

## ВІДГУК

офіційного опонента, Петрова Євгена Олександровича, кандидата фізико-математичних наук, старшого дослідника зі спеціальності 111 Математика, старшого наукового співробітника відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки Національної академії наук України на дисертацію Коломієць Таміли Юріївни «Дослідження гіперкомплексних систем і теорії міри у скінченновимірних алгебрах», подану на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

**Актуальність теми дисертації.** Результати презентованої дисертації, безсумнівно, представляють науковий інтерес. Актуальність теми дисертації Коломієць Таміли «Дослідження гіперкомплексних систем і теорії міри у скінченновимірних алгебрах» не викликає сумнівів, оскільки стосується ґрунтовних математичних досліджень у галузі алгебри, математичного, комплексного та гіперкомплексного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії міри, теорії диференціальних рівнянь. Важливість роботи зумовлена тим, що одержані результати можуть сприяти майбутнім дослідженням за відповідними напрямками, зокрема для узагальнення та поширення ідей на інші гіперкомплексні системи і застосування при розв'язуванні задач математичної фізики, теорії випадкових процесів, термодинаміки, статистичної фізики.

**Достовірність та обґрунтованість одержаних результатів.** Аналіз дослідження і публікацій свідчить про наукову обґрунтованість та достовірність викладених авторкою результатів. Структура дисертації відображає всі визначені завданнями проблеми. Достовірність одержаних висновків визначається правильно обраними науковими підходами та методами дослідження, достатнім використанням наукового матеріалу. Кількість і якість використаних матеріалів (131 джерело, з яких 102 іноземною мовою), докладність і чіткість їх аналізу створює передумови для забезпечення достатнього рівня достовірності дисертаційної роботи.

**Ступінь новизни основних результатів дисертації.** Основні результати дисертації характеризуються науковою новизною та теоретичною цінністю. Зокрема, у дисертаційній роботі здобувачкою: проведено аналіз гіперкомплексних систем; доведено основні властивості дійсної восьмивимірної алгебри комплексних кватерніонів  $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$  та запропоновано метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в цій алгебрі; з використанням алгебраїчно-аналітичного методу моногенних функцій (неперервно-диференційовних і диференційовних за Гато) знайдено формулу узагальненої функції щільності  $f(t, x)$  розподілу випадкового одновимірного руху  $x(t)$ , яка задовольняє диференціальне рівняння з частковими похідними (ДРЧП) шостого порядку, часткові розв'язки ДРЧП четвертого порядку для гіперболічного та еліптичного випадків і часткові розв'язки лінійних систем ДРЧП; доведено теорему про розвинення моногенної функції  $f(\cdot)$  (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана  $\mathcal{D}$ , тобто  $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$ ), зі значеннями в алгебрі Кліффорда  $\mathbb{C}\ell_{p,q}^{\mathbb{R}}$  ( $p + q = d + 1$ ), породженої  $(d + 1)$ -вимірним лінійним простором

$\mathbb{E}^{d+1}$ ,  $d = 0, 1, \dots$ , над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$ , у ряд за поліномами типу Фуетера; показано застосування  $\mathbb{C}\mathbb{I}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ -значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП другого порядку; досліджено основні властивості ймовірнісної міри  $P_{\mathbb{W}_4}$  та випадкової величини  $X_{\mathbb{W}_4}$  у випадку, коли  $P_{\mathbb{W}_4}$  і  $X_{\mathbb{W}_4}$  набувають значень в алгебрі бігіперболічних чисел  $\mathbb{W}_4$ ; сформульовано означення абсолютно неперервної  $\omega_a$  і сингулярної  $\omega_s$  кватерніоннозначних мір відносно дійснозначної міри  $\mu$  та доведено їх властивості; доведено аналог теореми про розклад Лебега для кватерніоннозначної міри  $\omega$ ; визначено поняття кватерніонного лінійного простору, норми  $\|\omega\|$  лівокватерніонного (відповідно правокватерніонного) лінійного простору та кватерніонного банахового простору.

**Оцінка змісту дисертації та її завершеність.** Структура роботи зумовлена логікою дослідження й складається з анотації (українською і англійською мовами), вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел і додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність обраної теми дослідження; визначено мету, завдання, об'єкт і предмет дослідження; розкрито наукову новизну і практичне значення одержаних результатів; представлено публікації та апробацію основних результатів дослідження.

У першому розділі дисертаційної роботи проведено огляд результатів попередніх досліджень, пов'язаних із темою дисертації, подано допоміжні теоретичні відомості та необхідні алгебраїчні конструкції.

