Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

А. О. Погоруй, О. А. Сарана

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

Навчальний посібник

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2019

УДК 517.51(07)
П11

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 1 від 11.11.2018 р.)

Рецензенти:

В. О. Коваль – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики та вищої математики Житомирського державного технологічного університету;
В. П. Журавльов – доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Житомирського національного агроекологічного університету.

Погоруй А. О.
П11 Загальна теорія міри та інтеграла : Навчальний посібник. / Погоруй А. О., Сарана О. А. – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2019. – 76 с.

Цей посібник є семестровим курсом лекцій з загальної теорії міри та інтеграла. Перший розділ присвячений обґрунтуванню неможливості побудови адитивної міри, інваріантної відносно групи рухів у просторах розмірності більше двох. Наводяться: проста задача теорії вимірювання та теорема-парадокс Банаха-Тарського з доведенням. У другому та третьому розділах міститься інформація про булеві конструкції в теорії множин та їх основні властивості. У четвертому розділі вводяться поняття передміри та міри на півкільці множин і вивчаються продовження цієї міри на породжені класи множин. Наступні розділи посібника присвячені основним властивостям інтеграла Лебега для вимірних функцій та доведенню теорем про перехід до границі під знаком інтеграла. Крім теоретичного матеріалу посібник містить задачі та вправи для самостійної роботи.

Для студентів фізико-математичних факультетів університетів.

УДК 517.51(07)

ISBN 978-966-485-245-3

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ МІРИ ТА ІНТЕГРАЛА

Зміст

Вступ

Загальна теорія міри та інтеграла все більше проникає в навчальні програми університетів і стає невід'ємною частиною обов'язкових для вивчення розділів математики не лише для студентів математичного профілю, але й для фізичних та економічних спеціальностей. Це пояснюється важливими застосуваннями цієї теорії як у різних напрямах математики, так і для дослідження фізичних та економічних моделей. З початку своєї появи на зорі 20 століття й до сьогодні теорія міри інтенсивно розвивається і заслужено посідає ключове місце у сучасній математиці. Теорія міри є основою таких базових курсів сучасної математики: функціональний аналіз, теорія ймовірностей та математична статистика, теорія випадкових процесів, теорія оптимізації, теорія фракталів, математична фізика тощо.

Посібник присвячений початковому ознайомленню з абстрактною теорією міри та інтеграла, проте вивчення цього матеріалу потребує від студентів базової підготовки з математичного аналізу, теорії множин та загальної алгебри.

Лекція 1. *Проблеми побудови міри*

1.1. Скінченно-адитивна міра

Інтуїтивно міра інтерпретується як розмір (об'єм) множини. Власне, міра – це деяка числова функція, яка ставить у відповідність кожній множині певне невід'ємне число. Крім невід'ємності міра як функція повинна також мати властивість адитивності – міра об'єднання множин, що не перетинаються, повинна дорівнювати сумі їх мір.

Враховуючи сказане вище, перейдемо до строгих означень: Нехай X – непорожня фіксована множина. Позначимо через 2^X множину всіх підмножин множини X. Знаком $\sqcup$ будемо позначати об'єднання двох множин, які не перетинаються. Зауважимо, що $\sqcup$ не символ операції над множинами: якщо у множин A та B не порожній перетин, то утворити множину $A \sqcup B$ не можна.

Означення 1.1. *Скінченно-адитивною мірою називається функція* $\mu: 2^X \to [0, +\infty]$, *яка задовольняє умову адитивності:*

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{1.1}$$

Неважко переконатись, що якщо існує $A \in 2^X$, така що $\mu(A) < +\infty$, то для адитивної міри $\mu(\emptyset) = 0$. Дійсно, це безпосередньо випливає із рівності

$$\mu(A) = \mu(A \sqcup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

Вправи:

а) Довести, що (1.1) еквівалентно

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

б) Довести, що довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n).$$

в) Навести приклад адитивної міри для $X = \mathbb{R}$.

Неважко побудувати скінченно-адитивну міру на 2^X для довільного $X \neq \emptyset$. Дійсно, зафіксуємо деяке $x \in X$ і для $A \in 2^X$ покладемо $\mu(A) = 1$, якщо $x \in A$ і $\mu(A) = 0$ в іншому випадку. Легко переконатись, що μ – скінченно-адитивна міра, але така міра навряд чи може викликати якийсь інтерес, особливо для практичного застосування. Для побудови більш змістовної міри, крім властивості скінченної адитивності, визначимо міру μ на множині всіх обмежених підмножин $\mathbb{R}^n$ так, щоб виконувалися властивості:

1) $\mu(I) = 1$, *якщо* I – n-*мірний одиничний куб*;

2) $\mu(A) = \mu(B)$, *якщо* A *і* B *такі, що одну множину можна сумістити з іншою за допомогою деякої групи ізометрій* G *в* $\mathbb{R}^n$.

Проста задача теорії вимірювання полягає в тому, щоб визначити скінченно-адитивну міру μ на множині всіх обмежених підмножин простору $\mathbb{R}^n$ так, щоб вона задовольняла умови 1 і 2.

Вирішення поставленої задачі у випадку, коли G є група рухів $\mathbb{R}^n$ дають такі теореми:

Теорема 1.1 (Банах). *Якщо 2) має виконуватись коли G є група всіх рухів $\mathbb{R}^n$, тобто, для всіх конгруентних A і B, то просту задачу теорії вимірювання можна вирішити для $\mathbb{R}^1$ та $\mathbb{R}^2$, але не єдиним чином.*

Теорема 1.2 (Хаусдорф). *Якщо 2) має виконуватись коли G є група всіх рухів $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, то проста задача теорії вимірювання не розв'язувана.*

Різниця в результатах вирішення простої задачі теорії вимірювання для просторів $\mathbb{R}^1$ і $\mathbb{R}^2$ та просторів $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$ пояснюється тим, що групи руху просторів $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$ є багатшими від груп руху просторів $\mathbb{R}^1$ і $\mathbb{R}^2$.

Теорему 1.1 приймемо без доведення, а щодо теореми Хаусдорфа, то досить показати, що вже в $\mathbb{R}^3$ проста задача не розв'язувана. Для цього розглянемо парадокс, який створили у 1920-х роках польсько-український математик С. Банах та польсько-американський математик єврейського походження А. Тарський.

Слід відзначити, що Хаусдорф довів теорему 1.2 у 1914 році, тобто, перед тим, як було виявлено парадокс Банаха-Тарського, і його доведення не могло спиратись на цей парадокс.

1.2. Однаково-складені множини

Нехай X та Y дві підмножини простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 1.1. *Бієктивне відображення $f: X \to Y$ називається припустимим, якщо існує розбиття $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ на скінченну кількість підмножин A_i із 2^X таких, що обмеження f на A_i є ізометрія і $f(A_i) \cap f(A_j) = \emptyset$, $i \neq j$.*

У цьому випадку кажуть, що X і Y є однаково-складеними і позначають $X \sim Y$.

Вправа 1.1. *Довести, що відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності. З урахуванням цього, далі такі множини будемо називати еквівалентними.*

Теорема 1.3. (Шредер-Бернштейн) *Якщо* $A \subset B \subset C$ *і* $A \sim C$*, то* $C \sim B$.

Доведення. Нехай $f: C \to A$ припустиме. Позначимо C через C_0, B через B_0, а A через C_1. Далі покладемо $C_{i+1} = f(C_i)$, $B_{i+1} = f(B_i)$, $i \geq 0$.
Неважко переконатись, що $C_0 \supset B_0 \supset C_1 \supset B_1 \supset \cdots \supset Z$, де $Z = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i \cap \bigcap_{j=0}^{\infty} B_j$. Відзначимо, що C і B (тобто, C_0 і B_0) можна розкласти в такі об'єднання

$$C = (C_0 \setminus B_0) \cup (B_0 \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus B_1) \cup \ldots \cup Z,$$
$$B = (B_0 \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus C_2) \cup \ldots \cup Z.$$

Зауважимо, що у кожному із об'єднань множини, що входять в об'єднання, не перетинаються. Оскільки $C_0 \sim C_1$, $B_0 \sim B_1$, то $C_0 \setminus B_0 \sim C_1 \setminus B_1$, далі, оскільки $C_1 \sim C_2$, $B_1 \sim B_2$, то $C_1 \setminus B_1 \sim C_2 \setminus B_2$ і т. д. Отже, непарні частини розкладу C еквівалентні парним розкладу B, а парні – дорівнюють відповідним непарним. Для завершення доведення побудуємо припустиму функцію $h: C \to B$ так:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \quad x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (C_i \setminus B_i), \\ x,\ x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B_i \setminus C_{i+1}) \cup Z. \end{cases}$$

Неважко переконатись, що h є припустиме відображення.

Вправа 1.2. *Використовуючи доведення цієї теореми, доведіть теорему Кантора-Бернштейна*: *Якщо* $A \subset B \subset C$ *і* $|A| = |C|$*, то* $|B| = |C|$.

Підказка: Це доведення повністю збігається з доведенням теореми Банаха-Бернштейна до побудови функції h.

1.3. Парадокс Банаха-Тарського

Означення 1.2. *Група* G *називається вільною групою, якщо існує підмножина* $S \subset G$ *така, що кожен елемент* G *записується єдиним чином як добуток скінченного числа елементів* S *та їх обернених при цьому для будь-якого* $\psi \in S$ $\psi^{\alpha}\psi^{-\alpha} = 1$*, тобто скорочується.*

Елементи множини S називаються твірними.

Приклад. Нехай твірними групи є φ та ψ. Тоді елементи вільної групи G – це записи вигляду

$$\varphi^{\alpha_1}\psi^{\alpha_2}\varphi^{\alpha_3}\psi^{\alpha_4}\dots\varphi^{\alpha_n},$$

де $\alpha_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Розглянемо одиничну сферу S^2 в $\mathbb{R}^3$ і будемо вважати, що φ та ψ – це повороти на цій сфері відносно різних осей. Крім цього, будемо вважати, що $\varphi^2 = 1$ і $\psi^3 = 1$, наприклад, $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi/3$ і осі взяті так, що немає інших співвідношень. Розглянемо орбіту точки $x \in S^2$.

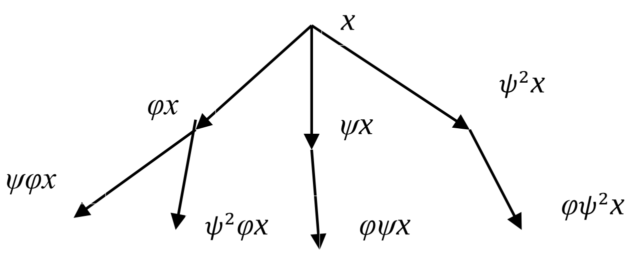

Рис. 1

Точки орбіти x можна розбити на три множини A, B і C так, що:

$$A \sim B \cup C;\ A \sim B \sim C \tag{1.2}$$

та

$$\varphi(A) = B \cup C;\ \psi(A) = B;\ \psi^2(A) = C. \tag{1.3}$$

Дійсно, задамо переходи між множинами такою таблицею:

	$a \in A$	$a \in B$	$a \in C$
$a = \psi\dots$	$\varphi a \in B$	$\varphi a \in A$	$\varphi a \in A$
$a = \varphi\dots$	$\psi a \in B$	$\psi a \in C$	$\psi a \in A$
	$\psi^2 a \in C$	$\psi^2 a \in A$	$\psi^2 a \in B$

Перевіримо виконання (1.3). Якщо $A \ni a = \psi \ldots$, то $\varphi a \in B$. Якщо ж $A \ni a = \varphi \ldots$, то, легко бачити, що a має вигляд $a = \varphi\psi b$, звідки, $\varphi a = \psi b$, тобто, ψb належало до рядка, де a має вигляд $a = \psi \ldots$. Оскільки, $\varphi\psi b \in A$, то $\psi b \in B$ або $\psi b \in C$. Отже, $\varphi(A) = B \cup C$. Аналогічно перевіряються рівності $\psi(A) = B$; $\psi^2(A) = C$.

Розфарбуємо точки орбіти у кольори A, B і C. Наприклад, якщо x зафарбовано в колір A, то φx та ψx будуть кольору B, а $\psi^2 x$ кольору C і т. д. Так зафарбуємо всю орбіту.

Вправа 1.3. *Розфарбувати точки орбіти x, представлені на рисунку 1, при $x \in C$.*

Далі застосуємо теорему вибору і виберемо точки кольорів A, B і C із кожної орбіти на сфері. Але слід відзначити, що є «погані» точки, орбіти яких проходять через осі поворотів. Орбіти таких точок відрізняються від звичайних тим, що попадаючи на осі, вони не змінюються при поворотах відносно цих осей. Відзначимо, що множина таких «поганих» точок Q є зліченною, оскільки всього чотири точки на сфері належать осям поворотів, а кількість всіх можливих поворотів є зліченною множиною.

Отже, ми розбили сферу на чотири множини $S^2 = A \sqcup B \sqcup C \sqcup Q$. Відзначимо, що існує поворот не рівний φ та ψ, який Q переводить в Q_0 так, що $Q \cap Q_0 = \emptyset$, тобто, $Q_0 \subset A \sqcup B \sqcup C$. Дійсно, всіх поворотів, що переводять якусь точку в неї ж, злічена кількість, отже, сукупність всіх поворотів, що переводять хоч якусь точку Q в себе, є зліченною і серед континуума поворотів знайдеться потрібний). Оскільки $B \sqcup C \sim A \sim C$, можна вважати, що $Q_0 \subset C$. Сфера розбивається в обєднання $S^2 = (A \cup Q) \cup (B \cup Q_0) \cup (C \setminus Q_0)$. Далі,

$$A \cup Q \sim B \cup C \cup Q \sim A \cup C \cup Q \sim A \cup B \cup C \cup Q \sim S^2,$$

аналогічно $B \cup Q_0 \sim A \cup Q \sim S^2$. Таким чином, із сфери S^2 ми отримали дві сфери S^2 плюс образ множини $C \setminus Q_0$. Тому за теоремою Банаха-Бернштейна ми можемо із однієї сфери отримати дві.

Аналогічно можна довести твердження, яке, зокрема, є доведенням теореми 1.2:

Теорема 1.4. (парадокс Банаха-Тарського). *Довільну кулю B в $\mathbb{R}^3$ можна розбити на 5 множин A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, що не перетинаються, і побудувати множини B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, які не перетинаються, і такі, що*

1. *Множина B_i конгруентна множині A_i, $i = 1,2,3,4,5$.*
2. *Об'єднання B_1 та B_2 дорівнює B.*
3. *Об'єднання B_3, B_4 та B_5 дорівнює B.*

Отже, підсумовуючи цю лекцію, доходимо такого висновку: взагалі кажучи, якщо X досить велика множина, то побудувати адитивну міру на 2^X неможливо. Тому ми будемо будувати спеціальні класи підмножин із 2^X, для яких така міра існує.

Лекція 2. *Класи множин*

2.1. Основні класи множин

Нехай X – непорожня фіксована множина. Позначимо через 2^X – множину всіх підмножин множини X.

Означення 2.1. *Система $\mathbb{S}$ підмножин із 2^X називається <u>півкільцем</u> множин, якщо $\forall A, B \in \mathbb{S}$ виконуються умови:*

1. $A \cap B \in \mathbb{S}$.
2. $\exists n \in \mathbb{N}, \exists C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathbb{S}$*:* $C_k \cap C_l = \emptyset$, $k \neq l$, *і виконується рівність* $A \backslash B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

Приклад. $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S} = \{\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]: a_i < b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} \cup \{\emptyset\}$ *– півкільце підмножин $\mathbb{R}^n$.*

Означення 2.2. *Півалгебра множин – це півкільце множин $\mathbb{S}$, таке, що* $X \in \mathbb{S}$.

Означення 2.3. *Нехай $\mathbb{K} \subset 2^X$ – непорожня система множин. $\mathbb{K}$ називається кільцем множин, якщо $\forall A, B \in \mathbb{K}$ виконані умови:*

1. $A \cup B \in \mathbb{K}$.
2. $A \setminus B \in \mathbb{K}$.

Означення 2.4. *Якщо $X \in \mathbb{A}$, де $\mathbb{A}$ – кільце множин, то $\mathbb{A}$ називають алгеброю множин.*

Означення 2.5. Нехай $\mathcal{K} \subset 2^X$ *– непорожня система множин. $\mathcal{K}$ називається $\sigma-$кільцем множин, якщо:*

1. $\forall \{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{K}$.

Означення 2.6. *Якщо σ-кільце $\mathcal{A}$ містить X, то $\mathcal{A}$ називається σ-алгеброю.*

Означення 2.7. *Якщо кільце $\mathbb{K}$ разом із довільною послідовністю $\{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{K}$ містить $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\mathbb{K}$ називають δ-кільцем.*

Зауваження. Назва алгебра (кільце) множин тісно пов’язана з поняттям булевої алгебри (кільця). Нагадаємо коротко ці поняття:

Нехай $\mathcal{R} \neq \emptyset$ – деяка множина елементів.

Означення 2.8. *Трійка $(\mathcal{R}, +, \times)$, де $+$ і $\times$ бінарні операції на $\mathcal{R}$, називається асоціативним кільцем, якщо $(\mathcal{R}, +)$ – адитивна абелева (комутативна) група і при цьому виконуються:*

1. $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ *(асоціативність множення);*
2. $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$: $(a + b) \times c = a \times c + b \times c,\ c \times (a + b) = c \times a + c \times b$ *(дистрибутивність множення відносно додавання).*

Означення 2.9. *Нехай в асоціативному кільці $(\mathbb{B}, +, \times)$ виконується умова $\forall\, x \in \mathbb{B},\ x \times x = x$, тоді кільце $\mathbb{B}$ називається булевим кільцем.*

Теорема 2.1. *Нехай* $\mathbb{B}$ - булеве кільце, тоді $\forall\, x, y \in \mathbb{B},\ x \times y = y \times x$ *і* $x + x = 0$.

Доведення. $(x + y)(x + y) = x + y$, звідки $x \times y + y \times x = 0$. Підставивши $y = x$, отримаємо $x + x = 0$. Далі, оскільки $x \times y + y \times x = 0$ та $x \times y + x \times y = 0$, то $x \times y = x \times y$.

