

ВІДГУК

офіційного опонента, Журавльова Валерія Пилиповича, доктора фізико-математичних наук, професора, завідувача кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету на дисертацію Коломієць Таміли Юріївни «Дослідження гіперкомплексних систем і теорії міри у скінченновимірних алгебрах», подану на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дисертації та її зв'язок із галузевими науковими програмами. Актуальність обраної дисертанткою проблеми наукового дослідження не викликає сумніву з ряду причин.

По-перше, вирішення багатьох фундаментальних проблем різної природи потребують побудови й розв'язування математичних моделей процесів, що досліджуються, і яким відповідають визначені диференціальні рівняння або системи диференціальних рівнянь (звичайні та з частковими похідними). Як правило, є диференціальні рівняння з частковими похідними (з постійними і змінними коефіцієнтами) та їх системи, які досить складно розв'язувати звичайними методами. Істотно полегшує це завдання алгебраїчно-аналітичний підхід до розв'язування таких рівнянь, який ґрунтується на побудові комутативної алгебри, асоційованої з рівнянням, і знаходженні моногенних функцій в цій алгебрі, складові яких є розв'язками відповідного рівняння. Про плідність досліджень у цій галузі засвідчують роботи І. Мельниченка, В. Ковальова, С. Плакси, С. Грищука, В. Шпаківського, Р. Пухтаєвича, Т. Кузьменко, М. Шапіро, О. Геруса, А. Погоруя, Р. Родрігеса-Дагніно, Р. Родрігеса-Саїда.

По-друге, моногенність функції (неперервність й диференційовність за Гато), що ефективно використовується для функцій, визначених у комутативних алгебрах, не є продуктивною для функцій, визначених у некомутованих алгебрах. Як добре відомо, наприклад, із роботи А. Садбері, в алгебрі кватерніонів \mathbb{H} тільки лінійні кватерніоннозначні функції $f(x) = ax + b$, $x, a, b \in \mathbb{H}$, є моногенними у вищезгаданому сенсі. Тому для функцій зі значеннями у некомутованих (наприклад, кліффордових) алгебрах використовуються інші означення диференційовності, аналогічні до визначених для кватерніонів \mathbb{H} (Р. Деланже, Р. Краусхар і Г. Малонек, Х. Борі-Рейес і М. Шапіро). Зокрема, в алгебрі Кліффорда $\mathbb{C}\ell_{p,q}^{\mathbb{K}}$ ($p + q = d + 1$), яка породжена $(d + 1)$ -вимірним лінійним простором \mathbb{E}^{d+1} , $d = 0, 1, \dots$, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (або \mathbb{C}), ліва (відповідно права) диференційовність функції $f(\cdot)$

визначається як власний вектор узагальненого оператора Коші-Рімана \mathcal{D} , тобто як розв'язок рівняння $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$ (відповідно $f(\cdot)\mathcal{D} = 0$) (Ф. Соммен і Х. Шеппер).

З використанням поліномів Р. Фуетера для алгебри кватерніонів Ш Д. Алпаєм, М. Шапіро та Д. Волоком знайдено розвинення диференційовних кватерніоннозначних функцій у ряд за цими поліномами. Розвинення диференційовних кокватерніоннозначних функцій у ряд за аналогом поліномів Фуетера було знайдено А. Погоруєм і Р. Родрігесом-Дагніно. Тому актуальним постає завдання: знайти для некомутативних (зокрема, кліффордових $\mathbb{C}\ell_{p,q}^{\mathbb{K}}$) алгебр розвинення моногенної функції (неперервно-диференційовної й диференційовної зліва (відповідно справа) у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана \mathcal{D}) в ряд за поліномами типу Фуетера та показати приклади застосування розвинення $\mathbb{C}\ell_{p,q}^{\mathbb{K}}$ -значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП.

По-третє, останнім часом розвивається ще одна галузь застосування гіперкомплексних систем для побудови комплексної та гіперкомплексної теорії міри й теорії ймовірностей. В основоположній роботі У. Рудіна узагальнено поняття класичної дійснозначної міри μ на комплекснозначну міру w та досліджено її властивості. Статтю Д. Алпая, М. Луни-Елізаррас і М. Шапіро присвячено вивченню властивостей ймовірнісної міри P_W зі значеннями в алгебрі гіперболічних чисел \mathbb{W} та показано, що для цієї нової ймовірнісної міри P_W виконуються властивості класичної дійснозначної ймовірності P . Результати досліджень, пов'язані з гіперболічнозначною ймовірнісною мірою P_W та гіперболічнозначною мірою μ_W , опубліковано в роботах Р. Кумара та К. Шарми, Ч. Гоша, С. Бісваса й Т. Ясіна. Даний підхід є актуальним при вивченні комплексної та гіперкомплексної теорії міри й теорії ймовірностей та застосуванні цих результатів, наприклад, у задачах теорії ймовірностей, математичної статистики, статистичної фізики.

Дослідження виконано в межах наукової теми «Алгебраїчні методи дослідження диференціальних рівнянь» кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка (державний реєстраційний номер 0120U101103).

Ступінь обґрунтованості та достовірності наукових положень і висновків, що сформульовані у дисертації, забезпечена, зокрема, ґрунтовною джерельною базою, в якій відображено різні аспекти досліджуваної проблематики, що розкриті вітчизняними та зарубіжними математиками. Основні положення дисертації викладено у 17 наукових публікаціях (5 одноосібних), з яких 4 статті у журналах, що входять до

наукометричних баз Scopus та / або Web of Science, 2 статті у наукових фахових виданнях України, 1 стаття у зарубіжному періодичному виданні, 10 у збірниках та матеріалах науково-практичних конференцій.