У другому розділі показано зображення алгебри комплексних кватерніонів Сегре  $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$  у вигляді дійсної восьмивимірної алгебри Сегре  $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$  та наведено основні алгебраїчні властивості цієї алгебри. Запропоновано метод знаходження розв'язків поліноміальних рівнянь, коефіцієнти яких набувають значень в алгебрі Сегре  $\mathbb{B}_8(\mathbb{R})$ , шляхом їх зведення до відповідних систем із чотирьох поліноміальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами  $\mathbb{C}$ .

З використанням алгебраїчно-аналітичного методу у випадку комутативних алгебр знайдено формулу узагальненої функції щільності  $f(t, x)$  розподілу випадкового одновимірного руху  $x(t)$ , яка задовольняє ДРЧП шостого порядку (узагальнене телеграфне рівняння) та часткові розв'язки ДРЧП четвертого порядку (так зване узагальнене біхвильове рівняння). Показано застосування цього методу для знаходження часткових розв'язків лінійних систем ДРЧП. Наведено приклади розв'язування таких систем ДРЧП, зокрема з ДРЧП, асоційованими з алгеброю комплексних кватерніонів Сегре  $\mathbb{B}_4(\mathbb{C})$ .

Крім цього, вивчено властивості ліводиференційовних функцій  $f(\cdot)$  (лівих власних векторів узагальненого оператора Коші-Рімана  $\mathcal{D}$ , тобто  $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$ ) зі значеннями в алгебрі Кліффорда  $\mathbb{C}\mathbb{I}_{p,q}^{\mathbb{R}}$  ( $p + q = d + 1$ ), породженої  $(d + 1)$ -вимірним лінійним простором  $\mathbb{E}^{d+1}$ ,  $d = 0, 1, \dots$ , над полем  $\mathbb{R}$ . З використанням алгебраїчно-аналітичного методу у випадку некомутативних алгебр знайдено розвинення моногенної функції  $f(\cdot)$  (неперервно-диференційовної й ліводиференційовної у сенсі  $\mathcal{D}f(\cdot) = 0$ ) в ряд за поліномами типу Фуетера. Наведено приклади застосування розвинення  $\mathbb{C}\mathbb{I}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ -значної функції в ряд для знаходження часткових розв'язків ДРЧП другого порядку.

У третьому розділі введено поняття відношення часткового порядку  $\leq_{\mathbb{W}_4}$  в алгебрі бігіперболічних чисел  $\mathbb{W}_4$ . Визначено бігіперболічнозначний модуль  $|\cdot|_{\mathbb{W}_4}$ , бігіперболічнозначну норму  $\|\cdot\|_{\mathbb{W}_4}$ , збіжну послідовність бігіперболічних чисел  $\{\alpha_n\}_{\mathbb{W}_4}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , та доведено всі необхідні властивості. Проаналізовано означення ймовірнісної міри  $P_{\mathbb{W}_4}$ , яка набуває значень в алгебрі бігіперболічних чисел  $\mathbb{W}_4$ . Показано, що бігіперболічнозначна ймовірнісна міра  $P_{\mathbb{W}_4}$ , визначена на  $\sigma$ -алгебрі випадкових подій  $\Sigma$  простору елементарних подій  $\omega \in \Omega$ , задовольняє основні властивості класичної дійснозначної ймовірності  $P$ . Введено поняття бігіперболічнозначної випадкової величини  $X_{\mathbb{W}_4}$ , яка визначена на  $\mathbb{W}_4$ -ймовірнісному просторі  $(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4})$ , та доведено її основні властивості. Досліджено особливі випадки, коли відповідно бігіперболічнозначна ймовірнісна міра  $P_{\mathbb{W}_4}$  та бігіперболічнозначна випадкова величина  $X_{\mathbb{W}_4}$  набувають значень в області дільників нуля  $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$  алгебри  $\mathbb{W}_4$ .

Подано означення кватерніоннозначної міри  $\omega$  та її повної варіації  $\text{var}[\omega]$ . Доведено, що повна варіація  $\text{var}[\omega]$  кватерніоннозначної міри  $\omega$  на вимірному просторі  $(X, \mathfrak{M})$  є невід'ємною мірою на  $(X, \mathfrak{M})$ , де  $\mathfrak{M}$  –  $\sigma$ -алгебра підмножин непорожньої множини  $X$ . Зокрема доведено, що  $\text{var}[\omega](X) < +\infty$ , тобто класичні дійснозначні міри, які можуть набувати значення  $+\infty$ , не утворюють підклас кватерніоннозначних мір.

Визначено абсолютно неперервну  $\omega_a$  і сингулярну  $\omega_s$  кватерніоннозначні міри відносно класичної дійснозначної міри  $\mu$  та наведено їх властивості. Доведено аналоги теореми про розклад Лебега, теореми Радона-Нікодима та одного з її наслідків для кватерніоннозначної міри  $\omega$ .