Якщо в кільці множин $\mathbb{K}$ в якості суми множин A і B взяти симетричну різницю $A + B \stackrel{\text{def}}{=} (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, а в якості добутку перетин $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} A \cap B$, то отримаємо булеве кільце.

Нижче терміни півкільце, півалгебра, кільце, алгебра будуть стосуватись певних систем підмножин деякої універсальної множини $X \neq \emptyset$.

Означення 2.8. *Нехай* $\mathbb{M} \subset 2^X$ і $\mathbb{M} \neq \emptyset$. *Клас множин* $\mathbb{M}$ *називається* *<u>монотонним</u>, якщо*: $\forall\{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{M}$: $\forall n\ \geq 1$, $A_n \subset A_{n+1}$, *і* $\forall\{B_j, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{M}$, $B_{n+1} \subset B_n$, *виконується*

$$\lim_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{M}, \qquad \lim_{n\to\infty} B_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathbb{M}.$$

При цьому послідовність $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ називають послідовністю, що *монотонно зростає*, а послідовність $\{B_j, j \in \mathbb{N}\}$ називають *монотонно спадною*.

2.2. Породжені класи множин

Означення 2.9. *Кільцем (алгеброю, $\sigma-$кільцем, $\sigma-$алгеброю , монотонним класом), породженим класом $\mathbb{H}$, називається кільце (алгебра, $\sigma-$кільце, σ-алгебра, монотонний клас), яке містить $\mathbb{H}$ і міститься в будь-якому кільці (алгебрі, σ-кільці, σ-алгебрі, монотонному класі), що містить $\mathbb{H}$.*

Позначимо через $k(\mathbb{H})$ ($a(\mathbb{H})$, $\sigma k(\mathbb{H})$, $\sigma a(\mathbb{H})$, $m(\mathbb{H})$) кільце (відповідно алгебру, σ-кільце, σ-алгебру, монотонний клас), породжене набором множин $\mathbb{H}$.

Теорема 2.2. *Перетин довільної множини кілець є кільцем.*

Доведення. Нехай $\{\mathbb{K}_\alpha : \alpha \in I\}$ – множина кілець. Тоді

$$\forall A, B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathbb{K}_\alpha \Rightarrow \ A, B \in \mathbb{K}_\alpha, \forall \alpha \in I \Rightarrow A \backslash B,$$

$$A \cup B \in \mathbb{K}_\alpha \Rightarrow A \backslash B, A \cup B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathbb{K}_\alpha.$$

Зауваження. *Теорема 2.2 доводить існування породженого деяким класом кільця та задає метод отримання цього кільця, якщо відомі всі інші кільця, що містять цей клас.*

Вправа 2.1. *Чи справедлива теорема 2.2 для алгебр, σ-кілець, σ-алгебр, монотонних класів?*

Вправа 2.2. *Показати, що для півкілець теорема 2.2, загалом, не має місця.*

Лекція 3. *Побудова кільця, породженого півкільцем, та σ-кільця, породженого кільцем*

3.1. Кільце, породжене півкільцем

Теорема 3.1. *Нехай $\mathbb{S}$ – півкільце. Тоді*

$$k(\mathbb{S}) = \ \mathbb{L} \ = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i\,, \ A_i \in \mathbb{S}, \ n \in \mathbb{N}, \ i = 1,2, \dots, n, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \right\}.$$

Доведення. Очевидно, що $\mathbb{S} \subset \mathbb{L} \ \subset k(\mathbb{S})$. Перевіримо, що $\mathbb{L}$ – кільце. Нехай $A, B \ \in \ \mathbb{L}$, тоді існують набори $\{A_i, i = 1, \dots, n\}, \{B_j, j = 1, \dots., m\} \subset \mathbb{S}$ такі, що
$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \ B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, причому $A_i \cap A_k = \emptyset, i \neq k, B_j \cap B_l = \emptyset, j \neq l.$
Покажемо, $A \cap B \in \mathbb{L}$. Дійсно, оскільки $\left(A_i \cap B_j\right) \cap (A_k \cap B_l) = \emptyset$, якщо $i \neq k$ або $i \neq k$, то

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left(A_i \cap B_j\right) \in \mathbb{L}.$$

Тут ми скористались означенням півкільця, за яким $A_i \cap B_j \in \mathbb{S}$.

Очевидно, що для довільного набору $\{D_k, k = 1, \dots, r\} \subset \mathbb{L}$, $\bigcap_{k=1}^{r} D_k \in \mathbb{L}$.

Далі, з означення півкільця випливає, що існує набір множин $C_{ijk} \in \mathbb{S}$ таких, що $A_i \backslash B_j = \bigcup_{k=1}^{l(i,j)} C_{ijk}$, де $C_{ijr} \cap C_{ijs} = \emptyset, r \neq s$.

Звідки

$$A \backslash B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \left(\overline{\bigcup_{j=1}^{m} B_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}\left(A_i \backslash B_j\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{l(i,j)} C_{ijk} = \bigcap_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{l(i,j)} C_{ijk} \in \mathbb{L},$$

Очевидно, що $A \cup B \subset \mathbb{L}$. Отже, $\mathbb{L}$ – кільце, що, з урахуванням $\mathbb{S} \subset \mathbb{L} \subset k(\mathbb{S})$, завершує доведення.

3.2. Ознака σ-кільця

Лема 3.1. *Кільце $\mathbb{K}$ є σ-кільцем тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{K}$ є монотонним класом.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай $\mathbb{K}$ є σ-кільцем. Покажемо, що кожне σ-кільце є монотонним класом. Дійсно, для $\forall\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{K}$ яка є монотонно зростаючою, маємо $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}$. Якщо ж $\{A_n, n \geq 1\}$ є монотонно спадною, тоді

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \backslash \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \backslash A_n)\right) \in \mathbb{K}.$$

Достатність. Нехай $\mathbb{K}$ є монотонним класом і $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{K}$. Очевидно, що $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{K}$ і $B_n \subset B_{n+1}$, тобто $\{B_n, n \geq 1\}$ монотонно зростаюча послідовність із $\mathbb{K}$ і, отже, $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{K}$, а, оскільки $\mathbb{K}$ – кільце, то $\mathbb{K}$ є σ-кільцем.

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathbb{K}$ *– кільце, тоді* $\sigma k(\mathbb{K}) = m(\mathbb{K})$.

Доведення. За лемою 3.1 $\sigma k(\mathbb{K})$ монотонний клас, отже, $m(\mathbb{K}) \subset \sigma k(\mathbb{K})$. Тому достатньо показати, що $m(\mathbb{K})$ є σ-кільцем.
Для $A \in m(\mathbb{K})$ покладемо $M(A) = \{B \in 2^X : \{A \cup B,\ A \backslash B,\ B \backslash A\} \subset m(\mathbb{K})\}$.
Оскільки $\mathbb{K}$ – кільце і $\mathbb{K} \subset m(\mathbb{K})$, то для будь-якого $A \in \mathbb{K}$ маємо $\mathbb{K} \subset M(A)$.

Покажемо, що $\forall A \in m(\mathbb{K})$, $M(A)$ – монотонний клас. Нехай $\{B_n, n \in \mathbb{N}\} \subset M(A)$, $B_n \subset B_{n+1}$, $n \geq 1$. Тоді для всіх $n \geq 1$: $(B_n \cup A) \subset (B_{n+1} \cup A)$, $(B_n \backslash A) \subset (B_{n+1} \backslash A)$, $(A \backslash B_n) \supset (A \backslash B_{n+1})$; $\{B_n \cup A,\ A \backslash B_n, B_n \backslash A\} \subset m(\mathbb{K})$.

Оскільки $m(\mathbb{K})$ – монотонний клас, то
$m(\mathbb{K}) \ni \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup A) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \cup A$, $m(\mathbb{K}) \ni \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \backslash A) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \backslash A$, $m(\mathbb{K}) \ni \bigcap_{n=1}^{\infty}(A \backslash B_n) = A \backslash (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$. Отже, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in M(A)$.
Аналогічно для монотонно спадної послідовності.

Далі, оскільки $\forall A \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \subset M(A)$ і $M(A)$ – монотонний клас, то $\forall A \in \mathbb{K}$ має місце $m(\mathbb{K}) \subset M(A)$. Звідки випливає, що $\forall A \in \mathbb{K}$, $\forall B \in m(\mathbb{K})$ має місце $\{A \cup B, A \backslash B, B \backslash A\} \subset m(\mathbb{K}) \Longrightarrow \mathbb{K} \subset M(B)$, а, отже, $m(\mathbb{K}) \subset M(B)$.
Тобто, $\forall B_1, B \in m(\mathbb{K})$, $\{B_1 \cup B, B_1 \backslash B, B \backslash B_1\} \subset m(\mathbb{K})$), звідки, $m(\mathbb{K})$ є кільце. В силу леми 3.1, $m(\mathbb{K})$ є σ-кільце, а значить $m(\mathbb{K}) = \sigma k(\mathbb{K})$.

Означення 3.1. *Функція множини* $\alpha(\cdot)$*, визначена на деякому класі множин* $\mathbb{H}$ *із* X*, яка приймає скінченні або нескінченні значення, називається:*

1. *Невід'ємною, якщо* $\forall A \in \mathbb{H}$, $\alpha(A) \geq 0$;
2. *Скінченно півадитивною, якщо* $\forall A_i \in \mathbb{H}$, $i = 1,2,\dots,n$ і $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{H}$
$$\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i).$$
3. *Скінченно адитивною (або далі просто «адитивною»), якщо* $\forall A_i \in \mathbb{H}$, $i = 1,\dots,n$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{H}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
$$\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i).$$
4. σ-*півадитивною, якщо* $\forall A, A_i \in \mathbb{H}$, $i \in \mathbb{N}$, таких що $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\alpha(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i).$$

5. σ-*адитивною, якщо* $\forall A_i \in \mathbb{H}$, $i = 1,2,\dots,n$, *таких що* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{H}$ *та* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$

$$\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i).$$

6. *Монотонною, якщо* $\forall A, B \in \mathbb{H}$ і $A \subset B$, то $\alpha(A) \le \alpha(B)$;
7. *Скінченною, якщо* $\forall A \in \mathbb{H}$, $|\alpha(A)| < \infty$.
8. σ-*скінченною, якщо* $\exists\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{H}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ і $|\alpha(A_n)| < \infty$.

Вправа 3.1. *Довести, що* $k(\mathbb{S})$ *із теореми 3.1 не є* σ*-кільцем.*

Вправа 3.2. *Довести, що декартовий добуток кілець, взагалі кажучи, не є кільцем.*

Вправа 3.3. *Навести приклад скінченно-адитивної функції, яка не є* σ-*адитивною.*

Лекція 4. *Передміра, міра. Основні властивості*

4.1. Передміра та її основні властивості

Означення 4.1. *Функція множин* $\mu(\cdot)$ *називається передмірою, якщо вона визначена на півкільці, є невід'ємною, адитивною і скінченна хоча б на одній множині півкільця.*

Відзначимо, що для $\mu(A) < +\infty$ з рівності $A = A \cup \emptyset$ і адитивності передміри випливає, що $\mu(\emptyset) = 0$.

Теорема 4.1. *Нехай* $\mathbb{K}$ *– кільце і* μ *– передміра на* $\mathbb{K}$*. Тоді:*

1. μ *– монотонна на* $\mathbb{K}$, тобто $\forall A, B \in \mathbb{K}$ таких, що $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$, маємо $\mu(A) \le \mu(B)$.

2. $\forall A, B \in \mathbb{K}$ таких, що $\min\big(\mu(A), \mu(B)\big) < +\infty$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

3. μ – *півадитивнна на* $\mathbb{K}$, тобто, $\forall\{A_k, k = 1,2, \dots, n\} \subset \mathbb{K}$ і $B \in \mathbb{K}$ такого, що $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$\mu(B) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Доведення. 1. Нехай $A, B \in \mathbb{K}$ і $A \subset B$. Тоді $B = A \cup (B \backslash A)$, $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$. З урахуванням адитивності μ маємо:

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A). \tag{3.1}$$

Отже, $\mu(A) \le \mu(B)$.

2. Нехай $\mu(A) < +\infty$. Тоді із (3.1) випливає $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Якщо $\min\big(\mu(A), \mu(B)\big) < +\infty$, то із пункту 1 випливає, що

$\mu(A \cap B) \le \min(\mu(A), \mu(B)) < +\infty$, крім того, $A \cup B = \big(A \backslash (A \cap B)\big) \cup B$ і

$\big(A \backslash (A \cap B)\big) \cap B = \emptyset$. Враховуючи (3.1), маємо

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

3. З адитивності і монотонності μ випливає, що

$$\mu(B) \le \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\big(A_1 \cup (A_2 \backslash A_1)\big) \cup \dots \cup \left(A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right)$$

$$= \mu(A_1) + \mu(A_2 \backslash A_1) \dots + \mu\left(A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

4.2. Міра та її основні властивості

Означення 4.2. *Передміра* μ *називається* <u>*мірою*</u>, *якщо вона має властивість* σ- *адитивності, тобто*

$\forall A_i \in \mathbb{S}$, $i = 1,2, \dots$, *таких, що* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{S}$, *для* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Теорема 4.2. *Нехай* $\mathbb{K}$ *– кільце і* μ *–міра на* $\mathbb{K}$*. Тоді* μ *–* σ*-півадитивна на* $\mathbb{K}$.

Доведення. Оскільки $\forall A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\ldots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ і для $l \neq k$ $\left(A_l \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} A_i\right) \cap \left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \emptyset$, *то*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

тут $\bigcup_{i=1}^{0} A_i = \emptyset$.

Теорема 4.3. *Нехай* μ *– скінченна передміра на кільці* $\mathbb{K}$*. Тоді такі чотири умови еквівалентні:*

1) μ *є міра*;

2) μ *неперервна знизу, тобто,* $\forall A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\ldots$, *таких, що* $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right);$$

3) μ *неперервна зверху, тобто,* $\forall A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\ldots$, *таких, що* $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right);$$

4) μ неперервна *в «нулі», тобто, для* $\forall A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\ldots$, *таких, що* $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Доведення. 1) ⇒ 2). Оскільки $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots$, то, з урахуванням σ-адитивності міри, маємо

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus A_2) + \cdots$$

$$= \mu(A_1) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

2) $\Rightarrow$ 3). Нехай $A_n \supset A_{n+1}$ для $\forall n \geq 1$, тоді

$$\mu(A_n) = \mu\big(A_1 \setminus (A_1 \setminus A_n)\big) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A_n).$$

Послідовність $\{\boldsymbol{A_1 \setminus A_n, n} \in \mathbb{N}\}$ – не спадна і $\bigcup_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}(\boldsymbol{A_1 \setminus A_n}) = \boldsymbol{A_1} \setminus \bigcap_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\boldsymbol{A_n}$, тому в силу 2) $\mathbf{lim}_{\boldsymbol{n\to\infty}}\,\boldsymbol{\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu}(\bigcup_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}(\boldsymbol{A_1 \setminus A_n}))$.

Звідки

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\right)$$

$$= \mu(A_1) - \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right) = \mu(A_1) - \mu(A_1) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

$$= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

3) $\Rightarrow$ 4) оскільки 4) є частинний випадок 3).

4) $\Rightarrow$ 1). Нехай $\forall \boldsymbol{A_i} \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{i} \in \mathbb{N}$, попарно не перетинаються і $\bigcup_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\boldsymbol{A_n} \in \mathbb{K}$. Тоді

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty}A_n\right).$$

Оскільки $\bigcup_{\boldsymbol{n=m+1}}^{\infty}\boldsymbol{A_n} \downarrow \emptyset$ при $\boldsymbol{m} \to \infty$, то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) = \lim_{m\to+\infty}\left[\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty}A_n\right)\right]$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\mu(A_n) + \lim_{m\to+\infty}\mu\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty}A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

У теоремі 4.3 розглядалась скінченна міра. У загальному випадку справедливі такі твердження:

Лема 4.1. *Міра* μ *на кільці* $\mathbb{K}$ *неперервна зверху, тобто,* $\forall A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\ldots$, *таких, що* $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathbb{K}$ і $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\mu\big(A_{n_0}\big) < +\infty$, має місце

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A_n})=\boldsymbol{\mu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{A_n}\right).$$

Лема 4.2. *Міра* μ *на кільці* $\mathbb{K}$ *неперервна знизу, тобто,* $\forall A_i \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,\ldots$, *таких, що* $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{K}$, має місце

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A_n})=\boldsymbol{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{A_n}\right).$$

Вправа 4.1. *Довести леми* 4.2 *та* 4.3.

Вправа 4.2. *Нехай* $\boldsymbol{\mu}$ *– міра на кільці* $\mathbb{K}$. *Довести, що функція* $\boldsymbol{d}\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to [\boldsymbol{0}, +\infty)$, *де* $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A}\,\Delta\,\boldsymbol{B})$ *є метрикою.*

4.3. Ознаки σ-адитивності передмір

Означення 4.3. *Нехай* $\mathbb{H}\subset 2^X$ *- клас підмножин* X. $\mathbb{H}$ *називається* *компактним*, *якщо для будь-якої послідовності* $\{A_n, n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{H}$, *у якій* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, *існує* $n_0\in\mathbb{N}$ *такий, що і* $\bigcap_{n=1}^{n_0} A_n=\emptyset$.

Означення 4.4. *Нехай* $\boldsymbol{\mu}$ *– передміра на кільці* $\mathbb{K}$. *Клас множин* $\mathbb{H}\subset\mathbb{K}$ *апроксимує* $\boldsymbol{\mu}$ *знизу, якщо* $\forall \boldsymbol{A}\in\mathbb{K}$ *і* $\forall\boldsymbol{\varepsilon}>\boldsymbol{0}$, $\exists \boldsymbol{A_\varepsilon}\in\mathbb{H}$: $\boldsymbol{A_\varepsilon}\subset\boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A}\setminus\boldsymbol{A_\varepsilon})<\boldsymbol{\varepsilon}$.

Теорема 4.4. *Нехай* $\mathbb{K}$ *– кільце підмножин* X, μ *–скінченна передміра на* $\mathbb{K}$. *Для того, щоб* μ *була мірою досить, щоб* $\mathbb{K}$ *містила компактний клас* $\mathbb{H}$, *який апроксимує* μ *знизу.*

Доведення. В силу теореми 4.3, для доведення досить встановити, що μ неперервна в «нулі». Отже, нехай $\{A_n, n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{K}$, $\forall n\ge 1$, $A_n\supset A_{n+1}$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$.

