

## **ВІДГУК**

офіційного опонента, Грищука Сергія Вікторовича,  
кандидата фізико-математичних наук, старшого наукового співробітника  
відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики  
Національної академії наук України  
на дисертацію Коломієць Таміли Юріївни  
«Дослідження гіперкомплексних систем і теорії міри у скінченновимірних  
алгебрах», подану на здобуття ступеня доктора філософії  
з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

### **Актуальність теми дисертаційної роботи.**

Дисертаційна робота присвячена дослідження властивостей моногенних (неперервно-диференційовних і диференційовних у відповідному сенсі) функцій зі значеннями у гіперкомплексних системах, які є скінченновимірними комутативними та некомутативними (зокрема, кліффордовими) алгебрами над полем дійсних або комплексних чисел. Моногенні функції та гіперкомплексні системи обираються таким чином, щоб мати можливість знаходити розв'язки (переважно, часткові) лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем у вигляді лінійних комбінацій від компонент моногенних функцій відносно спеціальних базисів відповідної алгебри. Це здійснюється за допомогою відповідних алгебраїчно-аналітичних методів, які частково ґрунтуються на роботах попередників, а частково розробляються та вдосконалюються дисертанткою. У дисертаційній роботі досліджено поліноміальні рівняння в алгебрі Сегре, яка є дійсним восьмивимірним зображенням алгебри комплексних кватерніонів Сегре. Вивчаються основні властивості ймовірнісної міри зі значеннями в алгебрі бігіперболічних чисел та міри зі значеннями в алгебрі кватерніонів.

Результати роботи є важливими для гіперкомплексного аналізу та його застосувань, зокрема, для побудови часткових розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем, а також абстрактної теорії міри та теорії ймовірностей.

### **Достовірність та обґрунтованість одержаних наукових результатів.**

Наукові положення, висновки, рекомендації, викладені в дисертації, підтверджені аналізом на загальнонауковому та конкретно-науковому рівнях. Авторка коректно опрацювала наукові дослідження, електронні ресурси: на сторінках дисертації наявні покликання на 131 джерело з яких – 102 іноземною мовою. Аналіз дослідження, публікацій та апробація результатів свідчить про їх наукову обґрунтованість та достовірність.

Результати перевірки роботи на унікальність з використанням веб-ресурсу StrikePlagiarism дозволяють зробити висновок про відсутність академічного плагіату.

### **Структура та зміст дисертації, її завершеність і відповідність встановленим вимогам щодо оформлення.**

Структурні компоненти (анотація українською та англійською мовами, вступ, три розділи, висновки до кожного розділу, загальні висновки)

взаємопо'язані. Список використаних джерел відповідає відповідним покликанням. Додаток містить список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 150 сторінок, обсяг основного тексту складає 131 сторінку, що відповідає вимогам МОН України до дисертацій доктора філософії.

У вступі загалом аргументовано актуальність теми, визначено об'єкт, предмет, мету, п'ять завдань, перелічено методи дослідження; висвітлено основні етапи дослідження; представлено наукову новизну, практичне значення; подано особистий внесок, відомості про апробацію і публікації, структуру та обсяг дисертації.

У першому розділі дисертаційної роботи «Огляд літератури і допоміжні результати» проведено огляд результатів попередніх досліджень, пов'язаних із темою дисертації, подано допоміжні теоретичні відомості та необхідні алгебраїчні конструкції, які використовують у подальшому викладі матеріалу роботи.

У другому розділі «Дослідження властивостей моногенних функцій зі значеннями у скінченновимірних алгебрах та їх застосування» вивчено алгебраїчно-аналітичні методи знаходження часткових розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) для комутативного і некомутативного випадків.

У третьому розділі «Дослідження властивостей міри зі значеннями у скінченновимірних алгебрах» вивчено базові властивості ймовірнісної міри та випадкової величини зі значеннями в комутативній алгебрі бігіперболічних чисел. Крім цього, вивчено базові властивості загальної міри зі значеннями в некомутативній алгебрі кватерніонів.