Введено поняття ліволінійного (відповідно праволінійного) простору кватерніоннозначних мір  $\omega$  на вимірному просторі  $(X, \mathfrak{M})$ . В якості норми  $\|\omega\|$  міри  $\omega$  на  $(X, \mathfrak{M})$  береться її повна варіація, тобто  $\|\omega\| = \text{var}[\omega](X)$ . Доведено, що ліволінійний (відповідно праволінійний) простір кватерніоннозначних мір  $\omega$  на вимірному просторі  $(X, \mathfrak{M})$  з нормою  $\|\omega\| = \text{var}[\omega](X)$  є кватерніонним банаховим простором.

Сформульовані висновки в кінці кожного розділу достатньо характеризують головне у їх змісті. Загальні висновки логічні і досить повно відображають досягнуті у дослідженні результати.

Додаток містить список публікацій здобувачки за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

**Практична цінність результатів дослідження.** Результати дослідження можуть бути використані у науково-дослідницькій діяльності аспірантів, магістрантів, студентів фізико-математичних спеціальностей з галузі знань 11 Математика та статистика, а також у практичній та науково-методичній діяльності педагогічних працівників освітніх закладів різних рівнів.

**Повнота викладу результатів дисертації у наукових публікаціях.** Кількість публікацій авторки дисертації (17 публікацій (5 одноосібних), з яких 4 включених до наукометричних баз Scopus та / або Web of Science, 2 у наукових фахових виданнях України, 1 в зарубіжному періодичному виданні, 10 у збірниках конференцій і наукових праць) та їх характер відображають основні результати дослідження, відповідають пунктам 8, 9 постанови Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022. Представлені в дисертації результати

пройшли належну апробацію на 9 міжнародних та 1 всеукраїнській науково-практичних конференціях, 9 наукових фахових семінарах.

### Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації.

Загалом позитивно оцінюючи дисертаційне дослідження Т. Ю. Коломієць, варто надати такі зауваження та коментарі:

1) Те, що через  $\mathbb{N}$  позначається множина натуральних чисел згадано на сторінках 37, 46, 48, 54, 70, 81, 100, хоча можна було б зробити список позначень і не було потреби так часто робити ці нагадування.

2) У другому розділі «Дослідження властивостей моногенних функцій зі значеннями у скінченновимірних алгебрах та їх застосування» вивчається восьмивимірна алгебра комплексних кватерніонів  $\mathbb{C}e_8$  над полем дійсних чисел. Чому здобувачка досліджує саме цю алгебру і чи має ця алгебра практичне застосування?

3) У третьому розділі «Дослідження властивостей міри зі значеннями у скінченновимірних алгебрах» вивчено основні властивості бігіперболічно-значної ймовірнісної міри  $P_{W_4}$ , бігіперболічнозначної випадкової величини  $X_{W_4}$  та кватерніоннозначної міри  $\omega$  лише у теоретичному аспекті. Доцільно було б навести приклади практичного застосування вивчених мір, наприклад, для задач теорії ймовірностей та математичної статистики.

4) В деяких місцях тексту дисертації невдало відформатовано текст. Так, наприклад, на стор. 54–57 кожне речення починається з червоного рядка. Тобто немає доцільного групування речень у абзаци.

5) Стор. 55, шостий рядок знизу – речення починається зі слів «Нехай покладемо...». Краще писати або «Нехай ...» або «Покладемо...».

6) Стор. 57, дев'ятий рядок зверху – «Для зручності позначимо елемент  $e_1$  через  $e$ ». Але вважаю, що це не той випадок, коли доцільно робити заміну.

7) Стор. 86 – у формулі (2.38) пропущений знак рівності.

Висвітлені зауваження носять рекомендаційний характер, не впливають на позитивне враження від дисертаційної роботи, не зменшують її наукової новизни і практичної значущості.

**Відповідність дисертації встановленим вимогам.** Дисертація Коломієць Таміли Юріївни «Дослідження гіперкомплексних систем і теорії міри у скінченновимірних алгебрах» відповідає вимогам наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації», пунктам 6–9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (Постанова КМУ № 44 від 12.01.2022 р.), а її авторка заслуговує на присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

### Офіційний опонент:

кандидат фізико-математичних наук,  
старший дослідник зі спеціальності 111 Математика,  
старший науковий співробітник відділу  
теорії функцій Інституту прикладної математики і  
механіки Національної академії наук України

Євген ПЕТРОВ

С. Петрова засвідчує  
секретар ІММ НАН України  
(Сергій Савицький)