Для деякого $\varepsilon>0$ і для всіх $n\in\mathbb{N}$ вибираємо $B_n\in\mathbb{H}$: $B_n\subset A_n$ *та* $\mu(A_n\setminus B_n)\le\frac{\varepsilon}{2^n}$. Оскільки $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$, то $\exists p\in\mathbb{N}$: $\bigcap_{n=1}^{p}B_n=\emptyset$, тому

$$A_p = A_p \setminus \bigcap_{n=1}^{p} B_n = \bigcup_{n=1}^{p} (A_p \setminus B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{p} (A_n \setminus B_n) \Rightarrow$$

$$\mu(A_p) \le \sum_{n=1}^{p} \mu(A_n \setminus B_n) \le \sum_{n=1}^{p} \frac{\varepsilon}{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

4.4. Міра Жордана

Прикладом міри в $\mathbb{R}^n$ може служити міра Жордана μ_J, яка розглядається в курсі математичного аналізу. Нагадаємо стисло означення та деякі властивості цієї міри.

Розглянемо півкільце множин $\mathbb{S} = \{\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] : a_i < b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\} \cup \{\emptyset\}$, де через $\prod_{i=1}^{n}$ ми позначаємо декартовий добуток n множин. Міра Жордана довільної множини $\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$ із півкільця $\mathbb{S}$ визначається так:

$$\mu_J\left(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\right) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Очевидно, що при $n = 1$ це довжина відрізка, при $n = 2$ – площа прямокутника і т.д. Оскільки $\forall A \in k(\mathbb{S})$ $\exists \{C_1, \ldots, C_n\} \subset \mathbb{S}$, що $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \ne j$ і $A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, то покладають

$$\mu_J(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu_J(C_i).$$

Означення 4.5. *Множина $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ називається вимірною за Жорданом, якщо $\forall \varepsilon > 0$ знайдуться множини $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in k(\mathbb{S})$ такі, що $A_\varepsilon \subset \Phi \subset B_\varepsilon$ і*

$$\mu_J(B_\varepsilon) - \mu_J(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Очевидно, що якщо множина Φ вимірна за Жорданом, то $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_J(B_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_J(A_\varepsilon)$ і ця границя приймається за Жорданову міру множини Φ, тобто,

$$\mu_J(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_J(B_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_J(A_\varepsilon).$$

Із означення 4.5 випливає **критерій вимірності множини за Жорданом:**

Множина Φ *вимірна за Жорданом тоді і тільки тоді, коли*

$$\mu_J(\partial\Phi) = 0,$$

де $\partial\Phi$ *– границя множини* Φ.

Лема 4.3. *Множина* $\mathbb{K}_J$ *всіх вимірних за Жорданом множин є кільцем*.

Доведення. Якщо $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{K}_J$, то, оскільки $\partial(\Phi_1 \cup \Phi_2) \subset \partial\Phi_1 \cup \partial\Phi_2$ та $\partial(\Phi_1 \backslash \Phi_2) \subset \partial\Phi_1 \cup \partial\Phi_2$, маємо $\mu_J\big(\partial(\Phi_1 \cup \Phi_2)\big) = 0$ та $\mu_J\big(\partial(\Phi_1 \backslash \Phi_2)\big) = 0$. Отже, за критерієм вимірності за Жорданом $\Phi_1 \cup \Phi_2 \in \mathbb{K}_J$ і $\Phi_1 \backslash \Phi_2 \in \mathbb{K}_J$

Теорема 4.5. *Нехай* $\mathbb{K}_J$ *– кільце всіх вимірних за Жорданом підмножин* $\mathbb{R}^n$ *і* μ_J *–* n*-мірна міра Жордана на* $\mathbb{K}_J$. *Тоді* μ_J σ*-адитивна на* $\mathbb{K}_J$ *, тобто,* μ_J *– міра.*

Доведення. Нехай $\mathbb{H} = \{F \colon F \subset \mathbb{R}^n$ – компактна множина, вимірна за Жорданом$\}$. (У якості вправи доведіть, що $\mathbb{H}$ – компактний клас.) Далі, відподно до конструкції міри Жордана, для множини $\forall A \in \mathbb{K}_J$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon \in \mathbb{H}$: $\mu_J(A \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$. Звідки, з урахуванням теореми 4.4, випливає твердження теореми.

Вправа 4.3. *На множині всіх підмножин раціональних чисел* $\mathbb{Q}$ *задати міру* μ *так, щоб кожне раціональне число мало міру більшу від нуля, причому* $\mu(\mathbb{Q}) = 1$.

Вправа 4.4. *Навести приклад нескінченної множини на площині, міра Жордана якої дорівнює нулю.*

Лекція 5. ***Продовження міри з півкільця на кільце та з кільця на σ-кільце. Теорема Каратеодорі***

5.1. Продовження міри з півкільця на породжене ним кільце

Означення 5.1. *Нехай* $H_1, H_2 \subset 2^X$, $\mu_i: H_i \to]-\infty, +\infty]$, $i = 1, 2$. *Функція* μ_2 *називається <u>продовженням</u> функції* μ_1, *якщо* $H_1 \subset H_2$ *і* $\forall A \in H_1$, $\mu_1(A) = \mu_2(A)$.

Теорема 5.1. *Для передміри* μ *на півкільці* $\mathbb{S}$ *існує єдине продовження до передміри* $\widetilde{\mu}$ *на* $k(\mathbb{S})$.

Доведення. Оскільки за теоремою 3.1 для довільного $A \in k(\mathbb{S})$ існує набір $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{S}$ такий, що $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Покладемо $\widetilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$. Перевіримо, що це продовження коректне, тобто, не залежить від вибору підмножин із $\mathbb{S}$, що не перетинаються і в об'єднанні дають A. Дійсно, якщо $A = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, $B_j \in \mathbb{S}$, $B_j \cap B_i = \emptyset$, $i \neq j$, то $A_i = A_i \cap A = \bigcup_{j=1}^{m}(A_i \cap B_j)$, $B_j = A \cap B_j = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_j)$ причому $A_i \cap B_j \in \mathbb{S}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

$$\widetilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m}(A_i \cap B_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu\left(A_i \cap B_j\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Продовження єдине. Дійсно, нехай існує інше продовження μ_2 на $k(\mathbb{S})$. Тоді $\forall A \in k(\mathbb{S})$ $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in P$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, звідки

$$\mu_2(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \widetilde{\mu}(A).$$

Теорема 5.2. *Для міри* μ *на півкільці* $\mathbb{S}$ *існує єдине продовження до міри* $\widetilde{\mu}$ *на* $k(\mathbb{S})$.

Доведення. Оскільки міра μ є передмірою, то за теоремою 5.1 вона продовжується до перед міри $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ на $\boldsymbol{k}(\mathbb{S})$. Залишається перевірити, що продовження $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ $\boldsymbol{\sigma}$-адитивне. Нехай $\{\boldsymbol{A_n}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}\} \subset \boldsymbol{k}(\mathbb{S})$, $\boldsymbol{A_n} \cap \boldsymbol{A_m} = \emptyset$, $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{A} = \bigcup_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n} \in \boldsymbol{k}(\mathbb{S})$. Тоді $\boldsymbol{A} = \bigcup_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{B_j}$, $\boldsymbol{B_j} \in \mathbb{S}$, $\boldsymbol{B_i} \cap \boldsymbol{B_j} = \emptyset$, $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$ і для $\forall \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1}$ $\boldsymbol{A_n} = \bigcup_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{l(n)}} \boldsymbol{C_{ni}}$, $\boldsymbol{C_{ni}} \in \mathbb{S}$, $\boldsymbol{C_{ni}} \cap \boldsymbol{C_{nj}} = \emptyset$, $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$. Отже, $\boldsymbol{A} = \bigcup\limits_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \bigcup_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{l(n)}} \boldsymbol{C_{ni}}$.

Оскільки $\boldsymbol{\mu}$ $\boldsymbol{\sigma}$-адитивна на $\mathbb{S}$, маємо

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{B_j}) = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{B_j} \cap \boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\mu}\left(\boldsymbol{B_j} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{l(n)} \boldsymbol{C_{ni}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{l(n)} (\boldsymbol{C_{ni}} \cap \boldsymbol{B_j})\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l(n)} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{B_j} \cap \boldsymbol{C_{ni}})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l(n)} \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{B_j} \cap \boldsymbol{C_{ni}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{A_n}).$$

5.2. Зовнішня міра. Теорема Каратеодорі

Означення 5.2. *Невід'ємна функція* $\boldsymbol{\mu}^*(\cdot)$ *на* $\boldsymbol{2^X}$, *яка приймає скінченні або нескінченні значення, називається зовнішньою мірою, якщо*:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $\forall \{A,\ A_n, n \geq 1\} \subset 2^X,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Лема 5.1. *Зовнішня міра монотонна, тобто, якщо* $A \subset B$, *то* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Доведення. Покладемо $A_1 = B$, $A_n = \emptyset$, $n \geq 2$. Тоді

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(B) + \mu^*(\emptyset) + \cdots = \mu^*(B).$$

Теорема 5.3. *Якщо* μ *– міра на півкільці* $\mathbb{S} \subset 2^X$, *то функція*

$$\mu^*(E)=\begin{cases} inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i):\ E_i\in\mathbb{S},\ i\geq 1,\ E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right\} \\ +\infty,\ \text{якщо покриття множини } E \text{ не існує}\end{cases} \tag{5.1}$$

де інфінум береться по всіх можливих покриттях множинами $\{E_i\}$ *з* $\mathbb{S}$ *множини* E*, є зовнішньою мірою, яка збігається на* $\mathbb{S}$ *з мірою* μ.

Доведення. Умова 1 виконана, оскільки $\emptyset\in\mathbb{S}$ і $\mu^*(\emptyset)\leq\mu(\emptyset)=0$. Перевіримо умову 2. Нехай $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ \ E,E_i\in 2^X,\ i\geq 1$. Якщо для деякого $j\in\mathbb{N}$, $\mu(E_j)=+\infty$, то умова 2 виконана. Тому припустимо, що $\mu(E_i)<+\infty$ для всіх $i\geq 1$. З означення зовнішньої міри і властивості точної нижньої межі випливає, що для $\forall i\in\mathbb{N}$ та $\forall\varepsilon>0$ існує послідовність $\{E_{ij}\}\subset\mathbb{S}$ така, що $E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{ij}$ і

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_{ij})\leq\mu^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Звідки, оскільки $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{ij}$, маємо

$$\mu^*(E)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_{ij})\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon.$$

В силу довільності ε маємо $\mu^*(E)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)$.

Означення 5.3. *Функція* μ^**, яка визначається співвідношенням* (5.1)*, називається зовнішньою мірою, породженою мірою* μ.

Означення 5.4. *Множина* $E\in 2^{\mathrm{X}}$ *називається* μ^**-вимірною, якщо для* $\forall A\in 2^{\mathrm{X}},\ \mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E)$.

Означення 5.5. *Нехай* μ *– міра на* σ*-алгебрі* $\mathfrak{A}$*. Міра* μ *називається повною, якщо* $\forall A\in\mathfrak{A}$ *такої, що* $\mu(A)=0$*, для будь-якої підмножини* $B\subset A$, $\mu(B)=0$.

Теорема 5.4 (Каратеодорі). *Якщо* μ^* *– зовнішня міра на* 2^{X} *і* $\mathfrak{A}$ *– клас всіх* μ^**- вимірних множин, то* $\mathfrak{A}$ *це* σ*-алгебра, а звуження* μ^* *на* $\mathfrak{A}$ *є повною мірою.*

Доведення. Покажемо, що $\mathfrak{A}$ – алгебра. Дійсно, $\emptyset\in\mathfrak{A}$, оскільки $\forall A\subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \backslash \emptyset).$$

Якщо $E \in \mathfrak{A}$, то $\overline{E} \in \mathfrak{A}$ (у цьому легко переконатися, враховуючи, що $A \backslash E = A \cap \overline{E}$). Нехай $E, F \in \mathfrak{A}$, тоді для $\forall A \subset X$.

$\mu^*(A) = (\mu^*$- вимірність $E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$ = (μ^*- вимірність F)

$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap \overline{E} \cap F\right) + \mu^*\left(A \cap \overline{E} \cap \overline{F}\right). \qquad (5.2)$$

Далі, враховуючи μ^*- вимірність множини E, маємо

$$\mu^*\left(A \cap (E \cup F)\right) = \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*\left(A \cap (E \cup F) \cap \overline{E}\right) =$$
$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap F \cap \overline{E}\right).$$

Тобто,

$$\mu^*\left(A \cap \overline{E} \cap F\right) = \mu^*\left(A \cap (E \cup F)\right) - \mu^*(A \cap E) \qquad (5.3)$$

Беручи до уваги (5.2), із (5.3) отримуємо рівність

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(A \cap (E \cup F)\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\overline{E} \cap \overline{F}\right)\right).$$

Оскільки $\overline{E} \cap \overline{F} = \overline{E \cup F}$, то $E \cup F \in \mathfrak{A}$, а, значить, $E \cap F = \overline{\overline{E} \cup \overline{F}} \in \mathfrak{A}$. Звідки $E \backslash F = (E \cap \overline{F}) \in \mathfrak{A}$.

Доведемо, що $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра. Нехай $A_k \in \mathfrak{A},\ k \in \mathbb{N}$. Оскільки $\mathfrak{A}$ – алгебра, то припустимо, що $A_m \cap A_n = \emptyset$, якщо $m \neq n$. Із того, що $A_1 \in \mathfrak{A}$ випливає, що $\forall B \subset X$

$$\mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap \overline{A}_1)$$
$$= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_2).$$

Із $A_3 \in \mathfrak{A}$ випливає, що $\forall B \subset X$

$$\mu^*\left(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\right)$$
$$= \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_3) + \mu^*\left(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap \overline{A}_3\right)$$
$$= \mu^*(B \cap A_3) + \mu^*\left(B \cap (A_1 \cup A_2)\right) = \sum_{i=1}^{3} \mu^*(B \cap A_i).$$

За індукцією легко переконатись, що для всіх $n \geq 1$

$$\mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i). \tag{5.4}$$

Використовуючи μ^*-вимірність $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ і монотонність зовнішньої міри та враховуючи (5.4), маємо

$$\mu^*(B) = \mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu^*\left(B \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*\left(B \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*\left(B \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right).$$

Отже,

$$\mu^*(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_i) + \mu^*\left(B \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right) \geq \mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(B \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right). \tag{5.5}$$

Для будь-яких $A, B \subset X$ в силу півадитивності μ^*

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*\left(B \cap \bar{A}\right),$$

зокрема, для $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Тому, з врахуванням (5.5), для $\forall B \subset X$

$$\mu^*(B) = \mu^*\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(B \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right).$$

Отже, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$.

Підставимо в першу частину (5.5) $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, маємо $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ звідки, в силу σ-півадитивності μ^*, $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Звуження міри μ^* на $\mathfrak{A}$ є повною мірою, оскільки, якщо $A \in \mathfrak{A}$, $\mu^*(A) = 0$ і $C \subset A$, то для будь-якого $B \subset X$ маємо:

$$\mu^*(B) \geq \mu^*\left(B \cap \overline{C}\right) \geq \mu^*\left(B \cap \overline{A}\right) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*\left(B \cap \overline{A}\right) \geq \mu^*(B),$$

оскільки $0 \leq \mu^*(B \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$. Тобто, $\mu^*\left(B \cap \overline{C}\right) = \mu^*(B)$. Далі, оскільки $\mu^*(B \cap C) \leq \mu^*(B \cap A) = 0$, то $\mu^*(B \cap C) + \mu^*\left(B \cap \overline{C}\right) = \mu^*(B)$, і, отже, $C \in S$. Враховуючи монотонність μ^*, маємо $\mu^*(C) = 0$.

Для довільної зовнішньої міри сукупність вимірних множин може бути досить бідною, наприклад, $\mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$, якщо $\mu^*(A) = 1$, $\forall A \in 2^X$, $A \neq \emptyset$ і $\mu^*(\emptyset) = 0$ (переконайтесь!). Тому зазвичай розглядаються зовнішні міри, індуковані мірами на породжених класах множин.

5.3. Продовження міри з кільця на породжене ним $\boldsymbol{\sigma}$-кільце

Лема 5.2. *Нехай μ^* – зовнішня міра на 2^X, породжена мірою μ на півкільці $\mathbb{S} \subset 2^X$, а $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра μ^*-вимірних множин. Тоді $\forall E \in \mathbb{S}$, $\mu(E) = \mu^*(E)$ і $\mathbb{S} \subset \mathfrak{A}$.*

Доведення. Із означення 5.3 випливає, що якщо $E \in \mathbb{S}$, то

$$\mu^*(E) \leq \mu(E).$$

З іншого боку, якщо $\mathbb{S} \ni E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathbb{S}$, $i \geq 1$, то $E = \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cap E)$ і

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Отже, згідно (5.1) $\mu(E) \leq \mu^*(E)$ на $\mathbb{S}$, звідки $\mu(E) = \mu^*(E)$ на $\mathbb{S}$.

Покажемо, що якщо $E \in \mathbb{S}$, то $E \in \mathfrak{A}$, тобто, $\forall A \in 2^{X}$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Нехай $\mu^*(A) < +\infty$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо покриття $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathbb{S}$, $i \geq 1$, таке що

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Оскільки $\mathbb{S}$ півкільце, то $A_i \setminus E = \bigcup_{k=1}^{r_i} C_{ik}$, де $C_{ik} \in \mathbb{S}$ не перетинаються. Звідки, з урахуванням $A \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap E)$ і $A \setminus E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{r_i} C_{ik}$, маємо

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\big(\mu(A_i\cap E)+\mu(A_i\cap\bar{E})\big)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu(A_i\cap E)+\sum_{k=1}^{r_i}\mu(C_{ik})\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i\cap E)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{r_i}\mu(C_{ik})\geq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E).$$

Отже, для довільних $A\in 2^X$ та $\varepsilon>0$ виконується

$$\mu^*(A)+\varepsilon\geq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E). \tag{5.6}$$

Переходячи в (5.6) до границі при $\varepsilon\to 0$, маємо

$$\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E). \tag{5.7}$$

Оскільки $A\subset(A\cap E)\cup(A\backslash E)$ і зовнішня міра півадитивна, маємо

$$\mu^*(A)\leq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E).$$

Звідки, враховуючи (5.7), $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\backslash E)$, тобто, E – μ^*-вимірна множина.

