І. Г. Ленчук
Житомирський державний університет
імені Івана Франка,
Житомир, Україна,
lench456@gmail.com

ЕЛЕМЕНТИ КОНСТРУКТИВІЗМУ В ЗАДАЧАХ НА ОБЧИСЛЕННЯ ТА ДОВЕДЕННЯ

Коли доводиться працювати із планіметричними фігурами на дошці чи в зошиті при вирішенні тих чи інших пропозицій, потрібно на бінарних моделях (зображеннях, рисунках) дотримуватися визначених умовою позиційних та, в багатьох випадках, метричних співвідношень між окремими елементами фігур: рівні відрізки чи кути повинні бути рівними, прямі кути – прямими, паралельні прямі – паралельними, дотичні до кола – справді дотичними і т. ін. Лише за вказаних умов рисунок матиме статус *правильного* і *наочного*, а спостерігач (зокрема, сторонній) сприйматиме геометричний об’єкт таким, яким він є в оригіналі. Важливими додатковими засобами поліпшення якісного візуального подання та читання рисунка є стандартизовані лінії («риски») визначених типів і традиційно вживані й усім зрозумілі умовні позначення.

Рисунок у геометрії являє собою умовне **графічне зображення** фігури чи комбінації кількох фігур. Це не розкраска і не твір живопису фарбами, не картина й не ілюстрація до книги, ба – навіть не спеціальна зарисовка. Його призначення чітке і однозначне: візуальне поінформування студента (учня) про **істинне** взаємне розміщення, форму й розміри геометричної конструкції та, зокрема, її визначальних елементів. Набуті знання, навички роботи з рисунком і добре розвинена інтуїція ефективно сприяють «баченню» розумом ситуації, яка склалася, що налаштовує уявлення, упорядковує закономірну логіку міркувань й підказує покроковий шлях розв’язання задачі.

Стиль конструктивізму, як форма візуалізації геометрії, поки що недостатньо поцінований, ним майже не переймаються; знаючи напевне, що *об’єктом геометрії* є ***фігура***, а *головним засобом навчання* – ***рисунок***, викладач (учитель) традиційно не приділяє належної уваги виконанню рисунків.

Мета нашого матеріалу – продемонструвати прикладами стрижневу роль ретельно змодельованих рисунків у творчому конструюванні правил-орієнтирів образно-уявлюваних, побудовних і формально-логічних дій у пошуку шляхів розв’язання планіметричних задач «із родзинкою» на обчислення та доведення.

Пояснити чому так важлива увага до задач «із родзинкою» зовсім не складно, оскільки ніхто немає сумнівів, що геометричні пропозиції в один-два кроки, за усталеним зразком, мінімального рівня складності не відповідають діяльнісному принципу навчання, не розвивають особистість. Структура, геометрична суть задачі в будь-якій ситуації обов’язково піддається покроковому розшифруванню завдячуючи *старанному виконанню адекватного умові* ***рисунка*** та *поставленому образно-логічному мисленню*.

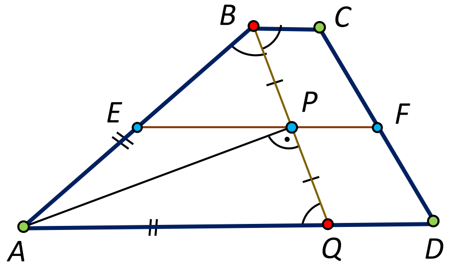

Рис. 1. Трапеція

Розглянемо приклади порівняно простих задач на *обчислення і доведення*.

Приклад 1. *Задано трапецію ABCD з основами AD і BC. Відомо, що бісектриса кута ABC перетинає середню лінію трапеції в точці P, а основу AD у точці Q. Знайти градусну міру кута APQ*.

Доступність у пошуку алгоритму розв’язання даної задачі залежить виключно від чіткості у виконанні рисунка. Якщо бісектрису BQ кута ABC та середню лінію EF трапеції провести виважено (рис. 1), відповідь уже буде зрозумілою **візуально**. Залишиться лише навести формальні обґрунтування, як-от: $\angle CBQ = \angle ABQ$ (адже BQ –

бісектриса), але $BC \parallel AD$, тому $\angle CBQ = \angle AQB$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих); звідси $\angle ABQ = \angle AQB$ і трикутник AQB – рівнобедрений, а середня лінія EF трапеції ділить його основу QB навпіл ($BP = PQ$). Отже, медіана AP трикутника AQB є водночас його висотою, тобто $\angle APQ = 90°$.