Найбільш суттєві наукові результати, що містяться в дисертації. Усі результати, одержані в дисертаційній роботі, є новими та математично обґрунтованими. Основні з них такі:

1) розроблено метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень у восьмивимірній алгебрі Сегре $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$, шляхом зведення цих рівнянь до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами \mathbb{C} ;

2) алгебраїчно-аналітичним методом моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) функцій, визначених у скінченновимірних комутативних алгебрах, знайдено формулу узагальненої функції щільності $f(x)$, яка задовольняє ДРЧП шостого порядку, що описує розподіл випадкового одновимірного руху $x(t)$ частинки в момент часу t у випадку, коли проміжок часу між двома послідовними перемиканнями швидкості частинки має розподіл Ерланга 3-го порядку (узагальнене телеграфне рівняння);

3) знайдено розвинення моногенної функції $f(\cdot)$ (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана \mathcal{D} , тобто $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$) зі значеннями в алгебрі Кліффорда $\mathbb{C}\ell_{p,q}^{\mathbb{R}} (p + q = d + 1)$, породженої $(d + 1)$ -вимірним лінійним простором $\mathbb{E}^{d+1}, d = 0, 1, \dots$, над полем \mathbb{R} , у ряд за поліномами типу Фуетера; наведено приклади застосування розвинення $\mathbb{C}\ell_{p,q}^{\mathbb{R}}$ -значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП другого порядку;

4) досліджено аналог класичної дійснозначної ймовірнісної міри P у випадку, коли ця міра набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел \mathbb{W}_4 ; вивчено базові властивості бігіперболічнозначної ймовірнісної міри $P_{\mathbb{W}_4}$ та бігіперболічнозначної випадкової величини $X_{\mathbb{W}_4}$;

5) узагальнено поняття класичної дійснозначної міри μ на випадок так званої кватерніоннозначної міри ω , тобто міри, яка набуває значень в алгебрі кватерніонів \mathbb{H} ; вивчено базові властивості кватерніоннозначної міри ω .

Практична цінність результатів дослідження. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер. На практиці одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані у процесі вивчення додаткових розділів алгебри, математичного, комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії ймовірностей та

математичної статистики, теорії міри, теорії диференціальних рівнянь студентами фізико-математичних спеціальностей.

Повнота викладу результатів дисертації у наукових публікаціях.

Положення роботи викладено у 17 публікаціях авторки (5 одноосібних) та виголошено під час участі у 19 масових заходах науково-практичного характеру (з яких 10 конференцій та 9 наукових семінарів різних рівнів). Здобувачкою проаналізовано достатню кількість наукових результатів з різних областей математики (алгебри, математичного, функціонального, комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії міри та інтеграла, теорії диференціальних рівнянь), що дозволило визначити основні напрями дослідження. Дисертанткою використано 131 кількість наукових джерел, з яких 102 іноземною мовою. Робота має один додаток, який містить список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Кількість публікацій авторки дисертації та їх характер відображають основні результати дослідження, відповідають пунктам 8,9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова КМУ № 44 від 12.01.2022).

Ідентичність змісту анотації та основних результатів дисертації.

Текст анотації, представленої українською та англійською мовами, є ідентичним і відображає зміст та основні положення дисертації.

Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації.

Відзначаючи загалом належний науковий теоретико-практичний рівень виконаного дослідження, висловлюємо окремі зауваження дискусійно-рекомендаційного характеру, що потребують уточнень:

1) С. 38 в означення 1.2.2 замість «...неперервно-диференційовна й диференційовна за Гато...» слід було б написати «...неперервно-диференційовна за Гато...».

2) С. 43 третій рядок зверху – некоректна фраза «ця формула для функції ... задовольняє рівняння...».

3) С. 45 десятий рядок зверху – означення моногенності функції за Фуєтером слід було б дати для відкритих областей алгебри кватерніонів.

4) С. 48 восьмий рядок зверху – для позначень варто було б створити окремий список на початку дисертації.

5) С. 50 четвертий рядок знизу – головний ідеал алгебри Сегре позначений символом самої алгебри.

6) С. 90 – рівняння (2.44) варто було б вписати детально.

7) С. 101 третій рядок зверху – «безліч» замінити на «набір» чи «сукупність», або видалити речення в дужках.

8) С. 104 другий рядок знизу – доведення властивості VI варто було б конкретизувати.

9) С. 109 – при доведенні теореми 3.1.2 замість знаку «еквівалентність» слід поставити знак «впливає», крім цього, пропущена частина із (ii) впливає (iii).

Наявність дискусійних питань не впливає на загальну позитивну оцінку роботи.

Загальний висновок щодо відповідності дисертації встановленим вимогам. Враховуючи актуальність дослідження, наукову новизну результатів дисертації, обґрунтованість і достовірність одержаних результатів, їх теоретичну і практичну значущість, вважаємо, що дисертація Коломієць Таміли Юріївни «Дослідження гіперкомплексних систем і теорії міри у скінченновимірних алгебрах», є актуальним, самостійним, завершеним науковим дослідженням, відповідає наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації», вимогам пп. 6,7,8,9 Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії (Постанова Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 р.), а її авторка заслуговує на присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри вищої та
прикладної математики
Поліського національного університету

 Валерій ЖУРАВЛЬОВ