Теорема 5.5 (про єдиність продовження міри з півкільця на породжене ним σ-кільце). *Нехай μ – σ-скінченна міра на півкільці $\mathbb{S}\subset 2^X$, а μ^* – зовнішня міра, індукована мірою μ. Тоді існує і до того ж єдина міра $\bar{\mu}$ на $\sigma k(\mathbb{S})$, яка є продовженням міри μ і $\forall A\in\sigma k(\mathbb{S})$, $\bar{\mu}(A)=\mu^*(A)$.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра всіх μ^*-вимірних множин. Відзначимо, що $\sigma k(\mathbb{S})\subset\mathfrak{A}$, оскільки $\mathbb{S}\subset\mathfrak{A}$ за лемою 5.2. Позначимо через $\bar{\mu}$ продовження міри з $\mathbb{S}$ на $\mathfrak{A}$, побудоване згідно теореми 5.4. Оскільки $\sigma k(\mathbb{S})\subset\mathfrak{A}$, то $\bar{\mu}$ є продовженням міри μ на $\sigma k(\mathbb{S})$. Припустимо, що $X\in\mathbb{S}$ і $\mu(X)<\infty$. Нехай існує інше продовження $\tilde{\mu}$ міри μ на $\sigma k(\mathbb{S})$. Покладемо

$$M\coloneqq\{A\in\sigma k(\mathbb{S})\colon\bar{\mu}(A)=\tilde{\mu}(A)\}.$$

Очевидно, що $k(\mathbb{S})\subset M\subset\sigma k(\mathbb{S})$. Покажемо, що M – монотонний клас. Нехай $\{A_n,n\in\mathbb{N}\}\subset M$ – монотонна послідовність. Тоді із неперервності міри для монотонно зростаючої послідовності $\{A_n,n\in\mathbb{N}\}$ випливає

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

і для монотонно спадної $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\bar{\mu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Отже, для монотонно зростаючої послідовності $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$ і для монотонно спадної $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$, тобто, M – монотонний клас. Із леми 3.1 і $k(\mathbb{S}) \subset M \subset \sigma k(\mathbb{S})$ випливає, що $M = \sigma k(\mathbb{S})$, тобто $\bar{\mu}$ і $\tilde{\mu}$ збігаються на $\sigma k(\mathbb{S})$.

Розглянемо загальний випадок теореми. Оскільки μ σ-скінченна, то існує $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{S}$, така, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ і $\mu(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Введемо послідовність $Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$, де $\bigcup_{k=1}^{0} = \emptyset$. Легко бачити, що $Y_n \cap Y_m = \emptyset$, при $n \neq m$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$, $Y_n \in k(\mathbb{S})$ і $\mu(Y_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Із доведеного вище випливає, що на $Y_n \cap \sigma k(\mathbb{S}) = \sigma k(Y_n \cap \mathbb{S})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, міри $\bar{\mu}$ і $\tilde{\mu}$ збігаються. Оскільки $\forall A \in \sigma k(\mathbb{S})$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_n \cap A)$, причому $(Y_n \cap A) \cap (Y_m \cap A) = \emptyset$, при $n \neq m$, маємо

$$\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_n \cap A)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(Y_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(Y_n \cap A) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_n \cap A)\right) = \tilde{\mu}(A).$$

Зауваження 5.1. *Вимога σ-скінченності міри у теоремі 5.5 є суттєвою. Дійсно, на множині раціональних чисел відрізка $[0,1]$ розглянемо півкільце $\mathbb{S}$, що складається із півінтервалів $[a, b)$ з раціональними кінцями $a < b$ і $\emptyset$. Задамо міру μ на $\mathbb{S}$ так: для довільного $A \in \mathbb{S}$ $\mu(A)$ дорівнює кількості елементів множини A і $\mu'(A) = c\mu(A)$, де $1 \neq c > 0$ дійсне. Тоді обидві міри збігаються на $\mathbb{S}$ але не збігаються на $\sigma k(\mathbb{S})$.*

Теорема 5.6 (про наближення міри). *Якщо μ – σ-скінченна міра на півкільці $\mathbb{S}$, μ^* – зовнішня міра індукована мірою μ, $\bar{\mu}$ продовження міри μ на σ-*

алгебру $\mathfrak{A}$ усіх μ^*-вимірних множин (згідно теореми 5.4). Тоді для всякої множини $A \in \mathfrak{A}$ такої, що $\bar{\mu}(A) < +\infty$ і $\forall \varepsilon > 0$ існує множина $B \in k(\mathbb{S})$, що

$$\bar{\mu}\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) < \varepsilon.$$

Доведення. За лемою 5.2 μ^* збігається з $\bar{\mu}$ на $\mathbb{S}$, тому $\exists\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{S}$: $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і $\bar{\mu}(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \varepsilon/2$.

В силу збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\sum_{n=m+1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon/2$.

Покладемо $B = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$. Тоді очевидно, що $B \in k(\mathbb{S})$ і

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) &\le \bar{\mu}(A \setminus B) + \bar{\mu}(B \setminus A) \\
&\le \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) + \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A\right) \\
&= \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_n\right) + \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \bar{\mu}(A) \\
&\le \sum_{n=m+1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \bar{\mu}(A) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Вправа 5.1. *Нехай μ міра на σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Довести, що клас множин $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$ є σ-кільцем.*

Лекція 6. ***Міра Лебега в n-вимірному просторі. Міра Лебега-Стилтьєса.***

6.1. Міра Лебега в n-вимірному просторі.

Нехай $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S} = \{\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i]: a_i < b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} \cup \{\emptyset\}$ – півкільце підмножин $\mathbb{R}^n$. Покладемо $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\prod_{i=1}^{m} (a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$. Оскільки μ збігається з мірою Жордана на $\mathbb{S}$, то μ міра на півкільці $\mathbb{S}$. Ця міра, з урахуванням теореми про продовження міри з півкільця на кільце, єдиним чином продовжується до міри (також будемо позначати через μ) на $k(\mathbb{S})$. Нехай μ^* зовнішня міра, індукована мірою μ. Множина $\mathfrak{A}$ всіх μ^*-вимірних підмножин $\mathbb{R}^n$ є σ-алгеброю, а звуження μ^* на $\mathfrak{A}$ є мірою на $\mathfrak{A}$. Цю міру також позначимо через μ.

Означення 6.1. *Множина із $\mathfrak{A}$ називається лебеговою, а міра μ на $\mathfrak{A}$ – лебеговою мірою на $\mathbb{R}^n$ (або n-вимірною мірою Лебега).*

Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ найменшу σ-алгебру, породжену півкільцем $\mathbb{S}$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ називається борелевською σ-алгеброю. Очевидно, що $\mathbb{S} \subset k(\mathbb{S}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{A}$.

6.2. Міра Лебега-Стилтьєса на прямій

Нехай $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, неперервна справа функція. На півкільці $\mathbb{S} = \{\langle a, b\rangle : -\infty < a < b < +\infty\} \cup \{\emptyset\}$, де $\langle a, b\rangle$ позначає будь-яку із множин $[a, b], (a, b], (a, b), [a, b)$, розглянемо функцію μ_F таку, що $\mu_F(\emptyset) = 0$, і

$$\mu_F\big((a, b]\big) = F(b) - F(a), \mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-),$$

$$\mu_F\big((a, b)\big) = F(b-) - F(a), \mu_F([a, b)) = F(b-) - F(a-),$$

де $F(x-)$ лівостороння границя функції F у точці x.

Теорема 6.1. *Функція $\boldsymbol{\mu_F}$ є мірою на півкільці $\boldsymbol{k}(\mathbb{S})$.*

Доведення. Функція μ_F невід'ємна і адитивна на $\mathbb{S}$ (перевірити!) і стандартно продовжується на $k(\mathbb{S})$.

Нехай $\mathbb{H} = \{[a, b]: a < b\}$. Легко бачити, що $\mathbb{H}$ - компактний клас і, оскільки F неперервна справа, то $\mathbb{H}$ апроксимує μ_F знизу. Тому за теоремою 4.4 μ_F є мірою.

Через μ_F^* позначимо зовнішню міру, індуковану мірою μ_F, а через $\mathfrak{A}_F$ множину всіх μ_F^* - вимірних підмножин $\mathbb{R}$.

Означення 6.2. *Звуження $\boldsymbol{\mu_F^*}$ на $\boldsymbol{\mathfrak{A}_F}$ називається мірою Лебега-Стилтьєса на $\mathbb{R}$, а множина з $\boldsymbol{\sigma}$ -алгебри $\boldsymbol{\mathfrak{A}_F}$ -вимірними.*

Проста задача теорії вимірювання розглядалась у лекції 1. Крім цієї задачі, в теорії вимірювання вивчається складна задача теорії вимірювання: визначити злічено-адитивну міру μ на множині всіх обмежених підмножин $\mathbb{R}^n$ так, щоб виконувалися властивості:

1. $\mu(I) = 1$, якщо I – n-мірний куб;
2. $\mu(A) = \mu(B)$, якщо A і B, якщо одну множину можна сумістити з іншою за допомогою деякої групи ізометрій G в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 6.2. *Якщо G є група всіх рухів в $\mathbb{R}^n$, тобто, в умові 2) A і B конгруентні, то складна задача теорії вимірювання не розв'язувана в просторі $\mathbb{R}^n$ при будь-якому $n \in \mathbb{N}$.*

Вже для $\mathbb{R}^1$ доведення теореми 6.2 випливає із того, що для такої міри будується невимірна множина на колі [5]. Побудуємо невимірну множину на $[0,1]$. Припустимо, що існує зліченно-адитивна міра μ на $2^{[0,1]}$, яка задовольняє 1, 2. Введемо клас еквівалентності F_α, $\alpha \in [0,1]$:

$$F_\alpha = \{r \in \mathbb{R}: \alpha - r \in \mathbb{Q}\} \cap [0,1].$$

Множини F_α розбивають $[0,1]$ на класи еквівалентності. Використовуючи аксіому вибору, виберемо із кожного класу еквівалентності F_α по одній точці і множину таких точок позначимо через T.

Позначимо через $T_q = \{T + q\} \cap [0,1]$, $q \in \mathbb{Q}$

$$[0,1] \supset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} T_q.$$

Легко бачити, що $T_q \cap T_p = \emptyset$ для $q \neq p$, $q, p \in \mathbb{Q}$. Дійсно, якщо $t \in T_q \cap T_p$, то $t - q \in T$ і $t - p \in T$, тобто, T містить дві точки різниця між якими $p - q$ є раціональним числом, що неможливо за побудовою T. Оскільки μ задовольняє 1, 2, то $\mu(T_q) = \mu(T_p)$, $\forall q, p \in \mathbb{Q}$ і

$$1 = \mu([0,1]) \geq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(T_q),$$

що неможливо ні при $\mu(T_q) > 0$ ні при $\mu(T_q) = 0$.

Вправа 6.1. *Нехай $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, неперервна справа функція, а μ_F – Лебега-Стилтьєса на прямій. Довести, що* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\mu_F(\{x_0\}) = F(x_0) - F(x_0 -).$$

Вправа 6.2. *Побудувати невимірну множину на колі.*

Лекція 7. *Вимірні функції та їх властивості*

Нехай $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ відображення множини $\boldsymbol{X}$ в множину $\boldsymbol{X}'$ (тобто $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ поставлений відповідно один і тільки один елемент $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}'$). Образом множини $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$ при відображенні $\boldsymbol{f}$ називається множина $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) := \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\}$, $\boldsymbol{f}(\emptyset) = \emptyset$. Прообразом множини $\boldsymbol{A}' \subset \boldsymbol{X}'$ при відображенні $\boldsymbol{f}$ називається множина $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{A}') := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{A}'\}$, $\boldsymbol{f}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Означення 7.1. *Нехай* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{E})$, $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{E}')$ *– вимірні простори і* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$. *Відображення* $\boldsymbol{f}$ *називається* $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ *вимірним, якщо* $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{E}') \subset \boldsymbol{E}$, *тобто* $\forall \boldsymbol{A}' \in \boldsymbol{E}'$ $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{A}') \in \boldsymbol{E}$. *Якщо* $\boldsymbol{X}' = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$*-вимірне відображення* $\boldsymbol{f}$ *називається* $\boldsymbol{E}$*- вимірною функцією або просто вимірною.*

Теорема 7.1. *Функція* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *буде* $\boldsymbol{E}$*- вимірна тоді і тільки тоді, коли для* $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ *множина* $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{a}\} \in \boldsymbol{E}$.

Доведення. Необхідність очевидна, тому що множина $(-\infty, \boldsymbol{a})$ є борелівською.

Достатність. Розглянемо клас множин $\boldsymbol{T} := \{\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R}): \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B}) \in \boldsymbol{E}\}$, тоді $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $(-\infty, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$. Покажемо, що $\boldsymbol{T}$ – $\boldsymbol{\sigma}$-алгебра. Нехай $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{T} \Rightarrow \boldsymbol{M} \setminus \boldsymbol{N} \in \boldsymbol{T}$, оскільки $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{M} \setminus \boldsymbol{N}) = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{M}) \setminus \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{N}) \in \boldsymbol{E}$. Далі, якщо $\{\boldsymbol{A_n}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1}\} \subset \boldsymbol{T}$, то $\bigcup_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n} \in \boldsymbol{T}$, оскільки $\boldsymbol{f}^{-1}(\bigcup_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n}) = \bigcup_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{1}}^{\infty} \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{A_n}) \in \boldsymbol{T}$, тобто, $\boldsymbol{T}$ - $\boldsymbol{\sigma}$-алгебра. І, оскільки, ця $\boldsymbol{\sigma}$-алгебра, породжена множиною $\{(-\infty, \boldsymbol{a}): \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\}$, збігається з $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ (перевірте!), то $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

Лема 7.1. *Такі умови еквівалентні для* $\boldsymbol{E}$*- вимірної функції* $\boldsymbol{f}$:

1) $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{a}\} \in \boldsymbol{E}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$;
2) $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{a}\} \in \boldsymbol{E}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$;
3) $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{a}\} \in \boldsymbol{E}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$;
4) $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{a}\} \in \boldsymbol{E}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.

Доведення. 1) ⇒ 2) тому, що $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{a}\} = \bigcap_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{1}}^{\infty} \left\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\right\}$;

2) ⇒ 3) тому, що $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{a}\} = \boldsymbol{X} \setminus \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{a}\}$;

3) ⇒ 4) тому, що $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{a}\} = \bigcap_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{1}}^{\infty} \left\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\right\}$;

4) ⇒ 1) тому, що $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{a}\} = \boldsymbol{X} \setminus \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{a}\}$.

Означення 7.2. *Нехай* $\boldsymbol{X}$ *метричний простір і* $\mathfrak{B}(\boldsymbol{X})$ *–* $\boldsymbol{\sigma}$*-алгебра борелівських множин.* $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{X})$*- вимірна функція* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ *називається борелівською.*

Означення 7.3. *Нехай* $\mathfrak{A}$ *–* $\boldsymbol{\sigma}$*-алгебра вимірних за Лебегом множин з* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, *тоді* $\mathfrak{A}$*-вимірна функція* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ *називається вимірною за Лебегом.*

7.1. Дії над вимірними функціями

Теорема 7.2. *Сума, різниця і добуток двох $\boldsymbol{E}$-вимірних функцій $\boldsymbol{f}$ та $\boldsymbol{g}$ вимірні. Частка двох $\boldsymbol{E}$-вимірних функцій, за умови, що знаменник не перетворюється в нуль, також $\boldsymbol{E}$- вимірна.*

*Доведення.*Очевидно, що якщо функція $\boldsymbol{f}$ є $\boldsymbol{E}$-вимірна, то також $\boldsymbol{E}$-вимірні є функції $\boldsymbol{kf}$ та $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}$, де $\boldsymbol{a},\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$. Далі, $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\} = \bigcup_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{1}}^{\infty} (\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{q_k}\} \cap \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{q_k}\})$, де об'єднання здійснюється по всіх раціональних числах. Отже, множина $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}$ є вимірною. Звідки випливає, що множина $\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\} = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{a}\}$ також $\boldsymbol{E}$-вимірна, отже, $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ $\boldsymbol{E}$-вимірна функція. Добуток $\boldsymbol{fg}$ також $\boldsymbol{E}$- вимірна функція, тому що $\boldsymbol{fg} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}[(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})^2 - (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})^2]$. Вираз, що стоїть праворуч є $\boldsymbol{E}$-вимірною функцією як суперпозиція вимірних функцій (див. вправу 7.1).

Вправа 7.1. *Нехай* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{E_X})$, $\left(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{E_y}\right)$, $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{E_z})$ *– вимірні простори,* $\boldsymbol{f}$ - $\left(\boldsymbol{E_x}, \boldsymbol{E_y}\right)$*-вимірна функція та* $\boldsymbol{g}$ - $\left(\boldsymbol{E_y}, \boldsymbol{E_z}\right)$*-вимірна функція. Показати, що суперпозиція* $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ - $(\boldsymbol{E_x}, \boldsymbol{E_z})$*-вимірною функцією.*

Далі, якщо $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ – вимірна і $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$, то і $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$ вимірна, тому що якщо $\boldsymbol{c} > \boldsymbol{0}$, то $\left\{\boldsymbol{x}: \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} < \boldsymbol{c}\right\} = \left\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{c}}\right\} \cup \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{0}\}$, якщо $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{0}$, то $\left\{\boldsymbol{x}: \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} < \boldsymbol{c}\right\} = \left\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{0} > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{c}}\right\}$, а при $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ $\left\{\boldsymbol{x}: \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} < \boldsymbol{c}\right\} = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{c}\}$.

Оскільки у всіх випадках справа знаходиться вимірна множина, то $\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$ (за умови, що $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$) є вимірною функцією.