Приклад 2. *У рівнобедреному трикутнику* ABC ($AB = BC$) *кут* ABC *дорівнює* 20º. *На стороні* AB *узято точку* M *так, що* $\angle MCA = 60º$; *на стороні* CB *– точку* N *так, що* $\angle NAC = 50º$. *Знайти кут* NMA.

Специфіка задачі полягає в тому, що в її умові вже задано градусну міру кількох кутів та, до того ж, у висновку вимагається знайти градусну міру ще деякого кута. Для ліпшого унаочнення ситуації, доцільно модель-зображення геометричної фігури зі всіма елементами робити не лише з використанням циркуля та лінійки, але й (у першу чергу) – транспортира.

Нехай кут ABC у рівнобедреному трикутнику ABC справді дорівнює 20º, а точки M і N розташовуються на його бічних сторонах AB і CB відповідно так, що $\angle MCA = 60º$, а $\angle NAC = 50º$ (рис. 2). З'єднавши точки M і N відрізком, легко помітити, що $\angle NMA = = \angle NMC + \angle CMA$, де $\angle CMA = 40º$, адже $\angle BAC = 80º$, що очевидно. Тож задачу зведено до відшукання кута NMC.

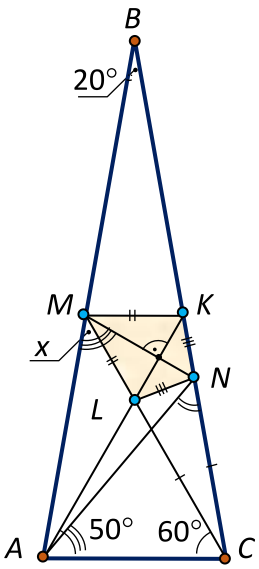

Рис. 2. Трикутник

Виконаємо *додаткові побудови*: візьмемо на стороні BC точку K так, щоб $\angle KAC = 60º$, тоді відрізок MK буде паралельним AC; точку $L = AK \cap CM$ з'єднаємо з точкою N.

Тепер уважно **поглянемо** на чотирикутник $MKNL$. Він надто схожий на дельтоїд. Тож у такий спосіб (*візуально*) прочитаний факт потрібно довести.

Трикутник ALC – рівносторонній, що безсумнівно, а трикутник ANC – рівнобедрений, оскільки $\angle ANC = 180º - (80º + + 50º) = 50º$. Отже, матимемо: $AC = CL = CN$, а $\angle CLN = \angle CNL = = (180º - 20º) : 2 = 80º$. Кут MLC – розгорнутий, тому дістанемо, що $\angle MLN = 180º - 80º = 100º$.

З іншого боку, прямі MK і AC паралельні, а KC – січна, отже й $\angle MKN = 100º$. Та, до того ж, можна легко помітити, що оскільки трикутник MKL теж рівносторонній, то $\angle KLN = \angle LKN = 100º - 60º = 40º$. Таким чином, як з'ясувалося, в чотирикутнику $MLNK$ кути у протилежних вершинах K і L, а також прилеглі до них пари сторін MK і ML, NK і NL відповідно рівні, тому цей чотирикутник справді є дельтоїдом, що й було зрозуміло з акуратно виконаного рисунка. Залишається лише кут при вершині M трикутника MKL розділити навпіл ($\angle NML = 60º : 2 = 30º$) і додати його градусну міру до градусної міри кута NML: $\angle NMA = \angle NMC + \angle CMA = 40º + 30º = 70º$.

Приклад 3. *Нехай* O *– центр кола, вписаного в довільний трикутник* ABC, *а* S *є центром кола, описаного навколо трикутника* AOC. *Довести, що точки* B, O *і* S *лежать на одній прямій*.

Природно, що в учня відразу (на інтуїтивному рівні) виникає болюче запитання «з чого розпочати доведення?». Так от, у схожих ситуаціях (в переважній більшості випадків, хоч і не завжди) рекомендується застосувати надто розповсюджений прийом: потрібно на рисунку з'єднати прямою дві із трьох розглядуваних точок, а потім обґрунтувати, що третя точка належить цій прямій.

Оскільки коло Γ_1 – уписане в трикутник ABC (рис. 3), його центр O є точкою перетину бісектрис. Продовжимо бісектрису BO кута при вершині B до перетину з колом Γ_2 в точці D і встановимо факт належності точки S прямій BD. Відомо, що S є центром кола Γ_2, тому OD, врешті-решт, має бути діаметром цього кола, тобто зараз досить довести, що кут OCD (чи OAD) є прямим.

