $\mu(R_n) \to 0$, $n \to \infty$. Отже, $\mu(Q) = 0$. Нехай $x_0 \in X \setminus Q$, тоді $\exists\, n_0: x_0 \notin R_{n_0}$, звідки $\forall\, k \geq n_0$ $x_0 \notin \{x :\ |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$, тобто $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$. Оскільки $\varepsilon_k \to 0, k \to +\infty$, то $f_{n_k}(x_0) - f(x_0) \to 0,\ k \to +\infty$.

Означення 8.2. *Нехай* $f_n: X \to \mathbb{R}$, *E-вимірні функції. Послідовність* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *називається фундаментальною за мірою μ, якщо* $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0$, $\exists\, N : \forall\, n, m \geq N,\ \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta$.

Теорема 8.4 (Критерій збіжності по мірі). *Нехай* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– послідовність E-вимірних функцій на X, причому* $\mu(X) < +\infty$. Тоді $f_n \xrightarrow{\mu} f, n \to \infty$ *(де f – E-вимірна функція на X) тоді і тільки тоді, коли* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– фундаментальна по мірі μ.*

Доведення. Необхідність. Нехай $f_n \xrightarrow{\mu} f$, тоді $\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \{x : |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{x : | f(x) - f_n(x) | \geq \varepsilon/2\}$.

Звідки, з урахуванням півадитивності μ, маємо

$$\mu(\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}) + \mu(\{x: | f(x) - f_n(x) | \geq \varepsilon/2\}) \to 0, n, m \to \infty.$$

Достатність. Нехай $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна по мірі μ. Покажемо, що тоді $\exists\, \{f_{n_k}, k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ і E-вимірна функція $f: X \to \mathbb{R}$ така, що $f_{n_k} \to f \pmod{\mu}$. Дійсно, згідно з означенням 8.2, маємо $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists\, N(k) :$ $\forall\, n, m \geq N(k)$

$$\mu\left(\left\{x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Покладемо

$n_1 = N(1), n_2 = \max(N(1) + 1, N(2)), n_3 = \max(N(2) + 1, N(3))$, і т. д.

Покладемо

$$A_k = \left\{x : | f_{n_k+1}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}, B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j, B_k \supset B_{k+1}.$$

З урахуванням σ-півадитивності μ маємо

$$\mu(A_k) < \frac{1}{2^k},\ \mu(B_k) < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

В силу неперервності μ, $\mu(Q) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$, де $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Якщо $x_0 \notin Q$, то $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ x_0 \notin B_{n_0} \Rightarrow\ x_0 \in \bigcap_{j=n_0}^{\infty} \overline{A_j}\ \Rightarrow \forall\, j \geq n_0$,

$$\left| f_{n_j+1}(\,x_0) - f_{n_j}(\,x_0)\right| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Значить $\left\{f_{n_k}(\,x_0), k \in \mathbb{N}\right\}$ – фундаментальна, тобто

$$\exists\, f(x_0) : f_{n_k}(x_0) \to f\ (x_0),\ k \to \infty.$$

Покладемо для $x \in Q$, $f(x) = 0$. Отримаємо E-вимірну функцію

$$f : X \to \mathbb{R} : f_{n_k} \to f\ (\mathrm{mod}\, \mu).$$

Отже, з урахуванням теореми Лебега, $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f,\ k \to \infty$. Звідки $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \delta > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq m$,

$$\mu\left(\left\{x : |f_{n_k}(x) - f\ (x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\delta}{2}.$$

В силу фундаментальності $\{f_n\ , n \in \mathbb{N}\}$, $\exists\, N : \forall j, k \geq N$,

$$\mu\left(\left\{x : |f_j\ (x) - f_k(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\delta}{2}.$$

Тоді $\forall\, k, n \geq \max(N(m), m)$ маємо

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\})$$
$$\leq \mu\left(\left\{x : \left|f_{n_k}(x) - f\ (x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x : \left|f_n(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \delta,$$

де $k > m$.

Зауваження. *Слід відзначитити, що теорема 8.4 справедлива і у випадку* $\mu(X) = +\infty$, *який ми не розглядаємо.*

Лекція 9. ***Інтеграл Лебега та його основні властивості***

Нехай $(X, E, \mu) -$ простір з мірою.

Означення 9.1. *Нехай* $f\ (x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$, $A_i \in E$, $i = 1, \dots, n$, $x_i \neq x_j$ *і* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *якщо* $i \neq j$, $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, *(тобто* f *проста вимірна функція). Інтегралом Лебега від простої функції* f *по множині* $A \in E$ *називається величина*

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i \cap A).$$

Зауваження. *Якщо* $x_i = 0$*, а* $\mu(A_i \cap A) = +\infty$*, то покладемо*

$$x_i \mu(A_i \cap A) = 0.$$

9.1. ***Властивості інтеграла від простих функцій:***

1. Інтеграл Лебега від суми простих функцій дорівнює сумі інтегралів від доданків:

$$\int_A \big(f(x) + g(x)\big) d\mu(x) = \int_A f(x) d\mu(x) + \int_A g(x) d\mu(x).$$

Доведення. Нехай $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$ і $g(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{B_j}(x)$, $A_i, B_j \in E$. Тоді функція $f(x) + g(x)$ є простою і набуває значення $x_i + y_j$ на множинах $A_i \cap B_j$, тобто

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \big(x_i + y_j\big) I_{A_i \cap B_j}(x).$$

Маємо

$$\int_A \big(f(x)+g(x)\big)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(x_i+y_j\big)\mu\big(A_i\cap B_j\cap A\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\mu\big(A_i\cap B_j\cap A\big) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j\mu\big(A_i\cap B_j\cap A\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_i\cap A) + \sum_{j=1}^{m} y_j\mu\big(B_j\cap A\big) = \int_A f(x)d\mu(x) + \int_A g(x)d\mu(x).$$

2. Для константи $k \in \mathbb{R}$ і простої функції $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$ має місце рівність

$$\int_A kf(x)d\mu(x) = k\int_A f(x)d\mu(x)$$

Доведення. Якщо $k = 0$, то рівність очевидна. Розглянемо випадок $k \neq 0$. Тоді $kf(x) = \sum_{i=1}^{n} kx_i I_{A_i}(x)$ є простою і легко бачити, що

$$\int_A kf(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} kx_i\mu(A_i\cap A) = k\sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_i\cap A) = k\int_A f(x)d\mu(x).$$

3. Якщо $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$ і $f(x)$ обмежена на X, тобто, існує M таке, що $|f(x)| \leq M$ для всіх $x \in A$.

$$\left|\int_A f(x)d\mu(x)\right| \leq M\mu(A).$$

Доведення.

$$\left|\int_A f(x)d\mu(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_i\cap A)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\mu(A_i\cap A) \leq \sum_{i=1}^{n} M\mu(A_i\cap A)$$

$$= M\mu(A).$$

4. Якщо прості функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in X$, то $\forall\, A \in E$

$$\int_A f(x)d\mu(x) \le \int_A g(x)d\mu(x).$$

Доведення. Нехай

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x) \text{ та } g(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{B_j}(x).$$

Тоді із $f(x) \le g(x)$ випливає, що $x_i \le y_j$ на множинах $A_i \cap B_j$, звідки

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \mu\big(A_i \cap B_j \cap A\big)$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j \mu\big(A_i \cap B_j \cap A\big) = \sum_{j=1}^{m} y_j \mu\big(B_j \cap A\big) = \int_A g(x)d\mu(x).$$

Означення 9.2. *Інтегралом Лебега від невід'ємної вимірної функції* $f(x)$ *називається величина*

$$\int_A f d\mu = \int_A f(x)d\mu(x) = \sup_{P(f)} \int_A p(x)d\mu(x),$$

де супремум береться по класу $P(f)$ *– всіх невід'ємних простих функцій* p*, які задовольняють нерівність*

$$0 \le p(x) \le f(x), \quad x \in A.$$

Переконаємось, що це означення узгоджується з означенням 9.1. Будемо позначати інтеграл з означення 9.2 через $\sup\limits_{P(f)} \int_A p(x)d\mu(x)$.

Тоді, якщо $f \ge 0$ проста, то $\int_A f d\mu \le \sup\limits_{P(f)} \int_A f(x)d\mu(x)$, оскільки у цьому випадку $f \in P(f)$. З іншого боку $\int_A f(x)d\mu(x) \ge \int_A p(x)d\mu(x)$ для будь-якої $p \in P(f)$, звідки $\sup\limits_{P(f)} \int_A p(x)d\mu(x) \le \int_A f(x)d\mu(x)$, тобто

$$\int_A f d\mu = \sup_{P(f)} \int_A p(x)d\mu(x).$$

Отже, означення 9.1 та 9.2 узгоджені.

Для множини $A \in E$ і функції $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ покладемо $f_+(x) = \max(f(x),0)$, $f_-(x) = -\min(f\ (x), 0),\ x \in A$. Очевидно, що $f_+, f_- \geq 0$ на A і $f(x) = f_+(x) -$ $-f_-(x)$.

Означення 9.3. *Нехай $A \in E$ і $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ є вимірною розширеною функцією. Якщо хоча б один з інтегралів $\int_A f_+ d\mu(x)$, $\int_A f_- d\mu(x)$ скінченний, то величина $\int_A f\ d\mu = \int_A f\ (x) d\mu(x) = \int_A f_+\ d\mu - \int_A f_- d\mu$ називається інтегралом Лебега від функції f по множині A.*

Якщо інтеграли $\int_A f_+\ d\mu$ і $\int_A f_- d\mu$ скінченні, то f називається інтегрованою по Лебегу по множині A. Позначають $f \in L(A, d\mu)$.

9.2. *Найпростіші властивості інтеграла Лебега*

1. *Якщо $A \in E, \mu(A) = 0$ і f – E- вимірна, то*

$$\int_A f d\mu = 0.$$

Доведення. Для будь-якої простої функції $p(x)$ на A маємо $\int_A p d\mu = 0$.

2. *Нехай $A \in E, \mu(A) < +\infty$ і $f\ (x) = c$ – постійна на A функція, тоді*

$$\int_A c d\mu\ = c\mu(A).$$

Доведення випливає з означення інтеграла.

3. *Нехай $f, g: A \to \overline{\mathbb{R}}$ і $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in A$, f і g – E-вимірні. Якщо $g \in\ L(A, d\mu)$, тоді $f \in L(A, d\mu)$ і*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

Доведення. Ця властивість випливає безпосередньо з означення 9.2.

4. *Нехай $f \in L(B, d\mu)$, $f(x) \geq 0$, $x \in B$, $A \subset B$, $A \in E$. Тоді*

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

Доведення. Нерівність випливає із того, що $f(x)I_A(x) \leq f(x)$, $\forall\, x \in B$ і властивості 3.

5. *Нехай* $A \in E$, $A \neq \emptyset$ *і* $\mu(A) < +\infty$, *функція* $f: A \to \mathbb{R}$ *вимірна і обмежена на* A. *Тоді* $f \in L(A, d\mu)$ *і*

$$\mu(A) \inf_A f \leq \int_A f d\mu \leq \mu(A) \sup_A f.$$

Доведення. Припустимо, що $f(x) \geq 0, x \in A$. Тоді $m \leq f(x) \leq M, x \in A$, де $m = \inf_A f$, $M = \sup_A f$. Згідно 2 і 3 $f \in L(A, d\mu)$ і

$$\int_A m d\mu \leq \int_A f d\mu \leq \int_A M d\mu.$$

Звідки випливає властивість 4.

У разі коли f приймає як від'ємні так і додатні значення, тоді

$$\forall\, x \in A, f_-(x) \leq C \text{ і } f_+(x) \leq C,$$

де $C = \sup_A |f|$, і згідно 2 і 3, $f_-, f_+ \in L(A, d\mu)$.

Крім того, оскільки

$$0 \leq \int_A f_+ d\mu \leq M\mu(A), \qquad 0 \leq \int_A f_- d\mu \leq (-m)\mu(A),$$

то

$$-\int_A f_- d\mu \leq \int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu \leq \int_A f_+ d\mu.$$

І, отже

$$m\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq M\mu(A).$$

Випадок, коли $f(x) \leq 0$, $x \in A$ зводиться до випадку $f(x) \geq 0$, тому що $f_- = -f$ та $\int_A f d\mu = -\int_A f_- d\mu$.

6. Нехай $f, g \in L(A, d\mu)$ і $f(x) \leq g(x)$, $x \in A$. Тоді

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

Доведення. Оскільки $0 \le f_+(x) \le g_+(x)$, $0 \le g_-(x) \le f_-(x)$, $x \in A$, то згідно 3, маємо $\int_A f_+ d\mu \le \int_A g_+ d\mu$, $\int_A g_- d\mu \le \int_A f_- d\mu$, звідки

$$\int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu \le \int_A g_+ d\mu - \int_A g_- d\mu.$$

9.3. ***Зліченна адитивність інтеграла Лебега***

Теорема 9.1. *Нехай $f \in L(X, d\mu)$. Тоді функція $\mu(B) = \int_B f d\mu$, $B \in E$ є зарядом, тобто, σ-адитивна.*

Доведення. Нехай $f(x)$-проста невід'ємна функція, тобто

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x),$$

а $\{B_m, m \in \mathbb{N}\} \subset E$; $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ при $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \ne j$.

Тоді

$$\int_B f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mu(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (A_i \cap B_m)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_m)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mu(A_i \cap B_m)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} f d\mu.$$

Нехай $f(x) \ge 0$ і $\{p_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ - послідовність невід'ємних простих функцій: $p_n(x) \uparrow f(x), x \in A$. Тоді

$$\int_B p_n(x) d\mu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} p_n(x) d\mu(x) \le \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} f(x) d\mu(x).$$

Звідки, переходячи до границі при $n \to \infty$, маємо

$$\int_B f(x) d\mu(x) \le \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} f(x) d\mu(x). \qquad (9.1)$$

З іншого боку, з урахуванням властивості 4

$$\int\limits_B f(x)d\mu(x) \geq \int\limits_B p_n(x)d\mu(x) \geq \int\limits_{\bigcup_{m=1}^{l} B_m} p_n(x)d\mu(x) = \sum_{m=1}^{l} \int\limits_{B_m} p_n(x)d\mu(x).$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, маємо

$$\int\limits_B f(x)d\mu(x) \geq \sum_{m=1}^{l} \int\limits_{B_m} f(x)d\mu(x).$$

Далі, прямуючи $l \to \infty$, маємо

$$\int\limits_B f(x)d\mu(x) \geq \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f(x)d\mu(x). \tag{9.2}$$

Із (9.1), (9.2) випливає твердження теореми.

Для загального випадку, представивши $f(x) = f_+(x) - f_-(x), x \in B$, маємо

$$\int\limits_B f_+ d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f_+ d\mu < +\infty, \int\limits_B f_- d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f_- d\mu < +\infty,$$

$$\int\limits_B f d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f_+ d\mu - \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f_- d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} (f_+ - f_-) d\mu.$$

Наслідок 9.1. *Нехай* $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in L(X, d\mu)$. *Тоді* $\forall\, A, B \in E:\ A \cap B = \emptyset$ *має місце рівність*

$$\int\limits_{A \cup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu.$$

Доведення випливає із теореми 9.1 з урахуванням того, що

$$\int\limits_{\emptyset} f d\mu = 0.$$

Лекція 10. ***Деякі додаткові властивості інтеграла.***

Лема 10.1. *Нехай* $A, B \in E$, $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in L(X, d\mu)$ *і* $\mu(B) = 0$, *тоді*

$$\int_A f d\mu = \int_{A \setminus B} f d\mu$$

Доведення випливає з наслідку 9.1 і властивості 1.

Лема 10.2. *Нехай* $f \in L(A, d\mu)$ *і* $g = f(\mathrm{mod}\mu)$ *на* A. *Тоді* $g \in L(A, d\mu)$ *і* $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$.

Доведення випливає із Леми 10.1.

Лема 10.3. *Нехай* $f \in L(A, d\mu)$ *і* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$ – *монотонна послідовність, така що* $A_n \to A$ *при* $n \to \infty$. *Тоді*

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Лема 10.4. *Нехай* $A \in E$, $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ – *вимірна функція. Тоді*

$$f \in L(A, d\mu) \Leftrightarrow |f| \in L(A, d\mu).$$

Доведення. Оскільки $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$ і те, що $f \in L(A, d\mu) \Leftrightarrow \int_A f_\pm \, d\mu < +\infty$, то необхідність очевидна.

Достатність. Нехай $|f| \in L(A, d\mu)$. Оскільки $0 \le f_+ \le |f|$ і $0 \le f_- \le |f|$, то, з врахуванням властивості 3, лекції 9 $\int_A f_\pm \, d\mu < +\infty \Rightarrow f \in L(A, d\mu)$.

Лема 10.5. *Нехай* $f \in L(A, d\mu)$, $g: A \to \overline{\mathbb{R}}$ – *вимірна і для* $\forall\, x \in A$, $|g(x)| \le |f(x)|$, *тоді* $g \in L(A, d\mu)$.

Доведення випливає із властивості 3 (лекції 9) и леми 10.4.

Лема 10.6. *Нехай* p, $p_n: X \to \mathbb{R}$ *прості невід'ємні функції для яких виконуються умови:*

1. $0 \le p_n(x) \le p_{n+1}(x)$ *для всіх* $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$;
2. $\lim\limits_{n \to \infty} p_n(x) \ge p(x)$ *для всіх* $x \in A$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\int_A p_n d\mu \geq \int_A p d\mu.$$

Доведення. Нехай $p(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$, $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j$. Для фіксованого $t\in(0,1)$ розглянемо множину

$$B_n = \{x\in A: p_n(x)\geq tp(x)\}.$$

Звідки

$$\int_A p_n d\mu \geq \int_{B_n} p_n d\mu \geq t\int_{B_n} p d\mu \geq t\sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_i\cap B_n).$$

Враховуючи те, що $\{B_n\}$ монотонно неспадна і $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$, та неперервність міри, маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_i\cap B_n)=\mu(A_i\cap A)$. Звідки

$$\lim_{n\to\infty}\int_A p_n d\mu \geq t\sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_i\cap A) = t\int_A p d\mu.$$

Спрямувавши $t\to 1$, отримаємо твердження теореми.

Теорема 10.1 (Про монотонну збіжність). *Нехай $f_1, f_2, \ldots$ – E-вимірні функції на $A\in E$. Якщо $\forall\, n\in\mathbb{N}, \forall\, x\in A$, $0\leq f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то*

$$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu\,, n\to\infty. \quad (10.1)$$

Доведення. Якщо для деякого $m\in N$, $\int_A f_m d\mu = +\infty$, то $\forall\, n\geq m$, $\int_A f_n d\mu = +\infty$ (властивість 3 інтегралу, лекція 9), $\int_A f d\mu = +\infty$ і твердження теореми справедливе. Якщо ж для $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\int_A f_n d\mu < +\infty$, то, оскільки $\left\{\int_A f_n d\mu\,, n\in\mathbb{N}\right\}$ – неспадна послідовність, маємо $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = C\leq +\infty$. Якщо $C=+\infty$, то (10.1) виконується, оскільки в цьому випадку $\int_A f d\mu = +\infty$.