Теорема 7.3. *Нехай* (X, E) *– вимірний простір,* $f_n: X \to \mathbb{R}, n \geq 1$ *– послідовність* E*- вимірних функцій. Тоді* E*- вимірними є такі функції:*

$$g_1(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x),\ \ g_2(x) = \inf_{n\geq 1} f_n(x),$$

$$g_3(x) = \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x),\ \ g_4(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x),\ x \in X.$$

Зокрема, функція $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$, E*- вимірна, якщо границя існує.*

*Доведення.*З урахуванням теореми 7.2 і леми 7.1, неважко переконатися в справедливості теореми 7.3, оскільки $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\{x: g_1(x) \le a\} = \left\{x: \sup_{n\ge1} f_n(x) \le a\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) \le a\} \in E,$$

$$\{x: g_2(x) < a\} = \left\{x: \inf_{n\ge1} f_n(x) < a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) < a\} \in E,$$

$$g_3(x) = \inf_{n\ge1} \sup_{k\ge n} f_k(x)\ , g_4(x) = \sup_{n\ge1} \inf_{k\ge n} f_k(x), x \in X.$$

Якщо границя існує, то $f(x) = g_3(x) = g_4(x)$, $x \in X$.

Наслідок 7.1. *Якщо* f *і* g *є* E*-вимірні, то* $\max(f, g)$ *і* $\min(f, g)$ *–* E *-вимірні. Зокрема,* $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = -\min(f, 0)$ *–* E *-вимірні.*

Вправа 7.2. *Довести наслідок* 7.1. *Вказівка*: Розглянути послідовність $f_1 = f, f_n = g, n \ge 2$ і застосувати теорему 7.3.

7.2. Прості функції

Нехай (X, E) – вимірний простір. E-вимірні функції будемо називати просто вимірними.

Означення 7.1. *Функція* $f: X \to \mathbb{R}$ *називається простою, якщо вона подана в вигляді* $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$, *де* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ *и* $A_i \in E$, $A_i \ne \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$, $x_i \in R$, $I_{A_j}(x)$ *– характеристична функція множини* A_j.

Покладемо

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty], \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, +\infty\} |\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Означення 7.2. *Функція* $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ *називається вимірною, якщо для* $\forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $f^{-1}(A) \in E$.

Теорема 7.4. а) *Для будь-якої вимірної функції* $f: X \to \mathbb{R}$ (*в тому числі вимірної функції* $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$) *знайдеться послідовність простих функцій* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *таких, що* $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ *і* $f_n(x) \to f(x), n \to \infty$, $x \in X$.

б) *Якщо до того ж* $f(x) \geq 0$, *то* $\exists \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність простих функцій таких, що* $f_n(x) \uparrow f(x),\ n \to \infty,\ x \in X$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок б): нехай $f(x) \geq 0$, покладемо $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}}(x) + nI_{\{f(x) \geq n\}}(x)$. Неважко переконатися, що $f_n(x) \leq f_{n+1}(x),\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \in X$. Покажемо, що $f_n(x) \to f(x), n \to \infty$, $\forall x \in X$. Дійсно, якщо x таке, що $f(x) = +\infty$, то $f_n(x) = f(x), n \to +\infty$.

Нехай $x \in X: f(x) < +\infty$, тоді існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall n \geq N$ маємо $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$, тобто, $f_n(x) = f(x)$ при $n \to +\infty$. Далі, покладемо $f_n(x) = f_n^+(x) - f_n^-(x)$, де $f^+ = \max(f, 0) \geq 0,\ f^-(x) = -\min(f, 0) \geq 0$, тоді, побудувавши послідовності $\{f_n^+(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ та $\{f_n^-(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ – простих функцій, таких, що $f_n^+ \uparrow f^+$ і $f_n^- \uparrow f^-$ та, взявши в якості $f_n = f_n^+ - f_n^-$, отримаємо послідовність простих функцій, що задовольняють твердженням а) теореми.

Означення 7.3. *Нехай* $A \in E$ *і* $f, g: A \to \overline{\mathbb{R}}$. *Функції* f,g *називають еквівалентними щодо міри* μ *на* A, *якщо* $B = \{x \in A: f(x) \neq g(x)\} \in E$ *і* $\mu(B) = 0$. *Позначається:* $f(x) = g(x)$ *м.с.* (*майже скрізь*) *на* A, *або* $f = g\ (mod\ \mu)$, *або* $f \sim g$.

Нехай (X, E, μ) – простір з мірою.

Означення 7.4. *Нехай* $f, f_n: X \to \overline{\mathbb{R}},\ n \geq 1$. *Кажуть, що* $f_n(x)$ *збігається майже всюди щодо міри* μ *на* X *до функції* $f(x)$, *якщо* $\exists A \in E: \mu(A) = 0$ *і* $\forall x \in X \backslash A\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Позначається: $f_n \to f(\mathrm{mod}\ \mu)$ або $f_n \to f$ м.с. по μ на X.

Теорема 7.5. *Нехай* (X, E, μ) *– простір з повною мірою* $f, f_n: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 1$ *– послідовність* E*-вимірних функцій і* $f_n \to f\ (\mathrm{mod}\ \mu)$. *Тоді* f *-вимірна функція.*

Доведення. Нехай $A \in E$, $\mu(A) = 0$ і $\forall x \in X \setminus A$: $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$. Тоді $f: X \setminus A \to \overline{\mathbb{R}}$ вимірна згідно теореми 7.3. Оскільки μ є повна міра, то $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ також вимірна.

Вправа 7.3. *Нехай* $f_n \to f (\operatorname{mod} \mu)$ *і* $f_n \to g (\operatorname{mod} \mu)$. *Довести, що* $f = g$ $(\operatorname{mod} \mu)$.

Лекція 8. *Теореми про збіжність*

Теорема 8.1 (Єгорова). *Нехай* (X, E, μ) *– простір з мірою і* $\mu(X) < +\infty$. $f, f_n: X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ *–* E *- вимірні функції і* $f_n \to f (\operatorname{mod} \mu)$.
Тоді для $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in E: \mu(A_\varepsilon) \geq \mu(X) - \varepsilon$ *і на множині* A_ε $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *збігається до* $f(x)$ *рівномірно.*

Доведення. Згідно теореми 7.3 попередньої лекції функція $f(x)$ вимірна. Покладемо $A_n^m = \bigcap_{i \geq n} \left\{x: |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}$. При кожному m маємо $A_1^m \subset A_2^m \subset \cdots \subset A_n^m \subset \cdots$. Нехай $A^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^m$. З урахуванням теореми про неперервність міри для $\forall m \in \mathbb{N}$ і $\forall \delta > 0$ знайдеться $n_0(m)$:

$$\mu\left(A^m \setminus A_{n_0(m)}^m\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{7.1}$$

Покладемо $A_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n_0(m)}^m$. Якщо $x \in A_\varepsilon$, то $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n_0(m)}^m$ звідки $\forall m \in \mathbb{N}$ $\sup\limits_{x \in A_i} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{x \in A_{n_0(m)}^m} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, n \geq n_0(m)$.

Оцінимо міру множини $A^m \setminus A_\varepsilon = A^m \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{A_{n_0(m)}^m} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(A^m \setminus A_{n_0(m)}^m\right)$ з урахуванням σ -півадитивної міри μ і з урахуванням (7.1), $\mu(A^m \setminus A_\varepsilon) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(A^m \setminus A_{n_0(m)}^m\right) < \varepsilon$. Далі, оскільки $f_n \to f$ майже всюди по мірі μ, то $\mu(X \setminus A^m) = 0$. Дійсно, якщо $x_0 \in X \setminus A^m$, то існують як завгодно великі значення n, при яких $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}$, тобто, $f_n(x_0)$ не прямує до $f(x_0)$ при $n \to \infty$, а міра таких точок дорівнює нулю. Оскільки $X \setminus A_\varepsilon \subset (X \setminus A^m) \cup$

$(A^m \setminus A_\varepsilon)$, то $\mu(X \setminus A_\varepsilon) \le \mu(X \setminus A^m) + \mu\,(A^m \setminus A_\varepsilon) = \varepsilon$, $\mu(A_\varepsilon) = \mu(X \setminus (X \setminus A_\varepsilon)) = \mu(X) - \mu(X \setminus A_\varepsilon) \ge \mu(X) - \varepsilon$.

Означення 8.1. *Нехай* $f, f_n: X \to \mathbb{R}, n \ge 1,$ *- E- вимірні функції. Послідовність* $\{f_n\,, n \ge 1\}$ *збігається по мірі* μ *до* f, *якщо* $\forall \varepsilon > 0$ $\mu(\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) \to 0, n \to \infty$. *Позначається* $f_n \overset{\mu}{\to} f$ *або* $\mu\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Теорема 8.2 (Лебега). *Якщо* $f_n \to f \pmod{\mu}, n \to \infty$, *і* $\mu(X) < +\infty$, *то* $f_n \overset{\mu}{\to} f, n \to \infty$.

Доведення. Для $\forall \varepsilon > 0$ фіксованого, розглянемо множину $A_n = \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} \in F$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \supset B_{n+1}$. Нехай $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Оскільки $f_n \to f \pmod{\mu}$, то $\mu(B) = 0$. ($\forall x \in B, f_n(x) \nrightarrow f(x), n \to \infty$). З урахуванням неперервності міри зверху, $\mu(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Теорема доведена.

<u>*Зауваження.*</u> Із збіжності $f_n \overset{\mu}{\to} f, n \to \infty$, взагалі кажучи, не випливає, що $f_n \to f \pmod{\mu}$. Дійсно, нехай для $n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$

$$f_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & \dfrac{k-1}{n} < x < \dfrac{k}{n}, \\ 0, & \text{для інших } x. \end{cases}$$

Занумеруємо ці функції поспіль і, спрямовуючи $n \to \infty$, отримаємо послідовність, яка збігається по мірі до нуля, але не збігається в жодній точці.

Теорема 8.3 (Ріс). *Нехай* $f_n \overset{\mu}{\to} f, n \to \infty$, *тоді* $\exists \{f_{n_k}, k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_n\,, n \in \mathbb{N}\}$, $n_1 < \ldots < n_k < \cdots$ *така, що* $f_{n_k} \to f \pmod{\mu}$.

Доведення. Нехай $\{\varepsilon_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$ – послідовність чисел така, що $\lim_{n\to 0} \varepsilon_n = 0$ і нехай $\{t_n > 0, n \in \mathbb{N}\}$ така послідовність чисел, що $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < +\infty$. Побудуємо послідовність натуральних чисел $n_1 < n_2 < \ldots$, де n_1 таке, що $\{x: |f_{n_1}(x) - f(x)| \ge \varepsilon_1\} < t_1$, $n_2 > n_1$: $\mu\{x: |f_{n_2}(x) - f(x)| \ge \varepsilon_2\} < t_2$ і т.д. Тобто, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \ge \varepsilon_k\} < t_k$.

Нехай $R_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$, покладемо $Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$. Оскільки $R_n \supset R_{n+1}$, то $\mu(R_n) \to \mu(Q)$ і $\mu(R_n) < \sum_{k=n}^{\infty} t_k \Longrightarrow \mu(R_n) \to 0,$ $n \to \infty$. Отже, $\mu(Q) = 0$. Нехай $x_0 \in X \setminus Q$, тоді $\exists n_0: x_0 \notin R\, f_{n_0} \Longrightarrow \forall k \geq n_0$ $x_0 \notin \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$, тобто, $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$. Оскільки $\varepsilon_k \to 0, k \to +\infty$, то $f_{n_k}(x_0) - f(x_0) \to 0,\ k \to +\infty$.

Означення 8.2. *Нехай* $f_n: X \to \mathbb{R}$, E*- вимірні функції. Послідовність* $\{f_n , n \in \mathbb{N}\}$ *називається фундаментальною за мірою* μ, *якщо* $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$, $\exists N: \forall n, m \geq N,\ \mu(\{x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta$.

Теорема 8.4 (Критерій збіжності по мірі). *Нехай* $\{f_n , n \in \mathbb{N}\}$ *– послідовність* E*-вимірних функцій на* X, *причому* $\mu(X) < +\infty$,. Тоді $f_n \xrightarrow{\mu} f, n \to \infty$ (*де* f *–* E*-вимірна функція на* X*) тоді і тільки тоді, коли* $\{f_n , n \in \mathbb{N}\}$ *– фундаментальна по мірі* μ.

Доведення. <u>Необхідність</u>. Нехай $f_n \xrightarrow{\mu} f$, тоді $\{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \{x: |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\} \subset \{x: |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup$ $\{x: |\, f(x) - f_n(x)\, | \geq \varepsilon/2\}$. Звідки, з урахуванням півадитивності μ, маємо $\mu(\{x: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(\{x: |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}) + \mu(\{x: |\, f(x) - f_n(x)\, | \geq \varepsilon/2\}) \to 0, n, m \to \infty$.

<u>Достатність</u>. Нехай $\{f_n , n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна по мірі μ. Покажемо, що тоді $\exists \{f_{n_k}, k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_n , n \in \mathbb{N}\}$ і E-вимірна функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ така, що $f_{n_k} \to f$ (mod μ). Дійсно, згідно з означенням 8.2, маємо $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists N(k): \forall n, m \geq N(k)$

$$\mu\left(\left\{x \in X: |f_m(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Покладемо $n_1 = N(1), n_2 = \max(N(1) + 1, N(2)), n_3 = \max(N(2) + 1, N(3))$, і т. д. Покладемо $A_k = \left\{x: |\, f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}$, $B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$, $B_k \supset B_{k+1}$. З урахуванням σ-півадитивності μ маємо $\mu(A_k) < \frac{1}{2^k}$, $\mu(B_k) < \frac{1}{2^{k-1}}$.

В силу неперервності μ, $\mu(Q) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$, де $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Якщо $x_0 \notin Q$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $x_0 \notin B_{n_0} \Rightarrow\ x_0 \in \bigcap_{j=n_0}^{\infty} \overline{A_j}\ \Rightarrow \forall j \geq n_0$,

$$\left|f_{n_{j+1}}(\,x_0) - \ f_{n_j}(\,x_0)\right| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Значить $\left\{f_{n_k}(\,x_0), k \in \mathbb{N}\right\}$ – фундаментальна, тобто, $\exists f(x_0)$: $f_{n_k}(x_0) \to f\ (x_0)$, $k \to \infty$. Покладемо для $x \in Q$, $f(x) = 0$. Отримаємо E-вимірну функцію $f: X \to \mathbb{R}$: $f_{n_k} \to f$ (mod μ). Отже, з урахуванням теореми Лебега, $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$, $k \to \infty$. Звідки $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists m \in \mathbb{N}: \forall k \geq m$,

$$\mu\left(\left\{x: |f_{n_k}(x) - f\ (x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\delta}{2}.$$

В силу фундаментальності $\{f_n\ , n \in \mathbb{N}\}$, $\exists N: \forall j{,}k \geq N$,

$$\mu\left(\left\{x: |f_j\ (x) - f_k(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\delta}{2}.$$

Тоді $\forall k, n \geq \max(N(m), m)$ маємо

$\mu(\{x: |f_n(x) - \ f(x)| \geq \varepsilon\})$

$$\leq \mu\left(\left\{x: \left|f_{n_k}(x) - f\ (x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x: \left|f_n(x) - f_{n_k}(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \delta,$$

де $k > m$.

Зауваження. *Слід відмітити, що теорема 8.4 справедлива і у випадку* $\mu(X) = +\infty$, *який ми не розглядаємо.*

Лекція 9. *Інтеграл Лебега та його основні властивості*

Нехай $(X, E, \mu) -$ простір з мірою.

Означення 9.1. *Нехай* $f\ (x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$, $A_i \in E$, $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$, $x_i \neq x_j$ *і* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *якщо* $i \neq j$ *(тобто,* f *проста вимірна функція). Інтегралом Лебега від простої функції* f *по множині* $A \in E$ *називається величина* $\int_A\ f(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n}\ x_i\mu(A_i \cap A)$.

Зауваження. *Якщо* $x_i = 0$, *а* $\mu(A_i \cap A) = +\infty$, *то покладемо* $x_i\mu(A_i \cap A) = 0$.

9.1. ***Властивості інтеграла від простих функцій:***

1. Інтеграл Лебега від суми простих функцій дорівнює сумі інтегралів від доданків:

$$\int\limits_A \big(f(x)+g(x)\big)d\mu(x) = \int\limits_A f(x)d\mu(x) + \int\limits_A g(x)d\mu(x).$$

Доведення. Нехай $f(x)=\sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}(x)$ і $g(x)=\sum_{j=1}^m y_j I_{B_j}(x)$, $A_i, B_j \in E$. Тоді функція $f(x)+g(x)$ є простою і приймає значення $x_i + y_j$ на множинах $A_i \cap B_j$, тобто, $f(x)+g(x)=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \big(x_i+y_j\big) I_{A_i \cap B_j}(x)$. Маємо

$$\int\limits_A \big(f(x)+g(x)\big)d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \big(x_i+y_j\big)\mu\big(A_i \cap B_j \cap A\big)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i\mu\big(A_i \cap B_j \cap A\big) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j\mu\big(A_i \cap B_j \cap A\big)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i\mu(A_i \cap A) + \sum_{j=1}^m y_j\mu\big(B_j \cap A\big) = \int\limits_A f(x)d\mu(x) + \int\limits_A g(x)d\mu(x).$$

2. Для константи $k \in \mathbb{R}$ і простої функції $f(x)=\sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}(x)$ має місце рівність

$$\int\limits_A kf(x)d\mu(x) = k\int\limits_A f(x)d\mu(x)$$

Доведення. Якщо $k=0$, то рівність очевидна. Розглянемо випадок $k \neq 0$. Тоді $kf(x)=\sum_{i=1}^n kx_i I_{A_i}(x)$ є простою і легко бачити, що

$$\int\limits_A kf(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^n kx_i\mu(A_i \cap A) = k\sum_{i=1}^n x_i\mu(A_i \cap A) = k\int\limits_A f(x)d\mu(x).$$

3. Якщо $f(x)=\sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}(x)$ і $f(x)$ обмежена на X, тобто, існує M таке, що $|f(x)| \leq M$ для всіх $x \in A$.

$$\left|\int_A f(x)d\mu(x)\right| \le M\mu(A).$$

Доведення.

$$\left|\int_A f(x)d\mu(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_i \cap A)\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\mu(A_i \cap A) \le \sum_{i=1}^{n} M\mu(A_i \cap A)$$

$$= M\mu(A).$$

4. Якщо прості функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in X$, то $\forall A \in E$

$$\int_A f(x)d\mu(x) \le \int_A g(x)d\mu(x).$$

Доведення. Нехай $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$ та $g(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{B_j}(x)$. Тоді із $f(x) \le g(x)$ випливає, що $x_i \le y_j$ на множинах $A_i \cap B_j$, звідки

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mu(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\mu\left(A_i \cap B_j \cap A\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j\mu\left(A_i \cap B_j \cap A\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j\mu\left(B_j \cap A\right) = \int_A g(x)d\mu(x).$$

Означення 9.2. *Інтегралом Лебега від невід'ємної вимірної функції* $f(x)$ *називається величина* $\int_A fd\mu = \int_A f(x)d\mu(x) = \sup_{P(f)} \int_A p(x)d\mu(x)$, *де супремум береться по класу* $P(f)$ *– всіх невід'ємних простих функцій* p, *які задовольняють нерівність*

$$0 \le p(x) \le f(x), \qquad x \in A.$$

Переконаємось, що це означення узгоджується з означенням 9.1. Будемо позначати інтеграл з означення 9.2 через $\sup_{P(f)} \int_A p(x)d\mu(x)$.