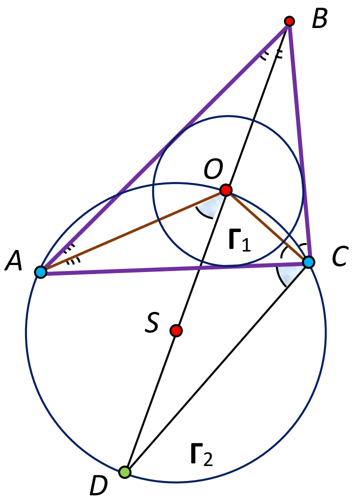

Рис. 3. Трикутник і кола

На рисунку добре видно, що $\angle OCD = \angle OCA + + \angle ACD$. Однак перший із них $\angle OCA = \frac{1}{2}\angle ACB$, а другий $\angle ACD =$ $= \angle AOD$ (як кути, що спираються на одну і ту ж дугу кола $\mathbf{\Gamma}_2$). З іншого боку, кут AOD – зовнішній для трикутника AOB й дорівнює сумі внутрішніх кутів не суміжних із ним:

$$\angle AOD = \frac{1}{2}\angle OAB + \frac{1}{2}\angle OBA.$$

Остаточно отримуємо:

$$\angle OCD = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle OAB + \angle OBA) = 90°.$$

Отже, OD справді є діаметром кола $\mathbf{\Gamma}_2$, а тому точка S належить прямій BO.

Приклад 4. *Усередині ромба ABCD відмітили точку N так, що трикутник BNC є рівностороннім. Нехай K – точка перетину бісектриси кута ABN із діагоналлю AC ромба. Довести, що BK = KN + ND.*

Вимогу, яку винесено у висновок задачі, досить легко змоделювати, якщо докласти незначних зусиль у ретельності виконання зображення зумовленої ситуації. Візуально задача вже розв'язана (див. Рис. 4). Тепер обґрунтуємо цей результат із посиланнями на закономірні міркування.

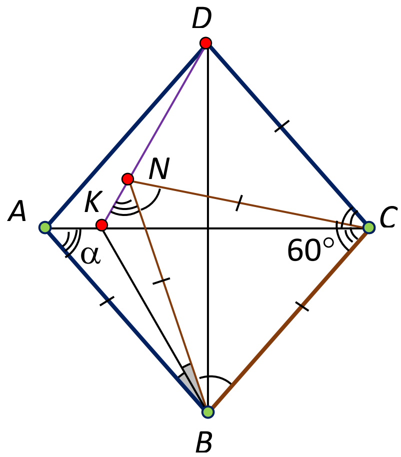

Рис. 4. Ромб

Отже, найперше констатуємо, що точка N обов'язково є внутрішньою в трикутнику ADC. Справді, в іншому випадку вона зливалася б або з точкою A, або з точкою C, адже $BN = BC = BA$ за умовою. Оскільки BK – бісектриса кута ABN, то $\Delta ABK = \Delta NBK$ (за двома сторонами і кутом між ними). Звідси прямо випливає, що $\angle BAK = \angle BNK = \angle BCA = \angle ACD = \alpha$. Пам'ятаючи, що у трикутника BNC усі кути по 60°, матимемо таке: $\angle NCD = 2\alpha - 60°$. Тоді в рівнобедреному трикутнику CND (тут $CN = CD$)

$$\angle CND = \frac{180° - (2\alpha - 60°)}{2} = 120° - \alpha.$$

Просумувавши кути KNB, BNC і CND, дістанемо: $\angle KND = \alpha + 60° + 120° - \alpha = 180°$. Таким чином, точки K, N і D лежать на одній прямій. Проте очевидно, що $DK = BK$, тому $BK = KN + ND$, але ж якраз цей факт і потрібно будо довести.

Якісно виконаний рисунок надихає несуперечливі, узаконені міркування, спонукає справжнє розуміння геометричних міжелементних зв'язків і формальних виражень усередині фігури, мотивує навчально-пізнавальний інтерес до найпершої з наук.

Анотація. **Ленчук І. Г. Елементи конструктивізму в задачах на обчислення та доведення**. Піднято питання акуратного, якісного виконання рисунків до задач на обчислення та доведення, від чого залежить правильність їх розв'язання. Наголошується на ролі вчителя в навчанні. Продемонстровано роль рисунка на шляху до результату.
Ключові слова. Планіметрія, рисунок, якість виконання, правильність, наочність.

Abstracts. Lenchuk I. G. Elements of constructivism in problems of calculation and proof. The issue of accurate, high-quality execution of drawings for calculation and proof problems is raised, on which the correctness of their solution depends. The role of the teacher in teaching is emphasized. The role of the figure on the way to the result is demonstrated.
Keywords. Planimetry, drawing, quality of performance, correctness, clarity.