Кожен розділ дисертації завершується логічними висновками, що узагальнено відображають результати дослідження. Загальні висновки дисертації відповідають меті й завданням, підтверджують нові наукові результати.

Додаток містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

### **Найбільш суттєві наукові результати дослідження.**

Наукова новизна роботи зумовлена як новизною предмета дослідження, так і методами розв'язання поставлених завдань.

На підставі аналізу результатів наукового пошуку, здійсненого Коломієць Тамілою Юріївною, робимо висновок, що здобувачкою:

- проведено аналіз гіперкомплексних систем; доведено базові властивості дійсної восьмивимірної алгебри комплексних кватерніонів  $B_8(R)$  та запропоновано метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в цій алгебрі;

- з використанням алгебраїчно-аналітичного методу моногенних функцій (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) знайдено формулу узагальненої функції щільності  $f(t, x)$  розподілу випадкового одновимірного руху  $x(t)$ , яка задовольняє диференціальне рівняння з частковими похідними (ДРЧП) шостого порядку (узагальнене телеграфне рівняння), часткові розв'язки ДРЧП четвертого порядку (так званого узагальненого біхвильового рівняння)

для гіперболічного та еліптичного випадків і часткові розв'язки лінійних систем ДРЧП;

- показано розвинення моногенної функції  $f(\cdot)$  (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана  $D$ , тобто  $Df(\cdot)=0$ ), зі значеннями в алгебрі Кліффорда  $Cl_{p,q}^R(p+q=d+1)$ , породженої  $(d+1)$ -вимірним лінійним простором  $E^{d+1}$ ,  $d=0,1,\dots$ , над полем дійсних чисел  $R$ , у ряд за поліномами типу Фуетера; знайдені застосування розвинення  $Cl_{p,q}^R$ -значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП другого порядку;

- досліджено базові властивості ймовірнісної міри  $P_{W_4}$  та випадкової величини  $X_{W_4}$  у випадку, коли  $P_{W_4}$  і  $X_{W_4}$  набувають значень в алгебрі бігіперболічних чисел  $W_4$ ;

- досліджено базові властивості міри  $\omega$ , яка набуває значень в алгебрі кватерніонів  $H$ .

### Практична цінність дослідження.

Результати дослідження можуть бути використані у науковій діяльності студентів, магістрантів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей з галузі знань 11 Математика та статистика, а також у практичній та науково-дослідницькій діяльності науково-педагогічних працівників закладів вищої освіти.

### Повнота викладу результатів в опублікованих працях.

Наукові праці Таміли Коломієць відбивають основні положення й наукові результати дисертації. Авторка має 17 публікацій, з яких 5 одноосібних. 4 статті у виданнях, що входять до наукометричних баз Scopus та / або Web of Science, 2 статті у наукових фахових виданнях України, 1 в зарубіжному науковому періодичному виданні, 10 публікацій у збірниках матеріалів конференцій та наукових праць.

У роботах, написаних у співавторстві, доробок дисертантки чітко визначений.

### Зауваження і побажання до змісту дисертації.

Зазначимо дискусійні положення у змісті роботи та висловимо окремі побажання:

- 1) на стор. 2, 14 рядок зверху, а також у інших місцях дисертаційної роботи: замість терміну «диференціальні рівняння з частковими похідними» слід вживати «диференціальні рівняння з частинними похідними»;
- 2) на стор. 7, 12 рядок зверху, а також далі по тексту: вислів «вивчено основні властивості ...» носить суб'єктивний характер — краще «досліджено властивості ...»;
- 3) на стор. 22, 7 рядок знизу: замість «**Мета дослідження:** запропонувати метод ...» варто вживати «... : розробити метод ...» або «... : знайти метод ...»;
- 4) на стор. 23, 7 рядок зверху: замість «показати застосування розвинення ...» варто вживати «знайти застосування розвинення ...»;
- 5) на стор. 24, абзац **Предмет дослідження:** замість «метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь» слід вживати «розробка методу

- знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь»; «властивості» відповідних об'єктів — «знаходження властивостей» відповідних об'єктів; у абзаці **Методи дослідження.:** «Для досягнення мети та поставлених завдань використано методи скінченновимірних алгебр» — «... використано апарат скінченновимірних алгебр» або «... використано методи вищої алгебри»;
- 6) на стор. 31, **Означення 1.1.2:** « $d=0,1,\dots$ , якої введено операцію кліффордового множення» — перед «якої» пропущено «для»;
- 7) на стор. 37, 9 рядок знизу: « $A?$  – скінченновимірна комутативна унітарна алгебра над полем  $\mathbb{K}$ » — слово «унітарна» зайве, бо  $\mathbb{K}$ , зокрема, може бути полем дійсних чисел;
- 8) на стор. 38, 3 рядок зверху: « $\mathbb{K}$ -значними функціями  $(m+1)$ -ї змінної» — пропущено «...  $(m+1)$ -вимірної змінної»;
- 9) на стор. 42, у Лемі 1.2.2 і 1.2.3, при формулюванні результатів наукового керівника А. О. Погоруя, у формулах вживається для граничного прямування символ стрілки вниз, який не розтлумачується; загалом, Таміла Юрїївна Коломієць наводить інколи у дисертаційній роботі результати наукового керівника, наприклад, наведені вище, які у подальшому нею не використовуються;
- 10) на стор. 46, 6 рядок зверху — відсутнє посилання на літературне джерело, де б висвітлювалось поняття  $\sigma$ -алгебри; один рядок вище за формулу (1.16): «на вимірному просторі  $(X, \mathcal{M})$ » — відсутнє тлумачення, як це розуміється, або тут вживається недоречний термін «вимірний простір», який слід замінити на інший; у зауваженні 1.4.1 робиться припущення про абсолютну збіжність ряду (1.16), яке варто було б закласти у означення 1.4.1;
- 11) для кожного розділу математичні позначення, зокрема, множин натуральних, дійсних, комплексних чисел та інші вводяться наново, краще було б винести список основних позначень у доданок, а давати їм означення лише один раз, по мірі того, як вони слідуєть у дисертаційній роботі;
- 12) на стор. 50, 4 рядок знизу: вжито термін «головний ідеал алгебри Сегре», проте не зазначено, чи має це поняття зв'язок з усталеним терміном «ідеал алгебри»;
- 13) на стор. 55, після символу  $i \odot j$  краще замість знаку рівності вживати знак «:=»;
- 14) на стор. 69, перший рядок знизу при граничному прямуванні  $x$  до  $t$  вживається символ стрілки вгору, який не роз'яснюється;
- 15) на стор. 71, 9 рядок зверху: у вислові «... скінченновимірна комутативна унітарна алгебра над полем  $\mathbb{K}$ » — слово «унітарна» зайве, бо  $\mathbb{K}$ , зокрема, може бути полем дійсних чисел;
- 16) на стор. 127 у формулюванні теореми 3.2.7 доводиться, що ліволінійний простір кватерніоннозначних мір є банаховим простором, при цьому такий повний простір неявно називається «кватерніонним банаховим простором», цей термін потрібно було б дати як означення перед теоремою 3.2.7.

Висловлені зауваження і побажання мають рекомендаційний характер, а тому не знижують наукової і практичної цінності й загальної позитивної оцінки дисертаційної роботи, що є самостійною завершеною працею.

**Загальний висновок щодо відповідності дисертації  
встановленим вимогам.**

Дисертація Коломієць Таміли Юріївни на тему «Дослідження гіперкомплексних систем і теорії міри у скінченновимірних алгебрах», що представлена на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика, є структурно завершеним, самостійним науковим дослідженням.

Робота характеризується новизною, теоретичним і практичним значенням, відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р., № 44, наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р., № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації».


Коломієць Таміла Юріївна заслуговує присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

**Офіційний опонент:**

кандидат фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник  
відділу комплексного аналізу і  
теорії потенціалу Інституту математики  
Національної академії наук України



Сергій ГРИЦУК

<b>ЗАСВІДЧУЮ</b>	
Відділ кадрів	
Інститут математики НАН України	
«    »	20    р.