Тоді, якщо $f \geq 0$ проста, то $\int_A f d\mu \leq \sup_{P(f)} \int_A \ f(x) d\mu(x)$, оскільки у цьому випадку $f \in P(f)$. З іншого боку $\int_A \ f(x) d\mu(x) \geq \int_A \ p(x) d\mu(x)$ для будь-якої $p \in P(f)$, звідки $\sup_{P(f)} \int_A \ p(x) d\mu(x) \leq \int_A \ f(x) d\mu(x)$, тобто, $\int_A f d\mu = \sup_{P(f)} \int_A \ p(x) d\mu(x)$. Отже, означення 9.1 та 9.2 узгоджені.

Для множини $A \in E$ і функції $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ покладемо $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = -\min(f\ (x), 0),\ x \in A$. Очевидно, що $f_+, f_- \geq 0$ на A і $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.

Означення 9.3. *Нехай $A \in E$ і $f\ :\ A \to \overline{\mathbb{R}}$ є вимірною розширеною функцією. Якщо хоча б один з інтегралів $\int_A f_+ d\mu(x)$, $\int_A f_- d\mu(x)$ скінченний, то величина $\int_A f\ d\mu = \int_A f\ (x) d\mu(x) = \int_A f_+\ d\mu - \int_A f_- d\mu$ називається інтегралом Лебега від функції f по множині A.*

Якщо інтеграли $\int_A f_+\ d\mu$ і $\int_A f_- d\mu$ скінченні, то f називається інтегрованою по Лебегу по множині A. Позначають $f \in L(A, d\mu)$.

9.2. *Найпростіші властивості інтеграла Лебега*

1. *Якщо $A \in E, \mu(A) = 0$ і f – E- вимірна, то*

$$\int_A f d\mu = 0.$$

Доведення. Для будь-якої простої функції $p(x)$ на A маємо $\int_A p d\mu = 0$.

2. *Нехай $A \in E, \mu(A) < +\infty$ і $f\ (x) = c$ – постійна на A функція, тоді*

$$\int_A c d\mu\ = c\mu(A).$$

Доведення випливає з означення інтеграла.

3. *Нехай $f, g: A \to \overline{\mathbb{R}}$ і $0 \leq f(x) \leq g(x), x \in A$, f і g – E - вимірні. Якщо $g \in L(A, d\mu)$, тоді $f \in L(A, d\mu)$ і*

$$\int_A f d\mu \le \int_A g d\mu.$$

Доведення. Ця властивість випливає безпосередньо з означення 9.2.

4. *Нехай* $f \in L(B, d\mu)$, $f(x) \ge 0$, $x \in B$, $A \subset B$, $A \in E$. *Тоді*

$$\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu.$$

Доведення. Нерівність випливає із того, що $f(x) I_A(x) \le f(x)$, $\forall x \in B$ і властивості 3.

5. *Нехай* $A \in E$, $A \ne \emptyset$ *і* $\mu(A) < +\infty$, *функція* $f: A \to \mathbb{R}$ *вимірна і обмежена на* A. *Тоді* $f \in L(A, d\mu)$ *і*

$$\mu(A) \inf_A f \le \int_A f d\mu \le \mu(A) \sup_A f.$$

Доведення. Припустимо, що $f(x) \ge 0$, $x \in A$. Тоді $m \le f(x) \le M, x \in A$, де $m = \inf_A f$, $M = \sup_A f$. Згідно 2 і 3 $f \in L(A, d\mu)$ і

$$\int_A m d\mu \le \int_A f d\mu \le \int_A M d\mu.$$

Звідки випливає властивість 4.

У разі коли f приймає як від'ємні так і додатні значення, тоді

$$\forall x \in A, f_-(x) \le C \text{ і } f_+(x) \le C,$$

де $C = \sup_A |f|$, і згідно 2 і 3, $f_-, f_+ \in L(A, d\mu)$.

Крім того, оскільки

$$0 \le \int_A f_+ d\mu \le M\mu(A), \qquad 0 \le \int_A f_- d\mu \le (-m)\mu(A),$$

то

$$-\int_A f_- d\mu \le \int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu \le \int_A f_+ d\mu.$$

І, отже,

$$m\mu(A) \le \int_A f d\mu \le M\mu(A).$$

Випадок, коли $f(x) \leq 0$, $x \in A$ зводиться до випадку $f(x) \geq 0$, тому що $f_- = -f$ та $\int_A f d\mu = -\int_A f_- d\mu$.

6. Нехай $f, g \in L(A, d\mu)$ і $f(x) \leq g(x)$, $x \in A$. Тоді

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

Доведення. Оскільки $0 \leq f_+(x) \leq g_+(x)$, $0 \leq g_-(x) \leq f_-(x)$, $x \in A$, то згідно 3, маємо $\int_A f_+ d\mu \leq \int_A g_+ d\mu$, $\int_A g_- d\mu \leq \int_A f_- d\mu$, звідки

$$\int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu \leq \int_A g_+ d\mu - \int_A g_- d\mu.$$

9.3. *Зліченна адитивність інтеграла Лебега*

Теорема 9.1. *Нехай $f \in L(B, d\mu)$. Тоді функція $\mu(B) = \int_B f d\mu$, $B \in E$ є зарядом, тобто, σ-адитивна.*

Доведення. Нехай $f(x)$-проста невід'ємна функція, тобто $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$, а $\{B_m, m \in \mathbb{N}\} \subset E$; $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ при $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Тоді

$$\int_B f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mu(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (A_i \cap B_m)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B_m)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mu(A_i \cap B_m)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} f d\mu.$$

Нехай $f(x) \geq 0$ і $\{p_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ - послідовність невід'ємних простих функцій: $p_n(x) \uparrow f(x), x \in A$. Тоді

$$\int_B p_n(x) d\mu(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} p_n(x) d\mu(x) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} f(x) d\mu(x).$$

Звідки, переходячи до границі при $n \to \infty$, маємо

$$\int\limits_B f(x)d\mu(x) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f(x)d\mu(x). \tag{9.1}$$

З іншого боку, з урахуванням властивості 4

$$\int\limits_B f(x)d\mu(x) \geq \int\limits_B p_n(x)d\mu(x) \geq \int\limits_{\bigcup_{m=1}^{l} B_m} p_n(x)d\mu(x) = \sum_{m=1}^{l} \int\limits_{B_m} p_n(x)d\mu(x).$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, маємо

$$\int\limits_B f(x)d\mu(x) \geq \sum_{m=1}^{l} \int\limits_{B_m} f(x)d\mu(x).$$

Далі, прямуючи $l \to \infty$, маємо

$$\int\limits_B f(x)d\mu(x) \geq \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f(x)d\mu(x). \tag{9.2}$$

Із (9.1), (9.2) випливає твердження теореми.

Для загального випадку, представивши $f(x) = f_+(x) - f_-(x), x \in B$, маємо

$$\int\limits_B f_+ d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f_+ d\mu < +\infty, \int\limits_B f_- d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f_- d\mu < +\infty,$$

$$\int\limits_B f d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f_+ d\mu - \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} f_- d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{B_m} (f_+ - f_-)d\mu.$$

Наслідок 9.1. *Нехай* $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in L(X, d\mu)$. *Тоді* $\forall A, B \in E: A \cap B = \emptyset$ *має місце рівність*

$$\int\limits_{A \cup B} f d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu.$$

Доведення випливає із теореми 9.1 з урахуванням того, що $\int_{\emptyset} f d\mu = 0$.

Лекція 10. ***Деякі додаткові властивості інтеграла.***

Лема 10.1. *Нехай* $A, B \in E$, $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in L(X, d\mu)$ *і* $\mu(B) = 0$, *тоді*

$$\int_A f d\mu = \int_{A \setminus B} f d\mu$$

Доведення випливає з наслідку 9.1 і властивості 1.

Лема 10.2. *Нехай* $f \in L(A, d\mu)$ *і* $g = f(\mathrm{mod}\mu)$ *на* A. *Тоді* $g \in L(A, d\mu)$ *і* $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$.

Доведення випливає із Леми 10.1.

Лема 10.3. *Нехай* $f \in L(A, d\mu)$ *і* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$ *– монотонна послідовність, така що* $A_n \to A$ *при* $n \to \infty$. *Тоді*

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Лема 10.4. *Нехай* $A \in E$, $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ *– вимірна функція. Тоді*

$$f \in L(A, d\mu) \Leftrightarrow |f| \in L(A, d\mu).$$

Доведення. Оскільки $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$ і те, що $f \in L(A, d\mu) \Leftrightarrow \int_A f_\pm \, d\mu < +\infty$, то необхідність очевидна.

Достатність. Нехай $|f| \in L(A, d\mu)$. Оскільки. $0 \le f_+ \le |f|$ і $0 \le f_- \le |f|$, то, з врахуванням властивості 3, лекції 9 $\int_A f_\pm \, d\mu < +\infty \Rightarrow f \in L(A, d\mu)$.

Лема 10.5. *Нехай* $f \in L(A, d\mu)$, $g: A \to \overline{\mathbb{R}}$ *– вимірна і для* $\forall x \in A$, $|g(x)| \le |f(x)|$, *тоді* $g \in L(A, d\mu)$.

Доведення випливає із властивості 3 (лекції 9) и леми 10.4.

Лема 10.6. *Нехай* p, $p_n: X \to \mathbb{R}$ *прості невід'ємні функції для яких виконуються умови:*

1. $0 \le p_n(x) \le p_{n+1}(x)$ *для всіх* $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$;
2. $\lim_{n \to \infty} p_n(x) \ge p(x)$ *для всіх* $x \in A$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A p_n d\mu \geq \int\limits_A p d\mu.$$

Доведення. Нехай $p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(x)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Для фіксованого $t \in (0,1)$ розглянемо множину

$$B_n = \{x \in A: p_n(x) \geq tp(x)\}.$$

Звідки

$$\int\limits_A p_n d\mu \geq \int\limits_{B_n} p_n d\mu \geq t \int\limits_{B_n} p d\mu \geq t \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i \cap B_n).$$

Враховуючи те, що $\{B_n\}$ монотонно неспадна і $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$, та неперервність міри, маємо $\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap B_n) = \mu(A_i \cap A)$. Звідки

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A p_n d\mu \geq t \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i \cap A) = t \int\limits_A p d\mu.$$

Спрямувавши $t \to 1$, отримаємо твердження теореми.

Теорема 10.1 (Про монотонну збіжність). *Нехай $f_1, f_2, \ldots$ – E-вимірні функції на $A \in E$. Якщо $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ і $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то*

$$\int\limits_A f_n d\mu \to \int\limits_A f d\mu, n \to \infty. \tag{10.1}$$

Доведення. Якщо для деякого $m \in N$, $\int_A f_m d\mu = +\infty$, то $\forall n \geq m$, $\int_A f_n d\mu = +\infty$ (властивість 3 інтегралу, лекція 9), $\int_A f d\mu = +\infty$ і твердження теореми справедливе. Якщо ж для $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_A f_n d\mu < +\infty$, то, оскільки $\left\{\int_A f_n d\mu, n \in \mathbb{N}\right\}$ – неспадна послідовність, маємо $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = C \leq +\infty$. Якщо $C = +\infty$, то (10.1) виконується, оскільки в цьому випадку $\int_A f d\mu = +\infty$.

Нехай $C < +\infty$. Розглянемо невід'ємну просту функцію $p(x)$ таку, що $0 \le p(x) \le f(x)$, $x \in A$. Нехай $t \in (0,1)$, для $n \ge 1$ розглянемо множину

$$A_n = \{x \in A: f_n(x) \ge tp(x)\}.$$

Очевидно $A_n \subset A_{n+1}$, $n \ge 1$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. В силу леми 10.1 і властивості 3 (див. лекція 9), маємо: $\int_A f_n d\mu \ge \int_{A_n} f_n d\mu \ge t\int_{A_n} p d\mu$, $n \ge 1$, тому $\int_A f_n d\mu \ge t\int_{A_n} p d\mu$, $n \ge 1$. Нехай $p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{B_i}(x)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$, тоді $\int_{A_n} p d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i \cap A_n)$. Тому, з урахуванням неперервності міри $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} p d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(B_i \cap A) = \int_A p d\mu$.

З врахуванням означення C, маємо $t\int_A p d\mu \le C$. Значить, врахувавши означення інтеграла Лебега $t\int_A f d\mu \le C$, звідки, спрямовуючи $t \to 1$, отримаємо

$$\int_A f d\mu \le C. \qquad (10.2)$$

З іншого боку, оскільки $\int_A f_n d\mu \le \int_A f d\mu$, то

$$\int_A f d\mu \ge C. \qquad (10.3)$$

Із (10.2) і (10.3) випливає твердження теореми.

Теорема 10.2. *Нехай $f, g \in L(A, d\mu)$. Тоді $f + g \in L(A, d\mu)$ і*

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

Доведення. Доведемо теорему для $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$, $x \in A$.

У цьому випадку існують монотонно неспадні послідовності $\{p_n(x), n \in \mathbb{N}\}$, $\{q_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ простих, невід'ємних вимірних функцій таких, що $p_n(x) \to f(x)$, $q_n(x) \to g(x)$, $n \to \infty$, $x \in A$. Але для простих функцій безпосередньо перевіряється, що $\int_A (p_n + q_n) d\mu = \int_A p_n d\mu + \int_A q_n d\mu$, звідки, переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо доведення теореми для невід'ємних на A функцій f і g.

Нехай тепер $f(x) \geq 0$, $g(x) \leq 0$, $x \in A$. Введемо множини $A_- = \{x \in A: f(x) + g(x) < 0\}$, $A_+ = \{x: f(x) + g(x) \geq 0\}$. Оскільки на A_- $f \geq 0$ і $-(f+g) > 0$, то, із доведеного вище випливає

$$\int_{A_-} \Big(f + \big(-(f+g)\big)\Big) d\mu = \int_{A_-} f d\mu + \int_{A_-} \big(-(f+g)\big) d\mu.$$

Аналогічно

$$\int_{A_+} \big(f + g + (-g)\big) d\mu = \int_{A_+} (f+g) d\mu + \int_{A_+} (-g) d\mu,$$

звідки випливає, що $(f+g) \in L(A, d\mu)$ і $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$.

У загальному випадку для доведення використовується подання

$$A = \{x \in A: f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\} \cup \{x \in A: f(x) < 0, g(x) \geq 0\}$$
$$\cup \{x \in A: f(x) \geq 0, g(x) < 0\} \cup \{x \in A: f(x) < 0, g(x) < 0\}.$$

Доведення теореми на кожній із множин об’єднання здійснюється аналогічно наведеним вище. Враховуючи те, що ці множини не перетинаються та наслідок 9.1, отримуємо доведення теореми на всій множині A.

Означення 10.1. *Кажуть, що послідовність функцій* $\{f_n, n \geq 1\}$ *має однностайно абсолютно неперервні інтеграли, якщо всі функції послідовності інтегровані і* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *таке, що із умови* $A \in E$ *і* $\mu(A) < \delta$ *випливає, що* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_A |f_n| d\mu < \varepsilon. \tag{10.4}$$

Зауваження 10.1. *Якщо існує інтегрована на* X *функція* g *така, що для всіх* $n \geq 1$ *майже всюди* $|f_n| \leq g$, *то, з урахуванням леми* 10.5, *умова* (10.4) *для* $\{f_n, n \geq 1\}$ *виконується, оскільки* $\int_A |f_n| d\mu \leq \int_A g d\mu$ *для всіх* $n \geq 1$.

Вправа 10.1. *Знайти границю* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{n}} \frac{1}{1+x^2} d\mu$, *де* μ *– міра Лебега на* $\mathbb{R}$.

Вправа 10.2. *Обчислити* $\lim_{n\to\infty}\int_0^2 \sqrt[n]{x}\,d\mu_F$, *де* μ_F *– міра Лебега-Стилтьєса на* $[0,2]$, *а*

$$F(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1],\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$

Лекція 11. *Іменні теореми про граничний перехід під знаком інтеграла*

Теорема 11.1 (Б. Леві). *Нехай* $A\in E$ *і функції* $f_n\in L(A,d\mu)$ *задовольняють умови*:

1. $\forall n\geq 1, \forall x\in A$: $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)$;
2. $\sup\limits_{n\geq 1}\int_A f_n d\mu<+\infty$;
3. $f(x)\overset{def}{=}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x\in A$.

Тоді $f\in L(A,d\mu)$ *і*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n d\mu=\int\limits_A f d\mu.$$

Доведення. Функції $g_n(x)=f_n(x)-f_1(x)$ та $g(x)=f(x)-f_1(x)$ такі, що $g_n\geq 0$, $g_n\uparrow g$ на A, тобто, задовольняють умови теореми 10.1. Звідки

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A g_n\,d\mu=\int\limits_A g d\mu=\int\limits_A (f-f_1)d\mu. \tag{11.1}$$

Умова 3 забезпечує існування границі $\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$ (як неспадної і обмеженої зверху). З іншого боку, оскільки $f_1\in L(A,d\mu)$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A g_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n\,d\mu-\int\limits_A f_1\,d\mu. \tag{11.2}$$

Додаючи до обох частин (11.1) $\int_A f_1 d\mu$ (з урахуванням (11.2)), отримаємо твердження теореми.

Наслідок 11.1. *Теорема справедлива, якщо замінити умови 2 і 3 відповідно на умови*

2\`. $f_n\geq f_{n+1}$.

3\`. $\inf\limits_{n} \int_A f_n d\mu > -\infty$.