Нехай $C<+\infty$. Розглянемо невід'ємну просту функцію $p(x)$ таку, що $0\leq p(x)\leq f(x)$, $x\in A$. Нехай $t\in(0,1)$, для $n\geq 1$ розглянемо множину

$$A_n = \{x\in A: f_n(x)\geq tp(x)\}.$$

Очевидно $A_n \subset A_{n+1}, n \geq 1$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. В силу леми 10.1 і властивості 3 (див. лекція 9), маємо:

$$\int_A f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq t \int_{A_n} p d\mu, n \geq 1,$$

тому

$$\int_A f_n d\mu \geq t \int_{A_n} p d\mu, n \geq 1.$$

Нехай

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{B_i}(x), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,$$

тоді

$$\int_{A_n} p d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i \cap A_n).$$

Тому, з урахуванням неперервності міри

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} p d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i \cap A) = \int\limits_{A} p d\mu.$$

З врахуванням означення C, маємо $t\int_A p d\mu \leq C$. Значить, врахувавши означення інтеграла Лебега $t\int_A f d\mu \leq C$, звідки, спрямовуючи $t \to 1$, отримаємо

$$\int\limits_A f d\mu \leq C. \tag{10.2}$$

З іншого боку, оскільки $\int_A f_n d\mu \leq \int_A f d\mu$, то

$$\int\limits_A f d\mu \geq C. \tag{10.3}$$

Із (10.2) і (10.3) випливає твердження теореми.

Теорема 10.2. *Нехай* $f, g \in L(A, d\mu)$. *Тоді* $f + g \in L(A, d\mu)$ *і*

$$\int\limits_A (f+g) d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_A g d\mu.$$

Доведення. Доведемо теорему для $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, x \in A$.

У цьому випадку існують монотонно неспадні послідовності

$$\{p_n(x), n \in \mathbb{N}\}, \{q_n(x), n \in \mathbb{N}\}$$

простих, невід'ємних вимірних функцій таких, що

$$p_n(x) \to f(x), q_n(x) \to g(x), n \to \infty, x \in A.$$

Але для простих функцій безпосередньо перевіряється, що

$$\int_A (p_n + q_n) d\mu = \int_A p_n d\mu + \int_A q_n d\mu,$$

звідки, переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо доведення теореми для невід'ємних на A функцій f і g.

Нехай тепер $f(x) \geq 0$, $g(x) \leq 0$, $x \in A$. Введемо множини

$$A_- = \{x \in A : f(x) + g(x) < 0\}, A_+ = \{x : f(x) + g(x) \geq 0\}$$

Оскільки на A_- $f \geq 0$ і $-(f+g) > 0$, то із доведеного вище випливає

$$\int_{A_-} \Big(f + \big(-(f+g)\big)\Big) d\mu = \int_{A_-} f d\mu + \int_{A_-} \big(-(f+g)\big) d\mu.$$

Аналогічно

$$\int_{A_+} \big(f + g + (-g)\big) d\mu = \int_{A_+} (f+g) d\mu + \int_{A_+} (-g) d\mu,$$

звідки випливає, що $(f+g) \in L(A, d\mu)$ і $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$

У загальному випадку для доведення використовується подання

$$A = \{x \in A: f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\} \cup \{x \in A: f(x) < 0, g(x) \geq 0\}$$
$$\cup \{x \in A: f(x) \geq 0, g(x) < 0\} \cup \{x \in A: f(x) < 0, g(x) < 0\}.$$

Доведення теореми на кожній із множин об'єднання здійснюється аналогічно наведеним вище. Враховуючи те, що ці множини не перетинаються та наслідок 9.1, отримуємо доведення теореми на всій множині A.

Означення 10.1. *Кажуть, що послідовність функцій* $\{f_n, n \geq 1\}$ *має <u>одностайно абсолютно неперервні</u> інтеграли, якщо всі функції послідовності інтегровані і* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *таке, що із умови* $A \in E$ *і* $\mu(A) < \delta$ *випливає, що* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\int_A |f_n| d\mu < \varepsilon. \tag{10.4}$$

Зауваження 10.1. *Якщо існує інтегрована на X функція* g *така, що для всіх* $n \geq 1$ *майже всюди* $|f_n| \leq g$, *то, з урахуванням леми* 10.5, *умова* (10.4) *для* $\{f_n, n \geq 1\}$ *виконується, оскільки* $\int_A |f_n| d\mu \leq \int_A g d\mu$ *для всіх* $n \geq 1$.

Вправа 10.1. *Знайти границю* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}}\frac{1}{1+x^2}d\mu$, *де* μ – *міра Лебега на* $\mathbb{R}$.

Вправа 10.2. *Обчислити* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 \sqrt[n]{x}d\mu_F$, *де* μ_F – *міра Лебега-Стилтьєса на* $[0,2]$, *а*

$$F(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1],\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$

Лекція 11. *Іменні теореми про граничний перехід під знаком інтеграла*

Теорема 11.1 (Б. Леві). *Нехай* $A\in E$ *і функції* $f_n\in L(A,d\mu)$ *задовольняють умови*:

1. $\forall\, n\ge 1, \forall x\in A$: $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$;
2. $\sup\limits_{n\ge1}\int_A f_n d\mu<+\infty$;
3. $f(x)\overset{def}{=}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, $x\in A$.

Тоді $f\in L(A,d\mu)$ *і*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu=\int_A f d\mu.$$

Доведення. Функції $g_n(x)=f_n(x)-f_1(x)$ та $g(x)=f(x)-f_1(x)$ такі, що $g_n\ge 0$, $g_n\uparrow g$ на A, тобто, задовольняють умови теореми 10.1. Звідки

$$\lim_{n\to\infty}\int_A g_n\,d\mu=\int_A g d\mu=\int_A (f-f_1)d\mu. \tag{11.1}$$

Умова 3 забезпечує існування границі $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$ (як неспадної і обмеженої зверху). З іншого боку, оскільки $f_1\in L(A,d\mu)$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\int_A g_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu-\int_A f_1\,d\mu. \tag{11.2}$$

Додаючи до обох частин (11.1) $\int_A f_1 d\mu$ (з урахуванням (11.2)), отримаємо твердження теореми.

Наслідок 11.1. *Теорема справедлива, якщо замінити умови 2 і 3 відповідно на умови*

2\`. $f_n \geq f_{n+1}$.

3\`. $\inf\limits_n \int_A f_n d\mu > -\infty$.

Теорема 11.2 (Фату). *Нехай* $A \in E$, $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– послідовність* E*-вимірних і невід'ємних функцій. Тоді*

$$\int\limits_A \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Оскільки $g_n(x) \leq f_n(x)$, $x \in A$, $n \geq 1$, то $\int_A g_n\, d\mu \leq \int_A f_n d\mu$. Функції $g_n(x) \overset{def}{:=} \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$, $x \in A$, задовольняють умови теореми 10.1. Крім цього, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in A$,

В силу теореми 10.1, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = \int_A \left(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$, звідки випливає твердження теореми.

Наслідок 11.2. *Нехай* $A \in E$ *і* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– послідовність* E*-вимірних і невід'ємних на* A *функцій таких, що*

1. $f_n \to f$ $(\mathrm{mod}\, \mu)$ на A;
2. $\sup\limits_n \int_A f_n d\mu < +\infty$.

Тоді $f \in L(A, d\mu)$.

Доведення. В силу теореми Фату і леми 10.2, маємо

$$\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int\limits_A \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu \leq \sup_n \int\limits_A f_n d\mu < +\infty.$$

Теорема 11.3 (Віталі). *Нехай* $\{f_n, n \geq 1\}$ *– послідовність інтегрованих функцій, які збігаються до функції* f *майже всюди по мірі* μ *на* X. *Якщо*

$$\mu(X) < +\infty \text{ і } \{f_n, n \geq 1\}$$

має одностайно абсолютно неперервні інтеграли, то $f \in L(A, d\mu)$ *і*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і нехай при деякому $\delta > 0$ виконується (10.4). Із теореми 8.2 випливає, що $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Отже, для множин

$$A_n = \{x \in X : |f_n - f| > \varepsilon\}$$

знайдеться $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\mu(A_n) < \delta$ для всіх $n > m$. За умовою (10.4), при $n > m$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ $\int_{A_n} |f_k| d\mu < \varepsilon$. За теоремою Фату $\int_{A_n} |f| d\mu < \varepsilon$. Отже, для всіх $n > m$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_{X\setminus A_n} |f_n - f| d\mu + \int_{A_n} |f_n - f| d\mu$$

$$\leq \int_{X\setminus A_n} \varepsilon d\mu + \int_{A_n} |f_n| d\mu + \int_{A_n} |f| d\mu \leq \varepsilon\mu(X) + 2\varepsilon = (\mu(X) + 2)\varepsilon\,.$$

Оскільки $\mu(X) < +\infty$, то звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Теорема 11.4 (Лебега про мажоровану збіжність). *Нехай* (X, E, μ) – *простір з повною мірою* μ, $A \in E$ *і вимірні розширені функції* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 1$, *задовольняють умови:*

1. $f_n \to f \ (\mathrm{mod}\, \mu)$ *на* A;
2. $\exists\, g \in L(A, d\mu)$: $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, x \in A$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Тоді f, $f_n \in L(A, d\mu)$, $n \geq 1$ *і мають місце*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A |f - f_n| d\mu = 0$$

та

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Доведення. Функція f вимірна як границя E-вимірних функцій (з урахуванням повноти міри). Здійснивши граничний перехід у 2, одержимо $|f(x)| \leq g(x)$. Звідки, з урахуванням властивостей 3 та 6 інтеграла Лебега та леми 10.3, маємо $\{f, f_n, n \geq 1\} \in L(A, d\mu)$.

Легко бачити, що $2g - |f - f_n| \geq 0$. Застосувавши теорему Фату, одержимо

$$\int_A 2g d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} \inf(2g - |f - f_n|) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_A (2g - |f - f_n|) d\mu$$

$$= \int_A 2g d\mu + \lim_{n\to\infty} \inf \int_A (-|f - f_n|) d\mu$$

$$= \int_A 2g d\mu - \lim_{n\to\infty} \sup \int_A |f - f_n| d\mu$$

Тут ми скористались рівністю

$$\lim_{n\to\infty} \inf(-c_n) = -\lim_{n\to\infty} \sup(c_n). \qquad (11.3)$$

Далі, оскільки $g \in L(A, d\mu)$, то $\lim_{n\to\infty} \sup \int_A |f - f_n| d\mu = 0$, а отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f - f_n| d\mu = 0.$$

До послідовностей $\{g + f_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{g - f_n, n \in \mathbb{N}\}$ застосуємо теорему Фату. З урахуванням леми 10.1, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_A (g + f_n) d\mu \geq \int_A (g + f) d\mu$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_A (g - f_n) d\mu \geq \int_A (g - f) d\mu.$$

Звідки

$$\int_A g d\mu + \lim_{n\to\infty} \inf \int_A f_n d\mu \geq \int_A g d\mu + \int_A \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu = \int_A g d\mu + \int_A f d\mu$$

і, з урахуванням (11.3)

$$\int_A g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A g d\mu + \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_A f_n d\mu\right)$$

$$= \int_A g d\mu + \liminf_{n\to\infty}\int_A (-f_n) d\mu \geq \int_A g d\mu + \int_A \liminf_{n\to\infty}(-f_n)\, d\mu$$

$$= \int_A g d\mu - \int_A f d\mu.$$

Отже,

$$\int_A f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_A f d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

Лекція 12. ***Альтернативні означення інтеграла Лебега. Порівняння інтегралів Рімана та Лебега***

12.1. ***Альтернативні означення інтеграла Лебега***

Розглянемо інші означення інтеграла Лебега, які зустрічаються у літературі з теорії міри.

Означення 12.1. *Нехай (X, E, μ) простір з мірою, $A \in E$ і $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ – вимірна і невід'ємна на A розширена функція, а $\{p_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ послідовність простих невід'ємних функцій, таких що $p_n(x) \uparrow f\ (x)$, $n \to \infty$, $\forall\ x \in A$.*

Інтегралом Лебега від $f(x)$ по множині A називається величина

$$\int_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A p_n d\mu\,.$$

Еквівалентність означень 9.2 та 12.1 випливає із теореми 10.1. Як і в означенні 9.3, у загальному випадку

$$\int_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu$$

Для множини скінченної міри $\mu(A) < \infty$ існує ще одне еквівалентне означення інтеграла Лебега [5]:

Означення 12.2. *Вимірна функція f називається інтегрованою на множині A, $\mu(A) < \infty$, якщо існує послідовність простих інтегрованих на A функцій $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$, що рівномірно збігаються до f і тоді*

$$\int_A f d\mu \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A p_n d\mu.$$

Для того, щоб означення 12.2 було коректним, потрібно виконання умов:

1. Границя $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A\ p_n d\mu$ існує для будь-якої послідовності простих функцій $\{p_n\}$, які рівномірно збігаються до f на A.
2. При заданій f ця границя не залежить від вибору $\{p_n\}$.
3. При $\mu(A) < \infty$ означення 12.2 еквівалентне означенню 9.1.

Для доведення 1 досить скористатися властивостями 1-3 інтегралу від простих функцій

$$\left|\int_A p_n d\mu - \int_A p_m d\mu\right| \le \mu(A) \max_{x\in A}|p_n(x) - p_m(x)|.$$

Для доведення 2 припустимо, що для послідовностей простих функцій $\{p_n\}$ і $\{q_n\}$, які збігаються рівномір до f на A $\lim_{n\to\infty}\int_A p_n d\mu \neq \lim_{n\to\infty}\int_A q_n d\mu$. Розглянемо послідовність $\{s_n\}$ таку, що $s_{2k-1} = p_{2k-1}$, $s_{2k} = q_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що ця послідовність рівномірно збігається до f на A і при цьому $\lim_{n\to\infty}\int_A s_n d\mu$ не має границі, що суперечить 1.

Для виконання умови 3 досить розглянути послідовність $p_n = f, n \in \mathbb{N}$.

Для означення інтегралу по множині нескінченної міри розглядається простір (X, E, μ) з σ-скінченною мірою (див. лекція 3).

Монотонно неспадна послідовність множин $\{A_n\}$, $A_n \in E$, називається <u>*вичерпною*</u>, якщо X зобразити у вигляді зліченного об'єднання множин скінченної міри:

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,, \quad \mu(A_n) < \infty.$$

Означення 12.3. *Вимірна функція f називається інтегрованою на множині A* з *σ-скінченною мірою μ, якщо f інтегрована на кожній вимірній підмножині A і для кожної вичерпної послідовності $\{A_n\}$ границя*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f d\mu$$

існує і не залежить від послідовності $\{A_n\}$.

У цьому випадку величину $\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f d\mu$ будемо називати *невласним інтегралом* функції f по множині A.

12.2. *Порівняння інтегралів Рімана та Лебега*

Встановимо зв'язок між інтегралами Рімана та Лебега на відрізку.

Теорема 12.1. *Нехай функція* f *інтегрована за Ріманом на відрізку* $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Тоді f *інтегрована за Лебегом на* $[a,b]$ *і*

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = I.$$

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ на 2^n частин точками:

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a), \quad k = 0,1,\dots,2^n.$$

Позначимо

$$m_{nk} = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),\ M_{nk} = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Розглянемо верхню і нижню суми Дарбу:

$$\underline{I}_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk}, \qquad \bar{I}_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}.$$

За визначенням інтеграла Рімана

$$I = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{I}_n.$$

Розглянемо прості функції

$$\underline{p}_n(x) = m_{nk}, \qquad x \in [x_{k-1}, x_k[,$$

$$\bar{p}_n(x) = M_{nk}, \qquad x \in [x_{k-1}, x_k[.$$

Покладемо $\underline{p}_n(b) = \bar{p}_n(b) = 0$.

Оскільки послідовність $\left\{\underline{p}_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ є монотонно неспадною, а послідовність $\{\bar{p}_n, n \in \mathbb{N}\}$ – монотонно незростаючою, то майже всюди на $[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{p}_n(x) = \underline{f}(x) \le f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{p}_n(x) = \bar{f}(x) \ge f(x).$$

За теоремою Б. Леві та наслідком 11.1

$$\int\limits_{[a,b]} \underline{f}(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = I = \lim_{n\to\infty} \bar{I}_n = \int\limits_{[a,b]} \bar{f}(x)\, d\mu.$$

Звідки

$$\int\limits_{[a,b]} \left|\bar{f}(x) - \underline{f}(x)\right| d\mu = 0.$$

Тобто $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$ майже всюди і значить $\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$ майже всюди і

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\, d\mu = I.$$

Лекція 13. *Критерій інтегрованості Лебега. Інтеграл Лебега-Стилтьєса*

Розглянемо функцію $f\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$. Для $x_0 \in (a,b)$ і $\delta > 0$ позначимо

$$m_\delta(x_0) = \min_{|x-x_0|<\delta} f(x),\ M_\delta(x_0) = \max_{|x-x_0|<\delta} f(x).$$

Легко бачити, що при спаданні δ функція $m_\delta(x_0)$ не спадна, а функція $M_\delta(x_0)$ не зростаюча, тому існують границі

$$\lim_{\delta\downarrow 0} m_\delta(x_0) = m(x_0), \qquad \lim_{\delta\downarrow 0} M_\delta(x_0) = M(x_0).$$

Очевидно, що $m_\delta(x_0) \le m(x_0) \le f(x_0) \le M(x_0) \le M_\delta(x_0)$.

Теорема 13.1 (Р. Бер). *Якщо* $|f(x_0)| < \infty$, *то* f *неперервна в* x_0 *тоді і тільки тоді, коли*

$$m(x_0) = M(x_0).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ неперервна в x_0. Тоді $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всіх $|x - x_0| < \delta$, тобто для $|x - x_0| < \delta$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Звідки

$$f(x_0)-\varepsilon \le m(x_0) \le M(x_0) \le f(x_0)+\varepsilon,$$

Отже, з урахуванням довільності $\varepsilon > 0$, маємо

$$m(x_0) = M(x_0).$$

Навпаки, припустимо, що $m(x_0) = M(x_0)$. Очевидно, що у цьому випадку $m(x_0) = M(x_0) = f(x_0)$. Для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що

$$m(x_0)-\varepsilon < m_\delta(x_0) \le m(x_0), \quad M(x_0) \le M_\delta(x_0) < M(x_0)+\varepsilon.$$

Звідки маємо

$$f(x_0)-\varepsilon < m_\delta(x_0), \; M_\delta(x_0) < f(x_0)+\varepsilon.$$

Тобто, якщо $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, то $m_\delta(x_0) < f(x) < M_\delta(x_0)$, так що $f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0.

13.1. *Критерій Лебега інтегрованості функції за Ріманом*

Теорема 13.2 (Критерій Лебега для інтеграла Рімана). *Для обмеженої функції* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *такі твердження є еквівалентними*:

1) f *інтегрована за Ріманом на* $[a,b]$*;*

2) f *неперервна майже всюди відносно міри Лебега на* $[a,b]$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай f інтегрована за Ріманом на $[a,b]$. При доведенні теореми 11.1 було показано, що $m(x) = \bar{f}(x) = \underline{f}(x) = M(x)$ майже всюди на $[a,b]$, а отже, за теоремою 11.2 f неперервна майже всюди відносно міри Лебега на $[a,b]$.

3) $\Rightarrow$ 1). Якщо f неперервна майже всюди відносно міри Лебега на $[a,b]$, то $m(x) = M(x)$ майже всюди. Позначимо, через

$$B = \{x \in [a,b] : m(x) \neq M(x)\}.$$

Тоді

$$\int\limits_{[a,b]\setminus B} m(x)\, d\mu = \int\limits_{[a,b]\setminus B} M(x)\, d\mu.$$

Із леми 10.1 випливає $\int_{[a,b]} m(x)\,d\mu = \int_{[a,b]} M(x)\,d\mu$. Звідки

$$\lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = \int\limits_{[a,b]} m(x)\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} M(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \bar{I}_n.$$

Отже, існує інтеграл Рімана

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} m(x)\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} M(x)\,d\mu.$$

13.2. *Інтеграл Лебега-Стильтьєса*

Нехай $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, неперервна справа функція, а $\mathfrak{A}_F$ – σ-алгебра із означення 6.2 міри Лебега-Стилтьєса μ_F. Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – $\mathfrak{A}_F$-вимірна функція.

Означення 13.1. *Інтегралом Лебега-Стилтьєса називається такий інтеграл Лебега* $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_F$.

Із математичного аналізу відомий інтеграл Рімана-Стилтьєса від обмеженої на відрізку $[a,b]$ функції f відносно неспадної функції $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, який позначається $\int_a^b f d\alpha$ і за умови існування визначається так

$$\int\limits_a^b f d\alpha = \lim_{\max|x_{k+1}-x_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)\big),$$

де $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$.

Теорема 13.3. *Нехай* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *неперервна, а* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *– монотонно неспадна, неперервна справа функція. Тоді*

$$\int\limits_{[a,b]} f d\mu_F = \int\limits_a^b f dF,$$

де μ_F *– міра із означення 6.2.*

Доведення. Для розбиття $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ введемо функцію

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) I_{(x_k, x_{k+1}]}(x).$$

Оскільки f неперервна, то для будь-якого $x \in [a,b]$, $f_n(x) \to f(x)$, якщо $n \to \infty$ так, що $\max|x_{k+1} - x_k| \to 0$. Крім цього, із неперервності f випливає існування $M = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$, і, отже, $|f_n(x)| \leq M$ для всіх $x \in [a,b]$.

Звідки за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, маємо

$$\int_{[a,b]} f d\mu_F = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n d\mu_F = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big) = \int_a^b f dF.$$

Лекція 14. ***Заміна змінних. Розклад Гана і Жордана. Теорема Радона-Нікодима***

Розглянемо простір з мірою (X, E, μ) та вимірний простір (X', E') такі, що існує E/E' вимірне відображення $S: X \to X'$. Визначимо на просторі (X', E') функцію множин μ' за правилом

$$\forall\, A \in E', \quad \mu'(A) \overset{\text{def}}{=} \mu(S^{-1}A). \tag{14.1}$$

Лема 14.1. *Функція $\mu'(\cdot)$ є мірою на E'.*

Доведення. Нехай послідовність множин $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, $A_n \in E'$ така, що $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

У якості вправи переконайтесь у виконанні таких властивостей:

1) $S^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(S^{-1}A_n)$;

2) $(S^{-1}A_i) \cap (S^{-1}A_j) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Тоді

$$\mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(S^{-1}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^{-1}A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S^{-1}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(A_n).$$

14.1. *Заміна міри в інтегралі Лебега*

Теорема 14.1. *Якщо функція* $f: X' \to \overline{\mathbb{R}}$ *є* E' *-вимірною і такою, що* $\int_X f(Sx)d\mu(x)$ *скінченний, то має місце рівність*

$$\int\limits_X f(Sx)d\mu(x) = \int\limits_{X'} f(y)d\mu'(y). \tag{14.2}$$

Доведення. Функція $f(Sx) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – E-вимірна як суперпозиція $E \,/\, E'$ вимірної S і E' -вимірної f. Для випадку $f(y) = c\, I_B(y)$, $B \in E'$, c – константа, маємо

$$f(Sx) = c\, I_B(Sx) = \begin{cases} c, & Sx \in B, \\ 0, & Sx \notin B \end{cases} = \begin{cases} c, & x \in S^{-1}B, \\ 0, & x \notin S^{-1}B \end{cases} = c\, I_{S^{-1}B}(x).$$

Звідки

$$\int\limits_X f(Sx)d\mu(x) = \int\limits_X cI_{S^{-1}B}(x)d\mu(x) = c\mu(S^{-1}B).$$

З іншого боку

$$\int\limits_{X'} f(y)d\mu'(y) = c\mu'(B).$$

Із того, що $\mu'(B) = \mu(S^{-1}B)$ випливає (14.2).

Аналогічно, неважко переконатись, що для довільної простої функції $f(y) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, I_{B_k}(y)$, $B_k \in E'$, виконується (14.2).

Використовуючи означення 12.2, легко бачити, що (14.2) має місце і для довільної інтегрованої функції f, але ми доведемо це іншим способом.

Нехай f – E'-вимірна невід'ємна функція на X'. Як відомо, тоді існує послідовність простих невід'ємних функцій $\{p_n(y), n \geq 1\}$ таких, що

$$p_n(y) \uparrow f(y), \quad y \in X'.$$

Звідки $p_n(Sx) \uparrow f(Sx)$, $x \in X$.

Далі, оскільки для всіх $n \geq 1$, $\int_X p_n(Sx)d\mu(x) = \int_{X'} p_n(y)d\mu'(y)$, то, переходячи до границі при $n \to \infty$, маємо (14.2).

У випадку довільної f – E'-вимірної невід'ємної функції на X' розглянемо $\left(f(Sx)\right)_+ = f_+(Sx)$, $\left(f(Sx)\right)_- = f_-(Sx)$. Оскільки, f_+ і f_- – невід'ємні, маємо $\int_X f_+(Sx)d\mu(x) = \int_{X'} f_+(y)d\mu'(y)$ і $\int_X f_-(Sx)d\mu(x) = \int_{X'} f_-(y)d\mu'(y)$. Звідки

$$\int_X f(Sx)d\mu(x) = \int_X f_+(Sx)d\mu(x) - \int_X f_-(Sx)d\mu(x)$$

$$= \int_{X'} f_+(y)d\mu'(y) - \int_{X'} f_-(y)d\mu'(y) = \int_{X'} f(y)d\mu'(y).$$

Заміна міри під знаком інтеграла Лебега має застосування для обчислення математичного сподівання як інтеграла Лебега-Стилтьєса:

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір, а $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – борелевська σ-алгебра на прямій. У якості вимірного відображення $S: \Omega \to \mathbb{R}$ розглянемо випадкову величину $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ з функцією розподілу $F_\xi(x)$. Тоді міра μ' на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ визначається так

$$\mu'\left((-\infty, x)\right) = P\left(\xi^{-1}(-\infty, x)\right) = P(\xi < x) = F_\xi(x).$$

Тоді для борелевської функції $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ маємо

$$Ef(\xi) = \int_\Omega f(\xi)dP = \int_\mathbb{R} f(x)d\mu'(x) = \int_\mathbb{R} f(x)dF_\xi(x).$$

14.2. ***Заряди. Розклад Гана***

Нехай X деяка множина, а E σ-алгебра підмножин X. Пара (X, E) називається вимірним простором.

Означення 14.1. *Функція* $\omega: E \to (-\infty, +\infty]$ *називається зарядом, якщо:*

1. $\omega(\emptyset) = 0$;

2. *Функція* ω σ*-адитивна на* E.

Теорема 14.2. *Нехай* (X, E) - *вимірний простір і* ω *заряд на* E. *Тоді* $\exists\, X_+ \in E : \forall\, A \in E,\ \omega(X_+ \cap A) \geq 0,\ \omega(X_- \cap A) \leq 0,$ *де* $X_- = X \setminus X_+$.

Подання $X = X_+ \cap X_-$ називається розкладанням Гана простору X щодо заряду ω.

Доведення. Покладемо $a = \inf \omega(F)$, де нижня межа береться по множинах $F \in E$ таких, що $\forall\, A \in E, \omega(F \cap A) \leq 0$ назвемо їх від'ємними. Якщо ж $\forall\, A \in E, \omega(F \cap A) \geq 0$, то F назвемо додатним. Нехай $\{F_n\}$ така послідовність від'ємних множин, що $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(F_n) = a$. Тоді

$$X_- = \bigcup_{n\geq 1} F_n, X_+ = X \setminus X_-.$$

Дійсно, нехай X_+ містить вимірну множину C_0, таку що $\omega(C_0) < 0$. При цьому C_0 не може бути від'ємним, інакше, поклавши $\tilde{X} = X_- \cup C_0$, отримаємо $\omega\left(\tilde{X}\right) = \omega(X_-) + \omega(C_0) < a$, що неможливо. Тому існує таке найменше натуральне число i_1, $\exists\, C_1 \subset C_0 : \omega(C_1) \geq \frac{1}{i_1}$. Аналогічно $\exists\, i_2 > i_1$ таке, що для нього $\exists\, C_2 \subset C_0 \setminus C_1$ і $\omega(C_2) \geq \frac{1}{i_2}$ і т.д. Покладемо $F_0 = C_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Множина $F_0 \neq \emptyset$, тобто, $\omega(C_0) < 0$, а $\omega(C_i) > 0, i \geq 0$. Очевидно, що F_0 від'ємне. Тому, приєднавши його до X_-, приходимо до протиріччя з означенням а. Отже, для $\forall\, A \subset X \setminus X_-, \omega(A) \geq 0,$ тобто $X_+ = X \setminus X_-$ додатне.

14.3. ***Розклад Жордана***

Теорема 14.3. *Нехай* (X, E) – *вимірний простір і* ω *заряд на* E. *Тоді існують міри* ω_- *та* ω_+ *на* E *такі, що*

$$\forall\, A \in E,\ \ \omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A). \tag{14.3}$$

При цьому ω_+ *скінченна* (*σ-скінченна*), *якщо заряд скінченний* (*σ-скінченний*). *Розклад* (14.3) *називають розкладом Жордана.*

Доведення. Нехай $X = X_+ \cap X_-$ – розклад Гана простору X щодо заряду ω. Тоді функції $\omega_+(A) := \omega(X_+ \cap A)$ та $\omega_-(A) := -\omega(X_- \cap A),\ A \in E$ є мірами на E і $\omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A)$.

Означення 14.2. *Нехай ω_+, ω_- – міри для заряду ω з доведення теореми* 14.3. *Міра $|\omega| = \omega_- + \omega_+$ називається повною варіацією заряду ω.*

14.4. *Абсолютна неперервність заряду відносно міри. Теорема Радона-Нікодима*

Нехай (X, E, μ) вимірний простір.

Означення 4.1. *Заряд $\omega: E \to \mathbb{R}$ називається абсолютно неперервним відносно міри μ, якщо для довільного $A \in E$ такого, що $\mu(A) = 0$ виконується $\omega(A) = 0$. Позначається $\omega \ll \mu$.*

Лема 14.2. *Нехай заряд ω має розклад Жордана $\omega = \omega_+ - \omega_-$, μ – міра. Тоді еквівалентними є такі твердження:*

1) $\omega \ll \mu$;
2) $\omega_+ \ll \mu, \omega_- \ll \mu$;
3) $|\omega| \ll \mu$.

Доведення. 1) ⇒ 2). Доведемо для ω_+. Нехай для деякого $A \in E$ маємо $\mu(A) = 0$. Тоді, оскільки $\mu(X_+ \cap A) = 0$, то $\omega(X_+ \cap A) = 0$. Отже, $\omega_+(A) = \omega(X_+ \cap A) = 0$. Аналогічно показується, що $\omega_-(A) = 0$.

2) ⇒ 3). Якщо $\mu(A) = 0$, то $\omega_+(A) = \omega_-(A) = 0$. Отже, $|\omega|(A) = \omega_+(A) + +\omega_-(A) = 0$.

3) ⇒ 1). Оскільки $|\omega| \ll \mu$, то із $\mu(A) = 0$ випливає $\omega_+(A) + \omega_-(A) = 0$. Звідки $\omega_+(A) = \omega_-(A) = 0$, а отже, $\omega(A) = 0$.

Теорема 14.4 (Радон-Нікодим). *Нехай μ σ-скінченна міра на E, та $\omega: E \to \mathbb{R}$ – σ-скінченний заряд, абсолютно неперервний відносно міри μ ($\omega \ll \mu$). Тоді існує інтегрована по мірі μ функція $f(x)$, визначена на X, що для довільного $A \in E$*

$$\omega(A) = \int_A f(x) d\mu(x). \tag{14.4}$$

Ця функція називається похідною заряду ω по мірі μ і позначається

$$f = \frac{d\omega}{d\mu}.$$

Крім цього, $\frac{d\omega}{d\mu}$ *визначається з точністю до рівності майже всюди відносно міри* μ.

Доведення. Доведемо спочатку для випадок, коли ω та μ – скінченні міри. Розглянемо такий набір невід'ємних вимірних функцій

$$S = \left\{ g: X \to \mathbb{R}: \ \forall\, A \in E, \ \int_A g d\mu \leq \ \omega(A) \right\}.$$

Оскільки $0 \in S$, то $S \neq \emptyset$. Нехай g_1, $g_2 \in S$, покажемо, що

$$g = \max(g_1, g_2) \in S.$$

Дійсно, для довільної $A \in E$ маємо

$$\int_A g d\mu = \int_{A \cap \{g_1 \geq g_2\}} g d\mu + \int_{A \cap \{g_1 < g_2\}} g d\mu$$

$$= \int_{A \cap \{g_1 \geq g_2\}} g_1 d\mu + \int_{A \cap \{g_1 < g_2\}} g_2 d\mu$$

$$\leq \omega(A \cap \{g_1 \geq g_2\}) + \omega(A \cap \{g_1 < g_2\}) = \omega(A).$$

Тобто $\max(g_1, g_2) = g \in S$. За індукцією легко бачити, що із $g_1, g_2, \dots, g_n \in S$ випливає те, що $\max(g_1, g_2, \dots, g_n) \in S$.

Покладемо

$$\alpha = \sup_{g \in S} \int_X g d\mu. \qquad (14.5)$$

Оскільки $\forall\, g \in S \quad \int_X g d\mu \leq \ \omega(X) < +\infty$, то $\alpha < +\infty$. Нехай послідовність $\{g_n, n \geq 1\} \subset S$, така, що

$$\lim_{n \to \infty} \int_X g_n d\mu = \alpha.$$

Позначимо $f_n = \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$. Тоді $f_n \in S$ і

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq \alpha.$$

Звідки $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \alpha$. Оскільки $f_n \leq f_{n+1}$, то існує

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Покажемо, що функція f задовольняє (14.4).

Використовуючи теорему 10.1 про монотонну збіжність, маємо $\forall\, A \in E$

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu, \quad \int_A f_n d\mu \leq \omega(A).$$

Звідки $\int_A f d\mu \leq \omega(A)$ і

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \alpha. \tag{14.6}$$

Введемо функцію

$$\lambda(A) = \omega(A) - \int_A f d\mu, \quad A \in E. \tag{14.7}$$

Легко бачити, що λ невід'ємна і σ-адитивна, а отже, є мірою.

Припустимо, що існує множина $A_0 \in E$ така, що $\lambda(A_0) > 0$. Оскільки μ скінченна, то існує $c > 0$ таке, що

$$\lambda(A_0) > c\mu(A_0).$$

Очевидно, що функція множин $\lambda(A) - c\mu(A)$, $A \in E$ є зарядом на E. Нехай B додатна множина цього заряду за розкладом Гана, тоді очевидно, що $\lambda(B) - c\mu(B) > 0$. Легко бачити, що $\mu(B) > 0$ інакше, якби $\mu(B) = 0$, то із (14.7) та умови $\omega \ll \mu$ випливало б, що $\lambda(B) = 0$, тобто, $\lambda(B) - c\mu(B) = 0$.

Крім цього, для довільної підмножини $P \subset B$, $P \in E$, $\lambda(P) - c\mu(P) \geq 0$, тобто, враховуючи (14.6), маємо

$$\omega(P) - \int_P f d\mu - c\mu(P) \geq 0 \text{ і } \omega(P) \geq \int_P f d\mu + c\mu(P).$$

Введемо функцію

$$h = f + cI_B.$$

З одного боку, покажемо, що $h \in S$. Для $A \in E$, маємо

$$\int\limits_A hd\mu = \int\limits_{A\setminus B} hd\mu + \int\limits_{A\cap B} hd\mu = \int\limits_{A\setminus B} fd\mu + \int\limits_{A\cap B} (f + cI_B)d\mu$$

$$\leq \omega(A\setminus B) + \int\limits_{A\cap B} fd\mu + c\mu(A \cap B) \leq \omega(A\setminus B) + \omega(A \cap B) = \omega(A).$$

З іншого боку

$$\int\limits_X hd\mu = \int\limits_X fd\mu + c\mu(B) = \alpha + c\mu(B) > \alpha.$$

Отримали суперечність з означенням α в (14.5). Отже, (14.4) справджується.

Перейдемо до випадку, коли ω – заряд. Розглянемо розклад Гана цього заряду $X = X_+ \cup X_-$ і розклад Жордана $\omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A)$, $A \in E$. Оскільки за лемою 14.2 $\omega_+ \ll \mu$ і $\omega_- \ll \mu$, тоді, якщо розглянути міру ω_+ на X_+ і міру ω_- на X_-, то існують функції $f_+ : X_+ \to \mathbb{R}$ та $f_- : X_- \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\omega_+(A) = \int\limits_A f_+(x)d\mu(x), \quad \forall\, A \subset X_+, \quad A \in E,$$

$$\omega_-(B) = \int\limits_B f_-(x)d\mu(x), \quad \forall\, B \subset X_-, \quad B \in E.$$

Розглянемо $f : X \to \mathbb{R}$ таку, що $f(x) = f_+(x),\ x \in X_+$ та $f(x) = -f_-(x)$, $x \in X_-$.

Легко бачити, що для будь якої множини $A \in E$ має місце

$$\omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A) = \int\limits_{A\cap X_+} f_+(x)d\mu(x) + \int\limits_{A\cap X_-} f_-(x)d\mu(x)$$

$$= \int\limits_{A\cap X_+} f(x)d\mu(x) + \int\limits_{A\cap X_-} f(x)d\mu(x) = \int\limits_{A} f(x)d\mu(x).$$

Оскільки, при $f(x) = \tilde{f}(x) \pmod{\mu}$, $\int_A f(x)d\mu(x) = \int_A \tilde{f}(x)d\mu(x)$, то очевидно, що похідна $\frac{d\omega}{d\mu}$ заряду ω по мірі μ визначається з точністю до рівності майже всюди відносно міри μ.

Розглянемо загальний випадок теореми. Оскільки міра μ і заряд ω – σ-скінченні, то легко переконатись, що існує $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{S}$, така, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$, $\mu(X_n) < \infty$ та $|\omega(X_n)| < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Введемо послідовність $Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$, де $\bigcup_{k=1}^{0} = \emptyset$. Легко бачити, що $Y_n \cap Y_m = \emptyset$, при $n \neq m$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$, $Y_n \in k(\mathbb{S})$, $\mu(Y_n) < \infty$ та $|\omega(X_n)| < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Із доведеного вище випливає, що на $Y_n \cap \sigma k(\mathbb{S}) = \sigma k(Y_n \cap \mathbb{S})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, виконується (14.4), тобто існує функція $f_n \colon Y_n \to \mathbb{R}$ така, що $\forall\, A \in E$

$$\omega(A \cap Y_n) = \int\limits_{A\cap Y_n} f_n(x)d\mu(x).$$

Розглянемо $f \colon X \to \mathbb{R}$ таку, що $f(x) = f_n(x)$, якщо $x \in Y_n$. Оскільки $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_n \cap A)$, причому $(Y_n \cap A) \cap (Y_m \cap A) = \emptyset$, при $n \neq m$, маємо

$$\omega(A) = \omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_n \cap A)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(Y_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{Y_n\cap A} f_n d\mu = \int\limits_{A} f d\mu.$$

Література

Основна:

1. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. *Функціональний аналіз. Курс лекцій*. Київ: Вища школа, 1990. 600 с.

2. Дороговцев О. Я. *Елементи загальної теорії міри та інтеграла*. Київ: Факт, 2007. 164 с.

3. Дороговцев А. Я., Івасішен С. Д., Константінов О. Ю., Кукуш О. Г., Курченко О. О., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. *Завдання до практичних занять з теорії міри та інтеграла для студентів спеціальностей «математика» і «статистика» механіко-математичного факультету*. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2003. 89 с.

4. Халмош П. *Теорія міри*, 2003. 256 с.

Додаткова

5. Городецький В. В., Нагнибіда Н. І., Настасієв П. П. *Методи розв'язування задач з функціонального аналізу*: Навчальний посібник. Київ: Вища школа, 1990. 479 с.

6. Радченко В. М. *Теорія міри та інтеграла*: Навчальний посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. 144 с.

7. Маслюченко В. К. *Лекції з теорії міри та інтеграла: Ч. 1. Міра:* Навчальний посібник. Чернівці: Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, 2011. 156 с.

8. Маслюченко В. К. *Лекції з теорії міри та інтеграла: Ч. 2. Інтеграл*: Навчальний посібник. Чернівці: Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, 2011. 176 с.

9. Федак І. В. *Елементи теорії міри та інтеграла Лебега*: Навчальний посібник. Івано-Франківськ: Сімик, 2010. 168 с.

10. Моторна О. В. *Теорія міри*: Методичний посібник. Київ: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2009. 31 с.

ЧАСТИНА 2. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Основним поняттям теорії ймовірностей є стохастичний експеримент. Результат стохастичного експерименту називається елементарною подією. Через Ω позначимо множину всіх можливих результатів стохастичного експерименту.

Множина Ω називається простором елементарних подій. У теорії ймовірностей простір елементарних подій є аналогом універсальної множини в теорії множин.

Нижче у таблиці розглянуто трактування базових понять теорії множин у теорії ймовірностей

Позначення	**у теорії множин**	**у теорії ймовірностей**
U, Ω	універсальна множина	простір елементарних подій
ω	елемент U	елементарна подія
$\mathcal{F}$	σ-алгебра підмножин U	σ-алгебра випадкових подій
$A \in \mathcal{F}$	вимірна множина	випадкова подія
U, Ω	множина всіх елементів	достовірна подія
$\emptyset$	порожня множина	неможлива подія
$A \cup B$	об'єднання множин	подія «відбудеться A або B»
$A \cap B$	перетин множин	подія «відбудеться A і B»
$A \backslash B$	різниця множин	подія «відбудеться A але не B»
$A \subset B$	A підмножина B	подія «якщо A то B»
$A \cap B = \emptyset$	A і B не перетинаються	A і B несумісні події
$A \Delta B$	симетрична різниця множин A і B	подія «відбудеться A або B але не одночасно»

Лекція 15. *Аксіоматичне означення ймовірностей*

Нехай Ω простір елементарних подій деякого стохастичного експерименту, $\mathcal{F}$ – σ–алгебра підмножин Ω.

Означення 15.1. *Функція множин $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ називається ймовірнісною мірою (або ймовірністю), якщо P – міра на $\mathcal{F}$ і $P(\Omega) = 1$.*

Трійка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ називається ймовірнісним простором, $\mathcal{F}$ – σ–алгебра випадкових подій, на яких визначена ймовірнісна міра (ймовірність) P.

Основні властивості ймовірності:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, *де $\bar{A}$ – випадкова подія протилежна до випадкової події A, тобто $\bar{A} = \Omega \setminus A$.*

Дійсно, $A \cup \bar{A} = \Omega$ і $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Отже,

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1.$$

2. *Монотонність. Нехай $A \in \mathcal{F}$* і *$B \in \mathcal{F}$ такі, що $A \subset B$, тоді*

$$P(A) \leq P(B).$$

3. Нехай $A \in \mathcal{F}$ і $B \in \mathcal{F}$, тоді

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

4. *P неперервна знизу, тобто* $\forall\, A_i \in \mathcal{F},\ i = 1,2,\ldots$, *таких, що*

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}:$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right);$$

5. *P неперервна зверху, тобто* $\forall\, A_i \in \mathcal{F},\ i = 1,2,\ldots$, *таких, що*

$$A_n \supset A_{n+1}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}:$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right);$$

6. P неперервна *в «нулі», тобто для* $\forall\, A_i \in \mathcal{F},\ i = 1,2,\ldots$, *таких, що*

$$A_n \supset A_{n+1}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset:$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0.$$

Властивості 4 – 6 є наслідком теореми 4.3.

Вправа 15.1. Довести властивості 2, 3.

Теорема 15.1. *Нехай* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність випадкових подій. Тоді*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \tag{15.1}$$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ge 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{A}_n). \tag{15.2}$$

Доведення. Нерівність (15.1) є наслідком властивості σ-півадитивності міри.

Нерівність (15.2) випливає із таких очевидних перетворень та нерівності (15.1)

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\right) \ge 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{A}_n).$$

Умовна ймовірність

Нехай A і B – випадкові події причому $P(B) > 0$. *Умовною ймовірністю* події A за умови B називається величина

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

З цієї формули випливає частинний випадок формули добутку ймовірностей для $P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B).$$

Вправа 15.2. Доведіть твердження: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1,2,\ldots,n$, *таких, що* $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$ *має місце формула добутку ймовірностей*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n \Big/ \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Незалежні події

Одне з основних понять, що виділяє теорію ймовірностей із загальної теорії міри – це поняття незалежності, яке не має трактування на мові теорії міри.

Означення 15.2. *Випадкові події A і B називаються незалежними, якщо*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{15.3}$$

Поняття незалежності стає зрозумілішим, якщо його трактувати з позиції умовної ймовірності, а саме, випадкові події A і B незалежні, якщо:

1) $P(A/B) = P(A)$ для $P(B) > 0$ або 2) $P(B/A) = P(B)$ для $P(A) > 0$.

Тобто із 1) випливає, що подія A не залежить від події B, якщо умовна ймовірність події A за умови B дорівнює ймовірності події A, що інтуїтивно зрозуміло на відміну від означення незалежності за формулою (15.3).

Властивості 1), 2) випливають безпосередньо із (15.3) та формули добутку ймовірностей.

Лекція 16. *Формула повної ймовірності. Формула Байєса*

На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ розглянемо набір випадкових подій $H_1,\dots,H_n$ таких, що

$$H_i \cap H_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

Такий набір $H_1,\dots,H_n$ називається *повною групою подій*.

Формула повної ймовірності

Нехай $H_1,\dots,H_n$ – повна група подій, $P(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$. Тоді $\forall\, A \in \mathcal{F}$ має місце формула повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)\, P(H_i). \qquad (16.1)$$

Доведення. З урахуванням властивостей повної групи подій, маємо

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i).$$

Використовуючи формулу добутку ймовірностей

$$P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A/H_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

отримуємо доведення формули повної ймовірності.

Слід відзначити, що формула (16.1) справедлива й коли деякі $P(H_i) = 0$, для цього випадку припускаємо, що $0 \cdot P(A/H_i) = 0$, хоча $P(A/H_i)$ й не визначена.

Приклад 16.1. В урні міститься n білих та m чорних кульок. По черзі з урни достаються кульки дві кульки без повернення. Яка ймовірність того, що друга кулька – біла?

Позначимо через $H_б$ подію «перша витягнута кулька – біла», а через $H_ч$ – подію «перша витягнута кулька – чорна». Очевидно, що випадкові події $H_б$, $H_ч$ утворюють повну групу подій. Нехай A – подія «друга витягнута кулька – біла». Тоді за формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(A/H_б)P(H_б) + P(A/H_ч)P(H_ч).$$

Залишилось обчислити відповідні ймовірності. Легко бачити, що

$$P(H_б) = \frac{n}{n+m}, \;\; P(H_ч) = \frac{m}{n+m}.$$

Далі,

$$P(A \,/\, H_б) = \frac{n-1}{n+m-1}, \;\; P(A \,/\, H_ч) = \frac{n}{n+m-1}.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{n-1}{n+m-1} \cdot \frac{n}{n+m} + \frac{n}{n+m-1} \cdot \frac{m}{n+m} = \frac{n}{n+m}.$$

Як бачимо $P(A) = P(H_б) = \frac{n}{n+m}$, тобто ймовірність витягнути білу кульку при другому діставанні така ж, як і при першому.

Формула Байєса

Нехай $H_1, \dots, H_n$ – повна група подій, $P(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$, $A \in \mathcal{F}$ і $P(A) > 0$.

Тоді $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$ має місце формула Байєса:

$$P(H_k/A) = \frac{P(A/H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)\, P(H_i)}.$$

Доведення. Із означення умовної ймовірності та з урахуванням формули добутку ймовірностей і формули повної ймовірності, маємо

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/H_k)P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)\, P(H_i)}.$$

Зауваження 16.1. Ймовірності $P(H_i)$ називаються *апріорними* (до досліду), а $P(H_k/A)$ називаються *апостеріорними* (після досліду) ймовірностями у формулі Байєса.

Приклад 16.2. Три продавці торгують квітами. У першого продавця половина квітів – рожеві троянди, у другого рожевих троянд 10%, а у третього всі квіти рожеві троянди. Студент навмання купив студентці квітку, яка виявилась рожевою трояндою. Яка ймовірність, що він купив цю квітку у другого продавця?

Позначимо через H_i подію «квітку куплено в i-го продавця», а через A позначимо подію «куплена квітка – рожева троянда». За умовою задачі потрібно обчислити $P(H_2/A)$.

Щоб скористатися формулою Байєса, обчислимо відповідні ймовірності. Оскільки студент з однаковою ймовірністю міг вибрати одного з продавців, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3.$$

Далі, за умовою задачі

$$P(A/H_1) = 1/2;\;\; P(A/H_2) = 1/10;\;\; P(A/H_2) = 1.$$

Отже,

$$P(H_2/A) = \frac{P(A/H_2)P(H_2)}{P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + P(A/H_3)P(H_3)}$$
$$= \frac{1/10}{1/2 + 1/10 + 1} = 1/16.$$

Як бачимо, апріорна ймовірність $P(H_2) = 1/3$ суттєво відрізняється від апостеріорної $P(H_2/A) = 1/16$ внаслідок того, що ми отримали інформацію, яка міститься в події A – «куплена квітка – рожева троянда».

Приклад 16.3. Серед зовні однакових двох ігрових кубиків є один із зміщеним центром. Відомо, що при підкиданні цього кубика шістка випадає з ймовірністю $\frac{1}{3}$. Підкинули один із кубиків і випала шістка. Яка ймовірність, що цей кубик із зміщеним центром?

Позначимо через H_1 подію «підкинутий кубик має зміщений центр», а через H_2 – «підкинутий кубик симетричний». Через A позначимо подію «при підкиданні кубика випала шістка».

За умовою задачі потрібно обчислити $P(H_1/A)$. Отже, маємо

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Лекція 17. *Незалежні в сукупності події. Теорема Бореля-Кантеллі*

Означення 17.1. *Події* $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1,2,\dots,n$, $n \in \mathbb{N}$ *називаються незалежними в сукупності, якщо* $\forall\, k \in \{2,3,\dots,n\}$, *для довільних* $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}\right) = \prod_{m=1}^{k} P\left(A_{i_m}\right).$$

Незалежність класів подій

Нехай $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{F}$, $i = 1,2,\dots,n$, – класи (множини) випадкових подій

Означення 17.2. *Класи подій* $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_n$ *називаються незалежними, якщо* $\forall A_1 \in \mathcal{K}_1, \forall A_2 \in \mathcal{K}_2, \ldots, \forall A_n \in \mathcal{K}_n$ *події* A_i , $i = 1,2,\ldots,n$ *незалежні в сукупності.*

Якщо маємо набір алгебр $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, $i = 1,2,\ldots,n$, породжених подіями $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1,2,\ldots,n$, (тобто $\mathcal{F}_i = \{\emptyset, \Omega, A_i, \bar{A_i}\}$), то неважко переконатись, що незалежність в сукупності випадкових подій A_i , $i = 1,2,\ldots,n$ еквівалентна незалежності алгебр $\mathcal{F}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Дійсно, якщо незалежні алгебри $\mathcal{F}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, то автоматично незалежні в сукупності A_i , $i = 1,2,\ldots,n$. Переконайтесь, враховуючи, що $\Omega \in \mathcal{F}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Якщо ж незалежні в сукупності події A_i , $i = 1,2,\ldots,n$, то, неважко показати, що незалежні в сукупності і $A_i^{\varepsilon_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$, де $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$, $A_i^1 = A_i, A_i^{-1} = \bar{A_i}$. Звідки випливає незалежність $\mathcal{F}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Вправа 17.1. Довести, що якщо A_i , $i = 1,2,\ldots,n$ незалежні в сукупності, то незалежні в сукупності і події $A_i^{\varepsilon_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Теорема 17.1. *Нехай алгебри* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *незалежні. Тоді незалежними є і* σ*-алгебри* $\sigma(A_1), \sigma(A_2), \ldots, \sigma(A_n)$*, де* $\sigma(A_k)$ *–* σ*-алгебра, породжена алгеброю* A_k.

Доведення випливає із теореми 5.6 (про наближення міри).

Для послідовності множин $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ верхньою $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ та нижньою $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ границями називаються такі множини

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Теорема 17.2. (Бореля-Кантеллі) *Нехай* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність випадкових подій. Тоді* *a)* *Якщо* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$*, то*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0;$$

b) *Якщо* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *незалежні в сукупності та* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$*, то*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

Доведення.

a) Позначимо через $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Легко бачити, що послідовність $\{B_n\}$ монотонно спадна, а отже,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

Далі, враховуючи збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, маємо

$$P(B_n) = P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0, \quad n \to \infty.$$

b) З урахуванням незалежності $\{\bar{A}_n, n \in \mathbb{N}\}$ в сукупності, очевидно, що

$$P(B_n) = P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right) = 1 - \prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k)$$

$$= 1 - \prod_{k=n}^{\infty}\big(1 - P(A_k)\big) \geq 1 - \prod_{k=n}^{\infty} e^{-P(A_k)} = 1 - e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 1.$$

Ми використали те, що для розбіжного ряду $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ для довільного $n \in \mathbb{N}$ та відому нерівність $1 - x \leq e^{-x}$ для $0 \leq x \leq 1$.

Вправа 17.2. Довести, що при нескінченному підкиданні ігрового кубика для будь-якого фіксованого $k \in \mathbb{N}$ з імовірністю 1 буде нескінченна серія із k шісток поспіль.

Розв'язання. Позначимо через A_n подію при підкиданнях з $(n-1)k + 1$ по nk випали шістки. Оскільки сегменти $[(n-1)k + 1, nk]$ не перетинаються при різних значеннях n, то події A_n, $n \in \mathbb{N}$, незалежні в сукупності. Легко бачити, що для всіх $n \geq 1$, $P(A_n) = \frac{1}{6^k}$, отже

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty.$$

З урахування пункту b) теореми Бореля-Кантеллі, маємо

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

Але подія $\limsup_{n\to\infty} A_n$ і означає, що відбудеться нескінченно багато подій із послідовності A_1, A_2,...

Лекція 18. ***Дискретні ймовірнісні простори***

Ймовірнісна модель експерименту із не більш ніж зліченним простором елементарних подій.

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, де $N \le +\infty$ – не більш ніж зліченна множина, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $p_i = P(\omega_i) \ge 0$, $i = 1,2,\dots,N$ такі, що $\sum_i^N p_i = 1$. Для множини $A \in \mathcal{F}$ покладемо

$$P(A) \coloneqq \sum_{i:\omega_i \in A} p_i. \tag{18.1}$$

Теорема 18.1. *Функція* $P\colon 2^{\Omega} \to [0,1]$ *є ймовірністю на* $\mathcal{F}$.

При цьому трійка $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ називається *дискретним ймовірнісним простором.*

Доведення. Адитивність P очевидна, дійсно, якщо $A, B \in 2^{\Omega}$ і $A \cap B = \emptyset$, то

$$P(A \cup B) \coloneqq \sum_{i:\omega_i \in A\cup B} p_i = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i + \sum_{i:\omega_i \in B} p_i = P(A) + P(B).$$

Для доведення σ-адитивності P (за умовою 4 теореми 4.3) досить показати, що P – неперервна в «нулі». Дійсно, нехай монотонно спадна послідовність $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ така, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Якщо існує натуральне M таке, що $\bigcap_{k=1}^{M} A_k = \emptyset$, то, враховуючи монотонність $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ для $n \ge M$, $A_n \subset \bigcap_{k=1}^{M} A_k$, маємо

$$P(A_n) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{M} A_k\right) = P(\emptyset) = 0$$

і отже, $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Якщо ж для всіх $M \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{k=1}^{M} A_k \neq \emptyset$, то розглянемо $m_n = \inf\{i: \omega_i \in A_n\}$. Із того, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ випливає, що $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$, звідки

$$P(A_n) \leq \sum_{i \geq m_n} p_i \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Теорему доведено.

Класичне означення ймовірності

Розглянемо випадок дискретного ймовірнісного простору, при якому простір елементарних подій Ω задовольняє умови:

1. Ω – скінченна множина;
2. Усі елементарні події Ω – рівноможливі, тобто, $\forall\, \omega \in \Omega$, $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$,

де $|\Omega|$ означає кількість елементів множини Ω. Простір Ω у цьому випадку називають *однорідним*;

3. $\forall\, A \in 2^{\Omega}$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Цей частинний випадок дискретного ймовірнісного простору називається *класичним означенням ймовірності*.

Зауваження. Класична формула ймовірності пункту 3 не справедлива для неоднорідних просторів Ω. Наприклад, якщо ігровий кубик має зміщений центр ваги, то ми не можемо стверджувати, що випадання граней цього кубика рівноможливі і, отже, формулу пункту 3 для подій із 2^{Ω} не можна застосовувати.

Схема Бернуллі

Означення 18.1. *Схема Бернуллі з n випробуваннями – це стохастичний експеримент, який складається з послідовності n випробувань, що задовольняють умови:*

а) ці випробування незалежні в сукупності;

b) кожне випробування має один із двох результатів, які умовно називають успіх або неуспіх (чи 1 або 0, тощо);

c) ймовірність успіху однакова для кожного з випробувань.

Випробування, з яких складається схема Бернуллі, також називають *випробуваннями Бернуллі*.

Прикладом схеми Бернуллі є експеримент з $n > 1$ підкиданнями монети.

Простір елементарних подій Ω схеми Бернуллі з n випробуваннями зручно зобразити у вигляді набору елементарних подій $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, де $\omega_k \in \{0,1\}$ і $\omega_k = 1$, якщо результатом k-го випробування був успіх та $\omega_k = 0$, якщо результатом k-го випробування був неуспіх.

Легко бачити, що $|\Omega| = 2^n$.

Лекція 19. *Випадкові величини*

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір.

Означення 19.1. *Випадкова величина – це $\mathcal{F}$-вимірна функція $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$, тобто $\forall\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, де $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ – σ-алгебра борелевих множин $\mathbb{R}$.*

Для $\mathcal{F}$-вимірності ξ досить вимагати, щоб $\forall\, x \in \mathbb{R}$ множина $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Дійсно, мінімальна σ-алгебра породжена множинами $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$ збігається з мінімальною σ-алгеброю, породженою відкритими множинами (переконайтесь!). З іншого боку $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) < x\} = \xi^{-1}(-\infty, x)$. Тому, враховуючи, що для будь-якої множини індексів I виконуються умови:

1. $\xi^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} \xi^{-1}(A_\alpha)$;
2. $\xi^{-1}(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} \xi^{-1}(A_\alpha)$;
3. $\xi^{-1}(A_{\alpha_1} \backslash A_{\alpha_2}) = \xi^{-1}(A_{\alpha_1}) \backslash \xi^{-1}(A_{\alpha_2})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in I$;
4. $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$,

неважко переконатись, що

$$\sigma\{\xi^{-1}(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\} = \xi^{-1}\big(\mathfrak{B}(\mathbb{R})\big).$$

Вправа 19.1. Нехай $\xi(\omega)$ випадкова величина на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Довести, що кожна із множин

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\},\ \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) > x\},\ \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \geq x\},$$

$$\{\omega \in \Omega: a \leq \xi(\omega) < b\},\ \ \{\omega \in \Omega: a < \xi(\omega) \leq b\},\ \ \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x\},$$

є випадковою подією.

Теорема 19.1. *Сума, різниця і добуток двох випадкових величин* $\boldsymbol{\xi}$ *та* $\boldsymbol{\eta}$ *є випадковою величиною. Частка двох випадкових величин, за умови, що знаменник не перетворюється в нуль, також випадкова величина.*

Доведення теореми 19.1 випливає із теореми 7.2. Крім цього, із наслідку 7.1 випливає, що $\min(\xi, \eta)$ та $\max(\xi, \eta)$ також випадкові величини.

Теорема 19.2. *Нехай* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– борелева функція,* ξ *– випадкова величина. Тоді* $g(\xi)$ *– випадкова величина.*

Доведення теореми 19.2 випливає із вправи 7.1.

Означення 19.2. *Випадкова величина* ξ *називається простою, якщо* ξ *– проста функція, тобто*

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(\omega),$$

де $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega,\ A_i \in \mathcal{F},\ A_i \neq \emptyset,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ x_i \in \mathbb{R},\ I_{A_i}(\omega)$ – *індикатор випадкової події* A_i.

Теорема 19.3. *Нехай* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– послідовність випадкових величин така, що* $\forall\, \omega \in \Omega$ *існує границя* $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$. *Тоді* ξ *– випадкова величина.*

Доведення. Теорема 19.3 є наслідком теореми 7.3.

Теорема 19.4. а) *Для будь-якої випадкової величини* ξ *знайдеться послідовність простих випадкових величин* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *таких, що*

$$|\xi_n(\omega)| \leq |\xi(\omega)|\ \ i\ \ \xi_n(\omega) \to \xi(\omega),\ n \to \infty,\ \forall\, \omega \in \Omega.$$

б) *Якщо до того ж* $\xi(\omega) \geq 0$, *то існує послідовність простих випадкових величин* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *таких, що* $0 \leq \xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega),\ n \to \infty,\ \forall\, \omega \in \Omega.$

Доведення. Теорема 19.4 є наслідком теореми 7.4.

Означення 19.3. *Випадкова величина* ξ *називається дискретною, якщо*

$$\xi : \Omega \to X \subset \mathbb{R},$$

де X *не більш, ніж зліченна множина.*

Зокрема, проста випадкова величина є дискретною.

Зауваження 19.1. *Інколи під дискретною випадковою величиною мають на увазі випадкову величину* ξ, *для якої існує підмножина* $\Omega' \subset \Omega$ *така, що* $P(\Omega \setminus \Omega') = 0$ *і*

$$\xi : \Omega' \to X \subset \mathbb{R},$$

де X *не більш, ніж зліченна множина.*

Означення 19.4. *Розподілом дискретної випадкової величини*

$$\xi : \Omega \to \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad N \leq +\infty)$$

називаються ймовірності

$$p_i = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}, \quad i = 1,2, \dots, N.$$

Неважко переконатись, що $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

Дискретну випадкову величину зручно описувати у вигляді таблиці:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_N
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_N

На практиці часто розглядаються випадкова величина η, яка є деякою функцією g від випадкової величини ξ, тобто $\eta(\omega) = g\big(\xi(\omega)\big)$. Розподіл такої випадкової величини η задається таблицею:

η	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_N)$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_N

Лекція 20. ***Основні дискретні розподіли***

1. Біноміальний розподіл

Означення 20.1. *Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами n, p, якщо вона дорівнює кількості успіхів у схемі Бернуллі з n випробуваннями з ймовірністю успіху p у випробуванні.*

Щоб позначити, що ξ має біноміальний розподіл з параметрами n, p, використовують запис $\xi \sim B(n, p)$.

Неважко переконатися, що для $k \in \{1,2, \dots, n\}$

$$P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \qquad (20.1)$$

Дійсно, ймовірність елементарної події $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, у якій серед $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ є рівно k одиниць і, відповідно, $n-k$ нулів, з урахуванням властивостей схеми Бернуллі, дорівнює $p^k(1-p)^{n-k}$. Кількість таких елементарних подій дорівнює кількості способів розстановок k одиниць по n місцях, що і є C_n^k.

Зауваження. Для спрощення формул надалі замість $P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = k\}$ будемо писати $P(\xi = k)$.

Набір ймовірностей (20.1) називається *біноміальним розподілом*.

2. Геометричний розподіл

Означення 20.2. *Кажуть, що випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p, якщо вона дорівнює кількості випробувань до першого успіху в послідовності випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху p водному випробуванні.*

Легко бачити, що якщо $\xi = k$, $k \in \mathbb{N}$, то це означає, що в перших $k-1$ випробуваннях Бернуллі результатом був неуспіх, а останнє k-те випробування дало успіх. Звідки отримуємо

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1,2, \dots \qquad (20.2)$$

Набір ймовірностей (20.2) називається *геометричним розподілом* з параметром p, позначається $\xi \sim \mathrm{Geom}(p)$.

3. Гіпергеометричний розподіл

Розглянемо такий стохастичний експеримент: в урні міститься N кульок, серед яких рівно n білих. З урни виймають m кульок. Випадкова величина ξ, яка дорівнює кількості білих кульок серед вийнятих, має *гіпергеометричний розподіл* з параметрами N, n, m, позначається $\mathrm{HGeom}(N, n, m)$.

Неважко переконатись, що

$$P(\xi = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}, \ \ k \leq \min(m, n), \ \ k \geq \max(0, n + m - N).$$

Дійсно, нехай Ω – простір елементарних подій нашого експерименті. Кількість способів дістати m кульок із урни, що містить N кульок, дорівнює C_N^m, тобто $|\Omega| = C_N^m$. Нехай A – випадкова подія «серед вийнятих кульок рівно k білих». Тоді легко бачити, що $|A| = C_n^k C_{N-n}^{m-k}$. Звідки, скориставшись класичним означенням ймовірності, маємо

$$P(\xi = k) = P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

4. Негативний біноміальний розподіл

Означення 20.3. *Кажуть, що випадкова величина ξ має негативний біноміальний розподіл з параметрами p, r якщо вона дорівнює кількості випробувань до r-го успіху в послідовності випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху p в одному випробуванні.*

Покажемо, що

$$P(\xi = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad k \geq r. \tag{20.3}$$

Дійсно, подія $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = k\}$ означає, що k-те випробування дало успіх, а серед попередніх $k-1$ випробувань було $r-1$ успіхів. Легко бачити, що ймовірність події «серед попередніх $k-1$ випробувань було $r-1$ успіхів» має біноміальний розподіл $C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}$, а, враховуючи, що останнє випробування дало успіх, одержуємо формулу (20.3).

5. Розподіл Пуассона

Означення 20.4. *Випадкова величина* ξ *має розподіл Пуассона з параметром* $\lambda > 0$*, якщо*

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Позначається $\xi \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.

Розподіл Пуассона використовується в теорії масового обслуговування, статистиці, фізиці, біології тощо.

Лекція 21. *Асимптотичні апроксимації біноміального розподілу*

При великих n обчислення значень біноміального розподілу $B(n,p)$ може потребувати значних зусиль, тому важливими є граничні теореми, які апроксимують біноміальний розподіл з достатньою точністю.

Схемою серій Бернуллі називається послідовність серій Бернуллі, у якій n-та серія містить n випробувань з ймовірністю успіху p_n.

Теорема Пуассона

Теорема 21.1. *Нехай існують константи* $0 < C_1 < C_2$ *такі, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$, $0 < C_1 < np_n < C_2$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$B(n,p_n) \sim \mathrm{Pois}(np_n).$$

Зокрема, якщо $p_n \to 0$ *при* $n \to \infty$*, так, що* $np_n \to \lambda$*, де* $0 < \lambda < \infty$*, то*

$$B(n,p_n) \sim \mathrm{Pois}(\lambda).$$

Доведення.

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\,n^k}(np_n)^k\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$\sim\left(\frac{1}{k!}(np_n)^k\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{n-k}\right)\sim\left(\frac{1}{k!}(np_n)^k\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{n}\right)$$

$$\sim\left(\frac{1}{k!}(np_n)^k\exp(-np_n)\right),\quad n\to+\infty.$$

Ще однією теоремою для асимптотичної оцінки біноміального розподілу є

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Введемо позначення:

$$a_n=np,\ b_n=np(1-p),\ x_{nk}=\frac{k-a_n}{\sqrt{b_n}},\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теорема 21.2. *Нехай* $b_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$ *та існує* $c\in\mathbb{R}$ *така, що для всіх натуральних* $k, n,\ k\le n,\ |x_{nk}|\le c$, *тоді*

$$\frac{\sqrt{b_n}}{\varphi(x_{nk})}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\to 1,\quad n\to\infty.$$

Доведення. Легко бачити, що в умовах теореми $a_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$. Із позначень маємо

$$k=a_n+\sqrt{b_n}x_{nk}=\sqrt{b_n}\left(\frac{\sqrt{b_n}}{1-p}+x_{nk}\right)\ge\sqrt{b_n}\left(\frac{\sqrt{b_n}}{1-p}-c\right),$$

$$n-k=n(1-p)-\sqrt{b_n}x_{nk}\ge\sqrt{b_n}\left(\frac{\sqrt{b_n}}{p}-c\right).$$

Використовуючи формулу Стірлінга $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}$, маємо

$$\sqrt{2\pi b_n}C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=\sqrt{2\pi b_n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\approx\sqrt{np(1-p)}\frac{\sqrt{n}\,n^ne^{-n}p^k(1-p)^{n-k}}{\sqrt{k(n-k)}k^k(n-k)^{n-k}e^{-n}}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2p(1-p)}}{\sqrt{k(n-k)}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{n(1-p)}{(n-k)}\right)^{n-k}.$$

Далі, легко бачити, що

$$\frac{k}{n}=p+\frac{\sqrt{b_n}}{n}x_{nk}\sim p;\ \ \frac{n-k}{n}=1-\frac{k}{n}\sim q.$$

Тому

$$\sqrt{2\pi b_n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \sim \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{(n-k)}\right)^{n-k}.$$

Далі, оскільки $k = a_n + \sqrt{b_n}x_{nk}$, $n-k = n(1-p) - \sqrt{b_n}x_{nk}$

$$\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{n(1-p)}{(n-k)}\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{np}{a_n + \sqrt{b_n}x_{nk}}\right)^{a_n+\sqrt{b_n}x_{nk}} \left(\frac{n(1-p)}{n(1-p) - \sqrt{b_n}x_{nk}}\right)^{n(1-p)-\sqrt{b_n}x_{nk}}$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{b_n}x_{nk}}{np}\right)^{-np-\sqrt{b_n}x_{nk}} \left(1 - \frac{\sqrt{b_n}x_{nk}}{n(1-p)}\right)^{-n(1-p)+\sqrt{b_n}x_{nk}}$$

$$= \psi_n(x).$$

Покажемо, що $\ln\psi_n(x) \to -\frac{1}{2}x^2$ при $n \to \infty$.

$$\psi_n(x_{nk}) = -\left(np + \sqrt{b_n}x_{nk}\right)\ln\left(1 + \frac{\sqrt{b_n}x_{nk}}{np}\right)$$

$$-\left(n(1-p) - \sqrt{b_n}x_{nk}\right)\ln\left(1 - \frac{\sqrt{b_n}x_{nk}}{n(1-p)}\right)$$

$$= -\left(np + \sqrt{b_n}x_{nk}\right)\left(\frac{(1-p)x_{nk}}{\sqrt{b_n}} - \frac{1}{2}\frac{(1-p)^2x_{nk}^2}{b_n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{b_n^3}}\right)\right)$$

$$+\left(n(1-p) - \sqrt{b_n}x_{nk}\right)\left(\frac{px_{nk}}{\sqrt{b_n}} + \frac{1}{2}\frac{p^2x_{nk}^2}{b_n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{b_n^3}}\right)\right)$$

$$= -\frac{np(1-p)x_{nk}}{\sqrt{b_n}} - (1-p)x_{nk}^2 + \frac{(1-p)x_{nk}^2}{2} + \frac{np(1-p)x_{nk}}{\sqrt{b_n}}$$

$$-px_{nk}^2 + \frac{px_{nk}^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{b_n}}\right) = -\frac{x_{nk}^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{b_n}}\right), \quad n \to \infty.$$

Звідки

$$\sqrt{b_n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}.$$

Зауваження 21.1. При розв’язуванні задач, де потрібно використовувати асимптотичні оцінки біноміального розподілу, слід враховувати, що на відміну від теореми Пуассона, де np обмежена величина при всіх $n \geq 1$, у теоремі Муавра-Лапласа $np \to \infty$ при $n \to \infty$.

Лекція 22. *Функція розподілу. Основні неперервні розподіли*

Означення 22.1. *Функцією розподілу випадкової величини ξ називається функція*

$$F_\xi(x) = P(\xi < x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Часто функцію розподілу позначають як $F(x)$, якщо немає потреби уточнювати випадкову величину, яка її стосується. Також слід зауважити, що у деяких підручниках під функцією розподілу мають на увазі функцію

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x).$$

Функція розподілу $F(x)$ має такі властивості:

1. $F(x)$ – неспадна функція;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
3. $F(x)$ – неперервна зліва функція.

Властивості 1 – 3 є прямим наслідком властивостей 4 – 6 (див. Лекція 15).

Означення 22.2. *Випадкова величина ξ називається неперервною, якщо її функція розподілу $F(x)$ є неперервною функцією на $\mathbb{R}$.*

Вправа 22.1. Переконайтесь, що дискретна випадкова величина не є неперервною.

Функція розподілу дискретної випадкової величини називається *дискретною функцією розподілу*.

Означення 22.3. *Неперервна випадкова величина ξ (а з нею і її функція розподілу) називається абсолютно неперервною, якщо існує інтегрована на $\mathbb{R}$ функція $f(x)$ така, що* $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

При цьому $f(x)$ називається щільністю розподілу випадкової величини ξ.

Очевидно, що якщо щільність f – неперервна функція, то

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Означення 22.4. *Якщо неперервна випадкова величина (а з нею і її функція розподілу) не має щільності розподілу, то вона називається сингулярною.*

Наведемо без доведення теорему, яка підсумовує інформацію про можливі функції розподілу:

Теорема 22.1. *Будь-яку функція розподілу єдиним чином можна зобразити у вигляді*

$$F(x) = \lambda_1 F_d(x) + \lambda_2 F_a(x) + \lambda_3 F_s(x),$$

де $\lambda_i \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1;$ $F_d(x)$ – дискретна функція розподілу; $F_a(x)$ – абсолютно неперервна функція розподілу; $F_s(x)$ – сингулярна функція розподілу.

Оскільки функція розподілу $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, неперервна зліва функція, то за теоремою 6.1 породжує міру Лебега-Стилтьєса μ_F на $\mathbb{R}$ таку, що для довільної борелевої множини $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(\xi \in B) = \mu_F(B).$$

Основні неперервні розподіли

1. Рівномірний розподіл

Означення 22.5. *Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на $[a, b]$ (позначається $\xi \sim U[a, b]$), якщо її функція розподілу має вигляд*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ (x-a)/(b-a), & x \in [a,b]; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Вправа 22.2. Виписати щільність розподілу $f_\xi(x)$. Побудувати графіки $F_\xi(x)$ та $f_\xi(x)$ для випадку $a = 0$, $b = 1$.

2. Експоненціальний розподіл

Означення 22.6. *Випадкова величина ξ має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda > 0$ (позначається $\xi \sim Exp(\lambda)$), якщо її функція розподілу має вигляд*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Щільність експоненціального розподілу

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Вправа 22.3. Довести, що для довільних $0 \le x < y$ експоненціальний розподіл має властивість відсутності пам'яті:

$$P(\xi > y / \xi > x) = P(\xi > y - x).$$

3. Розподіл Коші

Означення 22.6. *Випадкова величина ξ має розподіл Коші з параметрами $x_0, \nu > 0$, якщо її функція розподілу має вигляд*

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - x_0}{\nu}\right).$$

Щільність розподілу Коші

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{(x - x_0)^2 + \nu^2}.$$

4. Нормальний розподіл

Означення 22.6. *Випадкова величина ξ має нормальний (або гауссовий) розподіл з параметрами μ, σ^2 (позначається $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$), якщо її функція розподілу має вигляд*

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

При $\mu = 0$, $\sigma = 1$ нормальний розподіл називається *стандартним*.

Лекція 23. *Математичне сподівання. Граничні теореми*

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ймовірнісний простір, на якому задана випадкова величина ξ, а $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелева функція.

Означення 23.1. *Математичним сподіванням випадкової величини $g(\xi)$ називається інтеграл Лебега $g(\xi)$ по ймовірнісній мірі P*

$$Eg(\xi) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega))P(d\omega). \tag{23.1}$$

Означення 23.2. *Випадкова величина ξ називається інтегрованою, якщо її математичне сподівання скінченне, що, як випливає із властивостей інтеграла Лебега, еквівалентно $E|\xi| < +\infty$.*

Теорема 23.1. *Нехай ξ має функцію розподілу $F(x)$*, тоді

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Доведення. Легко бачити, що ймовірнісна міра P породжує міру Лебега-Стилтьєса: $\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_F(B) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} = P(\xi^{-1}(B)),$$

яку надалі будемо позначати $F(B) = \mu_F(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Дійсно, оскільки, як неважко переконатись

$$F([a,b)) = F(b) - F(a),\ F((a,b)) = F(b) - F(a+),$$

$$F([a,b]) = F(b+) - F(a), \qquad F(]a,b]) = F(b+) - F(a+),$$

то за теоремою 6.1 і продовженням Каратеодорі F є мірою. Далі, здійснюючи заміну змінної $x = \xi(\omega)$ в інтегралі формули 23.1 (див. теорема 14.1), маємо

$$\int_{\Omega} g(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)P(\xi^{-1}(dx)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Якщо ξ – абсолютно неперервна випадкова величина із щільністю f, то

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Якщо ж $\xi: \Omega \to X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $(N \le +\infty)$ – дискретна випадкова величина з розподілом $p_i = P(\xi = x_i)$, $1 \le i \le N$, то

$$Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{N} g(x_i)p_i.$$

Основні властивості математичного сподівання

У теорії ймовірності поняттю «майже всюди» відповідає поняття «майже напевне» (скорочено м. н.), тобто випадкова подія A відбувається майже напевне, якщо її ймовірність дорівнює одиниці.

Перечислимо основні властивості математичного сподівання, які автоматично випливають із властивостей інтеграла Лебега:

1. $Ec = c$;
2. Якщо $\xi = 0$ м. н., то $E\xi = 0$;
3. Якщо $\xi \ge 0$ м. н., то $E\xi \ge 0$;
4. Якщо ξ і η – інтегровані випадкові величини, то
$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta;$$
5. $E(c\xi) = cE\xi$;
6. Якщо $\xi \le \eta$ м. н., то $E\xi \le E\eta$;
7. $|E\xi| \le E|\xi|$.

Усі граничні теореми для інтеграла Лебега автоматично переносяться на випадок математичного сподівання.

Теорема 23.2 (Про монотонну збіжність). *Нехай* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *– послідовність випадкових величин. Якщо*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \omega \in \Omega,\ 0 \leq \xi_n(\omega) \leq \xi_{n+1}(\omega)\ \text{і}\ \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega),\ \text{то}$$

$$E\xi_n \to E\xi, \quad n \to \infty. \tag{23.2}$$

Теорема 23.2 є наслідком теореми 10.1.

Теорема 23.3 (Фату). *Нехай* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *– послідовність невід'ємних випадкових величин. Тоді*

$$E \liminf_{n\to\infty} \xi_n \leq \liminf_{n\to\infty} E\xi_n.$$

Теорема 23.3 є наслідком теореми 11.2 (Фату).

Теорема 23.4 (Лебега про мажоровану збіжність). *Нехай випадкові величини* $\xi, \eta, \{\xi_n, n \geq 1\}$ *задовольняють умови:*

1. $\xi_n \to \xi, n \to \infty$ (м. н.);
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\xi_n| \leq \eta$ *і* $E\eta < \infty$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} E|\xi_n - \xi\,| = 0.$$

Теорема 23.4 випливає із теореми 11.4.

Наслідок 23.1. *Оскільки* $|E\xi_n - E\xi\,| \leq E|\xi_n - \xi\,|$, *то* $E\xi_n \to E\xi, n \to \infty$.

Лекція 24. *Дисперсія випадкової величини. Види збіжності випадкових величин.*

Означення 24.1. *Дисперсією випадкової величини* ξ *називається число*

$$Var(\xi) = E(\xi - E\xi)^2.$$

При цьому величина $\sigma = \sqrt{Var(\xi)}$ називається *середньоквадратичним відхиленням*.

Основні властивості дисперсії

1. $Var(\xi) \geq 0$;
2. $Var(\xi) = 0$ еквівалентно $\xi = c$ м. н.;

3. $Var(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$;

4. $Var(c\xi + d) = c^2 Var(\xi)$.

Вправа 24.1. Довести властивості 1 – 4 дисперсії.

Означення 24.2. *Величина* $E(\xi)^k$, $k \in \mathbb{N}$ *називається* k*-тим моментом випадкової величини* ξ.

Означення 24.3. *Послідовність випадкових величин* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *збігається з ймовірністю 1 до випадкової величини* ξ *або збігається майже напевне (позначається* $\xi_n \xrightarrow{P1} \xi$ *або* $\xi_n \to \xi$ (м. н.)*), якщо*

$$P\left(\omega: \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

Означення 24.4. *Послідовність випадкових величин* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *збігається за ймовірністю до випадкової величини* ξ *(позначається* $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$*), якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Означення 24.5. *Послідовність випадкових величин* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *збігається до випадкової величини* ξ *у середньому порядку* $q \geq 1$, *(позначається* $\xi_n \xrightarrow{L_q} \xi$*), якщо* $E|\xi_n - \xi|^q \to 0$ *при* $n \to \infty$.

При $q = 2$ збіжність називається у *середньому квадратичному*.

Означення 24.6. *Послідовність випадкових величин* $\{\xi_n, n \geq 1\}$ *із функціями розподілу* $\{F_n, n \geq 1\}$ *збігається слабко до випадкової величини* ξ *з функцією розподілу* F *(позначається* $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ *або* $F_n \xrightarrow{w} F$*), якщо для кожної неперервної обмеженої функції* g *при* $n \to \infty$ *має місце збіжність*

$$Eg(\xi_n) \to Eg(\xi),$$

або по іншому

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Теорема 24.1 (про однозначність слабкої границі). *Слабка границя визначена однозначно.*

Доведення. Нехай для кожної неперервної обмеженої функції g має місце рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dG(x). \tag{24.1}$$

Позначимо через K клас усіх вимірних функцій g, для яких виконується (24.1). За теоремою 11.4 (теорема Лебега про мажоровану збіжність), із того, що $g_n \in K$ і для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N}$, $|g_n(x)| \le c = const$, і

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g_0(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$$

випливає, що $g_0 \in K$. Таким чином, обмеженими неперервними функціями ми можемо наблизити будь-який індикатор $I_{\{-\infty,t\}}$, тобто $I_{\{-\infty,t\}} \in K,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Звідки $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{-\infty,t\}}dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{-\infty,t\}}dG(x) = G(t), \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Означення 24.7. *Послідовність функцій розподілу* $\{F_n, n \ge 1\}$ *збігається в основному до функції розподілу* F *(те ж, що й послідовність випадкових величин* $\xi_n \sim F_n$ *збігається за розподілом до* $\xi \sim F$*), якщо для кожної точки* x*, що є точкою неперервності* F*, має місце збіжність* $F_n(x) \to F(x)$ *при* $n \to \infty$*.*

Позначається $F_n \xrightarrow{O} F$ або $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Теорема 24.2 (про еквівалентність слабкої збіжності та в основному). *Нехай* $F_n, n \ge 1$ *послідовність функцій розподілу. Тоді*

$$F_n \xrightarrow{w} F \text{ еквівалентно } F_n \xrightarrow{O} F$$

і при цьому F *– функція розподілу. Або в термінах випадкових величин*

$$\xi_n \xrightarrow{w} \xi \text{ еквівалентно } \xi_n \xrightarrow{d} \xi.$$

Без доведення.

Теорема 24.3. 1) *Якщо* $\xi_n \xrightarrow{w} c = const$*, то* $\xi_n \xrightarrow{p} c$.

2) *якщо* $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$*, то* $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$.

Доведення. 1) Нехай $\xi_n \sim F_{\xi_n}$, тоді за умовою теореми

$$F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{O} F_c(x) = \begin{cases} 0, & x < c; \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

Оскільки $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$ є точкою неперервності F_c, то

$$F_{\xi_n}(x) \to F_c(x),\, x \neq c.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ покажемо, що $P(|\,\xi_n - c| < \varepsilon) \to 1, n \to \infty$.

Дійсно,

$$P(|\,\xi_n - c| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < \xi_n - c < \varepsilon) = P(c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon) \geq$$

$$\geq P\left(c - \frac{\varepsilon}{2} \leq \xi_n < c + \varepsilon\right) = F_{\xi_n}(c + \varepsilon) - F_{\xi_n}\left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) \to$$

$$\to F_c(c + \varepsilon) - F_c\left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Отже, $P(|\,\xi_n - c| < \varepsilon) \to 1, n \to \infty$ або $P(|\,\xi_n - c| \geq \varepsilon) \to 0, n \to \infty$.

2) Відмітимо очевидні властивості, якщо $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$, то для $c = const$ має місце

$$c\xi_n \xrightarrow{w} c\xi \text{ та } c + \xi_n \xrightarrow{w} c + \xi \text{ (довести).}$$

Покажемо що якщо $\xi_n \xrightarrow{p} c = const$ та $\eta_n \xrightarrow{w} \eta$ має місце $\xi_n\eta_n \xrightarrow{w} c\eta$ та $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{w} c + \eta$. З урахуванням вищесказаного досить першу властивість довести при $c = 1$, а другу при $c = 0$.

Доведемо другу властивість, тобто якщо $\xi_n \xrightarrow{p} 0$, $\eta_n \xrightarrow{w} \eta$, то $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{w} \eta$.

Нехай x_0 – точка неперервності $F_\eta(x)$, покажемо, що

$$F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) \to F_\eta(x_0).$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ таке, що $F_\eta(x)$ неперервна в точках $x_0 - \varepsilon$ та $x_0 + \varepsilon$. Нехай $H_1 = \{|\xi_n| \geq \varepsilon\}$, $H_2 = \{|\xi_n| < \varepsilon\}$, тоді

$$\begin{aligned} F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) &= P(\xi_n + \eta_n < x_0) = \\ &= P(\xi_n + \eta_n < x_0, H_1) + P(\xi_n + \eta_n < x_0, H_2). \end{aligned} \tag{24.2}$$

Далі, для першого доданку лівої частини (24.2)

$$0 \leq P_1 = P(\xi_n + \eta_n < x_0, H_1) \leq P(H_1) = P(|\xi_n| \geq \varepsilon), \tag{24.3}$$

і ця ймовірність може бути як завгодно малою при достатньо великих n.

Для другого доданку лівої частини (24.2) маємо

$$0 \le P_2 = P(\xi_n + \eta_n < x_0, H_2) = P(\xi_n + \eta_n < x_0, -\varepsilon < \xi_n < \varepsilon) \\ \le P(-\varepsilon + \eta_n < x_0) = P(\eta_n < x_0 + \varepsilon). \tag{24.4}$$

З іншого боку,

$$P_2 = P(\xi_n + \eta_n < x_0, -\varepsilon < \xi_n < \varepsilon) \ge \\ \ge P(\varepsilon + \eta_n < x_0) - P(|\xi_n| \ge \varepsilon). \tag{24.5}$$

Враховуючи (24.2) – (24.5)

$$F_{\eta_n}(x_0 - \varepsilon) - P(|\xi_n| \ge \varepsilon) \le F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) \le P(|\xi_n| \ge \varepsilon) + P(\eta_n < x_0 + \varepsilon).$$

Звідки, враховуючи, що $F_\eta(x)$ неперервна в точках $x_0 - \varepsilon$ та $x_0 + \varepsilon$, маємо

$$F_\eta(x_0 - \varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) \le \limsup_{n\to\infty} F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) \le F_\eta(x_0 + \varepsilon).$$

Оскільки x_0 – точка неперервності $F_\eta(x)$, то спрямувавши $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$F_{\xi_n + \eta_n}(x_0) \to F_\eta(x_0), \quad n \to \infty.$$

Лекція 25. *Ймовірнісні нерівності*

Теорема 25.1 (нерівність Чебишова). *Для довільної невід'ємної випадкової величини* ξ і довільного $a > 0$ *має місце нерівність*

$$P(\xi \ge a) \le \frac{E\xi}{a} \ .$$

Доведення. Із очевидної нерівності $\xi \ge aI_{\{\xi \ge a\}}$, $\forall\, \omega \in \Omega$ та властивості 6 математичного сподівання випливає шукана нерівність

$$E\xi \ge E\left(aI_{\{\xi \ge a\}}\right) = aP(\xi \ge a).$$

Наслідок 25.1. *Нехай* $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, а ξ *– невід'ємна випадкова величина, тоді*

$$P(g(\xi) \ge a) \le \frac{Eg(\xi)}{a}, \quad a > 0. \tag{25.1}$$

Теорема 25.2 (нерівність Чебишова для дисперсії). *Якщо існує* $Var(\xi)$, *то*

$$P(|\xi - E\xi| \ge \varepsilon) \le \frac{Var(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Доведення. Із нерівності Чебишова випливає

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = P((\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{Var(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 25.3 (нерівність Йенсена). *Нехай g опукла вниз функція і випадкові величини ξ та $g(\xi)$ інтегровані. Тоді*

$$g(E\xi) \leq Eg(\xi).$$

Доведення. Із означення опуклої до низу функції випливає, що для довільного фіксованого x_0 існує k, що для всіх x маємо нерівність

$$g(x) \geq g(x_0) + k(x - x_0).$$

Підставимо в цю нерівність $x = \xi$, $x_0 = E\xi$ і візьмемо математичне сподівання, маємо

$$Eg(\xi) \geq Eg(E\xi) + E\big(k(\xi - E\xi)\big) = g(E\xi) + k(E\xi - E\xi) = g(E\xi).$$

Теорема 25.4 (нерівність Ляпунова). *Для* $1 \leq s \leq t$

$$(E|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \leq (E|\xi|^t)^{\frac{1}{t}}.$$

Доведення. Розглянемо функцію $g(x) = x^{\frac{t}{s}}$, $x \geq 0$. Неважко переконатись, що вона опукла до низу. З використанням нерівності Йенсена, маємо

$$g(E|\xi|^s) = (E|\xi|^s)^{\frac{t}{s}} \leq Eg(|\xi|^s) = E|\xi|^t.$$

Піднесення обох частини цієї нерівності до $\frac{1}{t}$ завершує доведення.

Зауваження 25.1. *Із нерівності Ляпунова та властивості 3 дисперсії випливає, що якщо $E(\xi)^2 < \infty$, то існує дисперсія $Var(\xi) < \infty$.*

Теорема 25.5 (нерівність Гельдера). *Нехай числа $p, q > 1$ такі, що*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тоді

$$E|\xi\eta| \leq (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Нерівність Гельдера випливає із нерівності

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b > 0. \tag{25.2}$$

А ця нерівність є наслідком такої нерівності: для неперервної строго монотонно зростаючої функції $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (φ^{-1}– обернена до φ) має місце

$$ab \le \int_0^a \varphi(u)du + \int_0^b \varphi^{-1}(v)dv, \quad a > 0, b > 0.$$

Для обґрунтування цієї нерівності досить зобразити рисунок.

Підставивши у цю нерівність $\varphi(u) = u^{p-1}$ (тоді $\varphi^{-1}(v) = v^{\frac{1}{p-1}}$), отримаємо нерівність (25.2). Далі, підставляємо $a = \frac{|\xi|}{(E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}}$ та $b = \frac{|\eta|}{(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}}$ у нерівність (25.2) і беремо математичне сподівання, маємо

$$E\,|\xi\eta|/(E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}(E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}} \le \frac{E|\xi|^p}{pE|\xi|^p} + \frac{E|\eta|^q}{qE|\eta|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Зауваження 25.2. *При* $p = q = 2$ *нерівність Гельдера є нерівністю Коші-Буняковського-Шварца.*

Лекція 26. ***Співвідношення між різними видами збіжності***

Теорема 26.1. *Мають місце такі співвідношення*

1. *Якщо* $\xi_n \xrightarrow{P1} \xi$, *то* $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$;
2. *Якщо* $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$, *то* $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$;
3. *Якщо* $1 \le s \le t$ *і* $\xi_n \xrightarrow{L_t} \xi$, *то* $\xi_n \xrightarrow{L_s} \xi$.

Доведення. 1. Із означення збіжності з ймовірністю 1 випливає, що $\forall\, k \in \mathbb{N}$ існує N таке, що $\forall\, n \ge N$, $P\left\{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \le \frac{1}{k}\right\} = 1$. Це можна записати у вигляді

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \le \frac{1}{k}\right\}\right) = 1.$$

Легко бачити, що це еквівалентно

$$P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\frac{1}{k}\right\}\right)=1$$

для всіх $k\in\mathbb{N}$. Оскільки $\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\le\frac{1}{k}\right\}$ зростає при рості N, то, враховуючи властивість 4 ймовірності (див. Лекція 15), маємо для всіх $k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{N\to\infty}P\left(\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\le\frac{1}{k}\right\}\right)=1.$$

Очевидно, що $\frac{1}{k}$ у правій частині границі можна замінити на довільне $\varepsilon>0$.

Отже, $\xi_n\xrightarrow{P1}\xi$ еквівалентно

$$\lim_{N\to\infty}P\left(\bigcap_{n=N}^{\infty}\{|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\le\varepsilon\}\right)=1\quad\forall\,\varepsilon>0.$$

Оскільки $P(|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\le\varepsilon)\ge P(\bigcap_{k=n}^{\infty}\{|\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\le\varepsilon\})\to 1$, то із $\xi_n\xrightarrow{P1}\xi$ випливає $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$.

2. Нехай $\xi_n\xrightarrow{L_1}\xi$. Із нерівності Чебишова для $\varepsilon>0$

$$P(|\xi_n-\xi|\ge\varepsilon)\le\frac{E|\xi_n-\xi|}{\varepsilon}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Отже, $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$.

3. Нехай $\xi_n\xrightarrow{L_t}\xi$. Із нерівності Ляпунова

$$(E|\xi_n-\xi|^s)^{\frac{1}{s}}\le(E|\xi_n-\xi|^t)^{\frac{1}{t}}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Отже, $\xi_n\xrightarrow{L_s}\xi$.

Наслідок 26.1. *Із доведення пункту 1 теореми 26.1 випливає, що* $\xi_n\xrightarrow{P1}\xi$ *еквівалентно*

$$\lim_{N\to\infty}P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}\right)=0,\quad\forall\,\varepsilon>0.$$

Із σ-півадитивності ймовірності випливає

$$P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}\right)\leq\sum_{n=N}^{\infty}P\{|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}.$$

Отже, для $\xi_n \xrightarrow{P1} \xi$ *еквівалентно достатньо, щоб для довільного* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|>\varepsilon\}<\infty.$$

Теорема 26.2. *Якщо послідовність* $\{\xi_n\}$ *збігається за ймовірністю до* ξ, *то існує підпослідовність* $\{\xi_{n_k}\}$ *така, що* $\xi_{n_k} \xrightarrow{P1} \xi$ *при* $k\to\infty$.

Доведення. Неважко переконатись, що із того, що $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ випливає, що для будь-якого k існує n_k таке, для якого $P\left\{\left|\xi_{n_k}(\omega)-\xi(\omega)\right|>\frac{1}{k}\right\}<\frac{1}{k^2}$.

Отже, $\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\left|\xi_{n_k}(\omega)-\xi(\omega)\right|>\frac{1}{k}\right\}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}<\infty$. Звідки за теоремою Бореля-Кантеллі відбувається тільки скінченна кількість подій $\left\{\left|\xi_{n_k}(\omega)-\xi(\omega)\right|>\frac{1}{k}\right\}$.

Отже, для всіх досить великих k $P\left\{\left|\xi_{n_k}(\omega)-\xi(\omega)\right|\leq\frac{1}{k}\right\}=0$, тобто

$$\xi_{n_k} \xrightarrow{P1} \xi \text{ при } k\to\infty.$$

Незалежні випадкові величини

Означення 26.1. *Випадкові величини* ξ_1, $\xi_2, \dots,$ ξ_n *називаються незалежними (або незалежними в сукупності), якщо для довільних чисел* x_1, $x_2, \dots, x_n$ *події* $\{\xi_1<x_1\}$, $\{\xi_2<x_2\}, \dots,$ $\{\xi_n<x_n\}$ *незалежні в сукупності.*

Позначимо через $\mathcal{A}_\xi=\xi^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)=\{\xi^{-1}(B): B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Вправа 26.1. *Довести, що* $\mathcal{A}_\xi$ – σ*-алгебра.*

Підказка: скористайтесь властивостями

1. $\forall\, A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), \xi^{-1}(A\setminus B)=\xi^{-1}(A)\setminus\xi^{-1}(B)$;
2. $\forall\,\{B_n, n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}), \xi^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\xi^{-1}(B_n)$.

Означення 26.2. σ*-алгебра* $\mathcal{A}_\xi=\xi^{-1}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ *називається* σ*-алгеброю, породженою випадковою величиною* ξ.

Альтернативне означення незалежних випадкових величин:

Означення 26.3. *Випадкові події* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *називаються незалежними, якщо незалежні* σ*-алгебри* $\mathcal{A}_{\xi_1}, \mathcal{A}_{\xi_2}, \ldots, \mathcal{A}_{\xi_n}$*, породжені цими випадковими величинами.*

Лекція 27. ***Закон великих чисел***

Лема 27.1. *Нехай* ξ *і* η *– незалежні випадкові величини. Тоді*

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta).$$

Доведення. 1. Нехай $\xi = I_A$ *і* $\eta = I_B$. Тоді ξ *і* η – незалежні, якщо A і B – незалежні.

$$E(\xi\eta) = E(I_A I_B) = E(I_{A\cap B}) = P(A\cap B) = P(A)P(B) = E(\xi)E(\eta).$$

2. Нехай ξ і η – прості незалежні випадкові величини $\xi = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} x_i$, $\eta = \sum_{j=1}^{m} I_{B_j} y_j$, де $A_i = \{\xi = x_i\}$, $B_j = \{\eta = y_j\}$. Із незалежності ξ і η випливає незалежність подій A_i та B_j. Отже,

$$E(\xi\eta) = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i} \sum_{j=1}^{m} y_j I_{B_j}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j I_{A_i\cap B_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\, y_j P\left(A_i \cap B_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\, y_j P(A_i)\, P\left(B_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) \sum_{j=1}^{m} y_j\, P\left(B_j\right) = E(\xi)E(\eta).$$

3. Нехай ξ і η – невід'ємні незалежні випадкові величини. Із теореми 7.4 випливає, що існують послідовності простих невід'ємних функцій $0 \le \xi_n \uparrow \xi$, $0 \le \eta_n \uparrow \eta$, а отже, $0 \le \xi_n\eta_n \uparrow \xi\eta$, причому ξ_n та η_n незалежні, що випливає з незалежності ξ, η і побудові ξ_n та η_n при доведенні теореми 7.4.

За теоремою 23.2 (про монотонну збіжність), маємо

$$E(\xi\eta) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n\eta_n) = \lim_{n\to\infty}\left(E(\xi_n)E(\eta_n)\right) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n) \lim_{n\to\infty} E(\eta_n)$$

$$= E(\xi)E(\eta).$$

4. Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини. Покладемо:

$$\xi_+(\omega) = \max(\xi(\omega), 0),\ \ \xi_{(\omega)} = -\min(\xi\ (\omega), 0),\ \ \eta_+(\omega) = \max(\eta(\omega), 0),$$

$$\eta_-(\omega) = -\min(\eta\ (\omega), 0).$$

Тоді

$$E(\xi\eta) = E[(\xi_+ - \xi_-)(\eta_+ - \eta_-)] = E(\xi_+\eta_+ - \xi_+\eta_- - \xi_-\eta_+ + \xi_-\eta_-) =$$
$$= E\xi_+E\eta_+ - E\xi_+E\eta_- - E\xi_-E\eta_+ + E\xi_-E\eta_- = E(\xi)E(\eta).$$

Лема 27.2. *Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини. Тоді*

$$Var(\xi +\ \eta) = Var(\xi) + Var(\ \eta).$$

Доведення. Із властивості 3 дисперсії випливає, що

$$Var(\xi +\ \eta) = E(\xi +\ \eta)^2 - (E\xi + E\ \eta)^2$$
$$= E(\xi)^2 + E(\eta)^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta$$
$$= E(\xi)^2 - (E\xi)^2 + E(\eta)^2 - (E\eta)^2 = Var(\xi) + Var(\ \eta).$$

Тут використано властивість $E(\xi\eta) = E\xi E\eta$ для незалежних ξ *і* η.

Означення 27.1. *Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ називаються попарно незалежними, якщо ξ_i, ξ_j незалежні для будь-яких $i \neq j$.*

Очевидно, що якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні, то вони й попарно незалежні, зворотне твердження, взагалі кажучи, неправильне.

Лема 27.3. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні випадкові величини, а $g_1, g_2, \ldots, g_n$ – борелівські функції. Тоді $g_1(\xi_1), g_2(\xi_2), \ldots, g_n(\xi_n)$ – незалежні випадкові величини.*

Доведення. Нехай $B_k = \{x: g_k(x) < b_k\},\ k = 1, \ldots, n.$

Оскільки $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{g_k(\xi_k) < b_k\}\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\xi_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\{\xi_k \in B_k\}$$
$$= \prod_{k=1}^{n} P\{g_k(\xi_k) < b_k\}.$$

Вправа 27.1. *Довести, що якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно незалежні, то*

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\sum_{k=1}^{n}Var(\xi_k).$$

Нехай $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ – послідовність інтегрованих випадкових величин. Під законом великих чисел (ЗВЧ) мають на увазі збіжність до нуля різними видами збіжності величини

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k.$$

Теорема 27.2 (ЗВЧ у формі Чебишова). *Нехай* $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ – *послідовність попарно незалежних інтегрованих випадкових величин таких, що* $\forall\, n\in\mathbb{N}$ *існує* $Var(\xi_n)$ *і*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}Var(\xi_k)=0.$$

Тоді

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty.$$

Доведення. Із нерівності Чебишова для дисперсії випливає, що $\forall\,\varepsilon>0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}Var\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\right)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}Var\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=1}^{n}Var(\xi_k)\to0,\quad n\to\infty.$$

Наслідок 27.1. *Якщо* $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$*– послідовність попарно незалежних інтегрованих випадкових величин таких, що для деякого числа* $c>0$ *для всіх* $k\in\mathbb{N}, Var(\xi_k)<c$, *то*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}Var(\xi_k)\leq\frac{1}{n^2}nc=\frac{c}{n}\to0,\quad n\to\infty.$$

Отже, за цих умов законом великих чисел виконується.

Лекція 28. ***Нерівності Колмогорова Посилений закон великих чисел***

Теорема 28.1. (нерівності Колмогорова). *Нехай* $\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_n$ *набір незалежних інтегрованих випадкових величин таких, що*

$$E(\xi_k)^2 < \infty, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Позначимо $S_k = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k$.

1) *Тоді для всіх* $\varepsilon > 0$

$$P\left(\max_{1\le k\le n} |S_k - ES_k| \ge \varepsilon\right) \le \frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

2) *Якщо на додаток існує* $c > 0$, *що* $P(|\xi_k| < c) = 1$, $k = 1,\ldots,n$, *то*

$$P\left(\max_{1\le k\le n} |S_k - ES_k| \ge \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{(c+\varepsilon)^2}{E(S_n^2)}.$$

Доведення. 1) Не зменшуючи загальність, припускаємо, що $E\xi_k = 0$ для всіх $k = 1,\ldots,n$. Дійсно, якщо позначити $\tilde{\xi}_k = \xi_k - E\xi_k$, тоді

$$E\tilde{\xi}_k = 0,\ S_k - ES_k = \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \cdots + \tilde{\xi}_k, \text{ а } Var(S_n) = Var\big(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \cdots + \tilde{\xi}_k\big).$$

Введемо випадкові події

$$A = \left\{\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \varepsilon\right\}, \quad A_k = \{|S_1| < \varepsilon, \ldots, |S_{k-1}| < \varepsilon, |S_k| \ge \varepsilon\}.$$

Очевидно, що $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ та $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$, звідки $\sum_{k=1}^n I_{A_k} = I_A$. Легко бачити, що $|S_k| I_{A_k} \ge \varepsilon I_{A_k}$.

Із монотонності математичного сподівання (див. лекція 15 властивість 2) випливає

$$Var(S_n) = E(S_n^2) \ge E(S_n^2 I_A) = \sum_{k=1}^n E\big(S_n^2 I_{A_k}\big) = \sum_{k=1}^n E\left(\big(S_k + (S_n - S_k)\big)^2 I_{A_k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[E\big(S_k^2 I_{A_k}\big) + 2E\left(S_k I_{A_k}(S_n - S_k)\right) + E\big((S_n - S_k)^2 I_{A_k}\big)\right].$$

Далі скористаємось тим, що $|S_k| I_{A_k} \ge \varepsilon I_{A_k}$, звідки

$$E\big(S_k^2 I_{A_k}\big) \ge \varepsilon^2 E\big(I_{A_k}\big) = \varepsilon^2 P(A_k).$$

Випадкові величини $S_k I_{A_k}$ та $S_n - S_k = \xi_{k+1} + \cdots + \xi_n$ незалежні, тому

$$E\left(S_k I_{A_k}(S_n - S_k)\right) = E\left(S_k I_{A_k}\right)E(S_n - S_k) = 0.$$

Отже, враховуючи, що $E\left((S_n - S_k)^2 I_{A_k}\right) \geq 0$, маємо

$$Var(S_n) \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \varepsilon^2 P(A).$$

2) Легко бачити, що

$$E(S_n^2 I_A) = E(S_n^2) - E(S_n^2 I_{\bar{A}}) \geq E(S_n^2) - \varepsilon^2 P(\bar{A}) = E(S_n^2) - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 P(A),$$

тобто

$$E(S_n^2) - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 P(A) \leq E(S_n^2 I_A). \tag{28.1}$$

Далі, на A_k, $|S_{k-1}| \leq \varepsilon$ і $|S_k| = |S_{k-1} + \xi_k| \leq |S_{k-1}| + |\xi_k| \leq \varepsilon + c$. Звідки, з урахуванням $E\left(S_k I_{A_k}(S_n - S_k)\right) = E\left(S_k I_{A_k}\right)E(S_n - S_k) = 0$, маємо

$$\begin{aligned}
E(S_n^2 I_A) &= \sum_{k=1}^{n} \left[E\left(S_k^2 I_{A_k}\right) + E\left((S_n - S_k)^2 I_{A_k}\right)\right] \\
&\leq (\varepsilon + c)^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \sum_{i=k+1}^{n} E(\xi_i)^2 \\
&\leq (\varepsilon + c)^2 P(A) + P(A) \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i)^2 = P(A)[(\varepsilon + c)^2 + E(S_n^2)].
\end{aligned}$$

Звідки, враховуючи (28.1), маємо

$$E(S_n^2) - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 P(A) \leq P(A)[(\varepsilon + c)^2 + E(S_n^2)].$$

Тобто

$$P(A) \geq \frac{E(S_n^2) - \varepsilon^2}{(\varepsilon + c)^2 + E(S_n^2) - \varepsilon^2} = 1 - \frac{(\varepsilon + c)^2}{(\varepsilon + c)^2 + E(S_n^2) - \varepsilon^2} \geq 1 - \frac{(\varepsilon + c)^2}{E(S_n^2)}.$$

Оскільки $E\xi_k = 0$, то легко переконатись, що

$$E(S_n^2) = \sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2.$$

Отже,

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{(\varepsilon + c)^2}{\sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2}. \tag{28.2}$$

Посилений закон великих чисел (ПЗВЧ)

Теорема 28.2 (ПЗВЧ) *Нехай* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність незалежних випадкових величин із скінченним другим моментом така, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(\xi_n)}{n^2} < \infty.$$

Тоді послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *задовольняє ПЗВЧ:*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\xi_k \xrightarrow{P1} 0, \quad n \to \infty.$$

Доведення. Як і в доведенні нерівності Колмогорова, не зменшуючи загальність, припускаємо, що $E\xi_k = 0$ для всіх $k \geq 1$ і, отже, потрібно показати, що

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{P1} 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Введемо випадкові величини

$$\zeta_k = \max_{2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1} |S_n|, \quad k \geq 1,$$

де $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Для $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$, $\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{\zeta_k}{n} \leq \frac{\zeta_k}{2^{k-1}}$.

Тому для збіжності $\frac{|S_n|}{n} \xrightarrow{P1} 0, n \to \infty$ досить, щоб $\frac{\zeta_k}{2^k} \xrightarrow{P1} 0$, $k \to \infty$.

Для фіксованого $\varepsilon > 0$ з нерівності Колмогорова маємо

$$P\left(\frac{\zeta_k}{2^k} \geq \varepsilon\right) = P\left(\max_{2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1} |S_n| \geq 2^k \varepsilon\right) \leq P\left(\max_{1 \leq n \leq 2^k - 1} |S_n| \geq 2^k \varepsilon\right)$$

$$\leq \frac{Var\left(S_{2^k - 1}\right)}{2^{2k}\varepsilon^2} = \frac{1}{2^{2k}\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{2^k - 1} Var(\xi_n)$$

Звідки, змінюючи порядок у подвійній сумі, маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\zeta_k}{2^k} \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{2^k - 1} Var(\xi_n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} Var(\xi_n) \sum_{k: 2^k > n} \frac{1}{2^{2k}}.$$

Обчислимо суму ряду $\sum_{k: 2^k > n} \frac{1}{2^{2k}}$, для цього позначимо $l_n = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, тоді

$$\sum_{k:2^k>n} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=l_n}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{4}{3 \cdot 2^{2l_n}} \leq \frac{4}{3n^2}.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\zeta_k}{2^k} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{4}{3\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(\xi_n)}{n^2} < \infty.$$

За теоремою Бореля-Кантеллі подія $\left\{\frac{\zeta_k}{2^k} \geq \varepsilon\right\}$ відбудеться тільки скінченне число разів при зростанні k до нескінченності, тобто $\frac{\zeta_k}{2^k} \xrightarrow{P1} 0,\ k \to \infty$, тобто $\frac{|S_n|}{n} \xrightarrow{P1} 0, n \to \infty$.

Наслідок 28.1. *Нехай* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин із скінченним другим моментом. Через* a *позначимо їх математичне сподівання. Тоді*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{P1} a, \quad n \to \infty.$$

Зауваження 28.1. *Насправді можна довести, що ПЗВЧ справедливий і за відсутності умови існування другого моменту, тобто якщо* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність незалежних однаково розподілених інтегрованих випадкових величин, то*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{P1} E\xi_1, \quad n \to \infty.$$

Лекція 29. *Критерії збіжності послідовностей і рядів*

Означення 29.1. *Послідовність випадкових величин* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *фундаментальна з ймовірністю одиниця, якщо*

$$P\left(\lim_{n,m \to \infty} |\xi_n - \xi_m| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Теорема 29.1. *Послідовність* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *фундаментальна з ймовірністю одиниця тоді і тільки тоді, коли для довільного* $\varepsilon > 0$

$$P\left(\sup_{\substack{k\ge n\\ l\ge n}}|\xi_k-\xi_l|\ge\varepsilon\right)\to 0,\ \ n\to\infty. \qquad (29.1)$$

Доведення. Позначимо $A_{k,l}^{\varepsilon}=\{\omega: |\xi_k-\xi_l|\ge\varepsilon\}$, $A_\varepsilon=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\substack{k\ge n\\ l\ge n}}^{\infty}A_{k,l}^{\varepsilon}$. Тоді $\{\omega: \{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ не фундаментальна$\}=\bigcup_{\varepsilon>0}A_\varepsilon$.

$$P\{\omega: \{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}\text{ не фундаментальна}\}=P\left(\bigcup_{\varepsilon>0}A_\varepsilon\right)=0\Leftrightarrow P(A_\varepsilon)=0, \varepsilon>0$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{\substack{k\ge n\\ l\ge n}}^{\infty}A_{k,l}^{\varepsilon}\right)\to 0, n\to\infty,\ \ \forall\,\varepsilon>0.$$

Наслідок 29.1. *Послідовність* $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ *фундаментальна з ймовірністю одиниця тоді і тільки тоді, коли для довільного* $\varepsilon>0$

$$P\left(\sup_{k\ge 0}|\xi_{n+k}-\xi_n|\ge\varepsilon\right)=0,\quad n\to\infty. \qquad (29.2)$$

Доведення. Дійсно, еквівалентність (29.1) та (29.2) випливає із таких співвідношень:

$$\sup_{k\ge 0}|\xi_{n+k}-\xi_n|\le\sup_{\substack{k\ge n\\ l\ge n}}|\xi_k-\xi_l|=\sup_{\substack{k\ge n\\ l\ge n}}|\xi_k-\xi+\xi-\xi_l|\le\sup_{\substack{k\ge n\\ l\ge n}}\{|\xi_k-\xi|+|\xi-\xi_l|\}$$

$$=\sup_{k\ge n}|\xi_k-\xi|+\sup_{l\ge n}|\xi_l-\xi|=2\sup_{k\ge 0}|\xi_{n+k}-\xi_n|.$$

Теорема 29.2 (Критерій збіжності майже напевне). *Для того щоб послідовність випадкових величин* $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ *збігалась майже напевне до деякої випадкової величини* ξ *необхідно і достатньо, щоб ця послідовність була фундаментальною з ймовірністю одиниця.*

Доведення. Необхідність. Якщо $\xi_n\xrightarrow{P1}\xi$, то

$$\sup_{\substack{k\ge n\\ l\ge n}}|\xi_k-\xi_l|\le\sup_{k\ge n}|\xi_k-\xi|+\sup_{k\ge n}|\xi_k-\xi|.$$

Достатність. Нехай послідовність випадкових величин $\{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}$ фундаментальна з ймовірністю одиниця. Нехай

$$N=\{\omega : \{\xi_n, n\in\mathbb{N}\}\text{ не фундаментальна}\},$$

тоді для $\forall\, \omega \in \Omega \setminus N$ послідовність $\{\xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна, отже, критерієм Коші існує границя $\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$.

Оскільки за умовою теореми $P(\Omega \setminus N\ ) = 1$, то $\xi_n \xrightarrow{P1} \xi$.

Теорема 29.3 (Хінчін). *Нехай* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність незалежних випадкових величин із скінченними другими моментами і* $E\xi_n = 0$.

1) *Для того, щоб ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *збігався з ймовірністю одиниця достатньо збіжності* $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2$.

2) *Якщо до цього* $\exists\, c > 0$, *що* $P(|\xi_n| \le c) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, *то ця умова є й необхідною.*

Доведення. 1) За теоремою 29.1 послідовність $S_m = \sum_{n=1}^{m} \xi_n$ збігається майже напевне, якщо $\{S_m, m \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна з ймовірністю одиниця, тобто $P\left(\sup_{k\ge 0}|S_{m+k} - S_m| \ge \varepsilon\right) \to 0,\ \ m \to \infty$.

Враховуючи неперервність ймовірності знизу та нерівності Колмогорова:

$$P\left(\sup_{k\ge 0}|S_{m+k} - S_m| \ge \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left\{\max_{1\le k\le n}|S_{m+k} - S_m| \ge \varepsilon\right\} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=m}^{m+n} Var(\xi_k)}{\varepsilon^2}$$
$$= \frac{\sum_{k=m}^{\infty} Var(\xi_k)}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки $E\xi_n = 0$, то $Var(\xi_k) = E\xi_k^2$ і із збіжності $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^2$ випливає

$$\sum_{k=m}^{\infty} Var(\xi_k) = \sum_{k=m}^{\infty} E\xi_k^2 \to 0, \quad m \to \infty,$$

тобто $\{S_m, m \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна з ймовірністю одиниця, а отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ – збіжний майже напевне.

3) Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ – збіжний майже напевне. Тоді за теоремою 29.2 $\{S_m, m \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна з ймовірністю одиниця, тобто існує $N \in \mathbb{N}$, що

$$P\left(\sup_{k\ge 0}|S_{m+k} - S_m| \ge \varepsilon\right) < \frac{1}{2}, \quad m \ge N. \qquad (29.3)$$

Але із нерівності (27.2) випливає, що

$$P\left(\sup_{k\ge 0}|S_{m+k} - S_m| \ge \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{(c+\varepsilon)^2}{\sum_{k=m+1}^{\infty} E\xi_k^2}.$$

Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2 = \infty$, то $P\left(\sup_{k\geq 0}|S_{m+k} - S_m| \geq \varepsilon\right) = 1$, що суперечить (29.3).

Теорема 29.4 (про «два ряди»). *Нехай* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність незалежних випадкових величин із скінченними другими моментами.*

Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *збігався з ймовірністю одиниця достатньо збіжності двох рядів* $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} Var(\xi_n)$.

Доведення. Із теореми 29.3 випливає, що за умови збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} Var(\xi_n)$ з ймовірністю одиниця збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n - E\xi_n)$. Враховуючи збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n$ отримуємо збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ з ймовірністю одиниця.

Лекція 30. *Характеристична функція*

Під *комплексною випадковою величиною* ξ маємо на увазі функцію на просторі елементарних подій Ω виду $\xi(\omega) = \xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega)$, $\omega \in \Omega$, де $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ дійсні випадкові величини. Якщо $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ інтегровані, то математичне сподівання ξ визначається так

$$E\xi = E\xi_1 + iE\xi_2.$$

Неважко переконатись, що усі базові властивості математичного сподівання зберігаються і у комплексному випадку.

Означення 30.1. *Характеристичною функцією випадкової величини* ξ *називається комплекснозначна функція*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 30.1. *Нехай* ξ *має функцію розподілу* $F(x)$. *Характеристична функція* $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ *задовольняє умови:*

1. $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1, \ \forall\, t \in \mathbb{R}$;
2. $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$;
3. $\varphi(t)$ *рівномірно неперервна по* $t \in \mathbb{R}$;
4. $\varphi(t)$ *невід'ємно визначена, тобто* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *для будь-яких дійсних* $t_1, \ldots, t_n$ *і будь-яких комплексних* $c_1, \ldots, c_n$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varphi(t_k - t_l)\, c_k \bar{c}_l \geq 0;$$

5. *Нехай* ξ_1, ξ_2 *– незалежні випадкові величини, а* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *– їх характеристичні функції. Тоді* $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$;

6. $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$;

7. *Формула обертання для функції розподілу. Нехай*

$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} dF(u)$ *– характеристична функція функції розподілу* F. *Тоді для точок* $a < b$, *які є точками неперервності F має місце*

$$F(b) - F(a) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{x} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\, \varphi(t)dt.$$

Як наслідок, функція F однозначно визначається характеристичною функцією $\varphi(t)$.

8. $\varphi(t)$ *є дійсною функцією тоді і тільки тоді, коли функція розподілу* $F(x)$ *симетрична, тобто*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \int_B dF(u) = \int_{-B} dF(u), \text{ де } -B = \{x: (-x) \in B\}.$$

9. *Якщо для деякого* $n \in \mathbb{N}$ $E|\xi|^n < \infty$, *то для всіх* $0 \leq m \leq n$ *існують* $\varphi^m(t) = \int_{\mathbb{R}} (iu)^m e^{itu} dF(u)$, $E\xi^m = \frac{\varphi^m(0)}{i^m}$,

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(it)^m}{m!} E\xi^m + \frac{(it)^n}{n!} r_n(t),$$

$$|r_n(t)| \leq 3E|\xi|^n \text{ і } r_n(t) \to 0,\ t \to 0.$$

10. *Якщо* $E|\xi|^n < \infty$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n} = R > 0,$$

то при всіх $|t| < \frac{1}{R}$

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(it)^m}{m!} E\xi^m.$$

Доведення.

1. $|\varphi(t)| = \left|Ee^{it\xi}\right| \le E\left|e^{it\xi}\right| = 1;$
2. $\overline{\varphi(t)} = E\overline{e^{it\xi}} = Ee^{-it\xi} = \varphi(-t);$
3. $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = \left|Ee^{it\xi}\left(e^{ih\xi} - 1\right)\right| \le E\left|e^{it\xi}\left(e^{ih\xi} - 1\right)\right|$

$$= E\left|e^{ih\xi} - 1\right|.$$

Використовуючи про мажоровану збіжність (теорема 23.4), отримаємо

$$E\left|e^{ih\xi} - 1\right| \to 0, \quad h \to 0.$$

4. Виконується рівність

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varphi(t_k - t_l)\, c_k \bar{c}_l = \sum_{k,l=1}^{n} E\left(e^{i(t_k - t_l)\xi}\right) c_k \bar{c}_l = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e^{it_k\xi}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \bar{c}_l e^{-it_l\xi}\right)\right]$$

$$= E\left(\left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{it_k\xi}\right|^2\right) \ge 0.$$

5. Використовуючи лему 27.3, маємо

$$\varphi(t) = Ee^{it(\xi_1+\xi_2)} = Ee^{it(\xi_1+\xi_2)} = Ee^{it\xi_1}Ee^{it\xi_2} = \varphi_1(t)\varphi_2(t).$$

6. Очевидно.
7. Доведемо цю властивість для випадку абсолютно неперервної функції розподілу F. Нехай f – щільність функції F. Тоді $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$, тобто $\varphi(t)$ є перетворенням Фур'є функції $f(x)$. Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, маємо $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$. Звідки, інтегруючи обидві частини по x від a до b і застосовуючи теорему Фубіні, маємо

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\left[\int_a^b e^{-itx}dx\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\left[\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\right]dt.$$

8. Якщо F симетрична, то

$$E\sin(t\xi) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, dF(x) = 0 \text{ і } \varphi_\xi(t) = E\cos(t\xi).$$

Навпаки, якщо $\varphi_\xi(t)$ дійсна, то

$$\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(t).$$

Оскільки характеристична функція однозначно визначає функцію розподілу випадкової величини, то ξ та $-\xi$ мають один і той же розподіл $F_\xi = F_{-\xi}$, а, значить $\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(\xi \in B) = \int\limits_B dF_\xi(u) = \int\limits_B dF_{-\xi}(u) = \int\limits_{-B} dF_\xi(u) = P\big(\xi \in (-B)\big).$$

9. Оскільки $E|\xi|^n < \infty$, то із нерівності Ляпунова $E|\xi|^m < \infty,\ 1 \le m \le n$. Розглянемо

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = Ee^{it\xi}\left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right).$$

Використовуючи очевидну нерівність

$$\frac{\left|e^{ihx} - 1\right|}{h} \le |x|,$$

за теоремою Лебега про мажоровану збіжність (теорема 23.4) існує

$$\lim_{h\to 0} E\left[e^{it\xi}\left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right)\right] = Ee^{it\xi}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{ih\xi} - 1}{h}\right) = iE\big(\xi e^{it\xi}\big) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{itx}dF(x).$$

Звідки

$$\varphi'(t) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{itx}dF(x).$$

За індукцією доводиться, що існують похідні $\varphi^m(t)$, для $1 < m \le n$.

Використовуючи формулу Тейлора у формі Лагранжа для $\cos(x)$, $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, маємо

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(ix)^k}{k!} + \frac{(ix)^n}{n!}(\cos(\theta_1 x) + i\sin(\theta_2 x)),$$

$$|\theta_1| < 1, |\theta_2| < 1,$$

звідки

$$Ee^{it\xi} = E\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it\xi)^k}{k!} + \frac{(it\xi)^n}{n!}(\cos(\theta_1(\omega)t\xi) + i\sin(\theta_2(\omega)t\xi))\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it)^k}{k!}E(\xi)^k + \frac{(it)^n}{n!}\big(E(\xi)^n + r_n(t)\big),$$

де $r_n(t) = E[\xi^n(\cos(\theta_1(\omega)t\xi) + i\sin(\theta_2(\omega)t\xi) - 1)]$.

Оскільки $\xi^n(\cos(\theta_1(\omega)t\xi) + i\sin(\theta_2(\omega)t\xi) - 1) \to 0$ при $t \to 0$, то за теоремою про мажоровану збіжність $r_n(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Також легко бачити, що

$$|r_n(t)| \le E|\xi^n\cos(\theta_1(\omega)t\xi)| + E|\xi^n\sin(\theta_2(\omega)t\xi)| + E|\xi^n| \le 3E|\xi^n|.$$

10. Нехай $|t_0| < \frac{1}{R}$, тоді, використовуючи формулу Стірлінга $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, маємо

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{|t_0|^n}{n!}E|\xi|^n\right]^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R}\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{E|\xi|^n}{n!}\right]^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Звідки, за ознакою Коші, ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|t_0|^m}{m!}E|\xi|^m$$

збігається, а отже, ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(it)^m}{m!}E\xi^m$$

збігається для всіх $|t| \le |t_0|$.

Оскільки для всіх $|t| \le |t_0|$ маємо

$$\left|\frac{(it)^n}{n!}r_n(t)\right| \le 3\frac{|t|^n}{n!}E|\xi^n| \to 0, \quad n \to \infty,$$

то

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(it)^m}{m!}E\xi^m.$$

Лекція 31. *Теорема про неперервність. Центральна гранична теорема*

Теорема 31.1 (Леві). *Нехай* $\{F_n, n \geq 1\}$ *послідовність функцій розподілу з характеристичними функціями* $\{\varphi_n\}$

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x).$$

Тоді для слабкої збіжності $F_n \xrightarrow{w} F$, $n \to \infty$, *до функції розподілу* $F(x)$, *необхідно і достатньо, щоб послідовність* $\varphi_n(t)$ *збігалась поточково до* $\varphi(t)$, *яка є неперервною в нулі. За цієї умови*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

Доведення. Необхідність випливає із означення слабкої збіжності, оскільки $\varphi(t) = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi)$, а $\cos(\cdot)$ та $\sin(\cdot)$ – неперервні обмежені функції. Достатність залишимо без доведення.

Теорема 31.2. *Нехай* $\xi \sim N(0,1)$. *Тоді характеристична функція* ξ *має вигляд*

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\xi t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Доведення. Оскільки інтеграл збігається рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-\frac{x^2}{2}} dx$$

можна диференціювати по t під знаком інтеграла. Легко бачити, що

$$\varphi'_\xi(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-itx-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Інтегруючи частинами, маємо

$$\varphi'_\xi(t)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\,de^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}e^{-itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-itx-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=-t\varphi_\xi(t).$$

Отже, $\varphi_\xi(t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\varphi'_\xi(t)=-t\varphi_\xi(t),$$

розв'язком якого є

$$\varphi_\xi(t)=C\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Оскільки $\varphi_\xi(0)=1$, то $C=1$.

Центральна гранична теорема (ЦГТ)

Теорема 31.3. *Нехай* $\{\xi_m, m\in\mathbb{N}\}$ *послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин із скінченним другим моментом і*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

Тоді для будь-якого $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{S_n-ES_n}{\sqrt{Var(S_n)}}\le x\right\}=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du. \qquad (31.1)$$

Доведення. Позначимо

$$\mu=E\xi_1,\ \sigma^2=Var(\xi_1),\ \text{тоді}\ ES_n=n\mu,\ \ Var(S_n)=n\sigma^2.$$

Нехай

$$\varphi(t)=Ee^{it(\xi_1-\mu)}.$$

Тоді, якщо

$$\varphi_n(t)=Ee^{it\frac{S_n-ES_n}{\sqrt{Var(S_n)}}},$$

то

$$\varphi_n(t)=\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

Із властивості 8 характеристичної функції маємо

$$\varphi(t)=1-\frac{\sigma^2t^2}{2}+o(t^2),\quad t\to 0.$$

Отже,

$$\varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + o(t^2)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2)\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$n \to \infty.$

Центральна гранична теорема справедлива не тільки у випадку однаково розподілених випадкових величин. Звичайно, для по-різному розподілених величин потрібні додаткові умови.

Розглянемо ЦГТ у формі Ліндеберга:

Теорема 31.4. *Нехай* $\{\xi_m, m \in \mathbb{N}\}$ *послідовність незалежних випадкових величин із скінченним другим моментом.*

a) *Нехай для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконується умова Ліндеберга*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{B_n^2} \int\limits_{|x - E\xi_k| \ge \varepsilon B_n} (x - E\xi_k)^2 dF_k(x) = 0,$$

де

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Var(\xi_k), \quad F_k(x) = P(\xi_k < x).$$

Тоді має місце рівність (31.1).

b) *Припустимо, що має місце* (31.1) *і*

$$\frac{1}{B_n^2} \max_{k \le n} Var(\xi_k) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тоді виконана умова Ліндеберга

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{B_n^2} \int\limits_{|x - E\xi_k| \ge \varepsilon B_n} (x - E\xi_k)^2 dF_k(x) = 0.$$

Доведення. а) З використанням таких же аргументів, як і при доведенні теореми 28.1, без зменшення загальності припускаємо, що $E\xi_k = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$\eta_n = \frac{S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n}{B_n}, \;\; \varphi_{\eta_n}(t) = Ee^{it\eta_n}, \;\; \varphi_{\xi_k}(t) = Ee^{it\xi_k}.$$

Тоді

$$\varphi_{\eta_n}(t) = Ee^{it\eta_n} = Ee^{it\frac{S_n}{B_n}} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}\left(\frac{t}{B_n}\right).$$

Для доведення теореми залишається показати, що

$$\varphi_{\eta_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad n \to \infty.$$

Із використанням рядів Тейлора для $e^{i\lambda}$ у формі Лагранжа, маємо такі розклади

$$e^{i\lambda} = 1 + i\lambda + r_1\frac{\lambda^2}{2},$$

$$e^{i\lambda} = 1 + i\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + r_2\frac{\lambda^3}{6},$$

де $r_i = r_i(\lambda)$, $|r_i| \leq 1$, $i = 1{,}2$.

Звідки

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_k(x)$$

$$= \int_{|x| \geq \varepsilon B_n} \left(1 + itx + r_1\frac{(tx)^2}{2}\right) dF_k(x)$$

$$+ \int_{|x| < \varepsilon B_n} \left(1 + itx - \frac{(tx)^2}{2} + r_2\frac{(|tx|)^3}{6}\right) dF_k(x)$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2} \int_{|x| \geq \varepsilon B_n} r_1 x^2 dF_k(x) - \frac{t^2}{2} \int_{|x| < \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x)$$

$$+ \frac{|t|^3}{6} \int_{|x| < \varepsilon B_n} r_2 |x|^3 dF_k(x).$$

Нагадаємо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_k(x) = E\xi_k = 0,$$

отже,

$$\varphi_{\xi_k}\left(\frac{t}{B_n}\right) = 1 - \frac{t^2}{2B_n^2}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} r_1 x^2 dF_k(x) + \frac{t^2}{2B_n^2}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon B_n} r_1 x^2 dF_k(x)$$

$$+\frac{t^3}{6B_n^2}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} r_1 x^3 dF_k(x).$$

Для інтегралів правої частини маємо такі очевидні нерівності

$$\left|\frac{1}{2}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon B_n} r_1 x^2 dF_k(x)\right| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon B_n} |r_1 x^2| dF_k(x) \leq \frac{1}{2}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x).$$

Звідки випливає, що існує δ_1, $|\delta_1| \leq \frac{1}{2}$, для якого

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon B_n} r_1 x^2 dF_k(x) = \delta_1 \int\limits_{|x|\geq\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x).$$

Аналогічно

$$\left|\frac{1}{6}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} r_2 x^3 dF_k(x)\right| \leq \frac{1}{6}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} \frac{\varepsilon B_n}{|x|}|x|^3 dF_k(x) \leq \frac{\varepsilon B_n}{6}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x).$$

Отже, існує δ_2, $|\delta_2| \leq \frac{1}{6}$, для якого

$$\frac{1}{6}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} r_2 x^3 dF_k(x) = \delta_2 \varepsilon B_n \int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x).$$

Покладемо

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x);$$

$$\beta_{nk} = \frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x).$$

Легко бачити, що $\beta_{nk} \leq \varepsilon^2$.

Підсумовуючи вищенаведене, маємо

$$\varphi_{\xi_k}\left(\frac{t}{B_n}\right) = 1 + t^2\delta_1\alpha_{nk} - \frac{t^2}{2}\beta_{nk} + |t|^3\delta_2\varepsilon\beta_{nk}.$$

Позначимо

$$\gamma_{nk} = t^2\delta_1\alpha_{nk} - \frac{t^2}{2}\beta_{nk} + |t|^3\delta_2\varepsilon\beta_{nk}. \tag{31.2}$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{nk} + \beta_{nk}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{B_n^2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_k(x)\right) = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} Var(\xi_k) = 1$$

та за умовою теореми

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{B_n^2}\int_{|x|\geq\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) = 0\,, \quad n\to\infty,$$

для досить великих n, маємо

$$\max_{k\leq n}|\gamma_{nk}| \leq t^2|\delta_1|\alpha_{nk} + \frac{t^2}{2}\beta_{nk} + |t|^3|\delta_2|\varepsilon\beta_{nk} \leq \frac{t^2}{2}(\alpha_{nk} + \beta_{nk}) + t^2\varepsilon^2 + |t|^3\varepsilon,$$

$$\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{nk}| \leq \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{nk} + \beta_{nk}) + \frac{|t|^3\varepsilon}{6}\sum_{k=1}^{n}\beta_{nk} \leq \frac{t^2}{2} + |t|^3\varepsilon.$$

Далі скористаємось формулою $\forall\, z \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел) має місце

$$\ln(1 + z) = z + \theta|z|^2, \quad |\theta| \leq 1.$$

Тут ln означає головне значення логарифму. Звідки

$$\varphi_{\xi_k}\left(\frac{t}{B_n}\right) = \ln(1 + \gamma_{nk}) = \gamma_{nk} + \theta_{kn}|\gamma_{nk}|^2, \quad |\theta_{kn}| \leq 1.$$

Зафіксуємо як завгодно мале $\delta > 0$ і виберемо N таке, що

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk} \leq \delta$$

при всіх $n > N$. Звідки для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\left|\frac{t^2}{2}+\ln\varphi_{\eta_n}(t)\right| = \left|\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\ln\varphi_{\xi_k}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| = \left|\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\gamma_{nk})\right|$$

$$= \left|\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk}+\sum_{k=1}^{n}\theta_{kn}|\gamma_{nk}|^2\right|$$

$$\le \left|\frac{t^2}{2}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\beta_{nk}\right)+t^2\delta_1\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}+|t|^3\delta_2\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\beta_{nk}\right.$$

$$\left.+\max_{k\le n}|\gamma_{nk}|\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{nk}|\right|$$

$$\le\left(\frac{1}{2}+\delta_1\right)t^2\delta+\frac{|t|^3}{6}\varepsilon+(t^2\varepsilon+|t|^3)\left(\frac{t^2}{2}+|t|^3\varepsilon\right)\varepsilon.$$

Отже, $\left|\frac{t^2}{2}+\ln\varphi_{\eta_n}(t)\right|\to 0,\ n\to\infty$, тобто

$$\varphi_{\eta_n}(t)\to e^{-\frac{t^2}{2}},\quad n\to\infty.$$

b) Без доведення.

Отже, пункт а) стверджує, що умова Ліндеберга є достатньою для виконання ЦГТ, а із пункту b) випливає, що за так званої умови граничного нехтування

$$\frac{1}{B_n^2}\max_{k\le n}Var(\xi_k)\to 0,\quad n\to\infty,$$

умова Ліндеберга є й необхідною.

Література

1. Гнєденко Б. В. *Курс теорії ймовірностей*. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. 464 с.

2. Карташов М. В. *Імовірність, процеси, статистика*. Київ: ВПЦ Київський університет, 2007. 504 с.

3. Карташов М. В. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. Київ: ТВіМС, 2004. 477 с.

4. Михайленко В. В., Ластівка І. О. *Теорія ймовірностей і математична статистика*. Київ: НАУ, 2013. 561 с.

5. Сеньо П. С. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. 2-ге вид. Київ: Знання, 2007. 556 с.

6. Скороход А. В. *Лекції з теорії випадкових процесів*. Київ: «Либідь», 1990. 164 с.