Теорема 11.2 (Фату). *Нехай* $A \in E$, $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– послідовність* E*-вимірних і невід'ємних функцій. Тоді*

$$\int\limits_A \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Оскільки $g_n(x) \le f_n(x)$, $x \in A$, $n \ge 1$, то $\int_A g_n\, d\mu \le \int_A f_n d\mu$. Функції $g_n(x) \stackrel{def}{=} \inf\limits_{k\ge n} f_k(x)$, $x \in A$, задовольняють умови теореми 10.1. Крім цього, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in A$,

В силу теореми 10.1, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = \int_A \left(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$, звідки випливає твердження теореми.

Наслідок 11.2. *Нехай* $A \in E$ *і* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– послідовність* E*-вимірних і невід'ємних на A функцій таких, що*

1. $f_n \to f$ $(\text{mod}\,\mu)$ на A*;*
2. $\sup\limits_n \int_A f_n d\mu < +\infty$.

Тоді $f \in L(A, d\mu)$.

Доведення. В силу теореми Фату і леми 10.2, маємо

$$\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int\limits_A \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu \le \sup_n \int\limits_A f_n d\mu < +\infty.$$

Теорема 11.3 (Віталі). *Нехай* $\{f_n, n \ge 1\}$ *– послідовність інтегрованих функцій, які збігаються до функції* f *майже всюди по мірі* μ *на* X*. Якщо* $\mu(X) < +\infty$ *і* $\{f_n, n \ge 1\}$ *має одностайно абсолютно неперервні інтеграли, то* $f \in L(A, d\mu)$ *і*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і нехай при деякому $\delta > 0$ виконується (10.4). Із теореми 8.2 випливає, що $f_n \overset{\mu}{\to} f$. Отже, для множин $A_n = \{x \in X: |f_n - f| > \varepsilon\}$ знайдеться $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\mu(A_n) < \delta$ для всіх $n > m$. За умовою (10.4), при $n > m$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ $\int_{A_n} |f_k| d\mu < \varepsilon$. За теоремою Фату $\int_{A_n} |f| d\mu < \varepsilon$. Отже, для всіх $n > m$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_{X \setminus A_n} |f_n - f| d\mu + \int_{A_n} |f_n - f| d\mu$$

$$\leq \int_{X \setminus A_n} \varepsilon d\mu + \int_{A_n} |f_n| d\mu + \int_{A_n} |f| d\mu \leq \varepsilon\mu(X) + 2\varepsilon = (\mu(X) + 2)\varepsilon\,.$$

Оскільки $\mu(X) < +\infty$, то звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Теорема 11.4 (Лебега про мажоровану збіжність). *Нехай (X, E, μ) – простір з повною мірою μ, $A \in E$ і вимірні розширені функції $f_n: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 1$, задовольняють умови:*

1. $f_n \to f \ (\mathrm{mod}\,\mu)$ *на A;*
2. $\exists g \in L(A, d\mu)$: $\forall n \geq 1$, $\forall x \in A$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Тоді f, $f_n \in L(A, d\mu)$, $n \geq 1$ і мають місце

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f - f_n| d\mu = 0$$

та

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Доведення. Функція f вимірна як границя E-вимірних функцій (з урахуванням повноти міри). Здійснивши граничний перехід у 2, одержимо $|f(x)| \leq g(x)$. Звідки, з урахуванням властивостей 3 та 6 інтеграла Лебега та леми 10.3, маємо $\{f, f_n, n \geq 1\} \in L(A, d\mu)$.

Легко бачити, що $2g - |f - f_n| \geq 0$. Застосувавши теорему Фату, одержимо

$$\int_A 2g d\mu = \int_A \liminf_{n\to\infty}(2g - |f - f_n|) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_A (2g - |f - f_n|) d\mu$$

$$= \int_A 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_A (-|f - f_n|) d\mu$$

$$= \int_A 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_A |f - f_n| d\mu$$

Тут ми скористались рівністю

$$\lim_{n\to\infty} \inf(-c_n) = -\lim_{n\to\infty} \sup(c_n). \quad (11.3)$$

Далі, оскільки $g \in L(A, d\mu)$, то $\limsup_{n\to\infty} \int_A |f - f_n| d\mu = 0$, а, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f - f_n| d\mu = 0.$$

До послідовностей $\{g + f_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{g - f_n, n \in \mathbb{N}\}$ застосуємо теорему Фату. З урахуванням леми 10.1, маємо:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A (g + f_n) d\mu \ge \int_A (g + f) d\mu$$

і

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A (g - f_n) d\mu \ge \int_A (g - f) d\mu.$$

Звідки,

$$\int_A g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \ge \int_A g d\mu + \int_A \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu = \int_A g d\mu + \int_A f d\mu$$

і, з урахуванням (11.3)

$$\int_A g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A g d\mu + \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_A f_n d\mu\right)$$

$$= \int_A g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_A (-f_n) d\mu \ge \int_A g d\mu + \int_A \lim_{n\to\infty} \inf(-f_n) \, d\mu$$

$$= \int_A g d\mu - \int_A f d\mu.$$

Отже,

$$\int\limits_A f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int\limits_A f d\mu \le \int\limits_A f d\mu.$$

Лекція 12. *Альтернативні означення інтеграла Лебега. Порівняння інтегралів Рімана та Лебега*

12.1. *Альтернативні означення інтеграла Лебега*

Розглянемо інші означення інтеграла Лебега, які зустрічаються у літературі з теорії міри.

Означення 12.1. *Нехай* (X, E, μ) *простір з мірою,* $A \in E$ *і* $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ *– вимірна і невід'ємна на A розширена функція, а* $\{p_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ *послідовність простих невід'ємних функцій, таких що* $p_n(x) \uparrow f\ (x), n \to \infty, \forall x \in A$.

Інтегралом Лебега від $f(x)$ по множині A називається величина

$$\int\limits_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_A p_n d\mu\,.$$

Еквівалентність означень 9.2 та 12.1 випливає із теореми 10.1. Як і в означенні 9.3, у загальному випадку

$$\int\limits_A f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_A f_+ d\mu - \int\limits_A f_- d\mu$$

Для множини скінченної міри $\mu(A) < \infty$ існує ще одне еквівалентне означення інтеграла Лебега [5]:

Означення 12.2. *Вимірна функція* f *називається інтегрованою на множині* A, $\mu(A) < \infty$, *якщо існує послідовність простих інтегрованих на A функцій* $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$, *що рівномірно збігаються до* f *і тоді*

$$\int\limits_A f d\mu \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_A p_n d\mu.$$

Для того, щоб означення 12.2 було коректним, потрібно виконання таких умов:

1. Границя $\lim_{n\to\infty}\int_A p_n d\mu$ існує для будь-якої послідовності простих функцій $\{p_n\}$, які рівномірно збігаються до f на A.
2. При заданій f ця границя не залежить від вибору $\{p_n\}$.
3. При $\mu(A)<\infty$ означення 12.2 еквівалентне означенню 9.1.

Для доведення 1 досить скористатися властивостями 1-3 інтегралу від простих функцій

$$\left|\int_A p_n d\mu - \int_A p_m d\mu\right| \le \mu(A)\max_{x\in A}|p_n(x)-p_m(x)|.$$

Для доведення 2 припустимо, що для послідовностей простих функцій $\{p_n\}$ і $\{q_n\}$, які збігаються рівномір до f на A $\lim_{n\to\infty}\int_A p_n d\mu \neq \lim_{n\to\infty}\int_A q_n d\mu$. Розглянемо послідовність $\{s_n\}$ таку, що $s_{2k-1}=p_{2k-1}$, $s_{2k}=q_{2k}$, $k\in\mathbb{N}$. Легко бачити, що ця послідовність рівномірно збігається до f на A і при цьому $\lim_{n\to\infty}\int_A s_n d\mu$ не має границі, що суперечить 1.

Для виконання умови 3 досить розглянути послідовність $p_n=f$, $n\in\mathbb{N}$.

Для означення інтегралу по множині нескінченної міри розглядається простір (X,E,μ) з σ-скінченною мірою (див. лекція 3).

Послідовність множин $\{A_n\}$, $A_n\in E$, називається *вичерпною*, якщо X зобразити у вигляді зліченного об'єднання множин скінченної міри:

$$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n,\qquad \mu(A_n)<\infty$$

Означення 12.3. *Вимірна функція f називається інтегрованою на множині A з σ-скінченною мірою μ, якщо f інтегрована на кожній вимірній підмножині A і для кожної вичерпної послідовності $\{A_n\}$ границя*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu$$

існує і не залежить від послідовності $\{A_n\}$.

У цьому випадку величину $\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu$ будемо називати *невласним інтегралом* функції f по множині A.

12.2. *Порівняння інтегралів Рімана та Лебега*

Встановимо зв'язок між інтегралами Рімана та Лебега на відрізку.

Теорема 12.1. *Нехай функція f інтегрована за Ріманом на відрізку $[a, b]$*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I.$$

Тоді f інтегрована за Лебегом на $[a, b]$ і

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu = I.$$

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a, b]$ на 2^n частин точками:

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b - a), \;\; k = 0,1, \dots, 2^n.$$

Позначимо $m_{nk} = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $M_{nk} = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

Випишемо верхня і нижня суми Дарбу:

$$\underline{I}_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk}\,, \qquad \bar{I}_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}.$$

За визначенням інтеграла Рімана

$$I = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{I}_n.$$

Розглянемо прості функції

$$\underline{p}_n(x) = m_{nk}, \qquad x \in [x_{k-1}, x_k[,$$

$$\bar{p}_n(x) = M_{nk}, \qquad x \in [x_{k-1}, x_k[.$$

Покладемо $\underline{p}_n(b) = \bar{p}_n(b) = 0$.

Оскільки послідовність $\left\{\underline{p}_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ є монотонно неспадною, а послідовність $\{\bar{p}_n, n \in \mathbb{N}\}$ – монотонно незростаючою, то майже всюди на $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{p}_n(x) = \underline{f}(x) \le f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{p}_n(x) = \bar{f}(x) \ge f(x).$$

За теоремою Б. Леві та наслідком 10.1

$$\int\limits_{[a,b]} \underline{f}(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = I = \lim_{n\to\infty} \bar{I}_n = \int\limits_{[a,b]} \bar{f}(x)\, d\mu.$$

Звідки, з урахуванням леми 10.4, маємо

$$\int\limits_{[a,b]} \left|\bar{f}(x) - \underline{f}(x)\right| d\mu = 0.$$

Тобто, $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$ майже всюди і значить $\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$ майже всюди і

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\, d\mu = I.$$

Лекція 13. *Критерій інтегрованості Лебега. Інтеграл Лебега-Стилтьєса.*

Розглянемо функцію $f: [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$. Для $x_0 \in (a, b)$ і $\delta > 0$ позначимо

$$m_\delta(x_0) = \min_{|x-x_0|<\delta} f(x),\ M_\delta(x_0) = \max_{|x-x_0|<\delta} f(x).$$

Легко бачити, що при спаданні δ функція $m_\delta(x_0)$ не спадна, а функція $M_\delta(x_0)$ не зростаюча, тому існують границі

$$\lim_{\delta\downarrow 0} m_\delta(x_0) = m(x_0), \qquad \lim_{\delta\downarrow 0} M_\delta(x_0) = M(x_0).$$

Очевидно, що $m_\delta(x_0) \le m(x_0) \le f(x_0) \le M(x_0) \le M_\delta(x_0)$.

Теорема 13.1 (Р. Бер). *Якщо $|f(x_0)| < \infty$, то f неперервна в x_0 тоді і тільки тоді, коли*

$$m(x_0) = M(x_0).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ неперервна в x_0. Тоді $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всіх $|x - x_0| < \delta$, тобто, для $|x - x_0| < \delta$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Звідки

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m(x_0) \leq M(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

Отже, з урахуванням довільності $\varepsilon > 0$, маємо

$$m(x_0) = M(x_0).$$

Навпаки, припустимо, що $m(x_0) = M(x_0)$. Очевидно, що у цьому випадку $m(x_0) = M(x_0) = f(x_0)$. Для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leq m(x_0), \qquad M(x_0) \leq M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Звідки маємо

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0), \;\; M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Тобто, якщо $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то $m_\delta(x_0) < f(x) < M_\delta(x_0)$, так що $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0.

13.1. *Критерій Лебега інтегрованості функції за Ріманом*

Теорема 13.2 (Критерій Лебега для інтеграла Рімана). *Для обмеженої функції $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ такі твердження є еквівалентними*:

1) f *інтегрована за Ріманом на* $[a, b]$*;*
2) f *неперервна майже всюди відносно міри Лебега на* $[a, b]$.

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай f інтегрована за Ріманом на $[a, b]$. При доведенні теореми 11.1 було показано, що $m(x) = \bar{f}(x) = \underline{f}(x) = M(x)$ майже всюди на $[a, b]$, а, отже, за теоремою 11.2, f неперервна майже всюди відносно міри Лебега на $[a, b]$.

2) $\Rightarrow$ 1). Якщо f неперервна майже всюди відносно міри Лебега на $[a, b]$, то $m(x) = M(x)$ майже всюди. Позначимо, через
$B = \{x \in [a, b]: m(x) \neq M(x)\}$.

Тоді

$$\int\limits_{[a,b]\setminus B} m(x)\, d\mu = \int\limits_{[a,b]\setminus B} M(x)\, d\mu.$$

Із леми 10.1 випливає $\int_{[a,b]} m(x)\, d\mu = \int_{[a,b]} M(x)\, d\mu$. Звідки

$$\lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = \int\limits_{[a,b]} m(x)\, d\mu = \int\limits_{[a,b]} M(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \bar{I}_n.$$

Отже, існує інтеграл Рімана

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} m(x)\, d\mu = \int\limits_{[a,b]} M(x)\, d\mu.$$

13.2. *Інтеграл Лебега-Стильтьєса*

Нехай $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, неперервна справа функція, а $\mathfrak{A}_F$ – σ-алгебра із означення 6.2 міри Лебега-Стилтьєса μ_F. Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – $\mathfrak{A}_F$-вимірна функція.

Означення 13.1. Інтегралом Лебега-Стилтьєса називається такий інтеграл Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f d\mu_F.$$

Із математичного аналізу відомий інтеграл Рімана-Стилтьєса від обмеженої на відрізку $[a,b]$ функції f відносно неспадної функції $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, який позначається $\int_a^b f d\alpha$ і за умови існування визначається так

$$\int\limits_a^b f d\alpha = \lim_{\max|x_{k+1}-x_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)\big),$$

де $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$.

Теорема 13.3 *Нехай $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ неперервна, а $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ – монотонно неспадна, неперервна справа функція. Тоді*

$$\int_{[a,b]} f d\mu_F = \int_a^b f dF,$$

μ_F – міра із означення 6.2.

Доведення. Для розбиття $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ введемо функцію

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) I_{(x_k, x_{k+1}]}(x).$$

Оскільки f неперервна, то для будь-якого $x \in [a,b]$, $f_n(x) \to f(x)$ якщо $n \to \infty$ так, що $\max|x_{k+1} - x_k| \to 0$. Крім цього, із неперервності f випливає існування $M = \max_{x \in [a,b]}|f(x)|$, і, отже, $|f_n(x)| \le M$ для всіх $x \in [a,b]$.

Звідки за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, маємо

$$\int_{[a,b]} f d\mu_F = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n d\mu_F = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big) = \int_a^b f dF.$$

Лекція 14. *Заміна змінних. Розклад Гана і Жордана. Теорема Радона-Нікодима*

Розглянемо простір з мірою (X, E, μ) та вимірний простір (X', E') такі, що існує E/E' вимірне відображення $S: X \to X'$. Визначимо на просторі (X', E') функцію множин μ' за правилом

$$\forall A \in E', \mu'(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(S^{-1}A). \qquad (14.1)$$

Лема 14.1. *Функція $\mu'(\cdot)$ є мірою на E'.*

Доведення. Нехай послідовність множин $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, $A_n \in E'$ така, що $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \ne j$.

У якості вправи переконайтесь у виконанні таких властивостей:

1) $S^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(S^{-1}A_n)$;

2) $(S^{-1}A_i) \cap \big(S^{-1}A_j\big) = \emptyset$ при $i \ne j$.

Тоді

$$\mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(S^{-1}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^{-1}A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S^{-1}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(A_n).$$

14.1. *Заміна міри в інтегралі Лебега.*

Теорема 14.1. *Якщо функція* $f: X' \to \overline{\mathbb{R}}$ *є* E' *- вимірною і такою, що* $\int_X f(Sx)d\mu(x)$ *скінченний, то має місце рівність*

$$\int_X f(Sx)d\mu(x) = \int_{X'} f(y)d\mu'(y). \tag{14.2}$$

Доведення. Функція $f(Sx): X \to \overline{\mathbb{R}}$ – E-вимірна як суперпозиція E/E' вимірної S і E' - вимірної f. Для випадку $f(y) = c\, I_B(y)$, $B \in E'$, c – константа, маємо

$$f(Sx) = c\, I_B(Sx) = \begin{cases} c, & Sx \in B, \\ 0, & Sx \notin B \end{cases} = \begin{cases} c, & x \in S^{-1}B, \\ 0, & x \notin S^{-1}B \end{cases} = c\, I_{S^{-1}B}(x).$$

Звідки

$$\int_X f(Sx)d\mu(x) = \int_X cI_{S^{-1}B}(x)d\mu(x) = c\mu(S^{-1}B).$$

З іншого боку

$$\int_{X'} f(y)d\mu'(y) = c\mu'(B).$$

Із того, що $\mu'(B) = \mu(S^{-1}B)$ випливає (14.2).

Аналогічно, неважко переконатись, що для довільної простої функції $f(y) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, I_{B_k}(y)$, $B_k \in E'$, виконується (14.2).

Використовуючи означення 12.2, легко бачити, що (14.2) має місце і для довільної інтегрованої функції f, але ми доведемо це іншим способом.

Нехай f – E'-вимірна невід'ємна функція на X'. Як відомо, тоді існує послідовність простих невід'ємних функцій $\{p_n(y), n \geq 1\}$ таких, що $p_n(y) \uparrow f(y),\ y \in X'$. Звідки $p_n(Sx) \uparrow f(Sx)$, $x \in X$.

Далі, оскільки для всіх $n \geq 1$, $\int_X p_n(Sx)d\mu(x) = \int_{X'} p_n(y)d\mu'(y)$, то, переходячи до границі при $n \to \infty$, маємо (14.2).

У випадку довільної f – E'-вимірної невід'ємної функції на X' розглянемо $\big(f(Sx)\big)_+ = f_+(Sx)$, $\big(f(Sx)\big)_- = f_-(Sx)$. Оскільки, f_+ і f_- – невід'ємні, маємо $\int_X f_+(Sx)d\mu(x) = \int_{X'} f_+(y)d\mu'(y)$ і $\int_X f_-(Sx)d\mu(x) = \int_{X'} f_-(y)d\mu'(y)$.
Звідки

$$\int\limits_X f(Sx)d\mu(x) = \int\limits_X f_+(Sx)d\mu(x) - \int\limits_X f_-(Sx)d\mu(x)$$

$$= \int\limits_{X'} f_+(y)d\mu'(y) - \int\limits_{X'} f_-(y)d\mu'(y) = \int\limits_{X'} f(y)d\mu'(y).$$

Заміна міри під знаком інтеграла Лебега має застосування для обчислення математичного сподівання як інтеграла Лебега-Стилтьєса:

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір, а $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – борелевська σ-алгебра на прямій. У якості вимірного відображення $S: \Omega \to \mathbb{R}$ розглянемо випадкову величину $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ з функцією розподілу $F_\xi(x)$. Тоді міра μ' на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ визначається так

$$\mu'\big((-\infty, x)\big) = P\big(\xi^{-1}(-\infty, x)\big) = P(\xi < x) = F_\xi(x).$$

Тоді для борелевської функції $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ маємо

$$Ef(\xi) = \int\limits_\Omega f(\xi)dP = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)d\mu'(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dF_\xi(x).$$

14.2. *Заряди. Розклад Гана*

Нехай $\boldsymbol{X}$ деяка множина, а $\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{\sigma}$-алгебра підмножин $\boldsymbol{X}$. Пара $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{E})$ називається вимірним простором.

Означення 14.1. *Функція* $\boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{E} \to (-\infty, +\infty]$ *називається зарядом, якщо:*

1. $\boldsymbol{\omega}(\emptyset) = \boldsymbol{0}$;

2. *Функція* $\boldsymbol{\omega}$ $\boldsymbol{\sigma}$*-адитивна на* $\boldsymbol{E}$.

Теорема 14.2. *Нехай* $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{E})$ - *вимірний простір і* $\boldsymbol{\omega}$ *заряд на* $\boldsymbol{E}$. *Тоді* $\exists \boldsymbol{X}_+ \in \boldsymbol{E}$: $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}_+ \cap \boldsymbol{A}) \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}_- \cap \boldsymbol{A}) \leq \mathbf{0}$, де $\boldsymbol{X}_- = \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{X}_+$.

Подання $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_+ \cap \boldsymbol{X}_-$ називається розкладанням Гана простору $\boldsymbol{X}$ щодо заряду $\boldsymbol{\omega}$.

Доведення. Покладемо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{inf}\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{F})$, де нижня межа береться по множинах $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{E}$ таких, що $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{A}) \leq \mathbf{0}$ назвемо їх від'ємними. Якщо ж $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{A}) \geq \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{F}$ назвемо додатнім. Нехай $\{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}\}$ така послідовність від'ємних множин, що $\mathbf{lim}_{\boldsymbol{n}\to\infty}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{a}$. Тоді $\boldsymbol{X}_- = \bigcup_{\boldsymbol{n}\geq \mathbf{1}} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{X}_+ = \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{X}_-$.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{X}_+$ містить вимірну множину $\boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}$, таку що $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}) < \mathbf{0}$. При цьому $\boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}$ не може бути від'ємним, інакше поклавши $\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}_- \cup \boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}$ отримаємо $\boldsymbol{\omega}\left(\tilde{\boldsymbol{X}}\right) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}_-) + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}) < \boldsymbol{a}$, що неможливо. Тому існує таке найменше натуральне число $\boldsymbol{i}_{\mathbf{1}}$, $\exists \boldsymbol{C}_{\mathbf{1}} \subset \boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}$: $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{C}_{\mathbf{1}}) \geq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}_{\mathbf{1}}}$. Аналогічно $\exists \boldsymbol{i}_{\mathbf{2}} > \boldsymbol{i}_{\mathbf{1}}$ таке, що для нього $\exists \boldsymbol{C}_{\mathbf{2}} \subset \boldsymbol{C}_{\mathbf{0}} \setminus \boldsymbol{C}_{\mathbf{1}}$ і $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{C}_{\mathbf{2}}) \geq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{i}_{\mathbf{2}}}$ і т.д. Покладемо $\boldsymbol{F}_{\mathbf{0}} = \boldsymbol{C}_{\mathbf{0}} \setminus \bigcup_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\infty} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}$. Множина $\boldsymbol{F}_{\mathbf{0}} \neq \emptyset$, тобто, $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{C}_{\mathbf{0}}) < \mathbf{0}$, а $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{i}}) > \mathbf{0}, \boldsymbol{i} \geq \mathbf{0}$. Очевидно, що $\boldsymbol{F}_{\mathbf{0}}$ від'ємне. Тому, приєднавши його до $\boldsymbol{X}_-$, приходимо до протиріччя з означенням а. Отже, для $\forall \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{X}_-$, $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{A}) \geq \mathbf{0}$, тобто, $\boldsymbol{X}_+ = \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{X}_-$ додатне.

14.3. *Розклад Жордана*

Теорема 14.3. *Нехай* $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{E})$ – *вимірний простір і* $\boldsymbol{\omega}$ *заряд на* $\boldsymbol{E}$. *Тоді існують міри* $\boldsymbol{\omega}_-$ *і* $\boldsymbol{\omega}_+$ *на* $\boldsymbol{E}$ *такі, що*

$$\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{E},\ \ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\omega}_+(\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\omega}_-(\boldsymbol{A}). \tag{14.3}$$

При цьому $\boldsymbol{\omega}_+$ *скінченна* ($\boldsymbol{\sigma}$*-скінченна*), *якщо заряд скінченний* ($\boldsymbol{\sigma}$*-скінченний*). *Розклад* (14.3) *називають розкладом Жордана.*

Доведення. Нехай $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_+ \cap \boldsymbol{X}_-$ – розклад Гана простору $\boldsymbol{X}$ щодо заряду $\boldsymbol{\omega}$. Тоді функції $\boldsymbol{\omega}_+(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}_+ \cap \boldsymbol{A})$ та $\boldsymbol{\omega}_-(\boldsymbol{A}) := -\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}_- \cap \boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{E}$ є мірами на $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\omega}_+(\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{\omega}_-(\boldsymbol{A})$.

Означення 14.2. *Нехай $\boldsymbol{\omega}_+$, $\boldsymbol{\omega}_-$ – міри для заряду $\boldsymbol{\omega}$ з доведення теореми* 14.3. *Міра $|\boldsymbol{\omega}| = \boldsymbol{\omega}_- + \boldsymbol{\omega}_+$ називається повною варіацією заряду $\boldsymbol{\omega}$.*

14.4. *Абсолютна неперервність заряду відносно міри. Теорема Радона-Нікодима*

Нехай (X, E, μ) вимірний простір.

Означення 4.1. *Заряд $\omega: E \to \mathbb{R}$ називається абсолютно неперервним відносно міри* μ, *якщо для довільного $A \in E$ такого, що $\mu(A) = 0$ виконується $\omega(A) = 0$. Позначається $\omega \ll \mu$.*

Лема 14.2. *Нехай заряд ω має розклад Жордана $\omega = \omega_+ - \omega_-$, μ – міра. Тоді еквівалентними є такі твердження:*

1) $\omega \ll \mu$;
2) $\omega_+ \ll \mu$, $\omega_- \ll \mu$;
3) $|\omega| \ll \mu$.

Доведення. 1) ⇒ 2). Доведемо для ω_+. Нехай для деякого $A \in E$ маємо $\mu(A) = 0$. Тоді, оскільки $\mu(X_+ \cap A) = 0$, то $\omega(X_+ \cap A) = 0$. Отже, $\omega_+(A) = \omega(X_+ \cap A) = 0$. Аналогічно показується, що $\omega_-(A) = 0$.

2) ⇒ 3). Якщо $\mu(A) = 0$, то $\omega_+(A) = \omega_-(A) = 0$. Отже, $|\omega|(A) = \omega_+(A) + \omega_-(A) = 0$.

3) ⇒ 1). Оскільки $|\omega| \ll \mu$, то із $\mu(A) = 0$ випливає $\omega_+(A) + \omega_-(A) = 0$. Звідки $\omega_+(A) = \omega_-(A) = 0$, а, отже, $\omega(A) = 0$.

Теорема 14.4 (Радон-Нікодим). *Нехай μ σ-скінченна міра на E, та $\omega: E \to \mathbb{R}$ – σ-скінченний заряд, абсолютно неперервний відносно міри μ*

$(\omega \ll \mu)$. *Тоді існує інтегрована по мірі* μ *функція* $f(x)$, *визначена на* X, *що для довільного* $A \in E$

$$\omega(A) = \int_A f(x) d\mu(x). \tag{14.4}$$

Ця функція називається похідною заряду ω *по мірі* μ *і позначається*

$$f = \frac{d\omega}{d\mu}.$$

Крім цього, $\frac{d\omega}{d\mu}$ *визначається з точністю до рівності майже всюди відносно міри* μ.

Доведення. Доведемо спочатку для випадок, коли ω та μ – скінченні міри. Розглянемо такий набір невід'ємних вимірних функцій

$$S = \left\{ g\colon X \to \mathbb{R}\colon \forall A \in E, \int_A g d\mu \leq \omega(A) \right\}.$$

Оскільки $0 \in S$, то $S \neq \emptyset$. Нехай $g_1, g_2 \in S$, покажемо, що $g = \max(g_1, g_2) \in S$. Дійсно, для довільної $A \in E$, маємо

$$\int_A g d\mu = \int_{A \cap \{g_1 \geq g_2\}} g d\mu + \int_{A \cap \{g_1 < g_2\}} g d\mu$$

$$= \int_{A \cap \{g_1 \geq g_2\}} g_1 d\mu + \int_{A \cap \{g_1 < g_2\}} g_2 d\mu$$

$$\leq \omega(A \cap \{g_1 \geq g_2\}) + \omega(A \cap \{g_1 < g_2\}) = \omega(A).$$

Тобто, $\max(g_1, g_2) = g \in S$. За індукцією легко бачити, що із $g_1, g_2, \dots, g_n \in S$ випливає те, що $\max(g_1, g_2, \dots, g_n) \in S$.

Покладемо

$$\alpha = \sup_{g \in S} \int_X g d\mu. \tag{14.5}$$

Оскільки $\forall g \in S \int_X \ g d\mu \leq \ \omega(X) < +\infty$, то $\alpha < +\infty$. Нехай послідовність $\{g_n, n \geq 1\} \subset S$, така, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n d\mu = \alpha.$$

Позначимо $f_n = \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$. Тоді $f_n \in S$ і

$$\int\limits_X g_n d\mu \leq \int\limits_X f_n d\mu \leq \alpha.$$

Звідки $\lim_{n\to\infty} \int_X \ f_n d\mu = \alpha$. Оскільки $f_n \leq f_{n+1}$, то існує

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Покажемо, що функція f задовольняє (14.4).

Використовуючи теорему 10.1 про монотонну збіжність, маємо $\forall A \in E$

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu, \qquad \int\limits_A f_n d\mu \leq \ \omega(A).$$

Звідки $\int_A \ f d\mu \leq \ \omega(A)$ і

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \alpha. \qquad (14.6)$$

Введемо функцію

$$\lambda(A) = \omega(A) - \int\limits_A f d\mu, \qquad A \in E. \qquad (14.7)$$

Легко бачити, що λ невід'ємна і σ-адитивна, а, отже, є мірою.

Припустимо, що існує множина $A_0 \in E$ така, що $\lambda(A_0) > 0$. Оскільки μ скінченна, то існує $c > 0$ таке, що

$$\lambda(A_0) > c\mu(A_0).$$

Очевидно, що функція множин $\lambda(A) - c\mu(A)$, $A \in E$ є зарядом на E. Нехай B додатна множина цього заряду за розкладом Гана, тоді очевидно, що $\lambda(B) -$

$c\mu(B) > 0$. Легко бачити, що $\mu(B) > 0$ інакше, якби $\mu(B) = 0$, то із (14.7) та умови $\omega \ll \mu$ випливало б, що $\lambda(B) = 0$, тобто, $\lambda(B) - c\mu(B) = 0$.
Крім цього, для довільної підмножини $P \subset B$, $P \in E$, $\lambda(P) - c\mu(P) \geq 0$, тобто, враховуючи (14.6), $\omega(P) - \int_P \ f d\mu - c\mu(P) \geq 0$ і $\omega(P) \geq \int_P \ f d\mu + c\mu(P)$.

Введемо функцію

$$h = f + cI_B.$$

З одного боку, покажемо, що $h \in S$. Для $A \in E$, маємо

$$\int\limits_A h d\mu = \int\limits_{A\backslash B} h d\mu + \int\limits_{A\cap B} h d\mu = \int\limits_{A\backslash B} f d\mu + \int\limits_{A\cap B} (f + cI_B) d\mu$$

$$\leq \omega(A\backslash B) + \int\limits_{A\cap B} f d\mu + c\mu(A\cap B) \leq \omega(A\backslash B) + \omega(A\cap B) = \omega(A).$$

З іншого боку

$$\int\limits_X h d\mu = \int\limits_X f d\mu + c\mu(B) = \alpha + c\mu(B) > \alpha.$$

Отримали суперечність з означенням α в (14.5). Отже, (14.4) справджується.

Перейдемо до випадку, коли $\omega -$ заряд. Розглянемо розклад Гана цього заряду $X = X_+ \cup X_-$ і розклад Жордана $\omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A)$, $A \in E$. Оскільки за лемою 14.2 $\omega_+ \ll \mu$ і $\omega_- \ll \mu$, тоді, якщо розглянути міру ω_+ на X_+ і міру ω_- на X_-, то існують функції $f_+ : X_+ \to \mathbb{R}$ та $f_- : X_- \to \mathbb{R}$ такі, що

$$\omega_+(A) = \int\limits_A f_+(x) d\mu(x), \forall A \subset X_+, A \in E,$$

$$\omega_-(B) = \int\limits_B f_-(x) d\mu(x), \forall B \subset X_-, B \in E.$$

Розглянемо $f: X \to \mathbb{R}$ таку, що $f(x) = f_+(x)$, $x \in X_+$ та $f(x) = -f_-(x)$, $x \in X_-$.

Легко бачити, що для будь якої множини $A \in E$ має місце

$$\omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A) = \int\limits_{A\cap X_+} f_+(x)d\mu(x) + \int\limits_{A\cap X_-} f_-(x)d\mu(x)$$

$$= \int\limits_{A\cap X_+} f(x)d\mu(x) + \int\limits_{A\cap X_-} f(x)d\mu(x) = \int\limits_{A} f(x)d\mu(x).$$

Оскільки, при $f(x) = \tilde{f}(x)$ $(\mathrm{mod}\,\mu)$, $\int_A f(x)d\mu(x) = \int_A \tilde{f}(x)d\mu(x)$, то очевидно, що похідна $\frac{d\omega}{d\mu}$ заряду ω по мірі μ визначається з точністю до рівності майже всюди відносно міри μ.

Розглянемо загальний випадок теореми. Оскільки міра μ і заряд ω – σ-скінченні, то легко переконатись, що існує $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{S}$, така, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$, $\mu(X_n) < \infty$ та $|\omega(X_n)| < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Введемо послідовність $Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$, де $\bigcup_{k=1}^{0} = \emptyset$. Легко бачити, що $Y_n \cap Y_m = \emptyset$, при $n \neq m$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = X$, $Y_n \in k(\mathbb{S})$, $\mu(Y_n) < \infty$ та $|\omega(X_n)| < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Із доведеного вище випливає, що на $Y_n \cap \sigma k(\mathbb{S}) = \sigma k(Y_n \cap \mathbb{S})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, виконується (14.4), тобто існує функція $f_n\colon Y_n \to \mathbb{R}$ така, що $\forall A \in E$

$$\omega(A \cap Y_n) = \int\limits_{A\cap Y_n} f_n(x)d\mu(x).$$

Розглянемо $f\colon X \to \mathbb{R}$ таку, що $f(x) = f_n(x)$, якщо $x \in Y_n$. Оскільки $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_n \cap A)$, причому $(Y_n \cap A) \cap (Y_m \cap A) = \emptyset$, при $n \neq m$, маємо

$$\omega(A) = \omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_n \cap A)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(Y_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{Y_n\cap A} f_n d\mu = \int\limits_{A} f d\mu.$$

Література

Базова

1. Дороговцев А. Я. Элементы общей теории меры и интеграла. К.: Вища школа, 1989. 150 с.
2. Халмош П. Теория меры. М.: Изд-во «Факториал-пресс», 2003. 256 с.
3. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 1,2. Москва-Ижевск; НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 584 с. (Т. 1), 680 с. (Т. 2).
4. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Курс лекций. К.: Вища школа, 1990. 600 с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 542 с.

Допоміжна

6. Завдання до практичних занять з теорії міри та інтеграла для студентів спеціальностей «математика» і «статистика» механіко-математичного факультету / Укладачі А. Я. Дороговцев, С. Д .Івасішен, О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, О .Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. К.: ВПЦ «Київський університет», 2003. 89 с.
7. Методы решения задач по функциональному анализу: учебное пособие / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. К.: Вища школа., 1990. 479 с.
8. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979. 382 с.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
10. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 344 с.
11. Федерер Г. Геометрическая теория меры: Пер. с англ. М.: Наука, 1987. 760 с.
12. Ященко И. В. Парадоксы теории множеств. М.: Издательство центра непрерывного математического образования, 2002. 40 с.

Навчальне видання

Погоруй Анатолій Олександрович
Сарана Олександр Анатолійович

Загальна теорія міри та інтеграла

Навчальний посібник

Підп. до друку 19.02.2019. Формат 60x90/16. Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman. Друк різографічний.
Ум. друк. арк. 4,4. Обл.-вид. арк. 3,9.
Наклад 300 пр. Зам. 8.

Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка
10008, м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40
Свідоцтво про державну реєстрацію:
ЖТ № 10 від 07.12.04 р.
електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua