Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ДОВГОПЯТИЙ ОЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ

УДК 517.95:519.6

ДИСЕРТАЦІЯ

ДО ТЕОРІЇ ЛОКАЛЬНОЇ І МЕЖОВОЇ ПОВЕДІНКИ ПЛОСКИХ І ПРОСТОРОВИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

111 Математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____________ О. П. Довгопятий

Науковий керівник: Севостьянов Євген Олександрович,
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

Житомир — 2024

АНОТАЦІЯ

Довгопятий О. П. До теорії локальної і межової поведінки плоских і просторових відображень. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – Житомирський державний університет імені Івана Франка, Житомир, 2024.

У дисертаційній роботі досліджуються властивості відображень зі скінченним спотворенням, які активно вивчаються протягом останніх 25-30 років, а також рівняння Бельтрамі й задача Діріхле для нього. Як відомо, проблеми локальної й межової поведінки відображень, їх неперервного продовження на межу заданої області, а також поведінка відображень у межових точках є одними з найважливіших проблем сучасного аналізу. За допомогою докладного вивчення цих питань вдається встановити цікаві застосування, зокрема, в області існування гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі, компактності класів розв'язків рівнянь Бельтрамі й відповідної задачі Діріхле. Зауважимо, що розпочата у 30-ті роки XX сторіччя академіком М. О. Лаврентьєвим теорія квазіконформних відображень, активний розвиток якої відбувся в 70-ті роки минулого сторіччя, на сучасному етапі перетворилася у теорію відображень зі скінченним спотворенням. Останні 15-20 років класи відображень зі скінченним спотворенням активно вивчаються в роботах багатьох математиків світового рівня, таких як К. Астала, В. Гольдштейн, В. Гутлянський, Т. Іванець, П. Коскела, О. Мартіо, В. Рязанов, С. Хенкл, А. Ухлов та інших. Зокрема, в дисертації зроблено внесок у сучасну теорію відображень у вигляді отримання нових теорем збіжності, нормальності й компактності сімей відображень, теорем про оцінки спотворення при відображеннях і їх межову поведінку, а також отримання застосувань цих результатів до теорем компактності класів розв'язків задачі Діріхле і рівнянь Бельтрамі. Також ці результати застосовані до отримання нових теорем існування розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь Бельтрамі.

Дисертаційна робота є продовженням досліджень з теорії відображень

та її застосувань до проблем існування розв'язків рівнянь з частинними похідними та задачі Діріхле, які здійснювали такі науковці:

1) Б. Боярський (існування розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь Бельтрамі у рівномірно-еліптичному випадку);

2) О. Афанасьєва, В. Гутлянський, Д. Ковтонюк, О. Мартіо, В. Рязанов, Р. Салімов, Є. Севостьянов, С. Скворцов, У. Сребро, Е. Якубов (розвиток теорії збіжності, нормальності й компактності класів відображень з нерівністю Полецького, а саме так званих Q-відображень і кільцевих Q-відображень, їх межової поведінки);

3) К. Астала, Т. Іванець, Г. Мартін (теореми існування розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь Бельтрамі у випадку, коли дилатація рівняння є експоненційно інтегровною);

4) В. Гутлянський, Т. Ломако, В. Рязанов, Є. Севостьянов, У. Сребро, Е. Якубов (теореми існування розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь Бельтрамі у випадку виродження еліптичності, зокрема, у випадку, коли дилатація рівняння задовольняє умову типу FMO або інтегральну умову розбіжності типу Лехто);

5) Ю. Дибов, Д. Ковтонюк, І. Пєтков, В. Рязанов, Р. Салімов (теореми існування розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі й компактність класів цих розв'язків у одиничному крузі).

Серед іншого, в дисертації встановлено неперервне межове продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького. Також на основі локальних і межових властивостей цих відображень отримані теореми компактності класів розв'язків рівнянь Бельтрамі й задачі Діріхле для нього. Крім того, отримані теореми існування розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь Бельтрамі, включаючи розв'язки з гідродинамічним нормуванням в околі нескінченно віддаленої точки.

Дисертація має теоретичний характер. Отримані результати мають самостійний науковий інтерес і можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії відображень, а також у варіаційному численні, зокрема, з метою отримання необхідних умов екстремуму деяких функціоналів.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, наведено опис об'єкта та предмета дослідження, зазначено зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами та темами. Також відзначені наукова новизна, мета, завдання дослідження, практичне значення, особистий внесок здобувача та інформація щодо апробації результатів.

У першому розділі розвинута теорія межової поведінки відображень областей евклідового простору та отримані модульні нерівності типу Полецького. Розділ складається з трьох підрозділів. У першому підрозділі отримано неперервне продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького на межу у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, область визначення має слабко плоску межу, а область значення є локально зв'язною на своїй межі. У другому підрозділі отримана верхня обернена оцінка модуля типу Полецького, в якій бере участь аналог внутрішньої дилатації відображення. У третьому підрозділі отримана логарифмічна неперервність за Гельдером відображень з оберненою нерівністю Полецького у межових точках у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, а відображена область є обмеженою опуклою. Результат є справедливим у випадку, коли областю визначення є або QED-область, або область з локально квазіконформною межею, або регулярна область у сенсі простих кінців.

Другий розділ присвячений теоремам компактності класів розв'язків рівняння Бельтрамі й задачі Діріхле. Розділ складається з трьох підрозділів. У першому підрозділі доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі у деякій жордановій області, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження інтегрального характеру. Як наслідок, отримано результати про компактні класи розв'язків відповідних задач Діріхле, які розглядаються в деякій жордановій області. У другому підрозділі доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження теоретико-множинного типу. Отримано також результати про компактні класи розв'язків відповідних задач Діріхле, які розглядаються в деякій жордановій області. Третій підрозділ присвячений питанням, що стосуються проблеми компактності розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі в деякій однозв'язній області. У термінах простих кінців отримані результати щодо компактності розв'язків задачі Діріхле, згаданих вище, для випадку, коли максимальні дилатації цих розв'язків задовольняють певні інтегральні обмеження.

Третій розділ присвячений існуванню розв'язків рівняння Бельтрамі і містить три підрозділи. Перший підрозділ стосується існування розв'язків квазілінійних рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками. За певних умов на комплексні коефіцієнти отримано теореми про існування гомеоморфних ACL-розв'язків цього рівняння. Крім того, за деяких відносно слабких умов отримано теореми про існування відповідних неперервних ACL-розв'язків, які є логарифмічно гельдеровими в заданій області. Другий підрозділ присвячений існуванню розв'язків квазілінійних рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками та гідродинамічним нормуванням. Розглянуті проблеми щодо існування розв'язків рівняння Бельтрамі з гідродинамічним нормуванням та питання про збіжність цих розв'язків у комплексній площині. За деяких умов на дилатації обернених апроксимативних розв'язків (розв'язків рівняння зрізок) встановлено існування соболівських розв'язків таких рівнянь з вказаними властивостями. Також отримані результати про локально рівномірні границі цих розв'язків. Останній (третій) підрозділ стосується просторових відображень з аналогом гідродинамічного нормування. Доведено, що відповідні гомеоморфізми формують одностайно неперервні сім'ї за деяких умов на характеристику квазіконформності. Розглянуто також питання щодо замкнености цих класів відносно локально рівномірної збіжності. Отримані аналогічні результати для відображень з інтегральними обмеженнями, а також для класів відповідних обернених відображень.

Ключові слова: квазіконформні відображення, відображення з обмеженим і скінченним спотворенням, модулі сімей кривих, межова поведінка, класи Соболєва, компактність класів, диференціальні рівняння, диференціальні рівняння з частинними похідними, рівняння Бельтрамі, задача Діріхле.

ABSTRACT

Dovhopiatyi O. P. On the theory of local and boundary behavior of plane and space mappings. – Qualification work on manuscript rights.

The thesis for obtaining the degree of Doctor of Philosophy in speciality 111 Mathematics (PhD). – Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, 2024.

The thesis is devoted to the study of the properties of mappings with finite distortion, which have been actively studied during the last 25-30 years, as well as the Beltrami equation and the Dirichlet problem. As is known, the problems of local and boundary behavior of mappings, their continuous extension to the boundary of a domain, and the behavior of mappings at boundary points are among the most important problems of modern analysis. Due to the detailed study of these problems, it is possible to establish interesting applications, in particular, in the field of existence of homeomorphic solutions of Beltrami equations, compactness of classes of solutions of Beltrami equations and the corresponding Dirichlet problem. Note that the theory of quasiconformal mappings, started in the 1930s by an academician M. O. Lavrentiev, the active development of which was implemented in the 70s of the last century, has turned into the theory of mappings with finite distortion at the present stage. In the last 15-20 years, classes of mappings with finite distortion have been actively studied in the papers of many known mathematicians such as K. Astala, V. Goldstein, V. Gutlyanskii, T. Iwaniec, P. Koskela, O. Martio, V. Ryazanov, S. Hencl, A. Ukhlov and many others. In this regard, the topic of the thesis of O. P. Dovhopiatyi fits perfectly into the topic of modern mathematical research. In particular, the thesis made a contribution to the modern theory of mappings in the form of obtaining new theorems of convergence, normality and compactness of families of mappings, theorems on estimates of distortion of mappings and their boundary behavior, as well as obtaining applications of these results to theorems of compactness of classes of solutions of the Dirichlet problem and the Beltrami equation. In addition, the results mentioned above may be applied to the problem of the existence of solutions of linear and quasilinear Beltrami equations.

This manuscript is a continuation of studies on the mapping theory and its

applications to the problems of the existence of solutions of equations with partial derivatives and the Dirichlet problem, which were carried out by:

1) B. Bojarski (who dealt with the problem of the existence of solutions of linear and quasilinear Beltrami equations in the uniform elliptic case);

2) O. Afanas'eva, V. Gutlyanskii, D. Kovtonyuk, O. Marito, V. Ryazanov, R. Salimov, E. Sevost'yanov, S. Skvortsov, U. Srebro, E. Yakubov (who worked on the development of the theory of convergence, normality, and compactness of classes of mappings satisfying the Poletsky inequality, namely, the so-called Q-mappings and ring Q-mappings and their boundary behavior);

3) K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin (who have proved the theorems on the existence of solutions of linear and quasilinear Beltrami equations in the case when its dilatation is exponentially integrable);

4) V. Gutlyanskii, T. Lomako, V. Ryazanov, E. Sevost'yanov, U. Srebro, E. Yakubov (who have proved theorems on the existence of solutions of linear and quasilinear Beltrami equations in the case of degenerate ellipticity, say, in the case when the dilatation of the equation satisfies the FMO-type condition or the Lehto-type integral divergence condition);

5) Yu. Dybov, D. Kovtonyuk, I. Petkov, V. Ryazanov, R. Salimov (who have obtained theorems on the existence of solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equation and the compactness of classes of these solutions in the unit disk).

Among other things, the thesis contains the results concerning the continuous boundary extension of mappings with the inverse Poletsky inequality. Also, on the basis of local and boundary properties of these mappings, theorems on compactness of classes of solutions of Beltrami equations and the Dirichlet problem for it have been obtained. In addition, theorems on existence of solutions of linear and quasilinear Beltrami equations including solutions with the hydrodynamic normalization condition near infinitely distant point have been obtained.

The thesis is theoretical. The obtained results are of independent scientific interest and may be used for further research in the mapping theory, as well as in calculus of variations, in particular, to obtain the necessary conditions for the extremum of various functionals.

The introduction includes the relevance of the research topic, provides a description of the object and subject of the research, indicates the connection of the thesis work with scientific programs and topics. The scientific novelty, purpose, research tasks, practical significance, personal contribution of the recipient and information on approbation of the results are also noted.

The first section is devoted to the theory of boundary behavior of mappings in the Euclidean space. In addition, modular inequalities of the Poletsky type have been obtained. The section consists of three subsections. In the first subsection, the continuous extension of the mappings with the inverse Poletsky inequality to the boundary is obtained. The result was proved under the conditions that the majorant in this inequality is integrable, the definition domain has a weakly flat boundary, and the mapped domain is locally connected at its boundary. In the second subsection, we have obtained the upper inverse modulus condition of the Poletsky type in which some analogue of the inner dilatation is used. The third subsection is devoted to the Hölder logarithmic continuity of mappings with the inverse Poletsky inequality at the boundary points in the case when the majorant in this inequality is integrable, and the mapped domain is bounded and convex. The result is valid in the case when the definition domain is either a QED-domain, or a domain with a locally quasiconformal boundary, or a regular domain in the sense of prime ends.

The second section is devoted to compactness theorems of classes of solutions of the Beltrami equation and the Dirichlet problem. The section consists of three subsections. In the first subsection, the author has proved theorems about compact classes of homeomorphisms with hydrodynamic normalization, which are solutions of the Beltrami equation, the characteristics of which have a compact support and satisfy certain integral constraints. The author obtained results on compact classes of solutions of the corresponding Dirichlet problems, which are considered in some Jordanian domain. The second subsection is devoted to proving theorems about compact classes of homeomorphisms with hydrodynamic normalization, which are solutions of the Beltrami equation, the characteristics of which have a compact support and satisfy certain restrictions of the set-theoretic type. In addition, the author obtained a result about compact classes of solutions of the corresponding Dirichlet problem, which is considered in some Jordan domain. The third subsection is devoted to the problem of the compactness of solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equation in some simply connected domain. In terms of prime ends, the author obtained results regarding the compactness of the solutions of the Dirichlet problem whenever the maximal dilatations of these solutions satisfy certain integral constraints.

The third section is devoted to the existence of solutions to the Beltrami equation and contains three subsections. The first subsection concerns the existence of solutions of quasilinear Beltrami equations with two characteristics. Under certain conditions on a complex dilatation, the author obtained theorems on the existence of homeomorphic ACL-solutions of this equation. In addition, under some relatively weak conditions, he have obtained theorems on the existence of corresponding continuous ACL-solutions that are logarithmic Hölder continuous in a given domain. The second subsection is devoted to the existence of solutions of quasilinear Beltrami equations with two characteristics and hydrodynamic normalization. The author considers problems regarding the existence of solutions of the Beltrami equation with hydrodynamic normalization and the problem of the convergence of these solutions in the complex plane. Under certain conditions on dilations of inverse approximate solutions (solutions of the equation of cuts), it is established the existence of Sobolev solutions of such equations with the specified properties. The author also obtained results on locally uniform convergence of these solutions. The last (third) subsection concerns spatial mappings with an analogue of hydrodynamic normalization. The author of the manuscript proved that homeomorphisms with the specified property form equicontinuous families under certain conditions of their complex characteristic. The problem of closeness of these classes with respect to locally uniform convergence is also considered. In addition, the author obtained similar results for mappings with integral constraints, as well as for classes of corresponding inverse mappings.

Key words: quasiconformal mappings, mappings with a bounded and fini-

te distortion, modulus of families of paths, boundary behavior, Sobolev classes, compactness of classes, differential equations, partial differential equations, Beltrami equations, Dirichlet problem.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Sevost'yanov E., Skvortsov S., Dovhopiatyi O. On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 252, № 4. P. 541–557. (Приналежність до бази Scopus)

2. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On the compactness of classes of the solutions of the Dirichlet problem. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 259, № 1. P. 23–36. (Приналежність до бази Scopus)

3. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On the Existence of Solutions of Quasilinear Beltrami Equations with Two Characteristics. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2022. Vol. 74, № 7. P. 1099–1112. (Приналежність до бази Scopus і Web of Science)

4. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in simply connected domains. *Matematychni Studii.* 2022. Vol. 58, № 2. P. 159–173. (Приналежність до бази Scopus)

5. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization. *Acta Mathematica Hungarica.* 2023. Vol. 170. P. 244–260. (Приналежність до бази Scopus)

6. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compact classes of Beltrami solutions and Dirichlet problem. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2023. Vol. 68, № 7. P. 1182–1203. (Приналежність до бази Scopus і Web of Science)

7. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On the inverse K_I-inequality for one class of mappings. *Filomat.* 2023. Vol. 37, № 24. P. 8145–8156. (Приналежність до бази Scopus і Web of Science)

8. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On mappings with an analog of the hydrodynamical normalization in the Euclidean space. *Journal of Mathematical Sciences.* 2023. Vol. 276, № 5. P. 638–651. (Приналежність до бази Scopus)

9. Dovhopiatyi O. On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine.* 2023. Vol. 37, № 1.

P. 3–12.

10. Довгопятий О., Севостьянов Є. Про застосування одної модульної нерівності до теорії відображень. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України.* 2023. Т. 37, № 2. С. 104–117.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

11. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in Jordan domains. *Abstracts of the International Conference Complex Analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A. A. Gol'dberg*, Lviv, June 28–July 1, 2021. Lviv, 2021. P. 15.

12. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compactness of classes of solution of the Dirichlet problem with restrictions of the theoretic-set type. Belgrade, *Mathematics and Applications : the book of Abstracts XI Symposium* December 3–4, 2021. Belgrade, 2021. P. 15–16.

13. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On compactness of solutions of Dirichlet problem. *Current trends in abstract and applied analysis* : the international online conference, Ivano-Frankivsk, May 12–15, 2022. Ivano-Frankivsk, 2022. P. 27.

14. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in simply connected domains. *Abstracts of the 14th International ISAAC Congress*, Sao Paulo, July, 17–July, 21. Sao Paulo, 2023. P. 50.

15. Dovhopiatyi O. On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths. *Algebraic and Geometric. Methods of Analysis : International scientific conference, devoted to 160 anniversary of D. Grave.* Odesa, May 29–June 1, 2023. Odesa, 2023. P. 34–35.

16. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization. *Mathematics and its applications* : the book of Abstracts of XIII Symposium, Belgrade, December 1–2, 2023. Belgrade, 2023. P. 30.

17. Довгопятий О. Про рівняння Бельтрамі з оберненими умовами та гідродинамічне нормування. *Збірник тез доповідей наукової конференції викладачів та молодих науковців Житомирського державного університету*

імені Івана Франка з нагоди Днів науки. Житомир, Житомир. держ. ун-т ім. Івана Франка, 2023. С. 306–310.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню властивостей відображень зі скінченним спотворенням, які активно вивчаються протягом останніх 25-30 років, а також рівнянню Бельтрамі й задачі Діріхле для нього. Як відомо, проблеми локальної й межової поведінки відображень, їх неперервного продовження на межу заданої області, а також поведінка відображень у межових точках є одними з найважливіших проблем сучасного аналізу. За допомогою докладного вивчення цих питань вдається встановити цікаві застосування, зокрема, в області існування гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі, компактності класів розв'язків рівнянь Бельтрамі й відповідної задачі Діріхле. Зауважимо, що розпочата у 30-ті роки XX сторіччя академіком М.О. Лаврентьєвим теорія квазіконформних відображень, активний розвиток якої відбувся в 70-ті роки минулого сторіччя, на сучасному етапі перетворилася у теорію відображень зі скінченним спотворенням. Останні 15-20 років класи відображень зі скінченним спотворенням активно вивчаються в роботах багатьох математиків світового рівня, таких як К. Астала, В. Гольдштейн, В. Гутлянський, Т. Іванець, П. Коскела, О. Мартіо, В. Рязанов, С. Хенкл, А. Ухлов та інших, див. напр. [19], [20], [45], [47], [57], [58]. У цьому плані, тема дисертації цілком вписується в коло сучасних математичних досліджень. Зокрема, в дисертації зроблено внесок у сучасну теорію відображень у вигляді отримання нових теорем збіжності, нормальності й компактності сімей відображень, теорем про оцінки спотворення при відображеннях і їх межової поведінки, а також отримання застосувань цих результатів до теорем компактності класів розв'язків задачі Діріхле і рівнянь Бельтрамі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Житомирському державному університеті імені Івана Франка в рамках наукових тем кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики «Сучасні проблеми геометричної теорії функцій і відображень» (державний реєстраційний номер 0122U000821, 2022–2024) та «Локальна і асимптотична поведінка відображень зі скінченним спотворенням» (державний реєстраційний номер 0117U004570, 2017-2027).

Мета дослідження полягає в:

– дослідженні локальних і межових властивостей відображень з оберненою нерівністю Полецького;

– отриманні нових теорем компактності класів відображень;

– отриманні нових теорем існування розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними;

– отриманні нових модульних нерівностей в окремих класах відображень.

Завдання дослідження полягають в:

– отриманні теорем про неперервне межове продовження відображень з прямою та оберненою нерівністю Полецького;

– отриманні обернених модульних нерівностей типу Полецького;

– отриманні логарифмічної неперервності за Гельдером цих відображень у межових точках;

– отриманні теорем компактності класів розв'язків рівнянь Бельтрамі з гідродинамічним нормуванням в околі нескінченно віддаленої точки;

– отриманні теорем компактності класів розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі;

– отриманні нових теорем існування неперервних і гомеоморфних розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь Бельтрамі як з однією, так і двома комплексними характеристиками.

Об'єктом дослідження в дисертації є плоскі та просторові відображення, а також диференціальні рівняння з частинними похідними.

Предметом дослідження є відображення з оберненою нерівністю Полецького, а також рівняння Бельтрамі й задача Діріхле для нього.

Методи дослідження. Для доведення основних результатів дисертації переважно використовується **метод модулів та ємностей,** який є універсальним методом дослідження відображень. Слід зауважити, що практично всі відомі класи відображень, включаючи аналітичні функції, конформні й квазіконформні відображення, квазірегулярні відображення і відображення зі скінченним спотворенням задовольняють певні оцінки спотворення модуля сімей кривих, див., напр., [19]– [20], [56], [58] і [66].

Наукова новизна отриманих результатів. Наукову новизну визначають, зокрема, такі результати дисертації:

1. Отримано неперервне продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького на межу у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, область визначення має слабко плоску межу, а область значення є локально зв'язною на своїй межі (див. теорему 1.1.1).

2. Отримана логарифмічна неперервність за Гельдером відображень з оберненою нерівністю Полецького у межових точках у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, а відображена область є обмеженою опуклою. Результат є справедливим у випадку, коли областю визначення є або QED-область, або область з локально квазіконформною межею, або регулярна область в сенсі простих кінців (див. теореми 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4).

3. Отримані теореми компактності класів розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі для областей з різною геометрією (див. теореми 2.1.2, 2.2.2 і 2.3.1).

4. Отримані теореми розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь Бельтрамі як з однією, так і двома комплексними характеристиками, включаючи розв'язки з гідродинамічним нормуванням в околі нескінченно відділеної точки (див. теореми 3.1.1, 3.1.2 і 3.2.1).

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати разом з удосконаленим у ній методом модулів можуть бути застосовані до вивчення інших класів відображень, зокрема, класів Соболєва та Орліча-Соболєва, а також у варіаційному численні, а саме для отримання критеріїв екстремуму функціоналів спеціального вигляду.

Особистий внесок здобувача. У дисертації використані матеріали досліджень, проведених:

1) здобувачем самостійно, див. [5], [22], [23];

2) спільно з Є. Севостьяновим та С. Скворцовим [8], де здобувачем здійснено доведення теореми 3.1 (теорема про неперервне межове продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького);

3) спільно з Є. Севостьяновим [1]– [4], і [24]– [32], де доведення усіх результатів безпосередньо належать здобувачу.

Апробація результатів. Основні положення дисертації оприлюднені на науково-практичних конференціях: *міжнародних*: «Complex Analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A. A. Gol'dberg» (Львів, 2021, дистанційна), «Mathematics and Applications» (Белград, 2021, заочна), «Current trends in abstract and applied analysis» (Івано-Франківськ, 2022, дистанційна), «14 ISAAC Congress 2023» (Сан-Паулу, 2023, дистанційна), «Mathematics and Applications» (Белград, 2023, заочна), «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» (Одеса, 2023, дистанційна); науковій конференції викладачів та молодих науковців Житомирського державного університету імені Івана Франка з нагоди Днів науки (Житомир, 2023, заочна); *наукових семінарах*: кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка «Теорія відображень і алгебр Лі» (Житомир, 2020, 2022, 2023, дистанційна), Інституту прикладної математики і механіки НАН України (Черкаси, 2024, дистанційна); відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (Київ, 2024, дистанційна); кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету ім. Івана Франка (Львів, 2024, дистанційна).

Публікації. Результати дисертації викладено у 17 наукових публікаціях (3 одноосібних), з яких 8 статей у журналах, що входять до наукометричних баз Scopus та/або Web of Science, 2 статті у наукових фахових виданнях України, 7 у збірниках та матеріалах науково-практичних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, розподілених на підрозділи, загальних висновків, списку використаних джерел (104 найменування, з них 96 іноземною мовою) та 1 додатку, що містить список публікацій здобувача за темою дисертації й відомості про апробацію результатів дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 172 сторінки, з яких 158 – основного тексту.

РОЗДІЛ 1

ВІДОБРАЖЕННЯ З ОБЕРНЕНОЮ НЕРІВНІСТЮ ПОЛЕЦЬКОГО ТА ЇХ МЕЖОВА ПОВЕДІНКА

У даному розділі досліджується межова поведінка відображень, що діють між областями евклідового простору. Переважно розглядаються ті відображення, які пов'язані з умовами спотворення модулів сімей кривих типу Полецького. Досліджено обернені нерівності вказаного типу.

Розділ складається з трьох підрозділів, у першому з яких йдеться про неперервне межове продовження відкритих дискретних відображень з оберненою нерівністю Полецького. У другому підрозділі отримані обернені модульні нерівності типу Полецького для відкритих дискретних замкнених відображень, які диференційовні майже скрізь, мають властивість N-Лузіна відносно міри Лебега і N^{-1}-властивість на сферах. У третьому підрозділі йдеться про спотворення відстані відображень з оберненою нерівністю Полецького у межових точках, з огляду на що отримана логарифмічна неперервність за Гельдером відображень областей квазіекстремальної довжини на опуклі області.

1.1. Межова поведінка відображень з оберненою нерівністю Полецького

Результати даного підрозділу опубліковані в [8]. Визначимо простір $\mathbb{R}^n$ як векторний простір:

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Покладемо

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

Скрізь нижче D є областю в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (іншими словами, D є відкритою зв'язною множиною в $\mathbb{R}^n$), m є мірою Лебега в $\mathbb{R}^n$, $m(A)$ позначає міру

Лебега множини $A \subset \mathbb{R}^n$. Для множин $A, B \subset \mathbb{R}^n$ покладемо, як зазвичай,

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} |x-y|\,, \quad \operatorname{dist}(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} |x-y|\,.$$

Іноді замість $\operatorname{diam} A$ і $\operatorname{dist}(A,B)$, ми також пишемо $d(A)$ і $d(A,B)$, відповідно. *Відображенням* $f: D \to \mathbb{R}^n$ називається перетворення, яке кожному елементу $x=(x_1,\ldots,x_n) \in D$ ставить у відповідність деякий (єдиний) елемент $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$, де $f_i: D \to \mathbb{R}$ – деяка дійснозначна функція, $1 \leqslant i \leqslant n$. Позначення $f: D \to \mathbb{R}^n$ припускає, що відображення f є неперервним у D. Скрізь нижче, якщо не зазначено інше, межу та замикання множини ми розуміємо в сенсі розширеного евклідового простору $\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. А саме для множини A в $\mathbb{R}^n$, або в $\overline{\mathbb{R}^n}$, позначимо ∂A *межу* множини A в $\overline{\mathbb{R}^n}$, через $\overline{A} := A \cup \partial A$ – замикання A, і через $\operatorname{Int} A$ – множину усіх *внутрішніх точок* в A, що також називається *внутрішністю* A.

Як зазвичай, покладемо

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < r\}\,, \qquad S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = r\}\,,$$

$$\mathbb{B}^n := B(0,1)\,, \quad \mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)\,, \quad \Omega_n = m(\mathbb{B}^n)\,, \quad \omega_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})\,,$$

де $\mathcal{H}^{n-1}$ позначає $(n-1)$-вимірну міру Хаусдорфа, див. [33]. Борелева функція $\rho: \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ називається *допустимою* для сім'ї Γ кривих γ у $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\int_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geqslant 1 \tag{1.1}$$

для всіх (локально спрямованих) кривих $\gamma \in \Gamma$. У цьому випадку ми пишемо: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем порядку* $p \geqslant 1$ сім'ї кривих Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\,dm(x)\,. \tag{1.2}$$

Властивості модуля M у певній мірі аналогічні властивостям міри Лебега m у $\mathbb{R}^n$, а саме, модуль порожньої сім'ї кривих дорівнює нулю, $M_p(\varnothing)=0$, крім того, модуль має властивість монотонності відносно сімей кривих Γ_1 і Γ_2:

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M_p(\Gamma_1) \leqslant M_p(\Gamma_2)\,, \tag{1.3}$$

а також властивість напівадитивності

$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}M_p(\Gamma_i)\,, \tag{1.4}$$

див. [99, теорема 6.2]. Кажуть, що сім'я кривих Γ_1 *мінорується* сім'єю Γ_2, пишемо $\Gamma_1>\Gamma_2$, якщо для кожної кривої $\gamma\in\Gamma_1$ існує підкрива, що належить до сім'ї Γ_2. Зауважимо, що

$$\Gamma_1>\Gamma_2\quad\Rightarrow\quad M_p(\Gamma_1)\leqslant M_p(\Gamma_2)\,, \tag{1.5}$$

див. [99, теорема 6.4]. Покладемо $M(\Gamma):=M_n(\Gamma)$.

$$l(f'(x))\ =\ \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|f'(x)h|}{|h|}\,,\quad \|f'(x)\|\ =\ \max\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|f'(x)h|}{|h|} \tag{1.6}$$

є *операторним мінімумом* і *операторним максимумом (нормою)* похідної $f'(x)$, $J(x,f)=\det f'(x)$ є *якобіаном відображення* f *у точці* x.

Добре відомо, що відображення з обмеженим спотворенням (квазірегулярні відображення) задовольняють в своїй області визначення співвідношення виду

$$M(\Gamma)\leqslant N(f,A)\cdot K\cdot M(f(\Gamma))\,, \tag{1.7}$$

де

$$N(y,f,A)\ =\ \mathrm{card}\,\{x\in A: f(x)=y\}\ ,\quad N(f,A)\ =\ \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n}N(y,f,A)\,, \tag{1.8}$$

A – довільна борелівська множина в D, а $K\geqslant 1$ – деяка стала, яка може бути обчислена як

$$K=\operatorname{ess\,sup}K_O(x,f)\,,$$

де $K_O(x,f)=\|f'(x)\|^n/J(x,f)$ при $J(x,f)\neq 0$; $K_O(x,f)=1$ при $f'(x)=0$, і $K_O(x,f)=\infty$ при $f'(x)\neq 0$, але $J(x,f)=0$ (див., напр., [56, теорема 3.2] або [66, теорема 6.7.II]). Дещо аналогічне виконується і для відображень, зовнішня дилатація яких може бути необмеженою. Наприклад, для так званих відображень зі скінченим спотворенням довжини встановленні оцінки виду

$$M(\Gamma)\leqslant\int\limits_{f(E)}K_I\left(y,f^{-1},E\right)\cdot\rho_*^n(y)\,dm(y)\,, \tag{1.9}$$

де E – довільна вимірна підмножина області D, Γ – довільна сім'я кривих в E і $\rho_*(y) \in \mathrm{adm}\, f(\Gamma)$ (див., напр., [58, теорема 8.5]). В даному підрозділі основним об'єктом вивчення є відображення, які задовольняють деяку більш загальну нерівність у порівнянні з (1.9).

Нехай $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ і

$$A = A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n : r_1 < |y - y_0| < r_2\}\,. \qquad (1.10)$$

Для заданих множин E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ і області $D \subset \mathbb{R}^n$ позначимо через $\Gamma(E, F, D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ таких, що $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ – задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} |y - y_0|$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ ми позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Нехай $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького* в точці $y_0 \in f(D)$, якщо співвідношення

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} Q(y) \cdot \eta^n(|y - y_0|)\, dm(y) \qquad (1.11)$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \qquad (1.12)$$

Зауважимо, що Є.О. Севостьяновим встановлена відкритість і дискретність відображень виду (1.11) за умов типу FMO на функцію Q, див., напр., [83]. У більш загальному випадку, наприклад, коли Q–інтегровна, виконання цих властивостей не гарантоване.

Окремим випадком нерівності (1.11) є ситуація, коли f є гомеоморфізмом у D. Позначимо в цьому випадку $g := f^{-1}$ і зауважимо, що

$$g(\Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(D))) = \Gamma_f(y_0, r_1, r_2)\,. \qquad (1.13)$$

Справді, якщо $\gamma \in g(\Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(D)))$, то $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, де $\gamma = g \circ \alpha$, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ і $\alpha(a) \in S(y_0, r_1)$, $\alpha(b) \in S(y_0, r_2)$ і $\alpha(t) \in f(D)$ при $a \leqslant$

$t \leqslant b$. Тоді $\gamma(t) \in D$ при $a \leqslant t \leqslant b$ і $f(\gamma) = \alpha \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(D))$, тобто, $\gamma \in \Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$. Отже, $g(\Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(D))) \subset \Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$. Обернене включення доводиться аналогічно.

Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$. Відображення f області D на D' називається *замкненим*, якщо $f(E)$ є замкненим в D' для будь-якої замкненої множини $E \subset D$ (див., напр., [100, розд. 3]). У подальшому, в розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ використовується *сферична (хордальна) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, де π – стереографічна проекція $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, а саме,

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}\,,$$

$$h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}\,, \quad x \neq \infty \neq y \tag{1.14}$$

(див., напр., [99, означення 12.1]). У подальшому, для множин $A, B \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ покладемо

$$h(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} h(x, y)\,, \quad h(A) = \sup_{x, y \in A} h(x, y)\,, \tag{1.15}$$

де h – хордальная відстань, визначена в (1.14).

Нагадаємо, що область $D \subset \mathbb{R}^n$ називається *локально зв'язною в точці* $x_0 \in \partial D$, якщо для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що $V \cap D$ є зв'язним. Область D локально зв'язна на ∂D, якщо D локально зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$. Межа області D називається *слабко плоскою* в точці $x_0 \in \partial D$, якщо для кожного $P > 0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ цієї ж точки такий, що $M(\Gamma(E, F, D)) > P$ для будь-яких континуумів $E, F \subset D$, які перетинають ∂U і ∂V. Межа області D називається слабко плоскою, якщо відповідна властивість виконується в будь-якій точці межі D.

Зауважимо про деякі відомі твердження щодо продовження гомеоморфізмів з умовою (1.11) на межу області, див., напр., [59, лема 5.20, наслідок 5.23], [69, лема 6.1, теорема 6.1] і [97, лема 5, теорема 3]. Тут треба врахувати, що обернені відображення до (1.11) є кільцевими Q-гомеоморфізмами, див. співвідношення (1.13). Наша найближча мета – отримати аналогічний результат для відображень, які допускають розгалуження. Виконується наступне твердження.

Теорема 1.1.1. *Нехай $D\subset {\Bbb R}^n,$ $n\geqslant 2,$ – область, яка має слабко плоску межу, а область $D^{\,\prime}\subset {\Bbb R}^n$ локально зв'язна на своїй межі. Припустимо, f – відкрите дискретне і замкнене відображення області D на $D^{\,\prime},$ що задовольняє співвідношення (1.11) в кожній точці $y_0\in D^{\,\prime},$ де $Q\in L^1(D^{\,\prime}).$ Тоді відображення f неперервно продовжується до відображення $\overline{f}:\overline{D}\rightarrow \overline{D^{\,\prime}},$ причому, $\overline{f}(\overline{D})=\overline{D^{\,\prime}}.$*

Доведення. Зафіксуємо довільним чином точку $x_0\in \partial D.$ Необхідно показати можливість неперервного продовження відображення f в точку $x_0.$ Використовуючи при необхідності мьобіусове перетворення $\varphi:\infty\mapsto 0$ і враховуючи інваріантість модуля M в лівій частині співвідношення (1.11) (див. [99, теорема 8.1]), ми можемо вважати, що $x_0\ne\infty.$

Припустимо, що висновок про неперервне продовження відображення f в точку x_0 не є правильним. Тоді знайдеться не менше двох послідовностей $x_i, y_i\in D,$ $i=1,2,\ldots,$ таких, що $x_i, y_i\rightarrow x_0$ при $i\rightarrow\infty,$ причому, $h(f(x_i), f(y_i))\geqslant a>0$ при деякому $a>0$ і усіх $i\in {\Bbb N},$ де h – хордальна метрика, див. (1.14). Через компактність простору $\overline{{\Bbb R}^n}$ ми можемо вважати, що послідовності $f(x_i)$ і $f(y_i)$ збігаються при $i\rightarrow\infty$ до z_1 і $z_2,$ відповідно, причому $z_1\ne\infty.$ Оскільки відображення f замкнене, то воно зберігає межу області, див. [100, теорема 3.3], тому $z_1, z_2\in \partial D^{\,\prime}.$ Оскільки область $D^{\,\prime}$ локально зв'язна на своїй межі, існують непересічні околи U_1 і U_2 точок z_1 і z_2 такі, що $W_1=D^{\,\prime}\cap U_1$ і $W_2=D^{\,\prime}\cap U_2$ є зв'язними. Можна вважати, що W_1 і W_2 лінійно зв'язні, оскільки U_1 і U_2 можна вибрати відкритими (див., напр., [58, пропозиція 13.2]; див. рисунок 1.1). Можна вважати, що

$$U_1\subset B(z_*, R_0),\qquad \overline{B(z_*, 2R_0)}\cap \overline{U_2}=\varnothing\,,\qquad R_0>0\,, \tag{1.16}$$

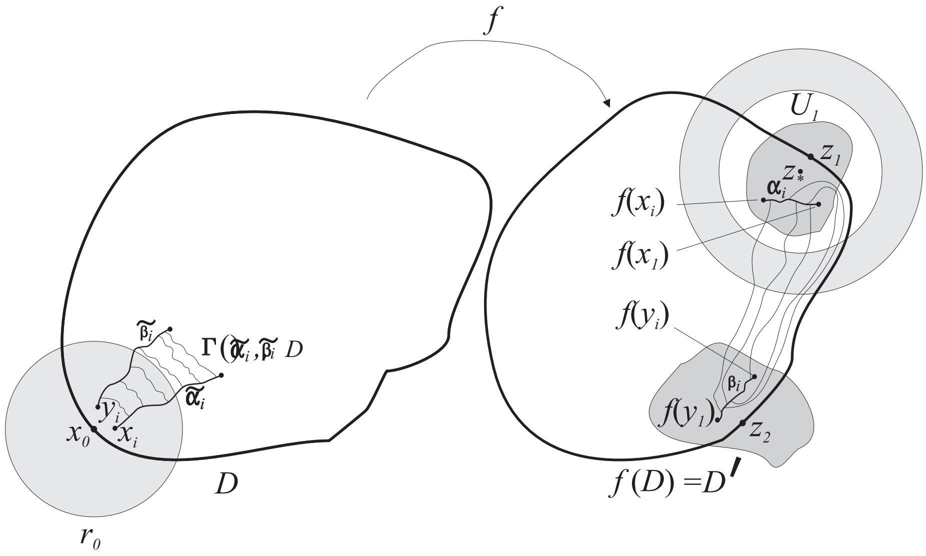

Рис. 1.1. До доведення теореми 1.1.1

де $z_* \in D'$ – деяка точка, достатньо близька до z_1. Ми також можемо вважати, що $f(x_i) \in W_1$ і $f(y_i) \in W_2$ при всіх $i = 1, 2, \ldots$. З'єднаємо точки $f(x_i)$ і $f(x_1)$ кривою $\alpha_i : [0, 1] \to D'$, а точки $f(y_i)$ і $f(y_1)$ – кривою $\beta_i : [0, 1] \to D'$ таким чином, що $|\alpha_i| \subset W_1$ і $|\beta_i| \subset W_2$ при $i = 1, 2, \ldots$. Нехай $\widetilde{\alpha}_i : [0, 1] \to D'$ і $\widetilde{\beta}_i : [0, 1] \to D'$ – повні підняття кривих α_i і β_i з початком в точках x_i і y_i, відповідно (ці підняття існують за [100, лема 3.7]). Зауважимо, що у точок $f(x_1)$ і $f(y_1)$ в області D може бути не більше скінченного числа прообразів при відображенні f, див. [100, лема 3.2]. Тоді знайдеться $r_0 > 0$ таке, що $\widetilde{\alpha}_i(1), \widetilde{\beta}_i(1) \in D \setminus B(x_0, r_0)$ при всіх $i = 1, 2, \ldots$. Оскільки межа області D є слабко плоскою, для кожного $P > 0$ знайдеться $i = i_P \geqslant 1$ таке, що

$$M(\Gamma(|\widetilde{\alpha}_i|, |\widetilde{\beta}_i|, D)) > P \qquad \forall\ i \geqslant i_P\,. \tag{1.17}$$

Покажемо, що умова (1.17) суперечить визначенню відображення f в (1.11). Справді, за співвідношенням (1.16) і з огляду на [49, теорема 1.I.5.46]

$$f(\Gamma(|\widetilde{\alpha}_i|, |\widetilde{\beta}_i|, D)) > \Gamma(S(z_*, R_0), S(z_*, 2R_0), A(z_*, R_0, 2R_0))\,. \tag{1.18}$$

З (1.18) випливає, що

$$\Gamma(|\widetilde{\alpha}_i|, |\widetilde{\beta}_i|, D) > \Gamma_f(z_*, R_0, 2R_0)\,. \tag{1.19}$$

Покладемо $\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{R_0}, & t \in [R_0, 2R_0], \\ 0, & t \notin [R_0, 2R_0] \end{cases}$. Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (1.12) при $r_1 = R_0$ і $r_2 = 2R_0$. Тоді з (1.19) і (1.11) ми отримаємо, що

$$M(\Gamma(|\widetilde{\alpha_i}|, |\widetilde{\beta_i}|, D)) \leqslant M(\Gamma_f(z_*, R_0, 2R_0)) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{R_0^n}\int\limits_{D'} Q(y)\,dm(y) := c < \infty\,, \qquad (1.20)$$

оскільки $Q \in L^1(D)$. Проте, співвідношення (1.20) суперечить умові (1.17). Отримана суперечність спростовує припущення про відсутність границі відображення f в точці x_0.

Залишилось перевірити рівність $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$. Очевидно, що $\overline{f}(\overline{D}) \subset \overline{D'}$. Покажемо, що $\overline{D'} \subset \overline{f}(\overline{D})$. Справді, нехай $y_0 \in \overline{D'}$, тоді або $y_0 \in D'$, або $y_0 \in \partial D'$. Якщо $y_0 \in D'$, то $y_0 = f(x_0)$ і $y_0 \in \overline{f}(\overline{D})$, оскільки за умовою f – відображення області D на D'. Нарешті, нехай $y_0 \in \partial D'$, тоді знайдеться послідовність $y_k \in D'$ така, що $y_k = f(x_k) \to y_0$ при $k \to \infty$ і $x_k \in D$. Через компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ ми можемо вважати, що $x_k \to x_0$, де $x_0 \in \overline{D}$. Зауважимо, що $x_0 \in \partial D$, оскільки відображення f є відкритим. Тоді $f(x_0) = y_0 \in \overline{f}(\partial D) \subset \overline{f}(\overline{D})$. Теорема повністю доведена. $\Box$

1.2. Виконання обернених модульних нерівностей у певних класах

Результати даного підрозділу опубліковані в [32]. Нагадаємо, що довільне K-квазіконформне відображення можна визначити за допомогою наступного співвідношення:

$$\frac{M(\Gamma)}{K} \leqslant M(f(\Gamma)) \leqslant K \cdot M(\Gamma)\,,$$

де $M(\Gamma)$ позначає конформний модуль сім'ї Γ і f припускається гомеоморфізмом (див. [99, означення 13.1]). Крім того, як вже було зазначено в (1.7), частина з означення K-квазірегулярних відображень містить нерівність

$$M(\Gamma) \leqslant N(f, D) K_O(f) M(f(\Gamma))\,,$$

де $1 \leqslant K_O(f) < \infty$ — деяке число, а $N(f, D)$ позначає функцію кратності (див. (1.8)), див. [56, теорема 3.2].

З цього приводу відзначимо роботу Є. Севостьянова [92], де була встановлена нерівність вигляду

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0,r_1,r_2))\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} N^{\alpha}(f,D)\cdot K_{O,p}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(y,f^{-1})(y)\cdot\eta^{\alpha}(|y-y_0|)\,dm(y)\,, \qquad (1.21)$$

у якій M_α позначає α-модуль сім'ї кривих, $\alpha>1$, $p=\frac{\alpha(n-1)}{\alpha-1}$,

$$K_{O,p}(y,f^{-1})=\sum\limits_{x\in f^{-1}(y)}K_{I,p}(x,f)\,,$$

$$K_{I,p}(x,f)\quad=\quad\begin{cases}\frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^p}, & J(x,f)\neq 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty, & \text{в інших випадках}\end{cases}\,, \qquad (1.22)$$

$$K_{O,p}(x,f)\quad=\quad\begin{cases}\frac{\|f'(x)\|^p}{|J(x,f)|}, & J(x,f)\neq 0,\\ 1, & f'(x)=0,\\ \infty, & \text{в інших випадках}\end{cases}\,,$$

Цей підрозділ присвячений значному посиленню цього результату, а саме за подібних умов ми встановимо подібні нерівності, але з іншою функцією Q_*, див. нижче. Крім того, ми доведемо цей результат без однієї досить складної умови, яку важко перевірити

$$\overline{f^{-1}(S(y_0,r_1))}\cap\overline{f^{-1}(S(y_0,r_2))}=\varnothing \qquad (1.23)$$

і яка використовувалася в [92]. Слід зазначити, що використані тут методи доведення приблизно такі ж, як і в [92], однак основні результати статті потребують значних зусиль і не можуть бути отримані з [92] по аналогії.

Звернемося до означень. Нехай X і Y — два простори з метриками μ і μ', відповідно. Ми кажемо, що відображення $f:X\to Y$ має N-*властивість Лузіна*, якщо з умови $\mu(E)=0$ випливає, що $\mu'(f(E))=0$. Аналогічно, ми будемо говорити, що відображення $f:X\to Y$ має N^{-1}-*властивість Лузіна,* якщо з умови $\mu'(E)=0$ випливає, що $\mu(f^{-1}(E))=0$.

Нехай A — множина, де f не має повного диференціала, і нехай $y\notin f(A)$. Якщо $N(f,D)<\infty$, тоді ми покладемо

$$Q(y):=K_{I,\alpha}(y,f^{-1})=\sum\limits_{x\in f^{-1}(y)}K_{O,\alpha}(x,f)\,. \tag{1.24}$$

Зауважимо, що $N(f,D)<\infty$ для відкритих, дискретних і замкнених відображень D, див. [60, лема 3.3]. Нехай $Q_*:{\Bbb R}^n\rightarrow [0,\infty]$ є вимірною за Лебегом функцією, а $M_{\alpha}(\Gamma)$ позначає α-модуль сім'ї Γ (див. наприклад, [99, розділ 6]). Ми будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького в точці* $y_0\in \overline{f(D)}\setminus\{\infty\}$ *відносно* α*-модуля*, якщо існує $r_0>0$ таке, що співвідношення

$$M_{\alpha}(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2))\leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} Q_*(y)\cdot \eta^{\alpha}(|y-y_0|)\, dm(y) \tag{1.25}$$

виконується для будь-яких $0<r_1<r_2< r_0$ і будь-якої вимірної за Лебегом функції $\eta,$ для котрої виконана умова (1.12). Справедливе наступне твердження, доведене в [32].

Теорема 1.2.1. *Нехай $n-1<\alpha\leqslant n,$ нехай $y_0\in \overline{f(D)}\setminus\{\infty\},$ $r_0=\sup\limits_{y\in f(D)}|y-y_0|>0,$ і нехай $f:D\rightarrow {\Bbb R}^n$ є відкритим, дискретним і замкненим відображенням, диференційовним майже скрізь, яке має N-властивість Лузіна відносно міри Лебега в ${\Bbb R}^n$. Припустимо, що $\overline{D}$ є компактною множиною в ${\Bbb R}^n$. Нехай*

$$m(f\left(\{x\in D: J(x, f)=0\}\right))=0\,. \tag{1.26}$$

Припустимо, що f має N^{-1}-властивість на $S(y_0, r)\cap f(D)$ для майже всіх $r\in (\varepsilon, r_0)$ відносно міри Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$ на $S(y_0, r)$. Якщо функція $Q,$ визначена в (1.24), належить до класу $L^1(f(D)),$ то відображення f задовольняє обернену нерівність Полецького відносно α-модуля з $Q_*(y):=N^{\alpha}(f, D)\cdot Q(y),$ тобто,

$$M_{\alpha}(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2))\leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} N^{\alpha}(f, D)K_{I,\alpha}(y,f^{-1})\cdot \eta^{\alpha}(|y-y_0|)\, dm(y)\,. \tag{1.27}$$

Наслідок 1.2.1. *Твердження теореми 1.2.1 виконується, якщо замість умови (1.26) вимагати більш сильну умову:* $J(x,f)\neq 0$ *майже скрізь.*

Зауваження 1.2.1. Зауважимо, що з нерівності (1.27) випливає співвідношення (1.21). Справді, покажемо, що в точках невиродженої диференційовності f виконується умова:

$$K_{O,\alpha}(x,f)\leqslant K_{I,p}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)\,,\quad \alpha=\frac{p}{p-n+1}\,,\quad p>n-1\,. \tag{1.28}$$

Щоб довести нерівність (1.28), скористаємося співвідношеннями:

$$|J(x,f)|=\lambda_1(x)\cdots\lambda_n(x),\qquad \|f'(x)\|=\lambda_n(x)\,, \tag{1.29}$$

$$l\,(f'(x))=\lambda_1(x)\,, \tag{1.30}$$

$$K_{O,\alpha}(x,f)=\frac{\lambda_n^{\alpha}(x)}{\lambda_1(x)\cdots\lambda_n(x)}\,,\qquad K_{I,p}(x,f)=\frac{\lambda_1(x)\cdots\lambda_n(x)}{\lambda_1^{p}(x)}\,, \tag{1.31}$$

де

$$\lambda_1(x),\ldots,\lambda_n(x),\quad \lambda_1(x)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(x)$$

є так званими головними розтягами див. ([67, лема 4.2.I]). Використовуючи співвідношення (1.29)–(1.31), нерівність (1.28) можна переписати в вигляді

$$\frac{\lambda_n^{\frac{p}{p-n+1}}(x)}{\lambda_1(x)\cdots\lambda_n(x)}\leqslant\left(\frac{\lambda_1(x)\cdots\lambda_n(x)}{\lambda_1^{p}(x)}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,,$$

або

$$\lambda_n(x)\leqslant\frac{\lambda_1(x)\cdots\lambda_n(x)}{\lambda_1^{n-1}(x)}$$

і

$$\lambda_n(x)\cdot\lambda_1^{n-1}(x)\leqslant\lambda_1(x)\cdots\lambda_n(x)\,.$$

Останнє очевидно, бо $\lambda_1(x)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(x)$. З нерівності (1.28) випливає, що

$$K_{I,\alpha}(y,f^{-1})=\sum_{x\in f^{-1}(y)}K_{O,\alpha}(x,f)\leqslant\sum_{x\in f^{-1}(y)}K_{I,p}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)\,. \tag{1.32}$$

Використовуючи нерівність $(1+t)^{\gamma}\geqslant 1+t^{\gamma}$, $t\geqslant 0$, $\gamma>0$, яку можна довести, наприклад, взяттям похідної, можна показати, що $x^{\gamma}+y^{\gamma}\leqslant(x+y)^{\gamma}$ для будь-яких $x,y>0$. Тоді, поклавши $\gamma:=\frac{n-1}{p-n+1}$, отримаємо, що

$$\sum_{x\in f^{-1}(y)}K_{I,p}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x,f)\leqslant$$

$$\left(\sum_{x\in f^{-1}(y)} K_{I,p}(x,f)\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}} = K_{O,p}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(y,f^{-1})\,. \tag{1.33}$$

З (1.32) та (1.33) отримуємо, що

$$K_{I,\alpha}(y,f^{-1}) \leqslant K_{O,p}^{\frac{n-1}{p-n+1}}(y,f^{-1})\,, \quad \alpha = \frac{p}{p-n+1}\,.$$

Отже, якщо справедливе відношення (1.27), то також виконується нерівність (1.21).

1.2.1. Нижня оцінка модуля сімей розділяючих множин

Далі нам знадобляться основні співвідношення між сім'ями кривих і розділяючими множинами, див. [103] і [104]. Нехай G — обмежена область у $\mathbb{R}^n$, а C_0, C_1 — непересічні компактні множини в $\overline{G}$. Покладемо $R = G\setminus(C_0\cup C_1)$ і $R^* = R\cup C_0\cup C_1$. Для числа $p>1$ визначаємо *p-ємність пари C_0, C_1 відносно замикання G* рівністю

$$C_p[G, C_0, C_1] = \inf \int\limits_R |\nabla u|^p\, dm(x),$$

де нижня межа береться по всім неперервним функціям u в R^*, $u\in ACL(R)$, таким, що $u=1$ на C_1 і $u=0$ на C_0. Ці функції називаються *допустимими* для $C_p[G,C_0,C_1]$. Будемо говорити, що множина $\sigma\subset\mathbb{R}^n$ *розділяє* C_0 і C_1 в R^*, якщо $\sigma\cap R$ замкнене в R і існують непересічні множини A і B, що є відкритими відносно $R^*\setminus\sigma$, такі що $R^*\setminus\sigma = A\cup B$, $C_0\subset A$ і $C_1\subset B$. Нехай Σ позначає клас усіх множин, які розділяють C_0 і C_1 в R^*. Для числа $p' = p/(p-1)$ покладемо

$$\widetilde{M_{p'}}(\Sigma) = \inf_{\rho\in\widetilde{\mathrm{adm}}\Sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^{p'} dm(x)\,, \tag{1.34}$$

де запис $\rho\in\widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma$ позначає, що ρ є невід'ємною борелевою функцією в $\mathbb{R}^n$ такою, що

$$\int\limits_{\sigma\cap R} \rho\, d\mathcal{H}^{n-1} \geqslant 1 \quad \forall\,\sigma\in\Sigma\,. \tag{1.35}$$

Зауважимо, що

$$\widetilde{M_{p'}}(\Sigma) = C_p[G, C_0, C_1]^{-1/(p-1)}\,, \tag{1.36}$$

див. [103, теорема 3.13] для $p = n$ і [104, p. 50] для $1 < p < \infty$. Крім того, за результатом Хессе

$$M_p(\Gamma(E, F, D)) = C_p[D, E, F]\,, \tag{1.37}$$

де $(E \cup F) \cap \partial D = \varnothing$ (див. [42, теорема 5.5]). Шлик довів, що умова $(E \cup F) \cap \partial D = \varnothing$ є зайвою, іншими словами, рівність (1.37) виконується для будь-яких непересічних непорожніх множин $E, F \subset \overline{D}$.

Нехай S — поверхня, тобто, $S : D_s \to \mathbb{R}^n$ є неперервним відображенням відкритої множини $D_s \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Покладаємо $N(y, S) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in D_s : S(x) = y\}$ і згадаємо, що ця функція називається *функцію кратності* поверхні S відносно точки $y \in \mathbb{R}^n$. Для заданої вимірної за Борелем множини $B \subset \mathbb{R}^n$ визначимо його $(n-1)$-мірну хаусдорфову площу, асоційовану з поверхнею S за формулою $\mathcal{A}_S(B) = \mathcal{A}_S^{n-1}(B) = \int\limits_B N(y, S)\, d\mathcal{H}^{n-1}y$, див. [33, розділ 3.2.1]. Для вимірної за Борелем функції $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ визначимо її інтеграл по поверхні S наступним шляхом: $\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(y, S)\, d\mathcal{H}^{n-1}y$. Всюду далі $J_k f(x)$ позначає *k-вимірний якобіан* відображення f у точці x (див. [33, § 3.2, розд. 3]).

Нехай $n \geqslant 2$, і Γ — сім'я поверхонь S. Борелева функція $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ називається *допустимою* для Γ, скорочено $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, якщо

$$\int\limits_S \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{1.38}$$

для будь-якого $S \in \Gamma$. Для заданого $p \in (1, \infty)$, *p-модуль* сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Покладемо також $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$. Будемо казати, що деяка властивість P виконується для *p-майже всіх поверхонь* області D, якщо ця властивість виконується для всіх поверхонь в D, за винятком, можливо, деякої підсім'ї, p -модуль якої дорівнює нулю. Якщо мова йде про конформний модуль $M(\Gamma) := M_n(\Gamma)$, то префікс «n» у виразі «n-майже всі», як правило, оминається. Ми говоримо, що вимірна за Лебегом функція $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ є *p-узагальнено допустимою* для сім'ї Γ поверхонь S в $\mathbb{R}^n$, скорочено $\rho \in \mathrm{ext}_p \,\mathrm{adm}\, \Gamma$, якщо співвідношення (1.38) виконується для p-майже всіх поверхонь S сім'ї Γ.

Нижче ми наводимо твердження про спотворення модуля сімей множин (поверхонь) в прообразі при відображенні, пов'язаного з внутрішньою дилатацією $K_{I,\alpha}(y, f^{-1})$ (див. (1.22)). Аналогічна версія для дилатації $K_{O,p}$ опублікована в [92, лема 2.1], див. також [80, теорема 4].

Лема 1.2.1. *Нехай $p > n-1$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ є відображенням, яке зберігає орієнтацію, є майже скрізь диференційовним і має N-властивість Лузіна відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$. Нехай $N(f, D) < \infty$ і нехай $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$, $r_0 = \sup\limits_{y \in f(D)} |y - y_0|$, $0 < \varepsilon_0 < r_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Припустимо, що виконується умова (1.26). Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, і позначимо Σ_ε сім'ю всіх множин вигляду*

$$\{f^{-1}(S(y_0, r)) \cap f(D)\}, \quad r \in (\varepsilon, r_0)\,. \tag{1.39}$$

Припустимо, крім того, що f має N^{-1}-властивість на $S(y_0, r) \cap f(D)$ для майже всіх $r \in (\varepsilon, r_0)$ відносно міри Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$ на $S(y_0, r)$. Тоді

$$\widetilde{M}_{\frac{p}{n-1}}(\Sigma_\varepsilon) \geqslant \frac{1}{N^{\frac{p}{n-1}}(f, D)} \inf_{\rho \in \mathrm{ext}_p \mathrm{adm}\, f(\Sigma_\varepsilon)} \int\limits_{f(D) \cap A(y_0, \varepsilon, r_0)} \frac{\rho^p(y)}{Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\, dm(y)\,, \tag{1.40}$$

де

$$Q(y) := K_{I,\alpha}(y, f^{-1}) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} K_{O,\alpha}(x, f)\,, \tag{1.41}$$

і $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.

Доведення. Без обмеження загальності, ми можемо припустити, що $r_0 > 0$. Будемо дотримуватися методології, викладеної при доведенні [58, теорема 8.6].

Позначимо через B борелівську множину всіх точок $x \in D$, де відображення f має повний диференціал $f'(x)$ і $J(x, f) \neq 0$. За теоремою Кірсбрауна і за єдиністю апроксимативного диференціалу (див., наприклад, [33, 2.10.43 і теорема 3.1.2]) випливає, що множина B є зчисленним об'єднанням борелівських множин B_k, $k=1,2,\ldots$, таких, що відображення $f_k=f|_{B_k}$ є біліпшицевими гомеоморфізмами (див. [33, лема 3.2.2, теореми 3.1.4 і 3.1.8]). Без обмеження загальності, можна вважати, що множини B_k є непересічними. Позначимо також через B_* множину всіх точок $x\in D$, де f має повний диференціал, але $J(x,f)=0$.

Оскільки множина $B_0:=D\setminus(B\cup B_*)$ має нульову міру Лебега, і відображення f має N-властивість Лузіна, то $m(f(B_0))=0$. З огляду на [58, теорема 9.3] $\mathcal{A}_{S_r}(f(B_0))=0$ для p-майже всіх сфер $S_r:=S(y_0,r)\cap f(D)$ з центром у точці y_0, де «майже всіх» слід розуміти в значенні p-модуля сімей поверхонь. Зауважимо, що функція $\psi(r):=\mathcal{H}^{n-1}(f(B_0)\cap S_r)$ є вимірною за Лебегом за теоремою Фубіні (див. [75, розділ 8.1, гл. III]). Отже, множина $E\subset\mathbb{R}$ усіх $r\in\mathbb{R}$ таких, що $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_0)\cap S_r)=0$ є вимірною за Лебегом. З огляду на [96, лема 6.8] $\mathcal{A}_{S_r}(f(B_0))=0$ для майже всіх сфер $S_r:=S(y_0,r)$ з центром у точці y_0, де «майже всіх» слід розуміти в сенсі одновимірної міри Лебега відносно параметра $r\in(\varepsilon,r_0)$. Тепер, за припущенням леми,

$$\mathcal{H}^{n-1}(f^{-1}(S_r)\cap B_0)=0 \tag{1.42}$$

для майже всіх $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$. Міркуючи аналогічно ми отримуємо, що

$$\mathcal{H}^{n-1}(f^{-1}(S_r)\cap B_*)=0 \tag{1.43}$$

для майже всіх $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$.

Нехай $\rho^{n-1}\in\widetilde{\operatorname{adm}}\,\Sigma_\varepsilon$. Покладемо

$$\tilde\rho(y) \;=\begin{cases}\sup\limits_{x\in f^{-1}(y)\cap D\setminus B_0}\rho_*(x)\,, & y\in f(D)\setminus f(B\cap B_*)\\ 0\,, & y\in f(B\cap B_*)\end{cases}\,, \tag{1.44}$$

де

$$\rho_*(x)=\begin{cases}\rho(x)\cdot\left(\frac{\|f'(x)\|}{J(x,f)}\right)^{1/(n-1)}, & x\in D\setminus B_0,\\ 0, & \text{інакше.}\end{cases} \tag{1.45}$$

Зауважимо, що $\tilde\rho=\sup\rho_k$, де

$$\rho_k(y)\;=\;\begin{cases}\rho_*(f_k^{-1}(y)), & y\in f(B_k),\\ 0, & \text{інакше}\end{cases} \tag{1.46}$$

і, крім того, кожне відображення $f_k = f|_{B_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, є ін'єктивним. Отже, функція $\tilde{\rho}$ є борелевою (див., наприклад, [75, теорема I (8.5)]).

Нехай $f^{-1}(S_r) := S_r^*$. Тоді

$$\int\limits_{S_r\cap f(D)} \widetilde{\rho}^{\,n-1}(y)\, d\mathcal{A}_* = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\rho}^{\,n-1}(y)\chi_{S_r\cap f(D)}(y)\ d\mathcal{H}^{n-1}y \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{N(f,D)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\rho}^{\,n-1}(y)\chi_{S_r\cap f(D)}(y) N(y,f,B_k\cap S_r^*)\, d\mathcal{H}^{n-1}y =$$

$$= \frac{1}{N(f,D)} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} {\rho_*}^{n-1}(f_k^{-1}(y)) N(y,f,B_k\cap S_r^*)\, d\mathcal{H}^{n-1}y = \tag{1.47}$$

$$= \frac{1}{N(f,D)} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{f(B_k\cap S_r^*)} {\rho_*}^{n-1}(f_k^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^{n-1}y\ ,.$$

Нехай $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x)$, $\lambda_1(x) \leqslant \lambda_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(x)$, $\|f'(x)\| = \lambda_n(x)$ є основними розтягами відображення f, див. [67, леми 4.1.I, 4.2.I]. З огляду на (1.29), $J(x,f) = \lambda_1(x)\cdots\lambda_n(x)$ і

$$J_{n-1}f(x) = \widetilde{\lambda}_1(x)\cdots\widetilde{\lambda}_n(x)\,, \tag{1.48}$$

де

$$\lambda_1(x) \leqslant \widetilde{\lambda}_1(x) \leqslant \lambda_2(x) \leqslant \widetilde{\lambda}_2(x) \leqslant \lambda_3(x) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \lambda_{n-1}(x) \leqslant \widetilde{\lambda}_{n-1}(x) \leqslant \lambda_n(x)\,. \tag{1.49}$$

Завдяки (1.29), (1.48) та (1.49) отримуємо, що

$$\left(\frac{\|f'(x)\|}{J(x,f)}\right)^{1/(n-1)} = \left(\frac{1}{\lambda_1(x)\ldots\lambda_{n-1}(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \left(\frac{1}{J_{n-1}f(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{1.50}$$

Тоді з огляду на (1.42), (1.43) та (1.50), за [33, наслідок 3.2.20] для $m = n-1$, отримуємо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{f(B_k\cap S_r^*)} {\rho_*}^{n-1}(f_k^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^{n-1}y = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k\cap S_r^*} {\rho_*}^{n-1}(x)\ J_{n-1}f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}x\ =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k\cap S_r^*} \frac{\rho^{n-1}(x)\|f'(x)\|}{J(x,f)}\, J_{n-1}f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}x\ \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k\cap S_r^*} \rho^{n-1}(x)\ d\mathcal{H}^{n-1}x = \int\limits_{f^{-1}(S_r)} \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}x \geqslant 1 \tag{1.51}$$

для майже будь-якого $S_r = f \circ S_r^* \in f(\Sigma_\varepsilon)$. З (1.47) і (1.51) випливає, що $N^{\frac{1}{n-1}}(f, D)\tilde{\rho} \in \rho \in \mathrm{ext}_p\mathrm{adm}\, f(\Sigma_\varepsilon)$ (див. [96, лема 6.8]).

Нагадаємо, що $Q(y) := K_{I,\alpha}(y, f^{-1}) = \sum\limits_{x\in f^{-1}(y)} K_{O,\alpha}(x, f)$. Оскільки

$$\tilde{\rho}^p(y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \rho_k^p(y) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^p(y)$$

і $m(f(B_*)) = m(f(B_0)) = 0$, тоді

$$\int\limits_{f(D)} \frac{\tilde{\rho}^p(y)}{Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\, dm(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{f(B_k)} \frac{\rho_k^p(y)}{Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\, dm(y) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{f(B_k)} \frac{\rho_k^p(y)}{K_{O,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(f_k^{-1}(y), f)}\, dm(y)\,. \tag{1.52}$$

Використовуючи формулу заміни змінних на кожному B_k, $k = 1, 2, \ldots$, див., наприклад, [33, теорема 3.2.5], ми отримуємо, що

$$\int\limits_{f(B_k)} \frac{\rho_k^p(y)}{K_{O,\alpha}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(f_k^{-1}(y), f)}\, dm(y) =$$

$$= \int\limits_{f(B_k)} \frac{\rho^p(f_k^{-1}(y)) J^{\frac{p-n+1}{n-1}}(f_k^{-1}(y), f)}{\|f'(f_k^{-1}(y))\|^{\frac{p}{p-n+1}\cdot\frac{p-n+1}{n-1}}} \cdot \frac{\|f'(f_k^{-1}(y))\|^{\frac{p}{n-1}}}{(J(f_k^{-1}(y), f))^{\frac{p}{n-1}}}\, dm(y) = \tag{1.53}$$

$$= \int\limits_{f(B_k)} \rho^p(f_k^{-1}(y)) J(y, f_k^{-1})\, dm(y) = \int\limits_{B_k} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Зі співвідношень (1.52) і (1.53) випливає, що

$$\int\limits_{f(D)} \frac{\widetilde{\rho}^p(y)}{Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\, dm(y) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} \rho^p(x)\, dm(x)\,. \tag{1.54}$$

Підсумовуючи (1.54) по всіх $k = 1, 2, \ldots$ і використовуючи зчисленну адитивність інтеграла Лебега (див., наприклад, [75, теорема I.12.3]), ми отримаємо, що

$$\int\limits_{f(D)} \frac{1}{Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)} \cdot \widetilde{\rho}^p(y)\, dm(y) \leqslant \int\limits_{D} \rho^p(x)\, dm(x)\,. \tag{1.55}$$

Переходячи у співвідношенні (1.55) до $\inf$ по усім функціям $\rho^{n-1} \in \widetilde{\mathrm{adm}}\,\Sigma_{\varepsilon}$, ми отримаємо, що

$$\int\limits_{f(D)} \frac{\widetilde{\rho}^p(y)}{Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\, dm(y) \leqslant \widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma_{\varepsilon})\,,$$

звідки

$$\int\limits_{f(D)} \frac{N^{\frac{p}{n-1}}(f,D)}{Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)} \cdot \widetilde{\rho}^p(y)\, dm(y) \leqslant N^{\frac{p}{n-1}}(f,D) \cdot \widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma_{\varepsilon})\,.$$

Покладемо $\widetilde{\rho}_1(y) := N^{\frac{1}{n-1}}(f,D)\cdot\widetilde{\rho}(y)$. З останнього співвідношення випливає, що

$$\int\limits_{f(D)} \frac{\widetilde{\rho}_1^p(y)}{Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\, dm(y) \leqslant N^{\frac{p}{n-1}}(f,D) \cdot \widetilde{M_{\frac{p}{n-1}}}(\Sigma_{\varepsilon})\,. \tag{1.56}$$

Оскільки за доведеним вище $\widetilde{\rho}_1(y) = N^{\frac{1}{n-1}}(f,D)\tilde{\rho} \in \mathrm{ext}_p\mathrm{adm}\, f(\Sigma_{\varepsilon})$, з (1.56) випливає, що виконується співвідношення (1.40). Лема доведена. □

Маємо наступний наслідок

Наслідок 1.2.2. *Нехай $f : D \to \mathbb{R}^n$ — відображення, яке зберігає орієнтацію, диференційовне майже скрізь і має N і N^{-1} властивості Лузіна відносно міри Лебега. Нехай $y_0 \in \overline{f(D)} \setminus \{\infty\}$, $r_0 = \sup\limits_{y\in f(D)} |y - y_0|$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, і позначимо через Σ_{ε} сім'ю всіх множин вигляду (1.39). Крім того, припустимо, що f має N^{-1}-Властивість Лузіна на $S(y_0, r) \cap f(D)$ для майже всіх $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ відносно $\mathcal{H}^{n-1}$ на $S(y_0, r)$. Тоді виконується співвідношення (1.40), де Q визначається співвідношенням (1.24).*

Доведення. Оскільки f має властивість N^{-1}-Лузіна, то за теоремою Пономарьова ми маємо, що $J(x, f) \neq 0$ майже скрізь (див., наприклад, доведення пункту (ii) на стор. 150 в [58]). Тоді ми можемо припустити, що $J(x, f) \neq 0$ на будь-якому B_k, $k = 1, 2, \ldots$. Отже, оскільки відображення f має N-властивість, то також виконується умова (1.26). Бажане твердження випливає з леми 1.2.1. □

1.2.2. Верхня обернена оцінка модуля типу Полецького

Нехай $Q_*: D\rightarrow [0, \infty]$ – вимірна функція за Лебегом. Позначимо через $q_{x_0}(r)$ середнє значення функції $Q_*(x)$ над сферою $|x-x_0|=r$,

$$q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q_*(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}\,, \tag{1.57}$$

де ω_{n-1} позначає площу одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$. Далі ми використовуємо наступні стандартні співвідношення: $a/\infty=0$ для $a\ne\infty$, $a/0=\infty$ для $a>0$ і $0\cdot\infty=0$ (див., наприклад, [75, § 3, розділ I]). Формулювання наступного результату у випадку $p=n$ можна знайти, наприклад, [58, лема 7.4]. У випадку довільного $p>1$, див., наприклад, [76, лема 2].

Пропозиція 1.2.1. *Нехай $p>1$, $n\geqslant 2$, $x_0\in {\mathbb R}^n$, $r_1,r_2\in {\mathbb R}$, $r_1,r_2>0$, і нехай $Q_*(x)$ є вимірною за Лебегом функцією, $Q_*:{\mathbb R}^n\rightarrow [0,\infty]$, $Q_*\in L_{\rm loc}^1({\mathbb R}^n)$. Ми покладаємо*

$$I=I(x_0,r_1,r_2)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\,,$$

і нехай $q_{x_0}(r)$ означено в (1.57). Тоді

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}\leqslant\int\limits_{A}Q_*(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{1.58}$$

для будь-якої вимірної за Лебегом функції $\eta:(r_1,r_2)\rightarrow [0,\infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,, \tag{1.59}$$

де $A=A(x_0,r_1,r_2)$ визначено в (1.10).

Доведення теореми 1.2.1. Зафіксуємо $y_0\in \overline{f(D)}\setminus\{\infty\}$, $0<r_1<r_2<r_0=\sup\limits_{y\in f(D)}|y-y_0|$, $C_1\subset \overline{B(y_0, r_1)}\cap f(D)$ і $C_2\subset f(D)\setminus B(y_0, r_2)$. Покладаємо

$$C_0:=f^{\,-1}(C_1)\,,\quad C_0^*:=f^{\,-1}(C_2)$$

(див. рисунок 1.2). Для заданого відображення $f:D\rightarrow {\mathbb R}^n$, точки $y_0\in$

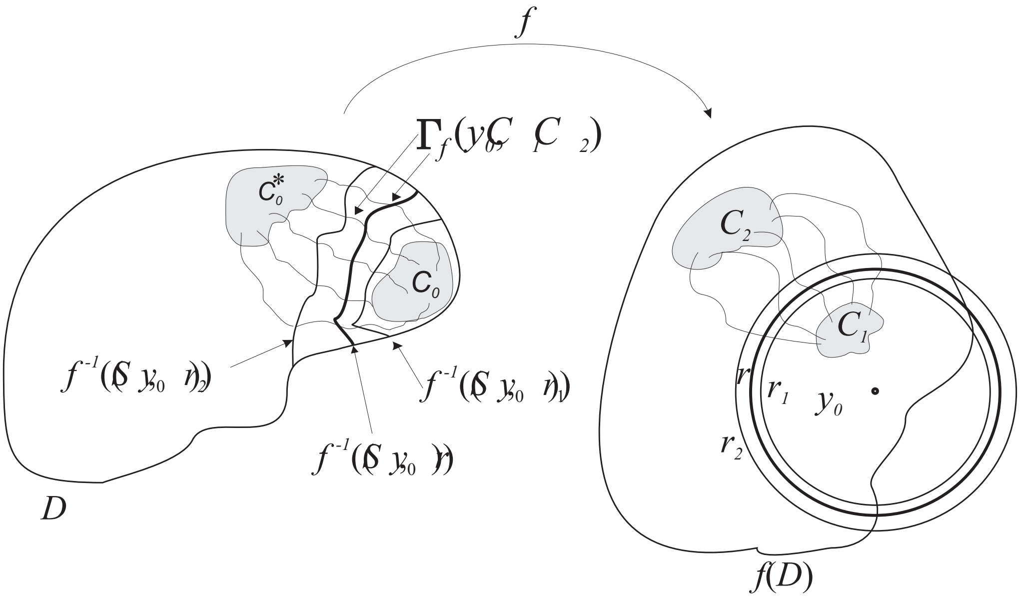

Рис. 1.2. До доведення теореми 1.2.1

$\overline{f(D)}\setminus\{\infty\}$, і $0<r_1<r_2<r_0=\sup\limits_{y\in f(D)}|y-y_0|$, позначаємо через $\Gamma_f(y_0,C_1,C_2)$ сім'ю всіх кривих γ в D таких, що

$$f(\gamma)\in\Gamma(C_1,C_2,A(y_0,r_1,r_2)).$$

Спочатку доведемо, що для будь-якої вимірної за Лебегом функції $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такої, що виконується співвідношення (1.12),

$$M_{\alpha}(\Gamma_f(y_0,C_1,C_2))\leqslant\int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)}Q_*(y)\cdot\eta^{\alpha}(|y-y_0|)\,dm(y) \qquad (1.60)$$

де $Q_*(y):=N^{\alpha}(f,D)\cdot K_{I,\alpha}(y,f^{-1})=N^{\alpha}(f,D)\cdot\sum\limits_{x\in f^{-1}(y)}K_{O,\alpha}(x,f)$.

Зауважимо, що C_0 і C_0^* є непересічними компактами в D, оскільки відображення f – замкнене, див. [100, теорема 3.3]. Крім того, C_0 і C_0^* є непорожніми за обранням r_0, r_1 і r_2.

Покажемо, що множина $\sigma_r:=f^{-1}(S(y_0,r))$ розділяє C_0 від C_0^* у D для будь-якого $r\in(r_1,r_2)$. Дійсно, σ_r замкнено в D як прообраз замкненої множини $S(y_0,r)$ при неперервному відображенні f (див., наприклад, [49, теорема 1.IV.13, гл. 1]). Зокрема, σ_r також замкнено відносно $R:=D\setminus(C_0\cup C_0^*)$. Покладемо:

$$A:=f^{-1}(B(y_0,r))$$

і

$$B := D \setminus \overline{f^{-1}(B(y_0, r))}\,.$$

Зауважимо, що A і B не порожні за обранням r_0, r_1, r_2 і r. Оскільки f неперервне, то $f^{-1}(B(y_0, r))$ і $D \setminus \overline{f^{-1}(B(y_0, r))}$ відкриті в D. Отже, A і B відкриті в

$$R^* := R \cup C_0 \cup C_0^* = D\,.$$

Зауважимо, що $A \cap B = \varnothing$, і $R^* \setminus \sigma_r = A \cup B$. Нехай Σ_{C_0, C_0^*} – сім'я усіх множин, що розділяють C_0 і C_0^* у R^*. У цьому випадку, за рівностями Цімера та Хессе, див. (1.36) і (1.37), відповідно, ми отримаємо, що

$$M_\alpha(\Gamma(C_0, C_0^*, D)) = (\widetilde{M}_{p/(n-1)}(\Sigma_{C_0, C_0^*}))^{1-\alpha}\,, \tag{1.61}$$

де $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Тоді за лемою 1.2.1 і співвідношенням (1.61) ми отримаємо, що

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0, C_1, C_2)) \leqslant \tag{1.62}$$

$$\leqslant \left(\inf_{\rho \in \mathrm{ext}_p \mathrm{adm}\, f(\Sigma_\varepsilon)} \int\limits_{f(D) \cap A(y_0, r_1, r_2)} \frac{\rho^p(y)}{N^{\frac{p}{n-1}}(f, D) \cdot Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\, dm(y) \right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\,,$$

де Q визначено (1.24). Використовуючи другу формулу у доведенні теореми 9.2 в [58] ми отримаємо, що

$$\inf_{\rho \in \mathrm{ext}_p\, \mathrm{adm}\, f(\Sigma_\varepsilon)} \int\limits_{f(D) \cap A(y_0, r_1, r_2)} \frac{\rho^p(y)}{N^{\frac{p}{n-1}}(f, D) \cdot Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\, dm(y) =$$

$$= \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\inf_{\alpha \in I(r)} \int\limits_{S(y_0, r) \cap f(D)} \frac{\alpha^q(y)}{N^{\frac{p}{n-1}}(f, D) \cdot Q^{\frac{p-n+1}{n-1}}(y)}\ \mathcal{H}^{n-1}(y) \right) dr\,, \tag{1.63}$$

де $q = \frac{p}{n-1}$, і $I(r)$ позначимо множину всіх вимірних функції на $S(y_0, r) \cap f(D)$ таких, що

$$\int\limits_{S(y_0, r) \cap f(D)} \alpha(x)\, \mathcal{H}^{n-1} = 1\,.$$

Тоді, покладаючи в [58, лема 9.2] $X = S(y_0, r) \cap f(D)$, $\mu = \mathcal{H}^{n-1}$ і $\varphi = \frac{1}{Q}|_{S(y_0, r) \cap f(D)}$, отримаємо, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\inf_{\alpha \in I(r)} \int\limits_{S(y_0, r) \cap f(D)} \frac{\alpha^q(y)}{Q(y)}\, d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_s(r)}\,, \tag{1.64}$$

де $\|Q\|_s(r) = \left(\int\limits_{S(y_0,r)\cap f(D)} Q^s(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}\right)^{1/s}$ і $s := \frac{n-1}{p-n+1}$. Звідси, за (1.62), (1.63) і (1.64) ми отримаємо, що

$$M_\alpha(\Gamma_f(y_0,C_1,C_2)) \leqslant N^\alpha(f,D)\cdot\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\|Q\|_1(r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} =$$

$$= \frac{N^\alpha(f,D)\cdot\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_{y_0}^{\,1/(\alpha-1)}(r)}\right)^{\frac{n-1}{p-n+1}}} = \frac{N^\alpha(f,D)\cdot\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{\alpha-1}}\widetilde{q}_{y_0}^{\,1/(\alpha-1)}(r)}\right)^{\alpha-1}}\,, \tag{1.65}$$

де $\widetilde{q}_{y_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(y_0,r)}\widetilde{Q}\,d\mathcal{H}^{n-1}$ и $\widetilde{Q}(y) = \begin{cases} Q(y)\,, & y\in f(D)\,,\\ 0\,, & y\notin f(D)\end{cases}$. Нарешті, з (1.65) і пропозиції 1.2.1 випливає, що співвідношення

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}(\Gamma_f(y_0,C_1,C_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} N^\alpha(f,D)\cdot Q(y)\cdot\eta^\alpha(|y-y_0|)\,dm(y)$$

виконується для функції $Q(y) = K_{I,\alpha}(y,f^{-1}) := \sum\limits_{x\in f^{-1}(y)} K_{O,\alpha}(x,f)$. Отже, співвідношення (1.60) доведено.

Візьмемо зростаючі послідовності компактів C_1^m і C_2^m, $m=1,2,\ldots$, які вичерпують $S(y_0,r_1)\cap f(D)$ і $S(y_0,r_2)\cap f(D)$, відповідно. За доведеним вище

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}(\Gamma_f(y_0,C_1^m,C_2^m)) \leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} N^\alpha(f,D)\cdot Q(y)\cdot\eta^\alpha(|y-y_0|)\,dm(y)\,.$$

Переходячи тут до границі $m\to\infty$ і використовуючи теорему про монотонність модуля (див. [58, теорема A.7]), ми отримуємо, що

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}(\Gamma_f(y_0,r_1,r_2)) \leqslant \int\limits_{A(y_0,r_1,r_2)\cap f(D)} N^\alpha(f,D)\cdot Q(y)\cdot\eta^\alpha(|y-y_0|)\,dm(y)\,,$$

що і треба було довести. $\Box$

Наслідок 1.2.1 одразу випливає з теореми 1.2.1 та допоміжних міркувань, використаних під час доведення наслідку 1.2.2. $\Box$

Зауваження 1.2.2. Звернемо увагу, що локальна і межова поведінка відображень, які задовольняють умову (1.25), досить докладно вивчена в [8], що дає змогу перенести ці результати на відображення, що приймають участь у теоремі 1.2.1. Зазначимо також, що відображення, які задовольняють обернену нерівністю Полецького є частиною означення квазіконформності у випадку обмеженої функції Q (див. [99, гл. 13.1]). В «необмеженому» випадку такі оцінки були отримані різними авторами за різних умов на Q (див., наприклад, [21, лема 3.1], [58, теорема 8.5], [79, теорема 1.3]). Зокрема, твердження, наведене нижче, випливає безпосередньо з теореми 1.2.1 і [89, теорема 4.1].

Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, числа $N \in \mathbb{N}$ і вимірної за Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $Q(y) \equiv 0$ для $y \in \mathbb{R}^n \setminus D'$, позначаємо через $\mathfrak{R}_{Q,N}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень $f : D \to D'$, які диференційовні майже скрізь, мають N-властивість Лузіна відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$, задовольняють співвідношення (1.26) і мають N^{-1}-властивість на $S(y_0, r) \cap D'$ для майже всіх $r \in (\varepsilon, r_0)$ відносно міри Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$ на $S(y_0, r)$ для будь-якого $y_0 \in D'$ і $r_0 = \sup\limits_{y \in D'} |y - y_0|$ таких, що

1) $N(f, D) \leqslant N$,

2) $K_{I,n}(y, f^{-1}) = \sum\limits_{x \in f^{-1}(y)} K_{O,n}(, f) \leqslant Q(y)$ для будь-якого $y \in D'$.

Якщо $Q \in L^1(D')$, D' *є обмеженою, а* K *є компактною множиною в* D, *то нерівність*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{C}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{r_*}{2|x-y|}\right)} \tag{1.66}$$

виконується для будь-яких $x, y \in K$ *і всіх* $f \in \mathfrak{R}, \mathfrak{N}_Q(D, D')$, *де* $C = C(n, N, K, \|Q\|_1, D, D') > 0$ *– деяка константа, що залежить лише від* n, N, K, *крім того,* $\|Q\|_1$, $\|Q\|_1$ *позначає* L^1*-норму* Q *у* D', *і* $r_* = d(K, \partial D)$.

1.3. Про логарифмічну неперервність за Гельдером відображень, що діють на обмежену опуклу область

Результати даного підрозділі опубліковані в [4] і [22]. Нещодавно у [94] була отримана логарифмічна неперервність за Гельдером для відображень з оберненою нерівністю Полецького в точках одиничної сфери. В даному підрозділі ми розглянемо ситуацію аналогічних відображень різних областей. В прообразі при відображенні ми розглянемо області квазіекстремальної довжини, а в образі – опуклі області. Зауважимо, що області квазіекстремальної довжини (скорочено – QED-області) впроваджені Герінгом і Мартіо [34] та є структурами, в котрих модуль сімей кривих метрично пов'язаний з діаметром множин. Також у формулюванні основного результату задіяні опуклі області, причому ми будемо розглядати відображення, що сюр'єктивно діють на них.

Нехай $Q:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького*, якщо співвідношення

$$M(\Gamma)\leqslant\int\limits_{f(D)}Q(y)\cdot\rho_*^n(y)\,dm(y) \tag{1.67}$$

виконується для будь-якої сім'ї (локально спрямлюваних) кривих Γ в D і для будь-якої $\rho_*\in\operatorname{adm}f(\Gamma)$.

Зауваження 1.3.1. Слід зауважити, що оцінка (1.67) дещо відрізняється від (1.11). Можна показати, що (1.67) тягне за собою (1.11). Дійсно, нехай $A=A(y_0,r_1,r_2)$– кільце з центром в точці y_0 і радіусів $0<r_1<r_2<\infty$. Нехай f задовольняє (1.67). Покажемо, що воно також задовольняє (1.11) для довільної η з умовою (1.12). Справді, покладемо $\rho_*=\eta(|y-y_0|)$ при $y\in A\cap f(D)$ і ρ_* в інших точках. В силу теореми Лузіна (див. [33], секція 2.3.6) можна вважати, що ρ_* – борелева. Тоді в силу теореми 5.7 в [99] для кожної спрямлюванної кривої $\delta_*\in\Gamma(S(y_0,r_1),S(y_0,r_2),A)$ виконується умова

$$\int\limits_{\delta_*}\rho_*(y)\,dy\geqslant\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1\,.$$

Тоді з (1.11) маємо:

$$M_f(y_0,r_1,r_2)\leqslant\int\limits_{A\cap f(D)}Q(y)\rho_*^n dm(y)=\int\limits_{A\cap f(D)}Q(y)\eta^n(|y-y_0|)dm(y),$$

що і треба було довести.

Область D в $\mathbb{R}^n$ називається *областю квазіекстремальної довжини* (скор. QED*-областю*), якщо знайдеться таке число $A_0 \geqslant 1$, що для будь-яких континуумів $E, F \subset D$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E,F,\mathbb{R}^n)) \leqslant A_0 \cdot M(\Gamma(E,F,D))\,. \tag{1.68}$$

Зауважимо, що одинична куля, півпростір або півкуля є областями квазіекстремальної довжини, див. [101, лема 4.3].

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, невиродженого континуума $A \subset D'$ і вимірної за Лебегом функції $Q : D' \to [0,\infty]$ позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на область D', що задовольняють умову (1.67) і таких, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta$. Справедливо наступне твердження.

Теорема 1.3.1. *Нехай $Q \in L^1(D')$, D є областю квазіекстремальної довжини, а D' є обмеженою опуклою областю. Тоді будь-яке відображення $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ продовжується до відображення $f : \overline{D} \to \overline{D'}$, при цьому, для кожної точки $x_0 \in \partial D$, $x_0 \neq \infty$, знайдуться окіл U цієї точки і стала $C = C(n,A,D,D') > 0$ така, що*

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| \leqslant \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta}{|x-y|}\right)} \tag{1.69}$$

для всіх $x, y \in U \cap \overline{D}$, де $\|Q\|_1$ – норма функції Q в $L^1(D')$.

1.3.1. Леми про відстань до межі та з'єднання точок відрізками

Перед доведенням теореми 1.3.1 доведемо наступну важливу лему, яка у випадку одиничної кулі доведена в [94, лема 2.1].

Лема 1.3.1. *Нехай E – довільний континуум, що належить області D', $Q \in L^1(D')$. Тоді існує $\delta_1 > 0$ таке, що $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q} \subset \mathfrak{S}_{\delta_1,E,Q}$. Іншими словами, якщо f – відкрите дискретне і замкнене відображення області D на D' з умовою (1.67), таке, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta$, то існує $\delta_1 > 0$, що не залежить від f таке, що $h(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$.*

Доведення. Будемо використовувати схему доведення [94, лема 2.1]. Доведемо лему 1.3.1 від супротивного. Припустимо, що її заключення не є вірним. Тоді знайдуться послідовності $y_m \in E$, $f_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ і $x_m \in D$ такі, що $f_m(x_m) = y_m$ і $h(x_m, \partial D) \to 0$ при $m \to \infty$. Без обмеження загальності можна вважати, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$, де x_0 може набувати значення ∞ у випадку, якщо область D необмежена. Зауважимо, що з теореми 1.1.1 з урахуванням зауваження 1.3.1, випливає можливість неперервного продовження відображення f_m в точку x_0, більше того, сім'я $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в точці x_0 (див., напр., [8, теорема 1.2]). Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $m_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) < \varepsilon$ при $m \geqslant m_0$. З іншого боку, оскільки f_m – замкнене, $f_m(x_0) \in \partial D'$. З огляду на компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ та замкненість $\partial D'$, можна вважати, що $f_m(x_0)$ збігається до деякого числа $B \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Отже, за нерівністю трикутника,

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geqslant h(f_m(x_m), B) - h(B, f_m(x_0)) \geqslant \frac{1}{2} \cdot h(E, \partial D')$$

для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$.

Остаточно, маємо суперечність: $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geqslant \delta_0$, $\delta_0 := \frac{1}{2} \cdot h(E, \partial D')$ і одночасно $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) < \varepsilon$ при $m \geqslant m_0$. Отримана суперечність спростовує вихідне припущення. Лема доведена. □

Наступна лема була доведена в випадку, коли область D' є одиничною кулею (див. хід доведення теореми 1.1 в [94]). Для довільної обмеженої опуклої області доведення здійснено автором в [22, лема 1].

Лема 1.3.2. *Нехай D' – обмежена опукла область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і нехай $B(y_*, \delta_*/2)$ – куля з центром в точці $y_* \in D'$, де $\delta_* := d(y_*, \partial D')$. Нехай $z_0 \in \partial D'$. Тоді для будь-яких точок $A, B \in B(z_0, \delta_*/8) \cap D'$ знайдуться точки $C, D \in \overline{B(y_*, \delta_*/2)}$, для яких відрізки $[A, C]$ і $[B, D]$ є такими, що*

$$\operatorname{dist}\left([A, C], [B, D]\right) \geqslant C_0 \cdot |A - C|\,, \tag{1.70}$$

де $C_0 > 0$ – деяка стала, яка залежить тільки від δ_* і $d(D')$.

Доведення. Покладемо

$$\varepsilon_0 := |A - B| < \delta_*/4\,.$$

З'єднаємо точки A і y_* відрізком I. З огляду на опуклість D' відрізок I повністю належить D'. Точки A, y_* і B формують площину P (якщо A, y_*, і B належать одній прямій, то P – будь-яка площина, що містить A і B). Розглянемо на цій площині коло

$$S = \{z \in P : |z - A| = \varepsilon_0\}\,.$$

Положення точки $z = B$ на колі S цілком визначається кутом φ, $\varphi \in [-\pi, \pi)$, між вектором $y_* - A$ та радіус-вектором $B - A$ точки z. Точки на колі позначаємо далі у полярних координатах за допомогою пар $z = (\varepsilon_0, \varphi)$. Наша подальша мета – дослідити основні три випадки щодо інтервалів зміни цього кута.

Випадок 1. «Великі кути»: $\varphi \in [\pi/4, 3\pi/4]$, або $\varphi \in [-\pi/4, -3\pi/4]$, див. рисунок 1.3 для ілюстрації. Покладемо $C := y_*$. Обмежимося розгля-

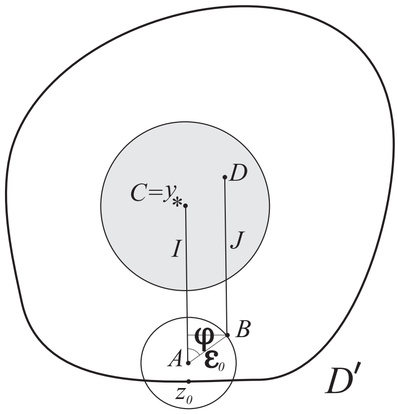

Рис. 1.3. До доведення леми 1.3.2, випадок **1**

данням випадку $\varphi \in [\pi/4, 3\pi/4]$ (випадок $\varphi \in [-\pi/4, -3\pi/4]$ розглядається аналогічно). Розглянемо промінь

$$r = r(t) = B + te\,, \quad e = (y_* - A)/|y_* - A|\,, \quad t > 0.$$

За побудовою, промінь r є паралельним до відрізку I. При $t = |y_* - A|$ маємо $r(|y_* - A|) = B + y_* - A$ і $|r(|y_* - A|) - y_*| = |B - A| = \varepsilon_0 < \delta_*/4$, тобто, точка $r(|y_* - A|)$ належить E. Нехай J – відрізок променя r, що міститься між точками B і $D := r(|y_* - A|)$ (він цілком належить області D' з огляду на її опуклість). Відстань між I і J обчислюється наступним шляхом:

$$\operatorname{dist}(I, J) = \varepsilon_0 \sin\varphi \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_0 \,. \tag{1.71}$$

Розгляд першого випадку завершено, оскільки в якості відрізків $[A, C]$ і $[B, D]$ ми беремо I і J, а у нерівності (1.70) $C_0 := \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Випадок 2. «Малі кути:» $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4)$. Розглянемо випадок $\varphi \in [0, \pi/4)$ (випадок $\varphi \in [-\pi/4, 0)$ розглядається аналогічно). Проведемо через точку y_* пряму, яка належить площині P та ортогональна вектору $y_* - A$, див. рисунок 1.4. Ця пряма має рівно дві точки перетину з межею

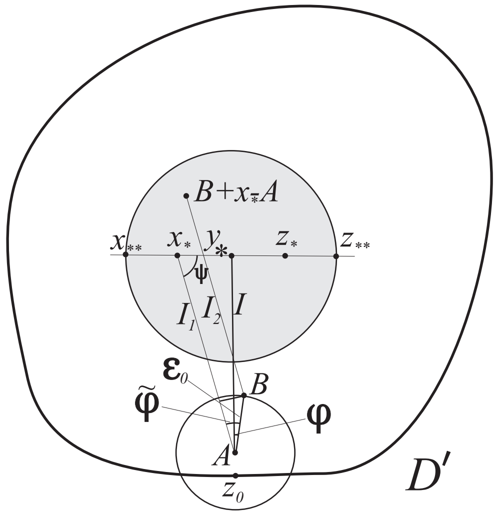

Рис. 1.4. До доведення леми 1.3.2, випадок **2**

круга $\overline{B(y_*, \delta_*/2)} \cap P$: ці точки позначимо через x_{**} і z_{**}. Нехай x_{**} – точка, така що кут між векторами $y_* - A$ і $x_{**} - A$ є від'ємним. Покладемо

$$x_* = \frac{x_{**} + y_*}{2} \,, \qquad z_* = \frac{z_{**} + y_*}{2} \,.$$

Крім того, нехай ψ позначає кут $\angle A x_* y_*$. Тоді

$$\tan\psi = \frac{|A - y_*|}{\frac{\delta_*}{4}} < \frac{4d(D')}{\delta_*} \,. \tag{1.72}$$

Крім того,

$$\tan\psi = \frac{|A - y_*|}{\frac{\delta_*}{4}} \geqslant \frac{\frac{\delta_*}{2}}{\frac{\delta_*}{4}} = 2 \,,$$

звідси

$$\psi \geqslant \arctan 2 > \frac{\pi}{4} \,, \qquad \frac{\pi}{2} - \psi \leqslant \frac{\pi}{2} - \arctan 2 < \frac{\pi}{4} \,. \tag{1.73}$$

Відповідно, тоді кут $\angle y_*Ax_*$ дорівнює $\frac{\pi}{2}-\psi$. Нехай

$$\widetilde{\varphi}:=\varphi+\frac{\pi}{2}-\psi\,,$$

де ψ зазначено вище. З огляду на (1.73), оскільки $\varphi\in[0,\pi/4)\,,$

$$0<\widetilde{\varphi}\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\arctan 2=\frac{3\pi}{4}-\arctan 2<\frac{\pi}{2}\,. \tag{1.74}$$

Розглянемо промінь $r(t)=B+t\frac{x_*-A}{|x_*-A|}$, $t>0$. При $t=|x_*-A|$ маємо:

$$r(|x_*-A|)=B+x_*-A\,.$$

Зауважимо, що $r(|x_*-A|)\in\overline{B\left(y_*,\frac{\delta_*}{2}\right)}$. Дійсно, за нерівністю трикутника

$$|r(|x_*-A|)-y_*|=$$

$$=\left|B+x_*-A-y_*\right|\leqslant|x_*-y_*|+|B-A|\leqslant\frac{\delta_*}{4}+\frac{\delta_*}{4}=\frac{\delta_*}{2}\,. \tag{1.75}$$

Нехай тепер I_1 – відрізок, що з'єднує точки A і $C:=x_*$, а I_2 – відрізок, що з'єднує точки B і $D:=r(|x_*-A|)=B+x_*-A$. За побудовою та враховуючи (1.75),

$$I_1\cap\overline{B\left(y_*,\frac{\delta_*}{2}\right)}\neq\varnothing\neq I_2\cap\overline{B\left(y_*,\frac{\delta_*}{2}\right)}\,. \tag{1.76}$$

Зауважимо, що

$$\operatorname{dist}(I_1,I_2)=\varepsilon_0\sin\widetilde{\varphi}\,. \tag{1.77}$$

З огляду на формули (1.72) і (1.74), будемо мати:

$$\tan\widetilde{\varphi}=\tan\left(\varphi+\frac{\pi}{2}-\psi\right)\geqslant$$

$$\geqslant\tan\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\cot\psi\geqslant\frac{\delta_*}{4d(D')}\,. \tag{1.78}$$

З огляду на (1.78) та з урахуванням (1.74), ми отримаємо, що

$$\sin\widetilde{\varphi}=\tan\widetilde{\varphi}\cdot\cos\widetilde{\varphi}\geqslant\frac{\delta_*}{4d(D')}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\arctan 2\right)>0\,. \tag{1.79}$$

Тоді з (1.77) і з (1.79) випливає, що

$$\operatorname{dist}(I_1,I_2)\geqslant\varepsilon_0\cdot\frac{\delta_*}{4d(D')}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\arctan 2\right)>0\,. \tag{1.80}$$

Як ми вже зауважили, випадок $\varphi \in [-\pi/4, 0)$ розглядається аналогічно, а саме, конструкція доведення така ж сама «з точністю до симетрії» відносно відрізку, що з'єднує точки A і y_*. Зокрема, роль точки x_* гратиме точка z_*; роль відрізку, що з'єднує точки A та x_* – відрізок, що з'єднує точки A та z_* і т.п.

Нерівність (1.80) завершує розгляд випадку **2**, з урахуванням того, що ми можемо покласти $[A, C] := I_1$ і $[B, D] := I_2$, крім того, у нерівності (1.70) $C_0 := \frac{\delta_*}{4d(D')} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \arctan 2\right)$.

Випадок 3. «Дуже великі кути:» ситуація, коли або $\varphi \in (3\pi/4, \pi]$, або $\varphi \in (-\pi, -3\pi/4)$. Цей випадок є дуже схожим на випадок **2** за своїм підходом. Достатньо розглянути ситуацію $\varphi \in (3\pi/4, \pi]$, оскільки друга ситуація $\varphi \in (-\pi, -3\pi/4)$ розглядається аналогічно і відрізняється від першої лише певною «симетрією» відносно прямої, що проходить через точки A і y_*. Нехай точки z_* і z_{**} у точності такі, як визначено у випадку **2**. Розглянемо відрізок J_1, що поєднує точки A і $C := z_*$ (він повністю належить області D' з огляду на опуклість області D'). Розглянемо промінь

$$l(t) = B + t \cdot \frac{z_* - A}{|z_* - A|}, \qquad t > 0\,. \tag{1.81}$$

При $t = |z_* - A|$ виходить точка $D := l(|z_* - A|) = B + z_* - A$, див. рисунок 1.5.

Доведемо, що ця точка належить кулі $\overline{B\left(y_*, \frac{\delta_*}{2}\right)}$. Дійсно, за нерівністю трикутника

$$|r(|z_* - A|) - y_*| =$$
$$= \left|B + z_* - A - y_*\right| \leqslant |z_* - y_*| + |B - A| \leqslant \frac{\delta_*}{4} + \frac{\delta_*}{4} = \frac{\delta_*}{2}\,. \tag{1.82}$$

Нехай J_2 – відрізок, що з'єднує точки B і D. За побудовою та враховуючи (1.82),

$$J_1 \cap \overline{B\left(y_*, \frac{\delta_*}{2}\right)} \neq \varnothing \neq J_2 \cap \overline{B\left(y_*, \frac{\delta_*}{2}\right)}\,. \tag{1.83}$$

Зауважимо, що

$$\operatorname{dist}(J_1, J_2) = \varepsilon_0 \cos\alpha\,, \tag{1.84}$$

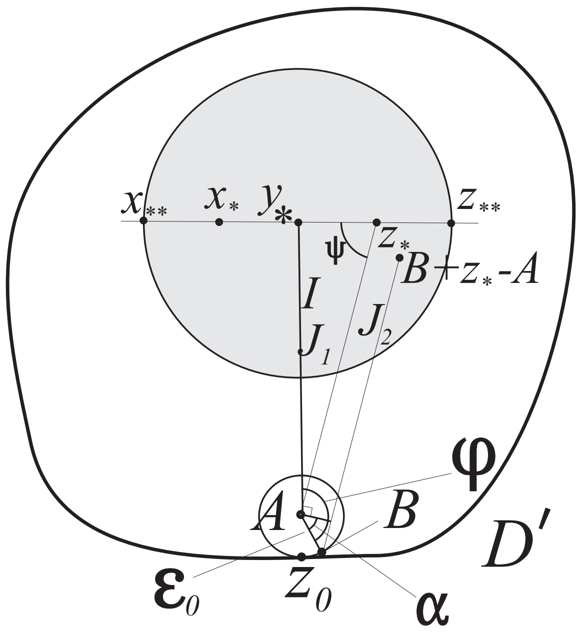

Рис. 1.5. До доведення леми 1.3.2, випадок **3**

де $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \varphi + \psi - \pi.$

і $\psi = \angle y_* z_* A$. Тепер нам треба знайти оцінку знизу для $\cos\alpha$.

З трикутника $\triangle\, y_* z_* A$ знаходимо:

$$1 \leqslant \tan\psi = \frac{|A - y_*|}{|y_* - z_*|} \leqslant \frac{d(D')}{\frac{\delta_*}{4}} = \frac{4d(D')}{\delta_*}\,,$$

звідси $\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{4d(D')}{\delta_*} < \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$0 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \pi \leqslant \alpha := \varphi + \psi - \pi \leqslant \pi + \arctan\frac{4d(D')}{\delta_*} - \pi = \tag{1.85}$$

$$= \arctan\frac{4d(D')}{\delta_*} < \frac{\pi}{2}\,.$$

З огляду на (1.84) і (1.85) ми отримаємо, що

$$\mathrm{dist}\,(J_1, J_2) \geq \varepsilon_0 \cos\arctan\frac{4d(D')}{\delta_*}. \tag{1.86}$$

Власне кажучи, нерівність (1.86) завершує розгляд випадку **3**, оскільки ми можемо покласти $[A, C] := J_1$ і $[B, D] := J_2$, крім того, у нерівності (1.70) покладемо $C_0 := \cos\arctan\frac{4d(D')}{\delta_*}$.

Остаточно, для всіх випадків **1**, **2** і **3** у нерівності (1.70) можна покласти

$$C_0 = \min\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\delta_*}{4d(D')}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \arctan 2\right), \cos\arctan\frac{4d(D')}{\delta_*}\right\}\,.$$

□

1.3.2. Логарифмічна неперервність за Гельдером

Можливість неперервного продовження відображення f на межу області D випливає з теореми 1.1.1 з урахуванням зауваження 1.3.1. Зокрема, слабка плоскість ∂D є наслідком того, що D є QED-областю (див., напр., [91, лема 2]), а те, що опукла область є локально зв'язною на своїй межі, є очевидним наслідком того, що її перетин з кулею з центром у межовій точці також є опуклою множиною.

Доведемо логарифмічну неперервність за Гельдером (1.69). Зафіксуємо точку $x_0 \in \partial D$, і нехай $y_* \in D'$ – довільна точка області D'. Покладемо $\delta_* := d(y_*, \partial D')$. Нехай $E = \overline{B(y_*, \delta_*/2)} \subset D'$. За лемою 1.3.1 існує таке $\delta_1 > 0$ таке, що $h(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$ для всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. Крім того, оскільки за теоремою 1.2 в [8] сім'я відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$, для числа $\delta_*/8$ знайдеться окіл $U \subset B(x_0, \delta_1/2)$ точки x_0, такий що $|f(x) - f(x_0)| < \delta_*/8$ для всіх $x \in U \cap D$ і всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. Нехай $x, y \in B(x_0, \delta_1/2)$

$$\varepsilon_0 := |f(x) - f(y)| < \delta_*/4\,.$$

Застосуємо для точок $A = f(x)$, $B = f(y)$ і $z_0 = f(x_0)$ лему 1.3.2. Згідно цієї леми, знайдуться відрізки $I \supset A$ і $J \supset B$ в області D' такі, що $I \cap E \neq \varnothing \neq J \cap E$, причому

$$\mathrm{dist}\,(I, J) \geqslant C_0 \cdot |f(x) - f(y)|\,, \tag{1.87}$$

де стала C_0 залежить лише від континууму E і області D'.

Нехай α_1, β_1 – повні f-підняття кривих I і J з початками в точках x і y, відповідно (вони існують за [100, лема 3.7], див. рисунок 1.6). Тоді за означенням $|\alpha_1| \cap f^{-1}(E) \neq \varnothing \neq |\beta_1| \cap f^{-1}(E)$. Оскільки $h(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$ і $x, y \in B(x_0, \delta_1/2)$, то

$$d(\alpha_1) \geqslant \delta_1/2\,, \quad d(\beta_1) \geqslant \delta_1/2\,. \tag{1.88}$$

Нехай

$$\Gamma := \Gamma(\alpha_1, \beta_1, D)\,.$$

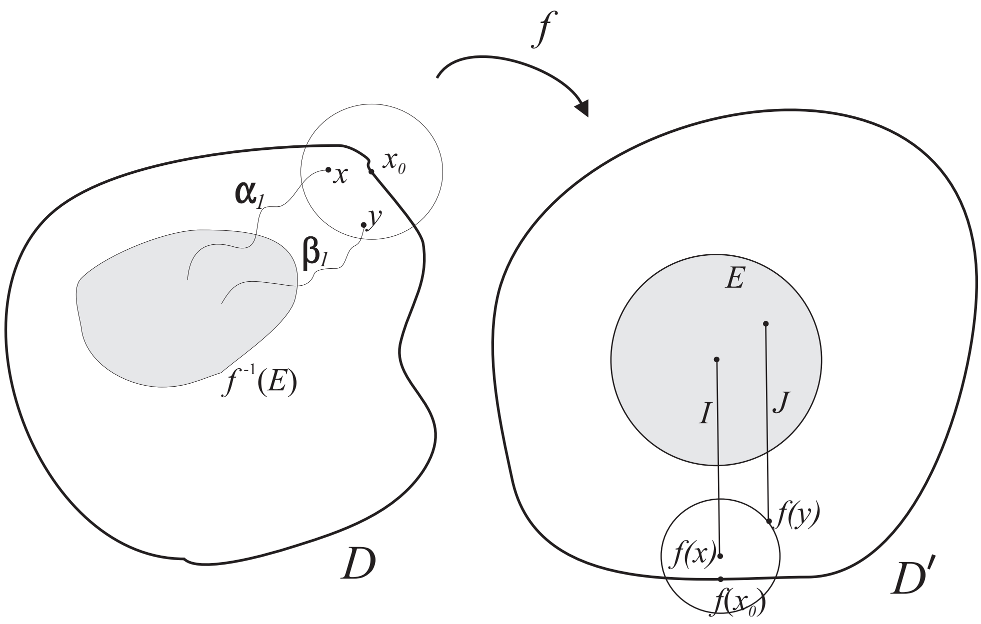

Рис. 1.6. До доведення теореми 1.3.1

Тоді з одного боку за нерівністю (1.68)

$$M(\Gamma) \geqslant (1/A_0) \cdot M(\Gamma(\alpha_1, \beta_1, \mathbb{R}^n))\,, \tag{1.89}$$

а з іншого боку, за [102, лема 7.38]

$$M(\Gamma(\alpha_1, \beta_1, \mathbb{R}^n)) \geqslant c_n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\,, \tag{1.90}$$

де $c_n > 0$ – деяка стала, яка залежить лише від n,

$$m = \frac{\mathrm{dist}(\alpha_1, \beta_1)}{\min\{\mathrm{diam}\,(\alpha_1), \mathrm{diam}\,(\beta_1)\}}\,.$$

Тоді поєднуючи (1.88), (1.89) і (1.90) і враховуючи, що $\mathrm{dist}\,(\alpha_1, \beta_1) \leqslant |x-y|$, ми отримуємо, що

$$M(\Gamma) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_1}{2\mathrm{dist}(\alpha_1, \beta_1)}\right) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_1}{2|x-y|}\right)\,, \tag{1.91}$$

де $\widetilde{c_n} > 0$ – деяка стала, яка залежить тільки від n і сталої A_0 з означення QED-області.

Встановимо тепер верхню оцінку для $M(\Gamma)$. Покладемо

$$\rho(y) = \begin{cases} \frac{1}{C_0\varepsilon_0}, & y \in D'\,, \\ 0, & y \notin D'\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що ρ задовольняє співвідношення (1.1) для сім'ї кривих $f(\Gamma)$ в силу співвідношення (1.70). Тоді за означення сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ ми отримаємо, що

$$M(\Gamma) \leqslant \frac{1}{C_0^n \varepsilon_0^n} \int\limits_{D'} Q(y)\, dm(y) = C_0^{-n} \cdot \frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(y)|^n}\,. \tag{1.92}$$

З (1.91) і (1.92) випливає, що

$$\widetilde{c_n} \cdot \log\left(1+\frac{\delta_1}{2|x-y|}\right) \leqslant C_0^{-n} \cdot \frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(y)|^n}\,.$$

З останнього співвідношення випливає нерівність (1.69), де $C := C_0^{-n} \cdot \widetilde{c_n}^{\,-1/n}$ з $\delta_1/2$ замість δ. Зауважимо, що ми можемо вважати $\delta_1/2=\delta$, бо з огляду на правило Лопіталя $\log\left(1+\frac{1}{nt}\right) \sim \log\left(1+\frac{1}{kt}\right)$ при $t\to +0$ для довільних фіксованих $k, n>0$.

Ми довели теорему 1.3.1 для внутрішніх точок $x, y \in U\cap D$. Для точок $x, y\in U\cap \overline{D}$ це твердження випливає за допомогою граничного переходу $\overline{x}\to x$ і $\overline{y}\to y$, $\overline{x}, \overline{y}\in D$. $\Box$

Справедливий також аналог теореми 1.3.1 для відображень із фіксованою точкою області D. Для того, щоб сформулювати і довести відповідне твердження, впровадимо таке означення. Для елементів $a\in D$, $b\in D'$ і вимірної за Лебегом функції $Q: D'\to [0,\infty]$ позначимо через $\mathfrak{F}_{a,b,Q}$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на D', таких що $f(a)=b$. Справедливо наступне твердження.

Теорема 1.3.2. *Нехай $Q\in L^1(D')$, D є областю квазіекстремальної довжини, а D' є обмеженою опуклою областю. Тоді будь-яке відображення $f\in\mathfrak{F}_{a,b,Q}$ продовжується до відображення $f:\overline{D}\to\overline{D'}$, при цьому, для кожної точки $x_0\in\partial D$, $x_0\ne\infty$, знайдуться окіл U цієї точки і стала $C=C(n,A,D,D')>0$ така, що виконано співвідношення (1.69).*

Доведення. Можливість неперервного продовження відображення f на ∂D випливає з теореми 1.1.1 з урахуванням зауваження 1.3.1. Доведемо логарифмічну неперервність за Гельдером сім'ї продовжених відображень.

Покладемо $E=\overline{B(b,\varepsilon_*)}$, де $\varepsilon_*=\operatorname{dist}(b,\partial D')$. Можливі два випадки:

1) існує $\delta > 0$ таке, що $\operatorname{dist}(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta$ для всіх $f \in \mathfrak{F}_{a,b,Q}$. В цьому випадку бажане твердження випливає з теореми 1.3.1;

2) знайдеться послідовність відображень $f \in \mathfrak{F}_{a,b,Q}$. і точок $x_m \in D, y_m \in D'$, $m = 1, 2, \ldots$, таких, що $f_m(x_m) = y_m$, $y_m \in E$ і

$$\operatorname{dist}(x_m, \partial D) \to 0$$

при $m \to \infty$. Тоді міркуючи так само, як і при доведенні леми 1.3.1, доходимо до висновку, що сім'я відображень $\mathfrak{F}_{a,b,Q}$. не є одностайно неперервною принаймні в одній точці $x_0 \in \partial D$, проте, це суперечить твердженню теореми 7.1 в [8].

Отже, випадок 2) є неможливим, а в випадку 1) маємо бажане твердження теореми. $\square$

1.3.3. Локально квазіконформні межі

Розглянемо наступне означення, запропоноване Няккі [62], див. також [48]. Межа області D в $\mathbb{R}^n$ називається *локально квазіконформною,* якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U, для якого існує квазіконформне відображення φ околу U на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ таке, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином одиничної кулі $\mathbb{B}^n$ з координатною гіперплощиною $x_n = 0$, де $x = (x_1, \ldots, x_n.)$ Справедлива наступна

Теорема 1.3.3. *Нехай $Q \in L^1(D')$, D є областю з локально квазіконформною межею, а D' є обмеженою опуклою областю. Тоді будь-яке відображення $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продовжується до відображення $f : \overline{D} \to \overline{D'}$, при цьому, для кожної точки $x_0 \in \partial D$ знайдуться окіл U цієї точки і сталі $C = C(n, A, D, D') > 0$ і $0 < \alpha = \alpha(x_0) \leqslant 1$ такі, що*

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| \leqslant \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta}{|x-y|^{\alpha}}\right)} \tag{1.93}$$

для всіх $x, y \in U \cap \overline{D}$, де $\|Q\|_1$ – норма функції Q в $L^1(D')$.

Доведення. Можливість неперервного продовження відображення f на межу області D випливає з теореми 3.1 в [8]. Зокрема, локально квазіконформні межі областей є слабко плоскими (див. [44, пропозиція 2.2], див. також [99, теорема 17.10]), а опуклі області, очевидно, є локально зв'язними на своїй межі.

Зафіксуємо точку $x_0 \in \partial D$. Нехай $y_* \in D'$ – довільна точка області D', $\delta_* := d(y_*, \partial D')$ і $E = \overline{B(y_*, \delta_*/2)} \subset D'$. За лемою 1.3.1 існує таке $\delta_1 > 0$ таке, що $h(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$ для всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. Тоді і $d(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$ для всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. Крім того, оскільки за теоремою 1.2 в [8] сім'я відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$, для числа $\delta_*/8$ знайдеться окіл $U \subset B(x_0, \delta_1/2)$ точки x_0, такий що $|f(x) - f(x_0)| < \delta_*/8$ для всіх $x, y \in U \cap D$ і всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$.

За означенням локально квазіконформної межі існує окіл U^* точки x_0 і квазіконформне відображення $\varphi : U^* \to \mathbb{B}^n$, $\varphi(U^*) = \mathbb{B}^n$, таке що $\varphi(D \cap U^*) = \mathbb{B}^n_+$, де $\mathbb{B}^n_+ = \{x \in \mathbb{B}^n : x = (x_1, \ldots, x_n), x_n > 0\}$ – півкуля, див. рисунок 1.7. Можна вважати, що $\varphi(x_0) = 0$, причому $U^* \subset B(x_0, \delta_1/4)$

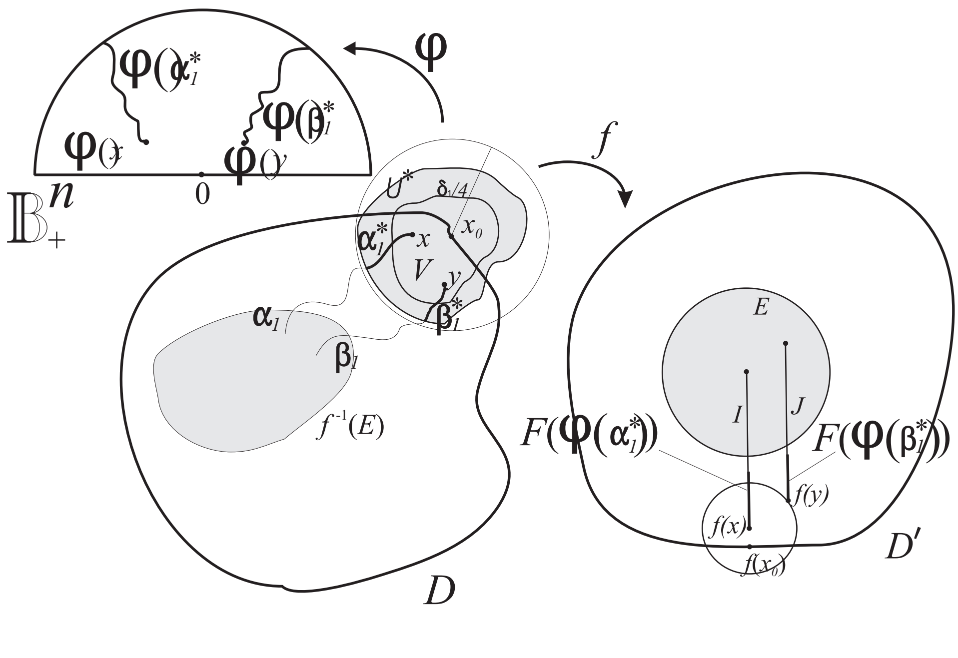

Рис. 1.7. До доведення теореми 1.3.3

(див. хід доведення теореми 17.10 у [99]). Нехай V – підокіл U^* такий, що $\overline{V} \subset U^*$, і нехай

$$\delta_2 := \operatorname{dist}(\partial V, \partial U^*)\,. \tag{1.94}$$

Розглянемо допоміжне відображення

$$F(w) := f(\varphi^{-1}(w))\,, \qquad F : \mathbb{B}^n_+ \to U^*\,. \tag{1.95}$$

Нехай $x, y \in U^* \cap D$ і

$$\varepsilon_0 := |f(x) - f(y)| < \delta_0 := \delta_*/4\,.$$

Застосуємо для точок $A = f(x)$, $B = f(y)$ і $z_0 = f(x_0)$ лему 1.3.2. Згідно цієї леми, знайдуться відрізки $I \supset A$ і $J \supset B$ в області D' такі, що $I \cap E \neq \varnothing \neq J \cap E$, причому

$$\operatorname{dist}(I, J) \geqslant C_0 \cdot |f(x) - f(y)|\,, \tag{1.96}$$

де стала C_0 залежить лише від континууму E і області D'.

Нехай α_1, β_1 – повні f-підняття кривих I і J з початками в точках x і y, відповідно (вони існують за [100, лема 3.7]). Тоді за означенням $|\alpha_1| \cap f^{-1}(E) \neq \varnothing \neq |\beta_1| \cap f^{-1}(E)$. Тоді

$$|\alpha_1| \cap U \neq \varnothing \neq |\alpha_1| \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)$$

і

$$|\beta_1| \cap U \neq \varnothing \neq |\beta_1| \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)\,.$$

Тоді з огляду на [49, теорема 1.I.5.46]

$$|\alpha_1| \cap \partial U \neq \varnothing\,, |\beta_1| \cap \partial U \neq \varnothing\,. \tag{1.97}$$

Аналогічно,

$$|\alpha_1| \cap \partial V \neq \varnothing\,, |\beta_1| \cap \partial V \neq \varnothing\,. \tag{1.98}$$

З огляду на (1.97), α_1 і β_1 містять у собі підкриві α_1^* і β_1^* з початками у точках x і y, які належать U^* і мають кінцеві точки в ∂U^*. Завдяки (1.94), (1.97) і (1.98), будемо мати, що

$$d(\alpha_1^*) \geqslant \delta_2\,, \quad d(\beta_1^*) \geqslant \delta_2\,. \tag{1.99}$$

Розглянемо криві $\varphi(\alpha_1^*)$ і $\varphi(\beta_1^*)$. Оскільки φ – квазіконформне відображення, відображення φ^{-1} також є квазіконформним. Отже, φ^{-1} є локально неперервним за Гельдером з деякою сталою $\widetilde{C} > 0$ і степенем $0 < \alpha \leqslant 1$ (див., напр., [66, теорема 1.11.III]). Можна вважати, що φ^{-1} є неперервним за Гельдером у $\mathbb{B}^n$. Тоді

$$\frac{1}{\left(\widetilde{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}|x-y|^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant |\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant \widetilde{C} \cdot |x-y|^{\alpha} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{B}^n\,. \tag{1.100}$$

Нехай $\overline{x}, \overline{y} \in U^*$ є такими елементами, що $d(\alpha_1^*) = |\overline{x} - \overline{y}|$. Покладемо $x^* = \varphi(\overline{x})$ і $y^* = \varphi(\overline{y})$. Тоді з (1.100) випливає, що

$$|x^* - y^*|^{\alpha} \geqslant \frac{1}{\widetilde{C}} \cdot |\overline{x} - \overline{y}| = \frac{1}{\widetilde{C}} d(\alpha_1^*) \geqslant \frac{1}{\widetilde{C}} \delta_2\,,$$

або

$$|x^* - y^*| \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}\,. \tag{1.101}$$

Зі співвідношення (1.101) випливає, що $d(\varphi(\alpha_1^*)) \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}$. Аналогічно, $d(\varphi(\beta_1^*)) \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}$. Нехай

$$\Gamma := \Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{B}^n_+)\,.$$

Зауважимо, що $\mathbb{B}^n_+$ є обмеженою опуклою областю, тому вона є областю Джона (див. [60, зауваження 2.4]), отже, є рівномірною областю (див. [60, зауваження 2.13(c)]), тому є також і QED-областю з деяким $A_0^* < \infty$ у (1.68) (див. [34, лема 2.18]). Тоді з одного боку за нерівністю (1.68)

$$M(\Gamma) \geqslant (1/A_0^*) \cdot M(\Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{R}^n))\,, \tag{1.102}$$

а з іншого боку, за [102, лема 7.38]

$$M(\Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{R}^n)) \geqslant c_n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\,, \tag{1.103}$$

де $c_n > 0$ – деяка стала, яка залежить лише від n,

$$m = \frac{\mathrm{dist}(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*))}{\min\{\mathrm{diam}\,(\varphi(\alpha_1^*)), \mathrm{diam}\,(\varphi(\beta_1^*))\}}\,.$$

Тоді поєднуючи (1.102) і (1.103) і враховуючи, що $\mathrm{dist}\,(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*)) \leqslant |\varphi(x) - \varphi(y)|$, ми отримуємо, що

$$M(\Gamma) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{\widetilde{C}^{1/\alpha}\mathrm{dist}(\alpha_1, \beta_1)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{\widetilde{C}^{1/\alpha}|\varphi(x) - \varphi(y)|}\right)\,, \tag{1.104}$$

де $\widetilde{c_n} > 0$ – деяка стала, яка залежить тільки від n і сталої A_0^* з означення QED-області.

Встановимо тепер верхню оцінку для $M(\Gamma)$. Зауважимо, що відображення F у (1.95) задовольняє співвідношення (1.67) з функцією $\widetilde{Q(x)}=K_0{\cdot}Q(x)$ замість Q, де $K_0\geqslant 1$ – стала квазіконформності відображення φ^{-1}. Покладемо

$$\rho(y)=\begin{cases}\frac{1}{C_0\varepsilon_0}, & y\in D',\\ \quad 0, & y\notin D',\end{cases}$$

де C_0 – універсальна стала в нерівності (1.70). Зауважимо, що ρ задовольняє співвідношення (1.1) для сім'ї кривих $F(\Gamma)$ в силу співвідношення (1.70). Тоді за означенням сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ і з урахуванням означення F у (1.95) ми отримаємо, що

$$M(\Gamma)\leqslant\frac{1}{C_0^n\varepsilon_0^n}\int\limits_{D'}K_0Q(y)\,dm(y)=C_0^{-n}K_0\cdot\frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(y)|^n}\,. \qquad (1.105)$$

З (1.104) і (1.105) випливає, що

$$\widetilde{c_n}\cdot\log\left(1+\frac{\delta_2^{1/\alpha}}{\widetilde{C}^{1/\alpha}|\varphi(x)-\varphi(y)|}\right)\leqslant C_0^{-n}K_0\cdot\frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(y)|^n}\,.$$

З останнього співвідношення з огляду на гельдеревість відображення φ випливає, що

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C_0^{-1}\widetilde{c_n}^{-\frac{1}{n}}K_0^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{(\|Q\|_1)^{\frac{1}{n}}}{\log^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{\delta_1^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha}|\varphi(x)-\varphi(y)|}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant C_0^{-1}\widetilde{c_n}^{-\frac{1}{n}}K_0^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{(\|Q\|_1)^{\frac{1}{n}}}{\log^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{\delta_1^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{(1/\alpha)+1}|x-y|^{\alpha}}\right)}\,,$$

що і є бажаною нерівністю (1.93), де $C:=C_0^{-1}\cdot\widetilde{c_n}^{-1/n}\cdot K_0^{\frac{1}{n}}$, і у якій стоїть в правій частині число $r_0=\frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha+1}}$ замість δ. Проте, можна замінити r_0 на δ, бо з огляду на правило Лопіталя $\log\left(1+\frac{1}{nt}\right)\sim\log\left(1+\frac{1}{kt}\right)$ при $t\to+0$ різних (фіксованих) $k,n>0$.

Ми довели теорему 1.3.3 для внутрішніх точок $x,y\in U\cap D$. Для точок $x,y\in U\cap\overline{D}$ це твердження випливає за допомогою граничного переходу $\overline{x}\to x$ і $\overline{y}\to y$, $\overline{x},\overline{y}\in D$. $\Box$

1.3.4. Прості кінці

Нагадаємо деякі означення (див., напр., [48]). Нехай ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Неперервне відображення $\sigma\colon \omega \to \mathbb{R}^n$ називається *k-вимірною поверхнею* в $\mathbb{R}^n$. *Поверхнею* будемо називати довільну $(n-1)$-вимірну поверхню σ в $\mathbb{R}^n$. Поверхня σ називається *жордановою поверхнею*, якщо $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ при $x \neq y$. Далі ми будемо використовувати σ для позначення всього образу $\sigma(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ при відображенні σ, $\overline{\sigma}$ замість $\overline{\sigma(\omega)}$ в $\mathbb{R}^n$ і $\partial\sigma$ замість $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$. Жорданова поверхня $\sigma\colon \omega \to D$ в області D називається *розрізом* області D, якщо σ розділяє D, тобто $D \setminus \sigma$ має більше однієї компоненти, $\partial\sigma \cap D = \varnothing$ і $\partial\sigma \cap \partial D \neq \varnothing$.

Послідовність $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$ розрізів області D називається *ланцюгом*, якщо:

(i) множина σ_{m+1} міститься в точності в одній компоненті d_m множини $D \setminus \sigma_m$, при цьому, $\sigma_{m-1} \subset D \setminus (\sigma_m \cup d_m)$; (ii) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} d_m = \varnothing$.

Два ланцюги розрізів $\{\sigma_m\}$ і $\{\sigma'_k\}$ називаються *еквівалентними*, якщо для кожного $m = 1, 2, \ldots$ область d_m містить всі області d'_k за виключенням скінченної кількості, і для кожного $k = 1, 2, \ldots$ область d'_k також містить всі області d_m за виключенням скінченної кількості.

Кінець області D — це клас еквівалентних ланцюгів розрізів області D. Нехай K — кінець області D в $\mathbb{R}^n$, тоді *тілом простого кінця* P називається множина

$$I(P) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{d_m}\,.$$

Можна показати, що завжди $I(P) \subset \partial D$ (див., напр., [48, пропозиція 1]). Слідуючи [62], будемо говорити, що кінець K є *простим кінцем*, якщо K містить ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$, такий, що $M(\Gamma(\sigma_m, \sigma_{m+1}, D)) < \infty$ при всіх $m \in \mathbb{N}$ і

$$\lim_{m\to\infty} M(\Gamma(C, \sigma_m, D)) = 0 \tag{1.106}$$

для деякого континууму C в D. Далі використовуються наступні позначення: множина простих кінців, що відповідають області D, позначається символом E_D, а поповнення області D її простими кінцями позначається

$\overline{D}_P$.

Будемо говорити, що межа області D в $\mathbb{R}^n$ є *локально квазіконформною*, якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U в $\mathbb{R}^n$, який може бути відображений квазіконформним відображенням φ на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ так, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином $\mathbb{B}^n$ з координатною гіперплощиною. Будемо називати ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$ *регулярним*, якщо $\overline{\sigma_m} \cap \overline{\sigma_{m+1}} = \varnothing$ при кожному $m \in \mathbb{N}$ і, крім того, $d(\sigma_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Якщо кінець K містить принаймні один регулярний ланцюг, то K будемо називати *регулярним*. Говоримо, що обмежена область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, якщо D може бути квазіконформно відображена на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в $\mathbb{R}^n$. Зауважимо, що замикання $\overline{D}_P$ регулярної області D є *метризовним*, при цьому, якщо $g : D_0 \to D$ – квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, то для $x, y \in \overline{D}_P$ покладемо:

$$\rho(x, y) := |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|\,, \tag{1.107}$$

де для $x \in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміється як деяка (єдина) точка межі D_0, коректно визначена з огляду на [62, теорема 4.1]. Зокрема, будемо говорити, що послідовність $x_m \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, *збігається* до простого кінця $P \in E_D$ при $m \to \infty$, якщо для будь-якого натурального $k \in \mathbb{N}$ всі елементи послідовності x_m, крім скінченної кількості, належать області d_k (де d_k, $k = 1, 2, \ldots$ – послідовність вкладених областей з означення простого кінця P). Має місце наступний результат.

Теорема 1.3.4. *Нехай $Q \in L^1(D')$, D є регулярною областю, а D' є обмеженою опуклою областю. Тоді будь-яке відображення*

$$f \in \mathfrak{S}_{\delta, A, Q}(D, D')$$

продовжується до відображення $f : \overline{D}_P \to \overline{D'}$, при цьому, для кожної точки $P_0 \in E_D$ знайдуться окіл U цієї точки у метричному просторі $(\overline{D}_P, \rho)$ і сталі $C = C(n, A, D, D', P_0) > 0$ і $0 < \alpha = \alpha(P_0) \leqslant 1$ такі, що

$$|\overline{f}(P_1) - \overline{f}(P_2)| \leqslant \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta}{\rho^{\alpha}(P_1, P_2)}\right)} \tag{1.108}$$

для всіх $P_1, P_2 \in U$, *де* $\|Q\|_1$ *– норма функції* Q *в* $L^1(D')$.

Доведення. Нехай $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$. Достатньо розглянути лише випадок $P_1, P_2 \in U \cap D$. Оскільки D – регулярна область, існує квазіконформне відображення g^{-1} області D на область D_0 з локально квазіконформною межею, причому, за означенням метрики ρ в (1.107),

$$\rho(P_1,P_2) := \left|g^{-1}(P_1) - g^{-1}(P_2)\right|. \tag{1.109}$$

Розглянемо допоміжне відображення

$$F(x) = (f \circ g)(x)\,, \quad x \in D_0\,. \tag{1.110}$$

Оскільки відображення g^{-1} є квазіконформним, то існує стала $1 \leqslant K_1 < \infty$ така, що

$$\frac{1}{K_1} \cdot M(\Gamma) \leqslant M(g(\Gamma)) \leqslant K_1 \cdot M(\Gamma) \tag{1.111}$$

для будь-якої сім'ї кривих Γ в D_0. З огляду на нерівності (1.111) та з урахуванням того, що f задовольняє співвідношення (1.67), ми отримаємо, що також F задовольняє співвідношення (1.67) з новою функцією $\widetilde{Q}(x) := K_1 \cdot Q(x)$. Крім того, оскільки g – фіксоване відображення, яке є гомеоморфізмом, то $h(F^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta_0 > 0$, де $\delta_0 > 0$ – деяке фіксоване число. Тоді до відображення F можна застосувати теорему 1.3.3. Застосовуючи цю теорему, ми отримаємо, що для будь-якої точки $x_0 \in D_0$ знайдуться окіл V цієї точки і сталі $C^* = C^*(n, A, D_0, D') > 0$ і $0 < \alpha = \alpha(x_0) \leqslant 1$ такі, що

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \frac{C^* K_1^{\frac{1}{n}} \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta_0}{|x-y|^{\alpha}}\right)} \tag{1.112}$$

для всіх $x, y \in V \cap D_0$, де $\|Q\|_1$ – норма функції Q в $L^1(D)$. Нехай $U := g^{-1}(U)$, $P_0 := g(x_0)$. Тоді за означенням V є околом простого кінця $P_0 \in E_D$. Якщо $P_1, P_2 \in D_P \cap U$, то $P_1 = g(x)$ і $P_2 = g(y)$ для деяких $x, y \in V \cap D_0$. З огляду на співвідношення (1.112) та враховуючи те, що $|x - y| = |g^{-1}(P_1) - g^{-1}(P_2)| = \rho(P_1, P_2)$, ми отримаємо, що

$$|F(g^{-1}(P_1)) - F(g^{-1}(P_2))| \leqslant \frac{C^* K_1^{\frac{1}{n}} \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta_0}{\rho^{\alpha}(P_1,P_2)}\right)}\,,$$

або, з огляду на (1.110),

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant\frac{C^*K_1^{\frac{1}{n}}\cdot(\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1+\frac{\delta_0}{\rho^{\alpha}(P_1,P_2)}\right)}\,.$$

Останнє співвідношення і є бажаним, якщо в ньому покласти $C:=C^*K_1^{\frac{1}{n}}$. $\Box$

Висновки до розділу 1

У даному розділі розвинута теорія межової поведінки відображень областей евклідового простору, що, зокрема, полягає в наступному:

1. Отримано неперервне продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького на межу у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, область визначення має слабко плоску межу, а область значення є локально зв'язною на своїй межі.

2. Отримані обернені модульні нерівності типу Полецького для відкритих дискретних замкнених відображень, які диференційовні майже скрізь, мають властивість N-Лузіна відносно міри Лебега і N^{-1}-властивість на сферах.

3. Отримана логарифмічна неперервність за Гельдером відображень з оберненою нерівністю Полецького у межових точках у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, а відображена область є обмеженою опуклою. Результат є справедливим у випадку, коли областю визначення є або QED-область, або область з локально квазіконформною межею, або регулярна область в сенсі простих кінців.

Матеріали першого розділу викладено в публікаціях здобувача [4], [8], [22], [32].

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕМИ КОМПАКТНОСТІ КЛАСІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ БЕЛЬТРАМІ

Другий розділ присвячений теоремам компактності класів розв'язків рівняння Бельтрамі і задачі Діріхле. Розділ складається з трьох підрозділів. У першому підрозділі доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі у деякій жордановій області, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження інтегрального характеру. Також отримано результати про компактні класи розв'язків відповідної задачі Діріхле, яка розглядається в деякій жордановій області. У другому підрозділі доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження теоретико-множинного типу. Як наслідок, отримані результати про компактні класи розв'язків відповідної задачі Діріхле, яка розглядається в деякій жордановій області. Третій підрозділ присвячений питанням, які стосуються проблеми компактності розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі в деякій однозв'язній області. У термінах простих кінців отримані результати щодо компактності розв'язків задачі Діріхле, для випадку, коли максимальні дилатації цих розв'язків задовольняють певні інтегральні обмеження.

2.1. Компактність класів розв'язків рівняння Бельтрамі і відповідної задачі Діріхле з інтегральними обмеженнями у жорданових областях

2.1.1. Формулювання основних результатів

Результати даного підрозділу опубліковані в [31]. Добре відомо, що компактні класи відображень гарантують наявність екстремалі визначених на них неперервних функціоналів. Зокрема, теореми компактності мають застосування при розв'язанні різних екстремальних задач (див., напр., [51]). Даний підрозділ присвячений отриманню результатів щодо компактності деяких класів плоских відображень, а саме, гомеоморфізмів комплексної площини з гідродинамічним нормуванням, а також відкритих дискретних розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі. Зауважимо, що проблеми збіжності і компактності плоских соболівських гомеоморфізмів з умовами нормування $f(0)=0,\ \ f(1)=1$ і $f(\infty)=\infty$ розглядалися в роботах [52] і [53]. У даному підрозділі переважно йдеться про інтегральні умови на характеристики відображень (див., напр., [37]). Інші типи умов, зокрема, умови теоретико-множинного типу, будуть розглянуті в наступному підрозділі.

Скрізь далі відображення $f:D\to\mathbb{C}$ області $D\subset\mathbb{C}$ вважається таким, що *зберігає орієнтацію,* зокрема, якщо f – гомеоморфізм і $z\in D$ – яка-небудь його точка диференційовності, то *якобіан* цього відображення в точці z невід'ємний. Для комплекснозначної функції $f:D\to\mathbb{C}$, заданої в області $D\subset\mathbb{C}$, що має частинні похідні по x і y при майже всіх $z=x+iy$, покладемо $f_{\overline{z}}=(f_x+if_y)/2$ і $f_z=(f_x-if_y)/2$.

Комплексною дилатацією відображення f в точці z називається функція $\mu:D\to\mathbb{C}$, визначена рівністю

$$\mu(z)=\mu_f(z)=f_{\overline{z}}/f_z,\ \text{при } f_z\neq 0 \text{ і } \mu(z)=0 \qquad (2.1)$$

в іншому випадку.

Максимальною дилатацією відображення f в точці z називається наступна функція:

$$K_{\mu}(z)=K_{\mu_f}(z)=\frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu\,(z)|}\,. \qquad (2.2)$$

Якщо задана вимірна за Лебегом функція $\mu:D\to\mathbb{D},\ \mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, то не прив'язуючись до якого-небудь відображення f будемо називати величину, що рахується за допомогою рівності (2.2), максимальною дилатацією відповідної функції μ. Зауважимо, що якобіан відображення f в точці $z\in D$ можна порахувати за допомогою рівності

$$J(z,f)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2\,,$$

що можна перевірити прямими обчисленнями. Неважко бачити, що

$$K_{\mu_f}(z) = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}$$

у всіх точках $z \in D$ відображення f, що має частинні похідні в точці z, де якобіан $J(z, f)$ не дорівнює нулю. *Рівнянням Бельтрамі* будемо називати диференціальне рівняння виду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z \,, \tag{2.3}$$

в якому $\mu = \mu(z)$ – задана невідома функція. *Регулярним розв'язком рівняння (2.3)* в області $D \subset \mathbb{C}$ ми будемо називати гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ такий, що $J(z, f) \neq 0$ при майже всіх $z \in D$. Як зазвичай, сім'я $\mathfrak{F}$ відображень $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ буде називатися *нормальною,* якщо з кожної послідовності $f_n \in \mathfrak{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, можна виділити підпослідовність f_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, яка збігається локально рівномірно до деякого відображення $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ в метриці h при $k \to \infty$. Якщо додатково $f \in \mathfrak{F}$, то сім'я $\mathfrak{F}$ називається *компактною.*

Нехай K – компакт в $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}(\Omega)$ – функція відкритої множини Ω, а $\Phi \colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неспадна функція. Позначимо через $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\Phi}(K)$ клас усіх регулярних розв'язків $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ рівняння (2.3) з комплексними коефіцієнтами μ, рівними нулю зовні K такими, що

$$f(z) = z + o(1) \quad \text{при} \quad z \to \infty \,, \tag{2.4}$$

при цьому

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(K_\mu(z)) \cdot \frac{dm(z)}{(1 + |z|^2)^2} \leqslant \mathcal{M}(\Omega) \tag{2.5}$$

для кожної відкритої множини $\Omega \subset \mathbb{C}$. Одним з основних результатів підрозділу є наступне твердження.

Теорема 2.1.1. *Нехай $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неперервна зростаюча опукла функція, яка при деякому $\delta > \Phi(0)$ задовольняє умову*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \,, \tag{2.6}$$

а функція $\mathcal{M}$ є обмеженою. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{F}_{\Phi}^{\mathcal{M}}(K)$ є компактною в $\mathbb{C}$.

Перейдемо до розгляду питання про компактність класів розв'язків задачі Коші для рівняння Бельтрамі. Розглянемо наступну задачу Коші:

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z\,, \tag{2.7}$$

$$\lim_{\zeta \to z} \mathrm{Re}\, f(\zeta) = \varphi(z) \qquad \forall\ z \in D\,, \tag{2.8}$$

де φ – наперед задана неперервна функція. Надалі вважаємо, що D – деяка однозв'язна жорданова область у $\mathbb{C}$. Розв'язок задачі (2.7)–(2.8) будемо вважати *регулярним,* якщо виконано одно з двох: або $f(z) = const$ в D, або f – відкрите дискретне відображення класу $W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(D)$, таке що $J(z, f) \neq 0$ при майже всіх $z \in D$.

Зафіксуємо точку $z_0 \in D$ і функцію φ. Нехай $\mathfrak{F}_{\varphi,\Phi,z_0}^{\mathcal{M}}(D)$ позначає клас усіх регулярних розв'язків $f : D \to \mathbb{C}$ задачі Коші (2.7)–(2.8), які задовольняють умову $\mathrm{Im}\, f(z_0) = 0$ і, крім того,

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(K_{\mu}(z)) \cdot \frac{dm(z)}{(1 + |z|^2)^2} \leqslant \mathcal{M}(\Omega) \tag{2.9}$$

для кожної відкритої множини $\Omega \subset D$. Справедливо наступне твердження.

Теорема 2.1.2. *Нехай D – деяка однозв'язна жорданова область у $\mathbb{C}$, $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неперервна зростаюча опукла функція, яка при деякому $\delta > \Phi(0)$ задовольняє умову (2.6), функція $\mathcal{M}$ є обмеженою, а функція $\varphi(z)$ у (2.8) неперервна. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{F}_{\varphi,\Phi,z_0}^{\mathcal{M}}(D)$ є компактною в D.*

Доведення теорем 2.1.1 і 2.1.2 буде дано нижче в тексті після встановлення необхідних для цього допоміжних тверджень.

2.1.2. Кільцеві гомеоморфізми з обмеженнями інтегрального типу

Відображення $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ називається *кільцевим Q-відображенням у точці $x_0 \in \overline{D}$,* якщо співвідношення

$$M(f(\Gamma(S(x_0, r_1),\, S(x_0, r_2),\, A \cap D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{2.10}$$

виконано для будь-якого кільця $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, і кожної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \tag{2.11}$$

Зауваження 2.1.1. Якщо відображення f – гомеоморфізм, можна довести, що обернене до нього задовольняє умову (1.11), див. зауваження, зроблені після (1.12).

Доведемо наступну важливу лему, яка в випадку відповідних фіксованих функцій $Q = Q_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, доведена раніше в [68, теорема 4.4].

Лема 2.1.1. *Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і нехай f_k, $k = 1, 2, \ldots$ – послідовність гомеоморфізмів області D в $\mathbb{R}^n$, яка збігається локально рівномірно в D до деякого відображення $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ по хордальній метриці h. Нехай, крім того, $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ – строго зростаюча опукла функція. Припустимо, що кожне відображення f_k, $k = 1, 2, \ldots$ задовольняє співвідношення (2.10) в кожній точці $x_0 \in D$ з деякою функцією $Q = Q_k(x)$ такою, що*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q_k(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1 + |x|^2\right)^n} \ \leqslant\ M_0 < \infty\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{2.12}$$

Якщо для деякого $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty\,, \tag{2.13}$$

то відображення f є або гомеоморфізмом $f : D \to \mathbb{R}^n$, або сталою $c \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

Доведення. Скористаємося лемою 4.1 в [71]. Як і вище, покладемо

$$A = A(x_0, r, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - x_0| < R\}.$$

Для застосування [71, лема 4.1] треба встановити існування послідовностей $0 < r_m < R_m < \infty$, $m = 1, 2, \ldots$, таких що

$$M(f_k(\Gamma(S(x_0, r_m), S(x_0, R_m), A(x_0, r_m, R_m)))) \to 0 \tag{2.14}$$

при $m\to\infty$ рівномірно по $k=1,2,\ldots$. Оберемо довільну нескінченно малу послідовність $R_m>0,\ \ m=1,2,\ldots,$ і зафіксуємо число $m\in\mathbb{N}$. За [58, лема 7.3]

$$M(f_k(\Gamma(S(x_0,r_m),S(x_0,R_m),A(x_0,r_m,R_m))))\leqslant\frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}\,, \qquad (2.15)$$

де

$$I=\int\limits_{r_m}^{R_m}\frac{dt}{tq_{k_{x_0}}^{\frac{1}{n-1}}(t)},\quad q_{k_{x_0}}(t)=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,t)}Q_k(x)\,dS\,. \qquad (2.16)$$

Скориставшись заміною змінних $t=r/R_m$, при довільному $\varepsilon\in(0,R_m)$ отримаємо, що

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R_m}\frac{dr}{rq_{k_{x_0}}^{\frac{1}{n-1}}(r)}=\int\limits_{\varepsilon/R_m}^{1}\frac{dt}{tq_{k_{x_0}}^{\frac{1}{n-1}}(tR_m)}=\int\limits_{\varepsilon/R_m}^{1}\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\,, \qquad (2.17)$$

де $\widetilde{q}_0(t)$ – середнє інтегральне значення функції $\widetilde{Q}(x):=Q_k(R_mx+x_0)$ над сферою $|x|=t$, див. співвідношення (2.16). Тоді згідно з [70, лема 3.1]

$$\int\limits_{\varepsilon/R_m}^{1}\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)}\geqslant\frac{1}{n}\int\limits_{eM_*(\varepsilon/R_m)}^{\frac{M_*(\varepsilon/R_m)R_m^n}{\varepsilon^n}}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,, \qquad (2.18)$$

де

$$M_*\left(\varepsilon/R_m\right)=\frac{1}{\Omega_n\left(1-(\varepsilon/R_m)^n\right)}\int\limits_{A(0,\varepsilon/R_m,1)}\Phi\left(Q_k(R_mx+x_0)\right)\,dm(x)=$$

$$=\frac{1}{\Omega_n\left(R_m^n-\varepsilon^n\right)}\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,R_m)}\Phi\left(Q_k(x)\right)\,dm(x)\,.$$

Зауважимо, що при всіх $x\in A(x_0,\varepsilon,R_m)$ виконано нерівність $|x|\leqslant|x-x_0|+|x_0|\leqslant R_m+|x_0|$. Отже,

$$M_*\left(\varepsilon/R_m\right)\leqslant\frac{\beta_m(x_0)}{\Omega_n\left(R_m^n-\varepsilon^n\right)}\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,R_m)}\Phi(Q_k(x))\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\,,$$

де $\beta_m(x_0)=\left(1+(R_m+|x_0|)^2\right)^n$. Отже, при $\varepsilon\leqslant R_m/\sqrt[n]{2}$

$$M_*\left(\varepsilon/R_m\right)\leqslant\frac{2\beta_m(x_0)}{\Omega_nR_m^n}M_0\,,$$

де M_0 – стала зі співвідношення (2.12). Крім того, зауважимо, що

$$M_*\left(\varepsilon/R_m\right) \geqslant \Phi(0) \geqslant 0\,,$$

оскільки Φ – зростаюча функція.

Тоді зі співвідношень (2.17) і (2.18) ми отримаємо, що

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R_m} \frac{dr}{rq_{k_{x_0}}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{\frac{2\beta m(x_0)M_0 e}{\Omega_n R_m^n}}^{\frac{\Phi(0)R_m^n}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,. \qquad (2.19)$$

З умов (2.13) і (2.19) випливає наявність числа $0<r_m<R_m$ такого, що

$$\int\limits_{r_m}^{R_m} \frac{dr}{rq_{k_{x_0}}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geqslant 2^m\,. \qquad (2.20)$$

Остаточно, з (2.15) і (2.20) випливає існування нескінченно малих додатних послідовностей r_m і R_m з умовою (2.14). Тоді за [71, лема 4.1] відображення f є або гомеоморфізмом в $\mathbb{R}^n$, або сталою в $\overline{\mathbb{R}^n}$, що і треба було довести. $\Box$

Лема 2.1.2. *Нехай D, D' – області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $b_0 \in D$, $b_0' \in D'$, і нехай $f_k : D \to D'$, $k = 1, 2, \ldots,$ – сім'я гомеоморфізмів області D на D' з умовою нормування $f_k(b_0) = b_0'$, $k = 1, 2, \ldots$. Припустимо, що кожне відображення f_k, $k = 1, 2, \ldots$ задовольняє співвідношення (2.10) в довільній точці $x_0 \in \overline{D}$ і деякою функцією $Q = Q_k(x) \geqslant 1$ такою, що*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(Q_k(x)\right) \frac{dm(x)}{\left(1+|x|^2\right)^n} \leqslant M_0 < \infty\,, \qquad k = 1, 2, \ldots. \qquad (2.21)$$

Нехай область D є локально зв'язною на своїй межі, а D' є QED-областю, яка містить не менше однієї скінченної межової точки. Якщо для деякого $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty\,, \qquad (2.22)$$

то кожне відображення f_k, $k = 1, 2, \ldots,$ продовжується по неперевності до відображення $f_k : \overline{D} \to \overline{D'}$ і, крім того, сім'я продовжених відображень $\overline{f}_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$.

Доведення. Одностайна неперервність сім'ї відображень $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ у внутрішніх точках області D є результатом [70, теорема 4.1]. Отже, треба довести можливість неперервного продовження на межу області D кожного f_k, $k=1,2,\ldots$, а також одностайну неперервність в межових точках продовжених відображень $\overline{f}_k$. Будемо вважати, що всі функції $Q_k(x)$, $k=1,2,\ldots$, продовжені тотожною одиницею зовні області D. Зафіксуємо точку $x_0\in\partial D$, і при кожних $\varepsilon_0<\delta(x_0):=\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$, $\varepsilon<\varepsilon_0$ розглянемо функцію $I_k(\varepsilon,\varepsilon_0)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_k(t)\,dt$, де

$$\psi_k(t)\quad=\quad\begin{cases}1/[tq_{k_{x_0}}^{\frac{1}{n-1}}(t)]\ , & t\in(\varepsilon,\varepsilon_0)\ ,\\ 0\ , & t\notin(\varepsilon,\varepsilon_0)\,,\end{cases}\tag{2.23}$$

крім того, $q_{k_{x_0}}$ визначено по формулі (2.16). Зауважимо, що $I_k(\varepsilon,\varepsilon_0)<\infty$ при всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Міркуючи аналогічно доведенню співвідношення (2.19), можна показати, що для всякого $0<b<\varepsilon_0$ і достатньо малих $0<a<b$

$$\int\limits_a^b\frac{dr}{rq_{k_{x_0}}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\geqslant\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{2\beta(x_0)M_0e}{\Omega_nb^n}}^{\frac{\Phi(0)b^n}{a^n}}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\,,\tag{2.24}$$

де $\beta(x_0)=(1+(b+|x_0|)^2)^n$. Зі співвідношення (2.24) і з огляду на співвідношення (2.22) випливає, що $I_k(\varepsilon,\varepsilon_0)>0$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0^{\prime})$ і деякому $0<\varepsilon_0^{\prime}<\varepsilon_0$. За допомогою прямих обчислень і теореми Фубіні (див. також [58, лема 7.4]) ми отримаємо, що

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}Q_k(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x)=\omega_{n-1}\cdot I_k(\varepsilon,\varepsilon_0)\,.$$

Тоді за [93, лема 3.7.1] знайдеться число $\widetilde{\varepsilon_0}=\widetilde{\varepsilon_0}(x_0)\in(0,\varepsilon_0)$ таке, що при кожному $\sigma\in(0,\widetilde{\varepsilon_0})$ и будь-якого континуума $E_1\subset B(x_0,\sigma)\cap D$ виконано нерівність

$$h(f_k(E_1))\leqslant\frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\left\{-\beta I_k(\sigma,\varepsilon_0)\cdot(\alpha(\sigma))^{-1/(n-1)}\right\}\,,\tag{2.25}$$

$$k=1,2,\ldots\,,$$

де величина $h(f_k(E_1)$ у лівій частині (2.25) визначена в (1.15),

$$\alpha(\sigma)=\left(1+\frac{\int\limits_{\widetilde{\varepsilon_0}}^{\varepsilon_0}\psi_k(t)\,dt}{\int\limits_{\sigma}^{\widetilde{\varepsilon_0}}\psi_k(t)\,dt}\right)^n\,, \qquad (2.26)$$

$\delta=\frac{1}{2}\cdot h\left(b_0',\partial D'\right)\,,$ α_n — деяка стала, що залежить тільки від $n,$ A — стала з означення QED-області D' у (1.68) і $\beta=\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Оскільки $q_{k_{x_0}}(t)\geqslant 1$ при майже всіх $t\in(0,\varepsilon_0),$ ми отримаємо, що

$$\int\limits_{\widetilde{\varepsilon_0}}^{\varepsilon_0}\psi_k(t)\,dt\leqslant\log\frac{\varepsilon_0}{\widetilde{\varepsilon_0}}:=C_1>0\,,\qquad k=1,2,\ldots\,. \qquad (2.27)$$

Міркуючи аналогічно доведенню співвідношення (2.19) і беручи до уваги (2.22), можна показати, що

$$\int\limits_{\sigma}^{\widetilde{\varepsilon_0}}\psi_k(t)\,dt\geqslant\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{2C_2(x_0)M_0e}{\Omega_n\widetilde{\varepsilon_0}^n}}^{\frac{\Phi(0)\widetilde{\varepsilon_0}^n}{\sigma^n}}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\geqslant 1\,,\qquad k=1,2,\ldots \qquad (2.28)$$

для деякого $\sigma_1\in(0,\widetilde{\varepsilon_0})$ і всіх $0<\sigma<\sigma_1,$ де $C_2(x_0)=(1+(\widetilde{\varepsilon_0}+|x_0|)^2)^n.$ З огляду на (2.25), (2.27) і (2.28) ми отримаємо, що

$$h(f_k(E_1))\leqslant\frac{\alpha_n}{\delta}\,\exp\left\{-\beta\cdot C_3\cdot\frac{1}{n}\int\limits_{\frac{2C_4(x_0)M_0e}{\Omega_n\varepsilon_0^n}}^{\frac{\Phi(0)\varepsilon_0^n}{\sigma^n}}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}}\right\} \qquad (2.29)$$

для всіх $k=1,2,\ldots,$ будь-якого $\sigma\in(0,\sigma_2)$ і деякого $0<\sigma_2<\sigma_1,$ де $C_3:=(1+C_1)^{-n/(n-1)}$ і $C_4(x_0):=(1+(\varepsilon_0+|x_0|)^2)^n>0$ – деяка стала. Завдяки співвідношенню (2.22), співвідношення (2.29) тягне за собою існування невід'ємної функції $\Delta=\Delta(\sigma),$ такої що

$$h(f_k(E_1))\leqslant\Delta(\sigma)\to 0\,,\quad\sigma\to 0\,,\quad k=1,2,\ldots\,. \qquad (2.30)$$

Зауважимо, що QED-області мають так звану сильно досяжну межу (див., напр., [58, зауваження 13.10]). Тоді можливість продовження f_k до неперервного відображення $\overline{f}_k:\overline{D}\to\overline{D'}$ є результатом [84, теорема 2].

Доведемо одностайну неперервність сім'ї $\{\overline{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в точках ∂D. Припустимо супротивне, а саме, що сім'я відображень $\{\overline{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ не є одностайно неперервною в точці $x_0\in\partial D$. Можна вважати $x_0\ne\infty$. Тоді знайдеться число $a>0$ таке, що для кожного $m=1,2,\ldots$ існує точка $x_m\in\overline{D}$ і елемент $\overline{f}_{k_m}$ такі, що $|x_0-x_m|<1/m$ і

$$h(\overline{f}_{k_m}(x_m),\overline{f}_{k_m}(x_0))\geqslant a\,. \qquad (2.31)$$

Оскільки відображення f_k мають неперервне продовження на ∂D, ми також можемо вважати, що $x_m\in D$, $m=1,2,\ldots$. Крім того, з огляду на неперервність $\overline{f}_{k_m}$ в точці x_0 знайдеться послідовність $x_m'\in D$ така, що $h(\overline{f}_{k_m}(x_m'),\overline{f}_{k_m}(x_0))\leqslant a/2$. Тоді з (2.31) з огляду на нерівність трикутника випливає, що

$$h(f_{k_m}(x_m),f_{k_m}(x_m'))\geqslant a/2\,. \qquad (2.32)$$

З огляду на локальну зв'язність області D в точці x_0, знайдеться послідовність відкритих околів V_m точки x_0 така, що множини $W_m:=D\cap V_m$ є зв'язними і $W_m\subset B(x_0,2^{-m})$. Переходячи до підпослідовності, якщо це необхідно, можна вважати, що $x_m,x_m'\in W_m$. Зафіксуємо $0<\varepsilon_0<\sup\limits_{x\in D}|x-x_0|$. Можна вважати, що $B(x_0,2^{-m})\subset B(x_0,\varepsilon_0)$ при всіх $m=1,2,\ldots$. Оскільки W_m відкрита і зв'язна, вона і лінійно зв'язна (див., напр., [58, пропозиція 13.1]). Отже, точки x_m і x_m' можна з'єднати кривою γ_m і W_m. Покладемо $E_m:=|\gamma_m|$, де, як зазвичай, для кривої $\gamma:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n$ ми позначаємо через $|\gamma|=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \exists\, t\in[a,b]:\gamma(t)=x\}$ *носій* кривої γ. Тоді за співвідношенням (2.30)

$$h(f_{k_m}(E_m))\leqslant\Delta(2^{-m})\rightarrow 0\,,\quad m\rightarrow\infty\,.$$

Останнє співвідношення суперечить (2.32), що і завершує доведення. $\square$

2.1.3. Компактність розв'язків рівнянь Бельтрамі з гідродинамічним нормуванням

Доведення теореми 2.1.1. **I.** Передусім доведемо, що сім'я $\mathfrak{F}_{\Phi}^{\mathcal{M}}(K)$ є одностайно неперервною. Зафіксуємо $f\in\mathfrak{F}_{\Phi}^{\mathcal{M}}(K)$, довільний компакт $C\subset\mathbb{C}$

і покладемо $\widetilde{f}=\frac{1}{f(1/z)}$. Оскільки $f(z)=z+o(1)$ при $z\to\infty$, то $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$. Тоді $\widetilde{f}(0)=0$. Оскільки $f(z)=z+o(1)$ при $z\to\infty$, існує окіл U початку координат і функція $\varepsilon:U\to\mathbb{C}$ такі, що $f(1/z)=1/z+\varepsilon(1/z)$, де $z\in U$ і $\varepsilon(1/z)\to 0$ при $z\to 0$. Отже, при достатньо малому $\Delta z\in\mathbb{C}$ ми будемо мати, що

$$\frac{\widetilde{f}(\Delta z)-\widetilde{f}(0)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\cdot\frac{1}{1/(\Delta z)+\varepsilon(1/\Delta z)}=\frac{1}{1+(\Delta z)\cdot\varepsilon(1/\Delta z)}\to 1$$

при $z\to 0$. Це доводить, що існує $\widetilde{f}'(0)$, при цьому, $\widetilde{f}'(0)=1$. Оскільки зовні K функція μ дорівнює нулю, відображення f є конформним в деякому околі $V:=\mathbb{C}\setminus B(0,1/r_0)$ точки нескінченність, причому, число $1/r_0$ залежить тільки від K і $K\subset B(0,1/r_0)$. Без обмеження загальності можна вважати, що також і компакт C задовольняє умову $C\subset B(0,1/r_0)$. В такому випадку, відображення $\widetilde{f}=\frac{1}{f(1/z)}$ є конформним у кулі $B(0,r_0)$, при цьому відображення $F(z):=\frac{1}{r_0}\cdot\widetilde{f}(r_0z)$ є гомеоморфізмом одиничного круга у $\mathbb{C}$ і задовольняє умови $F(0)=0$, $F'(1)=1$. За теоремою Кебе про $1/4$ (див. напр., [18, теорема 1.3]) $F(\mathbb{D})\supset B(0,1/4)$. Тоді

$$\widetilde{f}(B(0,r_0))\supset B(0,r_0/4)\,. \tag{2.33}$$

Зі співвідношення (2.33) випливає, що

$$(1/f)(\overline{\mathbb{C}}\setminus B(0,1/r_0))\supset B(0,r_0/4)\,. \tag{2.34}$$

З урахуванням (2.34) покажемо, що

$$f(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{B(0,1/r_0)})\supset\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{B(0,4/r_0)}\,. \tag{2.35}$$

Дійсно, нехай $y\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{B(0,4/r_0)}$, тоді $\frac{1}{y}\in B(0,r_0/4)$. За співвідношенням (2.34) $\frac{1}{y}=(1/f)(x)$, $x\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{B(0,1/r_0)}$. Тоді $y=f(x)$, $x\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{B(0,1/r_0)}$, що і доводить (2.35).

Оскільки f – гомеоморфізм у $\overline{\mathbb{C}}\setminus B(0,1/r_0)$, то зі співвідношення (2.35) випливає, що $f(B(0,1/r_0))\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus B(0,4/r_0)$. Покладемо $\Delta:=h(\overline{\mathbb{C}}\setminus B(0,4/r_0))$, де $h(\overline{\mathbb{C}}\setminus B(0,4/r_0))$ – хордальний діаметр множини $\overline{\mathbb{C}}\setminus B(0,4/r_0)$. За [54, теорема 3.1] кожне відображення f є кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\mathbb{C}$ при

$Q = K_\mu(z)$, де μ визначається зі співвідношення (2.7), а K_μ визначено в (2.2). В такому випадку, сім'я відображень $\mathfrak{F}_\Phi^{\mathcal{M}}(K)$ є одностайно неперервною в $B(0, 1/r_0)$ за [70, теорема 4.1]. Нехай тепер $f_n \in \mathfrak{F}_\Phi^{\mathcal{M}}(K)$, $n = 1, 2, \ldots$. За теоремою Арцела-Асколі (див., напр., [99, теорема 20.4]) існує підпослідовність $f_{n_k}(z)$ послідовності f_n, $k = 1, 2, \ldots$, а також неперервне відображення $f : B(0, 1/r_0) \to \overline{\mathbb{C}}$ такі, що f_{n_k} локально рівномірно збігається до відображення f у $B(0, 1/r_0)$ при $k \to \infty$. Зокрема, оскільки компакт C належить $B(0, 1/r_0)$, послідовність f_{n_k} збігається до f рівномірно на C. Оскільки компакт C був обраний довільним, ми встановили, що сім'я відображень f_{n_k} збігається до відображення f локально рівномірно.

II. Для завершення доведення теореми 2.1.1 залишилось встановити, що $f \in \mathfrak{F}_\Phi^{\mathcal{M}}(K)$. Передусім доведемо, що граничне відображення f задовольняє умову $f(z) = z + o(1)$ при $z \to \infty$. Зауважимо, що сім'я відображень $F_{n_k}(z) := \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{f_{n_k}(\frac{1}{r_0 z})}$ є компактною в одиничному крузі, тому що це сім'я, яка належить відомому класу S, що складається з конформних відображень F одиничного круга, які задовольняють умови $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ (див. [18, теорема 1.10]). Без обмеження загальності можна вважати, що сама послідовність F_{n_k} є локально рівномірно збіжною в $\mathbb{D}$. Тоді функція $F(z) = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{f(\frac{1}{r_0 z})}$ знову належить до класу S. Випишемо розклад в ряд Тейлора функцій F_{n_k} і F в околі нуля. Будемо мати:

$$F_{n_k}(z) = z + c_k z^2 + z^2 \cdot \varepsilon_k(z)\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{2.36}$$

$$F(z) = z + c_0 z^2 + z^2 \cdot \varepsilon_0(z)\,, \tag{2.37}$$

де $\varepsilon_k(z)$ і $\varepsilon_0(z)$ прямують до нуля при $z \to 0$. Зі співвідношень (2.36) і (2.37) випливає, що

$$f_{n_k}(t) = \frac{r_0 t^2}{r_0 t + c_k + \varepsilon_k\left(\frac{1}{r_0 t}\right)}\,, \tag{2.38}$$

$$f_{n_k}(t) - t = -\frac{c_k + \varepsilon_k\left(\frac{1}{r_0 t}\right)}{r_0 + \frac{c_k}{t} + \frac{\varepsilon_k\left(\frac{1}{r_0 t}\right)}{t}}\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$

$$f(t)=\frac{r_0t^2}{r_0t+c_0+\varepsilon_0\left(\frac{1}{r_0t}\right)}\,,\quad f(t)-t=-\frac{c_0+\varepsilon_0\left(\frac{1}{r_0t}\right)}{r_0+\frac{c_0}{t}+\frac{\varepsilon_0\left(\frac{1}{r_0t}\right)}{t}}\,. \tag{2.39}$$

Зокрема, з другого співвідношення у (2.38) переходом до границі при $t\to\infty$ отримаємо, що $f_{n_k}(t)-t\to-\frac{c_k}{r_0}$. Оскільки за умовою $f_{n_k}(t)-t\to 0$ при $t\to\infty$, маємо: $c_k=0$. За теоремою Вейерштрасса про збіжність коефіцієнтів ряду Тейлора (див., напр., [36, теорема 1.1.I]), маємо: $c_k=0\to c_0$ при $k\to\infty$. Отже, $c_0=0$ в (2.39), тобто, відображення f також має гідродинамічне нормування: $f(z)=z+o(1)$ при $z\to\infty$.

Тепер покажемо, що f – гомеоморфізм комплексної площини. Покладемо $\mu_k:=\mu_{f_{n_k}}$. За [54, теорема 3.1] кожне відображення f_{n_k} є кільцевим Q-гомеоморфізмом в кожній точці $z_0\in\mathbb{C}$ при $Q=K_{\mu_k}(z)$. За умовою існує число $M_0>0$ таке, що

$$\mathcal{M}(\mathbb{C})\leqslant M_0\,, \tag{2.40}$$

де $\mathcal{M}$ – функція зі співвідношення (2.5). З огляду на лему 2.1.1 має місце наступна альтернатива: або f – гомеоморфізм з D у $\mathbb{C}$, або f – стала в $\overline{\mathbb{C}}$. За доведеним на кроці **I** f є гомеоморфізмом в деякому околі нескінченності, отже, f – гомеоморфізм всієї комплексної площини, який приймає тільки скінченні комплексні значення.

Тоді за [52, лема 1, теорема 1] $f\in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{C})$, крім того, f є регулярним розв'язком рівняння (2.7) при деякій функції $\mu:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$, причому для відповідної функції K_μ виконується співвідношення виду (2.5). За теоремою Герінга-Лехто відображення f є майже скрізь диференційовним (див. [50, теорема III.3.1]). Отже, за теоремою 3.1 у [74] $\mu(z)=0$ при всіх $z\in\mathbb{C}\setminus K$. Звідси, $f\in\mathfrak{F}_\Phi^{\mathcal{M}}(K)$. $\Box$

2.1.4. Одностайна неперервність сімей відображень з оберненою нерівністю Полецького

В цьому підрозділі ми маємо справу з відображеннями $f:D\to\mathbb{R}^n$ області $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, які задовольняють умови (1.11)–(1.12). Основна мета –

дещо узагальнити результати, доведені у статті [8]. Зокрема, це необхідно для доведення ключових теорем компактності класів відображень з наступного підрозділу.

Для чисел $\delta > 0$, $M_0 > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і континуума $A \subset D'$ позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,M_0}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на D', для яких знайдеться $Q = Q_f \in L^1(D')$, таке що $\int\limits_{D'} Q(y)\,dm(y) \leqslant M_0$, причому для кожного $y_0 \in D'$ виконано умову (1.11) і, крім того, $h(f^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta$. Аналог наступного твердження доведений раніше для випадку фіксованої функції Q (див. [8, теорема 1.2]).

Теорема 2.1.3. *Припустимо, що область D має слабко плоску межу. Якщо $Q \in L^1(D')$ і область D' локально зв'язна на своїй межі, то будь-яке $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,M_0}(D, D')$ неперервно продовжується до відображення $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ і сім'я $\mathfrak{S}_{\delta,A,M_0}(\overline{D}, \overline{D'})$, яка складається з усіх продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, одностайно неперервна в $\overline{D}$.*

Зауваження 2.1.2. В теоремі 2.1.3 одностайну неперервність треба розуміти відносно хордальної метрики, тобто, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ таке, що з умов $h(x, x_0) < \delta$ і $x \in D$ випливає нерівність $h(\overline{f}(x), \overline{f}(x_0)) < \varepsilon$ при всіх $\overline{f} \in \mathfrak{S}_{\delta,A,M_0}(\overline{D}, \overline{D'})$.

Доведення теореми 2.1.3. Нехай $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,M_0}(D, D')$. За теоремою 1.1.1 відображення f продовжується до неперервного відображення $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$. Одностайна неперервність сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,M_0}(\overline{D}, \overline{D'})$ в D є твердженням [8, теорема 1.1]. Залишилось встановити її одностайну неперервність на ∂D.

Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що знайдеться $x_0 \in \partial D$, число $\varepsilon_0 > 0$, послідовність $x_m \in \overline{D}$, яка збігається до точки x_0 і відповідні відображення $\overline{f}_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,M_0}(\overline{D}, \overline{D})$ такі, що

$$h(\overline{f}_m(x_m), \overline{f}_m(x_0)) \geqslant \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.41}$$

Покладемо $f_m := \overline{f}_m|_D$. Оскільки f_m має неперервне продовження на ∂D, можна вважати, що $x_m \in D$. Отже, $\overline{f}_m(x_m) = f_m(x_m)$. Крім цього, знайдеться послідовність $x'_m \in D$ така, що $x'_m \to x_0$ при $m \to \infty$ і

$$h(f_m(x'_m), \overline{f}_m(x_0)) \to 0$$

при $m \to \infty$. Оскільки простір $\overline{\mathbb{R}^n}$ компактний, ми можемо вважати, що $f_m(x_m)$ і $\overline{f}_m(x_0)$ збігаються при $m \to \infty$. Нехай $f_m(x_m) \to \overline{x_1}$ і $\overline{f}_m(x_0) \to \overline{x_2}$ при $m \to \infty$. За неперервністю метрики в (2.41), $\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$. Без обмеження загальності, можна вважати, що $\overline{x_1} \neq \infty$. Оскільки відображення f_m замкнуті, то вони зберігають межу (див. [100, теорема 3.3]), тому $\overline{x_2} \in \partial D$. Нехай $\widetilde{x_1}$ і $\widetilde{x_2}$ різні точки континуума A, жодна з яких не співпадає з $\overline{x_1}$. За [90, лема 2.1] (див. також [86, лема 2.1]) дві пари точок $\widetilde{x_1}$, $\overline{x_1}$ і $\widetilde{x_2}$, $\overline{x_2}$ можна з'єднати кривими $\gamma_1 : [0,1] \to \overline{D'}$ і $\gamma_2 : [0,1] \to \overline{D'}$ такими, що $|\gamma_1| \cap |\gamma_2| = \varnothing$, $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in D'$ при $t \in (0,1)$, $\gamma_1(0) = \widetilde{x_1}$, $\gamma_1(1) = \overline{x_1}$, $\gamma_2(0) = \widetilde{x_2}$ і $\gamma_2(1) = \overline{x_2}$. Оскільки D' локально зв'язна на $\partial D'$, знайдуться околи U_1 і U_2 точок $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}$, чиї замикання не перетинаються, причому, множини $W_i := D' \cap U_i$ лінійно зв'язні. Без обмеження загальності можна вважати, що $\overline{U_1} \subset B(\overline{x_1}, \delta_0)$ і

$$\overline{B(\overline{x_1}, \delta_0)} \cap |\gamma_2| = \varnothing = \overline{U_2} \cap |\gamma_1|\,, \quad \overline{B(\overline{x_1}, \delta_0)} \cap \overline{U_2} = \varnothing\,. \tag{2.42}$$

Можна також вважати, що $f_m(x_m) \in W_1$ і $f_m(x'_m) \in W_2$ при всіх $m \in \mathbb{N}$. Нехай a_1 і a_2 – дві різні точки, які належать $|\gamma_1| \cap W_1$ і $|\gamma_2| \cap W_2$, крім того, нехай $0 < t_1, t_2 < 1$ такі, що $\gamma_1(t_1) = a_1$ і $\gamma_2(t_2) = a_2$. З'єднаємо точки a_1 і $f_m(x_m)$ кривою $\alpha_m : [t_1, 1] \to W_1$ такою, що $\alpha_m(t_1) = a_1$ і $\alpha_m(1) = f_m(x_m)$. Аналогічно, з'єднаємо a_2 і $f_m(x'_m)$ кривою $\beta_m : [t_2, 1] \to W_2$, такою що $\beta_m(t_2) = a_2$ і $\beta_m(1) = f_m(x'_m)$ (див. рисунок 2.1). Покладемо

$$C_m^1(t) = \left\{\begin{array}{rr} \gamma_1(t), & t \in [0, t_1], \\ \alpha_m(t), & t \in [t_1, 1] \end{array}\right., \qquad C_m^2(t) = \left\{\begin{array}{rr} \gamma_2(t), & t \in [0, t_2], \\ \beta_m(t), & t \in [t_2, 1] \end{array}\right..$$

Нехай D_m^1 і D_m^2 – повні підняття кривих C_m^1 і C_m^2 при відображенні f_m з початками в точках x_m і x'_m, відповідно (такі підняття існують за [100, лема 3.7]). Зокрема, через умову $h(f_m^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta > 0$, яка приймає участь в визначенні класу $\mathfrak{S}_{\delta, A, M_0}(D, D')$, кінці кривих D_m^1 і D_m^2, які в майбутньому будемо позначати b_m^1 і b_m^2, віддалені від межі D на відстань, не меншу за δ.

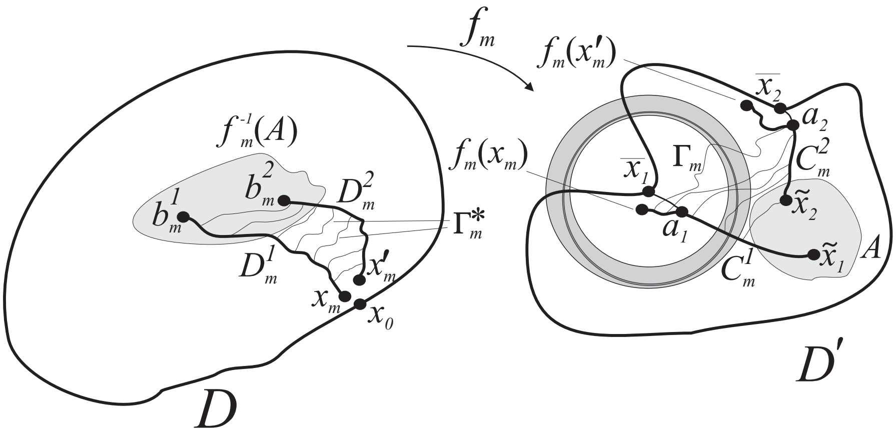

Рис. 2.1. До доведення теореми 2.1.3

Як завжди, позначимо через $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ носії кривих C_m^1 і C_m^2, відповідно. Покладемо

$$l_0=\min\{\mathrm{dist}\,(|\gamma_1|,|\gamma_2|),\mathrm{dist}\,(|\gamma_1|,U_2\setminus\{\infty\})\}$$

і розглянемо покриття $A_0:=\bigcup\limits_{x\in|\gamma_1|}B(x,l_0/4)$ кривої $|\gamma_1|$ за допомогою куль. Оскільки $|\gamma_1|$ – компактна множина, можна вибрати скінченне число індексів $1\leqslant N_0<\infty$ і відповідні точки $z_1,\ldots,z_{N_0}\in|\gamma_1|$ так, що $|\gamma_1|\subset B_0:=\bigcup\limits_{i=1}^{N_0}B(z_i,l_0/4)$. У цьому випадку,

$$|C_m^1|\subset U_1\cup|\gamma_1|\subset B(\overline{x_1},\delta_0)\cup\bigcup\limits_{i=1}^{N_0}B(z_i,l_0/4)\,.$$

Нехай Γ_m – сім'я всіх кривих, які з'єднують $|C_m^1|$ і $|C_m^2|$ в D'. Тоді ми маємо, що

$$\Gamma_m=\bigcup\limits_{i=0}^{N_0}\Gamma_{mi}\,, \tag{2.43}$$

де Γ_{mi} – сім'я всіх кривих $\gamma:[0,1]\rightarrow D'$ таких, що $\gamma(0)\in B(z_i,l_0/4)\cap|C_m^1|$ і $\gamma(1)\in|C_2^m|$ при $1\leqslant i\leqslant N_0$. Аналогічно, нехай Γ_{m0} – сім'я кривих $\gamma:[0,1]\rightarrow D'$ таких, що $\gamma(0)\in B(\overline{x_1},\delta_0)\cap|C_m^1|$ і $\gamma(1)\in|C_2^m|$. За (2.42) знайдеться $\sigma_0>\delta_0>0$ таке, що

$$\overline{B(\overline{x_1},\sigma_0)}\cap|\gamma_2|=\varnothing=\overline{U_2}\cap|\gamma_1|\,,\quad \overline{B(\overline{x_1},\sigma_0)}\cap\overline{U_2}=\varnothing\,.$$

Користуючись [49, теорема 1.I.5.46], ми можемо показати, що

$$\Gamma_{m0}>\Gamma(S(\overline{x_1},\delta_0),S(\overline{x_1},\sigma_0),A(\overline{x_1},\delta_0,\sigma_0))\,,$$

$$\Gamma_{mi} > \Gamma(S(z_i, l_0/4), S(z_i, l_0/2), A(z_i, l_0/4, l_0/2))\,. \qquad (2.44)$$

Можна підібрати $x_* \in D'$, $\delta_* > 0$ і $\sigma_* > 0$ такі, що $A(x_*, \delta_*, \sigma_*) \subset A(\overline{x_1}, \delta_0, \sigma_0)$, тому

$$\Gamma(S(\overline{x_1}, \delta_0), S(\overline{x_1}, \sigma_0), A(\overline{x_1}, \delta_0, \sigma_0)) >$$

$$> \Gamma(S(x_*, \delta_*), S(x_*, \sigma_*), A(x_*, \delta_*, \sigma_*))\,. \qquad (2.45)$$

Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/l_0, & t \in [l_0/4, l_0/2], \\ 0, & t \notin [l_0/4, l_0/2]\,, \end{cases}$$

$$\eta_0(t) = \begin{cases} 1/(\sigma_* - \delta_*), & t \in [\delta_*, \sigma_*], \\ 0, & t \notin [\delta_*, \sigma_*]\,. \end{cases}$$

Позначимо $\Gamma_m^* := \Gamma(|D_m^1|, |D_m^2|, D)$. Зауважимо, що $f_m(\Gamma_m^*) \subset \Gamma_m$. Тоді через (2.43), (2.44) і (2.45)

$$\Gamma_m^* > \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} \Gamma_{f_m}(z_i, l_0/4, l_0/2)\right) \cup \Gamma_{f_m}(x_*, \delta_*, \sigma_*)\,. \qquad (2.46)$$

Оскільки відображення f_m задовольняють співвідношення (1.11) при $Q = Q_m$ в D', з (2.46) отримаємо, що

$$M(\Gamma_m^*) \leqslant (4^n N_0/l_0^n + (1/(\sigma_* - \delta_*))^n)\|Q_m\|_1 \leqslant c < \infty\,. \qquad (2.47)$$

Покажемо, що співвідношення (2.47) суперечить умові слабкої плоскості відображеної області. Справді, за побудовою

$$h(|D_m^1|) \geqslant h(x_m, b_m^1) \geqslant (1/2)\cdot h(f_m^{-1}(A), \partial D) > \delta/2\,,$$

$$h(|D_m^2|) \geqslant h(x_m', b_m^2) \geqslant (1/2)\cdot h(f_m^{-1}(A), \partial D) > \delta/2 \qquad (2.48)$$

при всіх $m \geqslant M_0$ і для деякого $M_0 \in \mathbb{N}$. Покладемо $U := B_h(x_0, r_0) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(y, x_0) < r_0\}$, де $0 < r_0 < \delta/4$ і число δ стосується співвідношення (2.48). Зауважимо, що $|D_m^1| \cap U \neq \varnothing \neq |D_m^1| \cap (D \setminus U)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$, оскільки $h(|D_m^1|) \geqslant \delta/2$ і $x_m \in |D_m^1|$, $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$. Аналогічно, $|D_m^2| \cap U \neq \varnothing \neq |D_m^2| \cap (D \setminus U)$. Оскільки $|D_m^1|$ і $|D_m^2|$ – континууми,

$$|D_m^1| \cap \partial U \neq \varnothing, \quad |D_m^2| \cap \partial U \neq \varnothing\,, \qquad (2.49)$$

див., напр., [49, теорема 1.I.5.46]. Оскільки ∂D слабко плоска, то для $P := c > 0$, де c – число зі співвідношення (2.47), знайдеться окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що

$$M(\Gamma(E, F, D)) > c \tag{2.50}$$

для будь-яких континуумів $E, F \subset D$ таких, що $E \cap \partial U \neq \varnothing \neq E \cap \partial V$ і $F \cap \partial U \neq \varnothing \neq F \cap \partial V$. Покажемо, що для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$

$$|D_m^1| \cap \partial V \neq \varnothing, \quad |D_m^2| \cap \partial V \neq \varnothing\,. \tag{2.51}$$

Справді, $x_m \in |D_m^1|$ і $x_m' \in |D_m^2|$, де $x_m, x_m' \to x_0 \in V$ при $m \to \infty$. У такому випадку, $|D_m^1| \cap V \neq \varnothing \neq |D_m^2| \cap V$ для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що $h(V) \leqslant h(U) \leqslant 2r_0 < \delta/2$. За (2.48) $h(|D_m^1|) > \delta/2$. Отже, $|D_m^1| \cap (D \setminus V) \neq \varnothing$ і, отже, $|D_m^1| \cap \partial V \neq \varnothing$ (див., напр., [49, теорема 1.I.5.46]). Аналогічно, $h(V) \leqslant h(U) \leqslant 2r_0 < \delta/2$. З (2.48) випливає, що $h(|D_m^2|) > \delta/2$, отже, $|D_m^2| \cap (D \setminus V) \neq \varnothing$. За [49, теорема 1.I.5.46] ми отримаємо, що $|D_m^2| \cap \partial V \neq \varnothing$. Таким чином, співвідношення (2.51) встановлене. Поєднуючи співвідношення (2.49), (2.50) і (2.51), ми отримаємо, що $M(\Gamma_m^*) = M(\Gamma(|D_m^1|, |D_m^2|, D)) > c$. Остання умова суперечить (2.47), що і доводить теорему. $\Box$

Наступна лема також доводилася раніше в дещо інших ситуаціях, зокрема, випадку фіксованої функції Q (див., напр., [8, лема 6.1], [88, лема 4.1] та [90, лема 4.1]).

Лема 2.1.3. *Нехай $n \geqslant 2$, D і D' – області в $\mathbb{R}^n$, причому, D має слабко плоску межу, жодна компонента зв'язності якої не вироджується в точку, а область D' локально зв'язна на своїй межі. Нехай також A – невироджений континуум в D' і $\delta > 0$. Припустимо, f_m – послідовність відкритих, дискретних і замкнених відображень області D на D' з наступною властивістю: для кожного $m = 1, 2, \ldots$ знайдеться континуум $A_m \subset D$, $m = 1, 2, \ldots$, такий, що $f_m(A_m) = A$ і $h(A_m) \geqslant \delta > 0$. Якщо для кожного $m = 1, 2, \ldots$ відображення f_m задовольняє співвідношення (1.11) в довільній точці $y_0 \in D'$ при деякому $Q = Q_m$, $m = 1, 2, \ldots$, причому, $\int\limits_{D'} Q(y)\, dm(y) \leqslant M_0$ для всіх $m = 1, 2, \ldots$ і деякої сталої $M_0 > 0$, то* *знайдеться* $\delta_1 > 0$ *таке, що*

$$h(A_m, \partial D) > \delta_1 > 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N}\,.$$

Доведення. Через компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ межа області D не порожня і є компактом, так що відстань $h(A_m, \partial D)$ коректно визначена.

Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що висновок леми не є вірним. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдеться номер $m = m_k$ такий, що $h(A_{m_k}, \partial D) < 1/k$. Можна вважати, що послідовність m_k зростає по k. Оскільки A_{m_k} – компакт, то знайдуться $x_k \in A_{m_k}$ і $y_k \in \partial D$ такі, що $h(A_{m_k}, \partial D) = h(x_k, y_k) < 1/k$ (див. рисунок 2.2). Оскільки ∂D – компактна

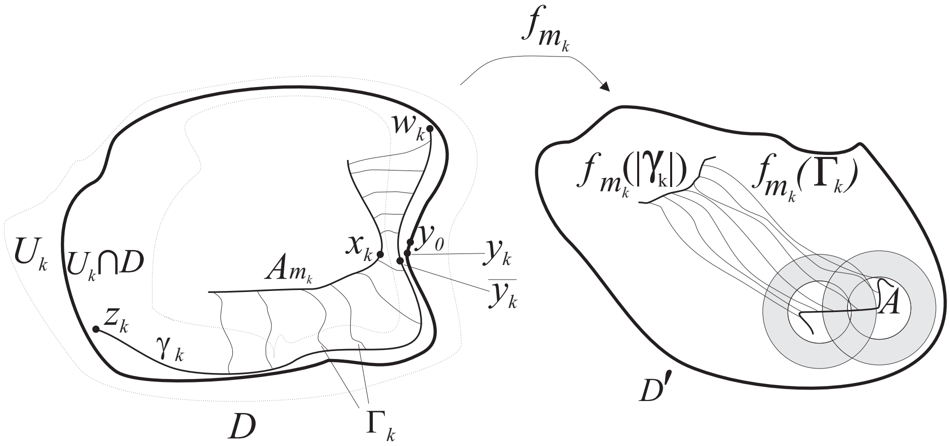

Рис. 2.2. До доведення леми 2.1.3

множина, ми можемо вважати, що $y_k \to y_0 \in \partial D$ при $k \to \infty$; тоді також $x_k \to y_0 \in \partial D$ при $k \to \infty$. Нехай K_0 – компонента зв'язності ∂D, яка містить точку y_0. Очевидно, K_0 – континуум в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Оскільки ∂D є слабко плоскою, за теоремою 1.1.1 відображення f_{m_k} має неперервне продовження $\overline{f}_{m_k} : \overline{D} \to \overline{D'}$. Більш того, відображення $\overline{f}_{m_k}$ є рівномірно неперервним у $\overline{D}$ при кожному фіксованому k, оскільки $\overline{f}_{m_k}$ неперервне на компакті $\overline{D}$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) < 1/k$ таке, що

$$h(\overline{f}_{m_k}(x), \overline{f}_{m_k}(x_0)) < \varepsilon \tag{2.52}$$

$$\forall\, x, x_0 \in \overline{D}, \quad h(x, x_0) < \delta_k\,, \quad \delta_k < 1/k\,.$$

Оберемо $\varepsilon > 0$ таким, щоб

$$\varepsilon < (1/2) \cdot h(\partial D', A)\,. \tag{2.53}$$

Позначимо $B_h(x_0, r) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, x_0) < r\}$. Для фіксованого $k \in \mathbb{N}$, покладемо

$$B_k := \bigcup_{x_0 \in K_0} B_h(x_0, \delta_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Оскільки B_k – окіл континуума K_0, за [40, лема 2.2] знайдеться окіл U_k множини K_0, такий, що $U_k \subset B_k$ і $U_k \cap D$ зв'язна. Можна вважати, що U_k – відкрита, так що $U_k \cap D$ є лінійно зв'язною (див. [58, пропозиція 13.1]). Нехай $h(K_0) = m_0$. Тоді знайдуться $z_0, w_0 \in K_0$ такі, що $h(K_0) = h(z_0, w_0) = m_0$. Отже, знайдуться послідовності $\overline{y_k} \in U_k \cap D$, $z_k \in U_k \cap D$ і $w_k \in U_k \cap D$ такі, що $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ і $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$. Можна вважати, що

$$h(z_k, w_k) > m_0/2 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{2.54}$$

Оскільки множина $U_k \cap D$ лінійно зв'язна, ми можемо з'єднати точки z_k, $\overline{y_k}$ і w_k, використовуючи деяку криву $\gamma_k \in U_k \cap D$. Як завжди, ми позначаємо через $|\gamma_k|$ носій (образ) кривої γ_k в області D. Тоді $f_{m_k}(|\gamma_k|)$ – компактна множина в D'. Якщо $x \in |\gamma_k|$, то знайдеться $x_0 \in K_0$ таке, що $x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафіксуємо довільне $\omega \in A \subset D$. Оскільки $x \in |\gamma_k|$ і, більше того, x – внутрішня точка D, ми можемо використовувати запис $f_{m_k}(x)$ замість $\overline{f}_{m_k}(x)$. Зі співвідношень (2.52) і (2.53), а також за нерівністю трикутника, ми отримаємо, що

$$\begin{gathered} h(f_{m_k}(x), \omega) \geqslant h(\omega, \overline{f}_{m_k}(x_0)) - h(\overline{f}_{m_k}(x_0), f_{m_k}(x)) \geqslant \\ \geqslant h(\partial D', A) - (1/2)\cdot h(\partial D', A) = (1/2)\cdot h(\partial D', A) > \varepsilon \end{gathered} \tag{2.55}$$

для достатньо великих $k \in \mathbb{N}$. Переходячи до $\inf$ в (2.55) по всіх $x \in |\gamma_k|$ і $\omega \in A$, ми отримаємо, що $h(f_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки $h(x, y) \leqslant |x - y|$ для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$, звідси випливає, що

$$\operatorname{dist}(f_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon, \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots\,. \tag{2.56}$$

Покриємо множину A кулями $B(x, \varepsilon/4)$, $x \in A$. Оскільки A компакт, ми можемо вважати, що $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N_0} B(x_i, \varepsilon/4)$, $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, N_0$, $1 \leqslant N_0 < \infty$. За означенням, N_0 залежить тільки від A, зокрема, N_0 не залежить від k. Покладемо

$$\Gamma_k := \Gamma(A_{m_k}, |\gamma_k|, D)\,. \tag{2.57}$$

Нехай $\Gamma_{ki}:=\Gamma_{f_{m_k}}(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2)$, іншими словами, Γ_{ki} складається з усіх кривих $\gamma:[0,1]\rightarrow D$, таких що $f_{m_k}(\gamma(0))\in S(x_i,\varepsilon/4)$, $f_{m_k}(\gamma(1))\in S(x_i,\varepsilon/2)$ і $\gamma(t)\in A(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2)$ при $0<t<1$. Покажемо, що

$$\Gamma_k>\bigcup_{i=1}^{N_0}\Gamma_{ki}\,. \tag{2.58}$$

Справді, нехай $\widetilde{\gamma}\in\Gamma_k$, тобто, $\widetilde{\gamma}:[0,1]\rightarrow D$, $\widetilde{\gamma}(0)\in A_{m_k}$, $\widetilde{\gamma}(1)\in|\gamma_k|$ і $\widetilde{\gamma}(t)\in D$ при $0\leqslant t\leqslant 1$. Тоді $\gamma^*:=f_{m_k}(\widetilde{\gamma})\in\Gamma(A,f_{m_k}(|\gamma_k|),D')$. Оскільки кулі $B(x_i,\varepsilon/4)$, $1\leqslant i\leqslant N_0$, утворюють покриття компакта A, знайдеться $i\in\mathbb{N}$ таке, що $\gamma^*(0)\in B(x_i,\varepsilon/4)$ і $\gamma^*(1)\in f_{m_k}(|\gamma_k|)$. За співвідношенням (2.56), $|\gamma^*|\cap B(x_i,\varepsilon/4)\neq\varnothing\neq|\gamma^*|\cap(D'\setminus B(x_i,\varepsilon/4))$. Отже, за [49, теорема 1.I.5.46] знайдеться $0<t_1<1$ таке, що $\gamma^*(t_1)\in S(x_i,\varepsilon/4)$. Можна вважати, що $\gamma^*(t)\notin B(x_i,\varepsilon/4)$ при $t>t_1$. Покладемо $\gamma_1:=\gamma^*|_{[t_1,1]}$. З (2.56) випливає, що $|\gamma_1|\cap B(x_i,\varepsilon/2)\neq\varnothing\neq|\gamma_1|\cap(D\setminus B(x_i,\varepsilon/2))$. Отже, за [49, теорема 1.I.5.46] знайдеться $t_1<t_2<1$ таке, що $\gamma^*(t_2)\in S(x_i,\varepsilon/2)$. Можна вважати, що $\gamma^*(t)\in B(x_i,\varepsilon/2)$ при всіх $t<t_2$. Вважаючи $\gamma_2:=\gamma^*|_{[t_1,t_2]}$, зауважимо, що крива γ_2 є підкривою γ^*, яка належить $\Gamma(S(x_i,\varepsilon/4),S(x_i,\varepsilon/2),A(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2))$.

Остаточно, $\widetilde{\gamma}$ має підкриву $\widetilde{\gamma_2}:=\widetilde{\gamma}|_{[t_1,t_2]}$, таку, що $f_{m_k}\circ\widetilde{\gamma_2}=\gamma_2$, причому, $\gamma_2\in\Gamma(S(x_i,\varepsilon/4),S(x_i,\varepsilon/2),A(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2))$. Отже, співвідношення (2.58) встановлене. Покладемо

$$\eta(t)=\begin{cases} 4/\varepsilon, & t\in[\varepsilon/4,\varepsilon/2],\\ 0, & t\notin[\varepsilon/4,\varepsilon/2]\,.\end{cases}$$

Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (1.12) при $r_1=\varepsilon/4$ і $r_2=\varepsilon/2$. Оскільки відображення f_{m_k} задовольняє співвідношення (1.11) при $Q=Q_{m_k}$, $k=1,2,\ldots,$ то припускаючи тут $y_0=x_i$, отримаємо:

$$M(\Gamma_{f_{m_k}}(x_i,\varepsilon/4,\varepsilon/2))\leqslant(4/\varepsilon)^n\cdot\|Q_{m_k}\|_1\leqslant(4/\varepsilon)^nM_0<\infty\,, \tag{2.59}$$

де $\|Q_{m_k}\|_1$ – L_1-норма функції Q_{m_k} в D'. З (2.58) і (2.59), враховуючи напівадитивність модуля сімей кривих, отримаємо:

$$M(\Gamma_k)\leqslant\frac{4^nN_0}{\varepsilon^n}\int\limits_{D'}Q_{m_k}(y)\,dm(y)\leqslant c<\infty\,, \tag{2.60}$$

де $c := \frac{4^n N_0 M_0}{\varepsilon^n}$ – деяка додатна стала. Міркуючи так само, як при доведенні співвідношень (2.48) і використовуючи умову (2.54), ми отримаємо, що $M(\Gamma_k) \to \infty$ при $k \to \infty$, що суперечить (2.60). Отримана суперечність доводить лему. $\Box$

Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, точок $a \in D$, $b \in D'$ і числа $M_0 > 0$ позначимо через $\mathfrak{S}_{a,b,M_0}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих, дискретних і замкнених відображень f області D на D', що задовольняють умову (1.11) з деяким $Q = Q_f$, $\|Q\|_{L^1(D')} \leqslant M_0$, для кожного $y_0 \in f(D)$, таких що $f(a) = b$. Наступне твердження у випадку фіксованої функції Q доведено в [8, теорема 7.1].

Теорема 2.1.4. *Припустимо, що область D має слабко плоску межу, жодна із зв'язних компонент якої не вироджена. Якщо область D' локально зв'язна на своїй межі, то кожне відображення $f \in \mathfrak{S}_{a,b,M_0}(D, D')$ має неперервне продовження $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ і, крім того, сім'я $\mathfrak{S}_{a,b,M_0}(\overline{D}, \overline{D'})$ усіх продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$.*

Доведення. Одностайна неперервність сім'ї $\mathfrak{S}_{a,b,M_0}(D, D')$, можливість неперервного продовження на межу кожного $f \in \mathfrak{S}_{a,b,M_0}(D, D')$ і рівність $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}$ випливають з [8, теорема 1.1] і теореми 1.1.1. Залишилось встановити одностайну неперервність сім'ї продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ в точках межі області D.

Доведемо це твердження від супротивного. Нехай сім'я $\mathfrak{S}_{a,b,M_0}(\overline{D}, \overline{D'})$ не є одностайно неперервною в деякій точці $x_0 \in \partial D$. Тоді знайдуться точки $x_m \in D$ і відображення $f_m \in \mathfrak{S}_{a,b,M_0}(\overline{D}, \overline{D'})$, $m = 1, 2, \ldots$, такі, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$ і, причому, при деякому $\varepsilon_0 > 0$

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geqslant \varepsilon_0\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,. \tag{2.61}$$

Оберемо довільним чином точку $y_0 \in D'$, $y_0 \neq b$, і з'єднаємо її з точкою b деякої кривою в D', яку ми позначимо α. Покладемо $A := |\alpha|$. Нехай A_m – повне підняття кривої α при відображенні f_m з початком в точці a

(воно існує за [100, лема 3.7]). Зауважимо, що $h(A_m, \partial D) > 0$ за замкненістю відображення f_m. Тепер можливі наступні випадки: або $h(A_m) \to 0$ при $m \to \infty$, або $h(A_{m_k}) \geqslant \delta_0 > 0$ при $k \to \infty$ для деякої зростаючої послідовності номерів m_k і деякого $\delta_0 > 0$.

У першому з цих випадків, очевидно, $h(A_m, \partial D) \geqslant \delta > 0$ при деякому $\delta > 0$. Тоді сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ одностайно неперервна в точці x_0 за теоремою 2.1.3, що суперечить умові (2.61).

У другому випадку, якщо $h(A_{m_k}) \geqslant \delta_0 > 0$ при $k \to \infty$, ми також маємо, що $h(A_{m_k}, \partial D) \geqslant \delta_1 > 0$ при деякому $\delta_1 > 0$ за лемою 2.1.3. Знову ж таки, за теоремою 2.1.3 сім'я $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в точці x_0, і це суперечить умові (2.61).

Отже, в обох з двох можливих випадків ми прийшли до суперечності з (2.61), і це вказує на невірність припущення про відсутність одностайної неперервності сім'ї $\mathfrak{S}_{a,b,M_0}(D, D')$ в $\overline{D}$. Теорема доведена. $\Box$

2.1.5. Компактність класів розв'язків задачі Діріхле

Доведення теореми 2.1.2. **I**. Нехай f_m, $m = 1, 2, \ldots$ – довільна послідовність сім'ї відображень $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\varphi,\Phi,z_0}(D)$. Згідно теореми Стоїлова про факторизацію (див., напр., [98, п. 5 (III), гл. V]) для відображення f_m справедливе зображення

$$f_m = \varphi_m \circ g_m\,, \tag{2.62}$$

де g_m – деякий гомеоморфізм, а φ_m – аналітична функція. За лемою 1 в [85] відображення g_m належить класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ і має скінченне спотворення. Більше того, згідно з [10, (1), п. C, гл. I] для майже всіх $z \in D$ отримаємо:

$$f_{m_z} = \varphi_{m_z}(g_m(z))g_{m_z}, \qquad f_{m_{\overline{z}}} = \varphi_{m_z}(g_m(z))g_{m_{\overline{z}}}\,. \tag{2.63}$$

Отже, за співвідношенням (2.63), $J(z, g_m) \neq 0$ для майже всіх $z \in D$, крім того, $K_{\mu_{f_m}}(z) = K_{\mu_{g_m}}(z)$.

II. Доведемо, що межа області $g_m(D)$ містить не менше двох точок. Припустимо супротивне. Тоді або $g_m(D) = \mathbb{C}$, або $g_m(D) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, де $a \in \mathbb{C}$.

Нехай спочатку $g_m(D) = \mathbb{C}$. Тоді за теоремою Пікара $\varphi_m(g_m(D))$ є всією площиною, за виключенням, можливо, однієї точки $\omega_0 \in \mathbb{C}$. З іншого боку, при кожному $m = 1, 2, \ldots$ функція $u_m(z) := \mathrm{Re}\, f_m(z) = \mathrm{Re}\,(\varphi_m(g_m(z)))$ неперервна на компакті $\overline{D}$ за умовою (2.8) і з огляду на неперервність функції φ. Отже, існує $C_m > 0$ таке, що $|\mathrm{Re}\, f_m(z)| \leqslant C_m$, але це суперечить тому, що $\varphi_m(g_m(D))$ містить всі точки комплексної площини крім, можливо, однієї. Випадок $g_m(D) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$, є неможливим, оскільки $g_m(D)$ має бути однозв'язною областю в $\mathbb{C}$ як образ однозв'язної області D при гомеоморфізмі g_m, $m = 1, 2, \ldots$.

Отже, межа області $g_m(D)$ містить не менше двох точок. Тоді за теоремою Рімана про відображення можна перетворити область $\widetilde{g_m}(D)$ на одиничний круг $\mathbb{D}$ за допомогою конформного відображення ψ_m. Нехай $z_0 \in D$ – точка з умови теореми. За застосування допоміжного конформного відображення

$$\widetilde{\psi_m}(z) = \frac{z - (\psi_m \circ g_m)(z_0)}{1 - z\overline{(\psi_m \circ g_m)(z_0)}}$$

одиничного круга на себе можна вважати, що $(\psi_m \circ g_m)(z_0) = 0$. Тоді з (2.62) випливає, що

$$f_m = \varphi_m \circ g_m = \varphi_m \circ \psi_m^{-1} \circ \psi_m \circ g_m = F_m \circ G_m\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,, \tag{2.64}$$

де $F_m := \varphi_m \circ \psi_m^{-1}$, $F_m : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, і $G_m = \psi_m \circ g_m$. Очевидно, функція F_m є аналітичною, а G_m – регулярний гомеоморфізм класу Соболєва в області D. Зокрема, $\mathrm{Im}\, F_m(0) = 0$ для всіх $m \in \mathbb{N}$.

III. Доведемо, що норми функцій $K_{\mu_{G_m}}(z)$ в $L^1(D)$ обмежені зверху деякою універсальною додатною сталою $C > 0$ рівномірно по всіх $m = 1, 2, \ldots$. Справді, з огляду на опуклість функції Φ у (2.9) і за [17, пропозиція 5, I.4.3] нахил $[\Phi(t) - \Phi(0)]\,/t$ є неспадною функцією. Звідси випливає існування сталих $t_0 > 0$ і $C_1 > 0$ таких, що

$$\Phi(t) \geqslant C_1 \cdot t \qquad \forall\ t \in [t_0, \infty)\,. \tag{2.65}$$

Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$. З огляду на (2.9) і (2.65), будемо мати:

$$\int\limits_D K_{\mu_{G_m}}(z)\,dm(z) = \int\limits_{\{z\in D: K_{\mu_{G_m}}(z) < t_0\}} K_{\mu_{G_m}}(z)\,dm(z) +$$

$$+ \int\limits_{\{z\in D: K_{\mu_{G_m}}(z)\geqslant t_0\}} K_{\mu_{G_m}}(z)\,dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant t_0\cdot m(D) + \frac{1}{C_1}\int\limits_D \Phi(K_{\mu_{G_m}}(z))\,dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant t_0\cdot m(D) + \frac{\sup\limits_{z\in D}(1+|z|^2)^2}{C_1}\int\limits_D \Phi(K_{\mu_{G_m}}(z))\cdot\frac{1}{(1+|z|^2)^2}\,dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant t_0\cdot m(D) + \frac{\sup\limits_{z\in D}(1+|z|^2)^2}{C_1}\mathcal{M}(D) < \infty\,, \qquad (2.66)$$

оскільки $\mathcal{M}(D)$ менше нескінченності за умовою теореми.

IV. Доведемо, що кожне відображення G_m, $m=1,2,\ldots$, має неперервне продовження на ∂D, крім того, сім'я продовжених відображень $\overline{G}_m$, $m=1,2,\ldots$, є одностайно неперервною в $\overline{D}$. Дійсно, за доведеним у пункті **III** $K_{\mu_{G_m}}\in L^1(D)$. З огляду на це, за [39, леми 8.1, 8.2 і 8.4] (див. також [54, теорема 3.1]) кожне відображення G_m, $m=1,2,\ldots$, є так званим кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\overline{D}$ при $Q=K_{\mu_{G_m}}(z)$, де μ визначається зі співвідношення (2.1), а K_μ обчислюється по формулі (2.2). Тоді бажаний висновок є твердженням леми 2.1.2.

V. Доведемо також, що обернені гомеоморфізми G_m^{-1}, $m=1,2,\ldots$, продовжується по неперервності до відображення $\overline{G}_m^{-1}$ на $\partial\mathbb{D}$ і сім'я відображень $\{G_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$. Оскільки за доведеним у пункті **IV** відображення G_m, $m=1,2,\ldots$, є кільцевими $K_{\mu_{G_m}}$-гомеоморфізмами в D, обернені до них відображення G_m^{-1} задовольняють співвідношення (1.11). Оскільки $G_m^{-1}(0)=z_0$ для всіх $m=1,2,\ldots$, неперервне продовження кожного відображення $\overline{G}_m^{-1}$ на $\partial\mathbb{D}$, а також одностайна неперервність сім'ї відображень $\{\overline{G}_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ на $\overline{\mathbb{D}}$ є результатом теореми 2.1.4 з огляду на співвідношення 2.66.

VI. Оскільки за доведеним сім'я відображень $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в D, за критерієм Арцела-Асколі існує зростаюча підпослідовність номерів m_k, $k=1,2,\ldots$, така що послідовність G_{m_k} збігається локально рівномірно в D при $k\to\infty$ до деякого неперервного відображення

$G : D \to \overline{\mathbb{C}}$ (див., напр., [99, теорема 20.4]). За лемою 2.1.1 має місце альтернатива: або G – гомеоморфізм області D у $\mathbb{C}$, або G – стала в $\overline{\mathbb{C}}$. Доведемо, що другий випадок неможливий. Скористаємося підходом, застосованим при доведенні другої частини теореми 21.9 в [99]. Припустимо супротивне: нехай $G_{m_k}(x) \to c = const$ при $k \to \infty$. Оскільки $G_{m_k}(z_0) = 0$ при всіх $k = 1, 2, \ldots,$ маємо: $c = 0$. З огляду на пункт **V** сім'я відображень G_m^{-1}, $m = 1, 2, \ldots,$ є одностайно неперервною в $\mathbb{D}$. Тоді

$$h(z, G_{m_k}^{-1}(0)) = h(G_{m_k}^{-1}(G_{m_k}(z)), G_k^{-1}(0)) \to 0$$

при $k \to \infty$, що неможливо, бо z – довільна точка області D. Отримана суперечність вказує на те, що $G : D \to \mathbb{C}$ – гомеоморфізм.

VII. За доведеним у пункті **V** сім'я відображень $\{\overline{G}_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$. Отже, за критерієм Арцела-Асколі (див., напр., [99, теорема 20.4]) ми також можемо вважати, що послідовність $\overline{G}_{m_k}^{-1}(y)$, $k = 1, 2, \ldots,$ збігається рівномірно в $\overline{D}$ до декого неперервного відображення $\widetilde{F} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D}$ при $k \to \infty$. Встановимо, що $\widetilde{F} = \overline{G}^{-1}$. Для цього покажемо, що $G(D) = \mathbb{D}$. Зафіксуємо $y \in \mathbb{D}$. Оскільки $G_{m_k}(D) = \mathbb{D}$ при всіх $k = 1, 2, \ldots,$ ми маємо $G_{m_k}(x_k) = y$ при деякому $x_k \in D$. Оскільки область D обмежена, можна вважати, що $x_k \to x_0 \in \overline{D}$ при $k \to \infty$. Далі, використовуючи нерівність трикутника і з огляду на одностайну неперервність $\{\overline{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ на $\overline{D}$ (пункт **IV**) будемо мати:

$$|\overline{G}(x_0) - y| = |\overline{G}(x_0) - \overline{G}_{m_k}(x_k)| \leqslant$$

$$\leqslant |\overline{G}(x_0) - \overline{G}_{m_k}(x_0)| + |\overline{G}_{m_k}(x_0) - \overline{G}_{m_k}(x_k)| \to 0$$

при $k \to \infty$. Звідси $\overline{G}(x_0) = y$. Зауважимо, що $x_0 \in D$, оскільки G – гомеоморфізм. В силу довільності точки $y \in \mathbb{D}$ рівність $G(D) = \mathbb{D}$ доведено. В такому випадку, $G_{m_k}^{-1} \to G^{-1}$ локально рівномірно в $\mathbb{D}$ при $k \to \infty$ (див., напр., [39, лема 2.16]). Таким чином, $\widetilde{F}(y) = G^{-1}(y)$ при всіх $y \in \mathbb{D}$. Нарешті, оскільки $\widetilde{F}(y) = G^{-1}(y)$ при всіх $y \in \mathbb{D}$ і, крім того, відображення $\widetilde{F}$ має неперервне продовження на межу області $\mathbb{D}$, то в силу єдиності границі в межових точках маємо також $\widetilde{F}(y) = \overline{G}^{-1}(y)$ при всіх $y \in \overline{\mathbb{D}}$. Отже, ми довели, що $\overline{G}_{m_k}^{-1} \to \overline{G}^{-1}$ рівномірно в $\overline{\mathbb{D}}$ при $k \to \infty$.

VIII. За пунктом **VII,** для $y = e^{i\theta} \in \partial D$ при $k \to \infty$ будемо мати:

$$\operatorname{Re} F_{m_k}(e^{i\theta}) = \varphi(\overline{G}_{m_k}^{-1}(e^{i\theta})) \to \varphi(\overline{G}^{-1}(e^{i\theta})) \tag{2.67}$$

рівномірно по $\theta \in [0, 2\pi)$. Оскільки за побудовою $\operatorname{Im} F_{m_k}(0) = 0$ при всіх $k = 1, 2, \ldots,$ за формулою Шварца (див., напр., [43]) аналітична функція F_{m_k} однозначно відновлюється по своїй дійсній частині, а саме,

$$F_{m_k}(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(0,1)} \varphi(\overline{G}_{m_k}^{-1}(t)) \frac{t+y}{t-y} \cdot \frac{dt}{t} \,. \tag{2.68}$$

Покладемо

$$F(y) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(0,1)} \varphi(\overline{G}^{-1}(t)) \frac{t+y}{t-y} \cdot \frac{dt}{t} \,. \tag{2.69}$$

Нехай $K \subset \mathbb{D}$ – довільний компакт. З огляду на співвідношення (2.68) і (2.69) ми отримаємо, що

$$|F_{m_k}(y) - F(y)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S(0,1)} |\varphi(\overline{G}_{m_k}^{-1}(t)) - \varphi(\overline{G}^{-1}(t))| \left|\frac{t+y}{t-y}\right| |dt| \,. \tag{2.70}$$

Оскільки K – компакт, знайдеться $0 < R_0 = R_0(K) < 0$ таке, що $K \subset B(0, R_0)$. Тоді за нерівністю трикутника $|t+y| \leqslant 1+R_0$ і $|t-y| \geqslant |t|-|y| \geqslant 1 - R_0$ для всіх $y \in K$ і всіх $t \in \mathbb{S}^1$. Тоді

$$\left|\frac{t+y}{t-y}\right| \leqslant \frac{1+R_0}{1-R_0} := M = M(K) \,. \tag{2.71}$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З огляду на умову (2.67) для числа $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{M}$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ такий, що $|\varphi(\overline{G}_{m_k}^{-1}(t)) - \varphi(\overline{G}^{-1}(t))| < \varepsilon'$ для всіх $k \geqslant N(\varepsilon)$. Тоді з (2.70) випливає, що

$$|F_{m_k}(y) - F(y)| < \varepsilon \quad \forall\ k \geqslant N \,. \tag{2.72}$$

З нерівності (2.72) випливає, що послідовність F_{m_k} збігається до функції F локально рівномірно в одиничному крузі. Зокрема, маємо: $\operatorname{Im} F(0) = 0$. Зауважимо, що F є аналітичною функцією в $\mathbb{D}$ (див. [43]), причому для $z = re^{i\psi}$

$$\operatorname{Re} F(re^{i\psi}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\overline{G}^{-1}(\theta)) \frac{1-r^2}{1-r\cos(\theta-\psi)+r^2}\, d\theta \,.$$

З огляду на [43]

$$\lim_{\zeta\to z}\operatorname{Re}F(\zeta)=\varphi(\overline{G}^{-1}(z))\quad\forall\ z\in\partial\mathbb{D}\,. \tag{2.73}$$

Зауважимо, що функція F є або сталою, або відкрита і дискретна (див., напр., [98, гл. V, розд. I, пункт 6 і розд. II, пункт 5]). Отже, послідовність $f_{m_k}=F_{m_k}\circ G_{m_k}$ збігається локально рівномірно до функції $f=F\circ G$, яка є відкритою і дискретною, або сталою функцією, причому, з огляду на (2.73)

$$\operatorname{Re}f(z)=\operatorname{Re}F(\overline{G}(z))=\varphi(\overline{G}^{-1}(\overline{G}(z)))=\varphi(z)\,.$$

IX. Оскільки за доведеним у пункті **VI** відображення G є гомеоморфізмом, з огляду на [52, лема 1, теорема 1] G є регулярним розв'язком рівняння (2.7) з деякою функцією $\mu:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$. Оскільки множина точок функції F, де її якобіан дорівнює нулю, може складатися тільки з ізольованих точок (див. [98, пункти 5 и 6 (II), гл. V]), у випадку $F\not\equiv const$ відображення f є регулярним. Зауважимо, що для відповідної функції $K_\mu=K_{\mu_f}$ виконується співвідношення типу (2.5) (див. [52, лема 1]). Отже, $f\in\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\varphi,\Phi,z_0}(D)$. $\Box$

2.2. Теореми компактності класів розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі з теоретико-множинними обмеженнями

2.2.1. Формулювання основних результатів

Результати даного підрозділу опубліковані в [1]. Метою даного підрозділу є отримання тверджень, аналогічних тим, що отримані в підрозділі 2.1.1, але для іншого типу обмежень на комплексні характеристики. Якщо в підрозділі 2.1.1 ми мали інтегральні обмеження (2.9), в цьому підрозділі розглядаються так звані теоретико-множинні обмеження. Нагадаємо, що множина $A\subset\mathbb{D}$ називається *інваріантно опуклою,* якщо множина $g(A)$ є опуклою для будь-якого дробово-лінійного автоморфізму g одиничного круга.

Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$. Наступне означення було запропоноване А. Ігнатьєвим і В. Рязановим в контексті локалізації поняття BMO за Джоном-

Ніренбергом, див. розділ 6 у [58], див. також [46]. Будемо говорити, що функція $\varphi : D \to \mathbb{R}$, що є локально інтегровною в деякому околі точки $x_0 \in D$, має *скінченне середнє коливання* в точці x_0 (пишемо: $\varphi \in FMO(x_0)$), якщо

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty\,, \tag{2.74}$$

де Ω_n – об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. Зауважимо, що коли виконується умова (2.74) можлива ситуація, коли $\overline{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Також будемо говорити, що $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – функція скінченного середнього коливання в області D, пишемо $\varphi \in FMO(D)$, якщо φ має скінченне середнє коливання в кожній точці $x_0 \in D$. Крім того, $BMO \subset FMO$, причому $BMO \neq FMO_{loc}$, крім того, $L_\infty \subset BMO \subset L^p_{loc}$ для $\forall p > 1$, див. [58].

Нехай $M(z) \subset \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{C}$ – деяка система множин (тобто, при кожному $z_0 \in \mathbb{C}$ символ $M(z_0)$ позначає деяку множину в $\mathbb{D}$). Позначимо через $\mathfrak{M}_M$ множину всіх комплексних вимірних функцій $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, таких що $\mu(z) \in M(z)$ при майже всіх $z \in \mathbb{C}$. Нехай K – компакт в $\mathbb{C}$, $M(z)$ – система множин в $\mathbb{D}$. Позначимо через $\mathfrak{F}_M(K)$ клас усіх регулярних розв'язків $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ рівняння (2.7) з комплексними коефіцієнтами μ, рівними нулю зовні K такими, що

$$f(z) = z + o(1) \quad \text{при} \quad z \to \infty\,, \tag{2.75}$$

при цьому $\mu \in \mathfrak{M}_M$. Для множини $M(z)$ покладемо

$$Q_M(z) = \frac{1+q_M(z)}{1-q_M(z)}\,, \quad q_M(z) = \sup_{\nu\in M(z)} |\nu|\,. \tag{2.76}$$

Основними результатами підрозділу є наступні твердження.

Теорема 2.2.1. *Нехай $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$ – сім'я інваріантно опуклих компактних множин, і нехай функція Q_M є інтегровною на K і задовольняє принаймні одну з умов: або $Q_M \in FMO(\mathbb{C})$, або для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ існує $\delta_0 = \delta(z_0) > 0$ таке, що*

$$\int\limits_0^{\delta_0} \frac{dt}{tq_{M_{z_0}}(t)} = \infty\,, \tag{2.77}$$

де $q_{M_{z_0}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_M(z_0+te^{i\theta})\,d\theta$. *Тоді сім'я відображень* $\mathfrak{F}_M(K)$ *є компактною в* $\mathbb{C}$.

Розглянемо задачу Діріхле (2.7)–(2.8). Зафіксуємо точку $z_0\in D$ і функцію φ. Нехай $M(z)\subset\mathbb{D}$, $z\in D$ – деяка система множин. Нехай $\mathfrak{F}_{\varphi,M,z_0}(D)$ позначає клас усіх регулярних розв'язків $f:D\to\mathbb{C}$ задачі Діріхле (2.7)–(2.8), які задовольняють умову $\operatorname{Im} f(z_0)=0$ таких, що $\mu\in\mathfrak{M}_M$. Як і раніше, визначимо функцію $Q_M(z)$ співвідношенням (2.76), причому вважатимемо $Q_M(z)\equiv 1$ при $z\in\mathbb{C}\setminus D$. Справедливо наступне твердження.

Теорема 2.2.2. *Нехай* D *– деяка однозв'язна жорданова область у* $\mathbb{C}$, *і нехай функція* φ *у (2.8) неперервна. Припустимо, що* $M(z)$, $z\in D$, *– сім'я інваріантно опуклих компактних множин, і нехай функція* Q_M *є інтегровною в* D *і задовольняє принаймні одну з умов: або* $Q_M\in FMO(\overline{D})$, *або для кожного* $x_0\in\overline{D}$ *існує* $\delta_0=\delta(x_0)>0$ *таке, що*

$$\int\limits_0^{\delta_0}\frac{dt}{tq_{M_{x_0}}(t)}=\infty\,, \tag{2.78}$$

де $q_{M_{x_0}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_M(x_0+te^{i\theta})\,d\theta$. *Тоді сім'я відображень* $\mathfrak{F}_{\varphi,M,z_0}(D)$ *є компактною в* D.

Доведення теорем 2.2.1 і 2.2.2 наводиться нижче в тексті.

2.2.2. Про збіжність гомеоморфізмів з модульними умовами

Наступна важлива лема є аналогом леми 2.1.1, сформульованою для іншого типу умов на функції Q_k в (2.12), і доведена в [71, теореми 4.1 і 4.2].

Лема 2.2.1. *Нехай* D *– область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $Q:D\to[1,\infty]$ *– вимірна за Лебегом функція. Нехай, крім того,* f_k, $k=1,2,\ldots$ *– послідовність гомеоморфізмів області* D *в* $\mathbb{R}^n$, *які задовольняють умови (2.10)–(2.11) в кожній точці* x_0 *області* D, *що збігається локально рівномірно в* D *до деякого відображення* $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ *по хордальній метриці* h. *Припустимо,* *що функція Q задовольняє принаймні одну з двух умов: або $Q\in FMO(D)$, або для кожного $x_0\in D$ існує $\delta_0=\delta(x_0)>0$ таке, що*

$$\int\limits_0^{\delta_0}\frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)}=\infty\,, \tag{2.79}$$

де $q_{x_0}(t)=\frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,t)}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$, а $\mathcal{H}^{n-1}$ позначає $(n-1)$-вимірну міру Хаусдорфа. Тоді відображення f є або гомеоморфізмом $f:D\to\mathbb{R}^n$, або сталою $c\in\overline{\mathbb{R}^n}$.

Наступне твердження встановлено в [93, теорема 3.7.1].

Лема 2.2.2. *Нехай $D,\ D'$ – області в $\mathbb{R}^n,\ n\geqslant 2,\ b_0\in D,\ b_0'\in D'$, і нехай $f_k,\ k=1,2,\ldots,$ – сім'я гомеоморфізмів області D на D' з умовою нормування $f_k(b_0)=b_0',\ k=1,2,\ldots.$ Припустимо, що кожне відображення $f_k,\ k=1,2,\ldots$ задовольняє співвідношення (2.10) в довільній точці $x_0\in\overline{D}$ і деякою вимірною функцією $Q:D\to[1,\infty]$ такою, що виконано принаймні одну з двох умов: або $Q\in FMO(\overline{D})$, або для кожного $x_0\in\overline{D}$ існує $\delta_0=\delta(x_0)>0$ таке, що виконується (2.79). Нехай область D є локально зв'язною на своїй межі, а D' є QED-областю, яка містить не менше однієї скінченної межової точки. Тоді кожне $f_k,\ k=1,2,\ldots,$ продовжується до неперервного відображення $\overline{f}_k:\overline{D}\to\overline{D'}$ і, крім того, сім'я продовжених відображень $\overline{f}_k,\ k=1,2,\ldots,$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$.*

2.2.3. Компактність розв'язків рівнянь Бельтрамі з гідродинамічним нормуванням

Доведення теореми 2.2.1. Покажемо, що сім'я $\mathfrak{F}_M(K)$ є одностайно неперервною. Зафіксуємо $f\in\mathfrak{F}_M(K)$, довільний компакт $C\subset\mathbb{C}$ і покладемо $\widetilde{f}=\frac{1}{f(1/z)}$. (Якщо $f(1/w_0)=0$, то ми вважаємо, що $\widetilde{f}(w_0):=\infty$).

Міркуючи аналогічно пункту **I** доведення теореми 2.1.1, можна показати, що:

а) існує $\widetilde{f}\,'(0)$, при цьому, $\widetilde{f}\,'(0)=1$;

б) існує число $r_0 > 0$, яке залежить тільки від K, таке що і $K \subset B(0, 1/r_0)$ і

$$\widetilde{f}(B(0, r_0)) \supset B(0, r_0/4)\,; \tag{2.80}$$

в) виконується співвідношення

$$f(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0, 1/r_0)}) \supset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(0, 4/r_0)}\,. \tag{2.81}$$

Оскільки f – гомеоморфізм у $\mathbb{C}$, зі співвідношення (2.81) випливає, що $f(B(0, 1/r_0)) \subset B(0, 4/r_0)$. Покладемо $\Delta := h(\overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 4/r_0))$, де $h(\overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 4/r_0))$ – хордальний діаметр множини $\overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 4/r_0)$. За [54, теорема 3.1] кожне відображення f є так званим кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\mathbb{C}$ при $Q = K_\mu(z)$, де μ визначається зі співвідношення (2.7), а K_μ визначено в (2.2). Зауважимо, що $Q \leqslant Q_M(z)$ майже скрізь. В такому випадку, сім'я відображень $\mathfrak{F}_M(K)$ є одностайно неперервною в $B(0, 1/r_0)$ за [58, теореми 7.5, 7.6]. Нехай тепер $f_n \in \mathfrak{F}_M(K)$, $n = 1, 2, \ldots$. За теоремою Арцела-Асколі (див., напр., [99, теорема 20.4]) існує підпослідовність $f_{n_k}(z)$ послідовності f_n, $k = 1, 2, \ldots$, а також неперервне відображення $f : B(0, 1/r_0) \to \overline{\mathbb{C}}$ такі, що f_{n_k} локально рівномірно збігається до відображення f у $B(0, 1/r_0)$ при $k \to \infty$. Зокрема, оскільки компакт C належить $B(0, 1/r_0)$, послідовність f_{n_k} збігається до f рівномірно на C. Оскільки компакт C був обраний довільним, ми встановили, що сім'я відображень f_{n_k} збігається до відображення f локально рівномірно.

II. Для завершення доведення теореми 2.2.1 залишилось встановити, що $f \in \mathfrak{F}_M(K)$. Передусім зауважимо, що граничне відображення f задовольняє умову $f(z) = z + o(1)$ при $z \to \infty$ (цей факт доводиться аналогічно пункту **II** теореми 2.1.1).

Тепер покажемо, що f – гомеоморфізм комплексної площини. Покладемо $\mu_k := \mu_{f_{n_k}}$. За [54, теорема 3.1] кожне відображення f_{n_k} є кільцевим Q-гомеоморфізмом в кожній точці $z_0 \in \mathbb{C}$ при $Q = K_{\mu_k}(z)$. З огляду на лему 2.2.1 має місце наступна альтернатива: або f – гомеоморфізм з D у $\mathbb{C}$, або f – стала в $\overline{\mathbb{C}}$. За доведеним на кроці **I** f є гомеоморфізмом в деякому околі нескінченності, отже, f – гомеоморфізм всієї комплексної площини, який приймає тільки скінченні комплексні значення.

Тоді за [74, теорема 3.1 і зауваження 3.1] $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{C})$. Покажемо, що f є регулярним розв'язком рівняння (2.7) з деяким μ, тобто, $J(z,f)\neq 0$ при майже всіх $z\in\mathbb{C}$. Оскільки за умовою відображення f_{n_k} є регулярними, крім того, $K_{\mu_k}(z)\leqslant Q_M(z)$ майже скрізь, крім того, Q_M є інтегровною в K, маємо: $J(f_{n_k},z)\neq 0$ при майже всіх $z\in\mathbb{C}$, $g_{n_k}:=f_{n_k}^{-1}\in W_{\rm loc}^{1,2}$, причому, $(g_{n_k})_w=0$ у майже всіх точках w, де $J(g_{n_k},w)=0$ (див. [41, теорема 1.3]). Отже, g_{n_k} мають N-властивість Лузіна (див., напр., доведення пункту (ii) на стор. 150 в [58], або [55, наслідок B]). Позначимо $\partial g=g_w$ і $\overline{\partial} g=g_{\overline{w}}$. Нехай C_0 – довільний компакт у $f(D)$. Оскільки f_{n_k} збігаються до f локально рівномірно в $\mathbb{C}$ і f – гомеоморфізм, то g_{n_k} також збігаються локально рівномірно в $f(D)$ до відображення $g:=f^{\,-1}$ (див., напр., [39, лема 2.16]). Зокрема, звідси випливає, що відображення g_{n_k} визначені на C_0 при всіх достатньо великих $k\geqslant k_0=k_0(C_0)$. Оскільки g_{n_k} збігаються рівномірно на C_0 до g при $k\rightarrow\infty$, маємо:

$$|g_{n_k}(w)|\leqslant |g(w)|+1 \tag{2.82}$$

при всіх $w\in C_0$ і достатньо великих $k\in\mathbb{N}$. Покладемо $A:=\sup\limits_{w\in C_0}|g(w)|$. Зауважимо, що за теоремою Кантора про обмеженість неперервного відображення на компакті C_0 виконується нерівність $A<\infty$. Отже, з огляду на (2.82),

$$g_{n_k}(C_0)\subset B(0,A+1)\,. \tag{2.83}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $J(g_{n_k},w)\neq 0$ при майже всіх $w\in C_0$. Будемо мати:

$$|\partial g_{n_k}(w)|^2=\left(|\partial g_{n_k}(w)|^{\,2}-|\overline{\partial} g_{n_k}(w)|^{\,2}\right)\cdot\frac{|\partial g_{n_k}(w)|^{\,2}}{\left(|\partial g_{n_k}(w)|^{\,2}-|\overline{\partial} g_{n_k}(w)|^{\,2}\right)}=$$

$$=J(w,g_{n_k})\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{\overline{\partial} g_{n_k}(w)}{\partial g_{n_k}(w)}\right|^2}\,,$$

зокрема,

$$|\partial g_{n_k}(w)|^2=J(w,g_{n_k})\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{\overline{\partial} g_{n_k}(w)}{\partial g_{n_k}(w)}\right|^2}\,. \tag{2.84}$$

Оскільки g_{n_k} є гомеоморфізмами класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, які мають N-властивість Лузіна, для них має місце заміна змінних в інтегралі (див., напр., [33, теорема 3.2.5]). Зауважимо, що $\mu_{g_{n_k}}(w)=-\mu_k(g_{n_k}(w))=-\mu_k(f_{n_k}^{-1}(w))$, див. напр., [9, (4).C.I]. В такому випадку, з огляду на (2.83) і (2.84), ми будемо мати, що

$$\int\limits_{C_0}|\partial g_{n_k}(w)|^2\,dm(w)=$$

$$=\int\limits_{C_0}\left(|\partial g_{n_k}(w)|^2-|\overline{\partial}g_{n_k}(w)|^2\right)\cdot\frac{|\partial g_{n_k}(w)|^2dm(w)}{\left(|\partial g_{n_k}(w)|^2-|\overline{\partial}g_{n_k}(w)|^2\right)}=$$

$$=\int\limits_{C_0}J(w,g_{n_k})\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{\overline{\partial}g_{n_k}(w)}{\partial g_{n_k}(w)}\right|^2}\,dm(w)=\int\limits_{g_{n_k}(C_0)}\frac{dm(z)}{1-|\mu_k(z)|^2}\leqslant \tag{2.85}$$

$$\leqslant\int\limits_{B(0,A+1)}Q'(z)\,dm(z)<\infty\,,$$

де $Q'(z)\equiv Q_M(z)$ при $z\in K$ і $Q'(z)\equiv 1$ в протилежному випадку. З (2.85) випливає, що

$$\int\limits_{C_0}|\partial g_{n_k}(w)|^2\,dm(w)\leqslant\int\limits_{B(0,A+1)}Q'(z)\,dm(z)<\infty\,. \tag{2.86}$$

Зауважимо, що співвідношення (2.86) виконується також і у випадку, коли $J(g_{n_k},w)=0$ на множині додатної міри в C_0, бо, як вже було зауважено вище, $(g_{n_k})_w=0$ у майже всіх точках w, де $J(g_{n_k},w)=0$ (див. [41, теорема 1.3]). З (2.85) випливає, що $g\in W^{1,2}_{\rm loc}$ (див. [67, лема III.3.5]). Тоді g має N-властивість за теоремою Малого-Мартіо, див., напр., [55, наслідок B]. У свою чергу, f має майже скрізь невироджений якобіан за теоремою Пономарьова (див. доведення пункту (ii) на стор. 150 в [58]).

Отже, f є регулярним розв'язком рівняння (2.7) при деякій функції $\mu:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$. За теоремою Герінга-Лехто відображення f є майже скрізь диференційовним (див. [50, теорема III.3.1]). Тому за теоремою 3.1 у [74] $\mu(z)=0$ при всіх $z\in\mathbb{C}\setminus K$. Нарешті, $\mu\in\mathfrak{M}_M$ за [53, лема 1]. Отже, $f\in\mathfrak{F}_M(K)$. $\Box$

2.2.4. Компактність сімей розв'язків задачі Діріхле

Доведення теореми 2.2.2 схоже на доведення теореми 2.1.2, тому дозволимо собі обмежитися лише схемою доведення.

I. Нехай $f_m,\ m=1,2,\ldots$ – довільна послідовність сім'ї $\mathfrak{F}_{\varphi,M,z_0}(D)$. Згідно теореми Стоїлова про факторизацію (див., напр., [98, п. 5 (III), гл. V]), для відображення f_m справедливе зображення (2.62), де g_m – деякий гомеоморфізм, а φ_m – аналітична функція. Міркуючи аналогічно пункту **I** доведення теореми 2.1.2, можна показати, що:

а) $J(z,g_m)\neq 0$ для майже всіх $z\in D$, крім того, $K_{\mu_{f_m}}(z)=K_{\mu_{g_m}}(z)$;

б) межа області $g_m(D)$ містить не менше двох точок.

Тоді міркуючи аналогічно пункту **I** доведення теореми 2.1.2, можна показати, що відображення f_m можна зобразити в вигляді

$$f_m=\varphi_m\circ g_m=F_m\circ G_m\,,\quad m=1,2,\ldots\,, \tag{2.87}$$

де $F_m:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ – деяка аналітична функція така, що $\operatorname{Im}F_m(0)=0$ для всіх $m\in\mathbb{N}$, і G_m – регулярний гомеоморфізм класу Соболєва області D на $\mathbb{D}$.

Зауважимо, що

$$\int\limits_D K_{\mu_{G_m}}(z)\,dm(z)\leqslant\int\limits_D Q_M(z)\,dm(z)<\infty\,, \tag{2.88}$$

оскільки за умовою $\mu(z)\in M(z)$ при майже всіх $z\in D$, крім того, при майже всіх $z\in D$ виконано нерівність $K_{\mu_{G_m}}(z)\leqslant Q_M(z)$, а функція $Q_M(z)$ не залежить від індексу $m=1,2,\ldots$ та інтегровна в D за умовою.

Міркуючи аналогічно пунктам **IV** і **V** доведення теореми 2.1.2, за лемами 2.2.2 і 2.1.4 можна показати, що:

в) кожне відображення $G_m,\ m=1,2,\ldots,$ має неперервне продовження на ∂D, крім того, сім'я продовжених відображень $\overline{G}_m,\ m=1,2,\ldots,$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$;

г) гомеоморфізми $G_m^{-1},\ m=1,2,\ldots,$ продовжується по неперервності на $\partial\mathbb{D}$ і сім'я відображень $\{\overline{G}_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$.

Оскільки сім'я $\{\overline{G}_m\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$, за критерієм Арцела-Асколі існує зростаюча підпослідовність номерів m_k, $k=1,2,\ldots$, така що послідовність $\overline{G}_{m_k}$ збігається рівномірно в $\overline{D}$ при $k\to\infty$ до деякого неперервного відображення $\overline{G}:\overline{D}\to\overline{\mathbb{C}}$ (див., напр., [99, теорема 20.4]). Нехай $G\colon=\overline{G}|_D$. За лемою 2.2.1 має місце альтернатива: або G – гомеоморфізм області D у $\mathbb{C}$, або G – стала в $\overline{\mathbb{C}}$. Зауважимо, що другий випадок неможливий (це може бути встановлено аналогічно пункту **VI** доведення теореми 2.1.2).

За доведеним вище сім'я відображень $\{\overline{G}_m^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$. Отже, за критерієм Арцела-Асколі (див., напр., [99, теорема 20.4]) ми також можемо вважати, що послідовність $\overline{G}_{m_k}^{-1}(y)$, $k=1,2,\ldots$, збігається рівномірно в $\overline{\mathbb{D}}$ до декого неперервного відображення $\widetilde{F}:\overline{\mathbb{D}}\to\overline{D}$ при $k\to\infty$. Можна показати, що $\widetilde{F}=\overline{G}^{-1}$ (доведення цього аналогічно пункту **VII** доведення теореми 2.1.2).

Тоді для $y=e^{i\theta}\in\partial\mathbb{D}$ при $k\to\infty$ будемо мати зображення типу (2.67), причому збіжність у ньому є рівномірною по $\theta\in[0,2\pi)$. Оскільки за побудовою $\operatorname{Im}F_{m_k}(0)=0$ при всіх $k=1,2,\ldots$, за формулою Шварца (див., напр., [43]) аналітична функція F_{m_k} однозначно відновлюється по своїй дійсній частині, а саме,

$$F_{m_k}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(0,1)}\varphi(\overline{G}_{m_k}^{-1}(t))\frac{t+y}{t-y}\cdot\frac{dt}{t}\,. \tag{2.89}$$

Покладемо

$$F(y):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(0,1)}\varphi(\overline{G}^{-1}(t))\frac{t+y}{t-y}\cdot\frac{dt}{t}\,. \tag{2.90}$$

Користуючись співвідношеннями (2.89) і (2.90) і міркуючи аналогічно пункту **VII** доведення теореми 2.1.2, можна показати, що послідовність F_{m_k} збігається до функції F локально рівномірно в одиничному крузі. Зокрема, маємо: $\operatorname{Im}F(0)=0$, тоді також $\operatorname{Im}f(z_0)=0$, де $f=F\circ G$. Зауважимо, що F є аналітичною функцією в $\mathbb{D}$ (див. [43]), причому для $z=re^{i\psi}$

$$\operatorname{Re}F(re^{i\psi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\overline{G}^{-1}(e^{i\theta}))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}\,d\theta\,.$$

З огляду на [43]

$$\lim_{\zeta\to z}\mathrm{Re}\,F(\zeta)=\varphi(\overline{G}^{\,-1}(z))\quad\forall\ z\in\partial\mathbb{D}\,. \tag{2.91}$$

Зауважимо, що функція F є або сталою, або відкритою і дискретною (див., напр., [98, гл. V, розд. I, пункт 6 і розд. II, пункт 5]). Отже, послідовність $f_{m_k}=F_{m_k}\circ G_{m_k}$ збігається локально рівномірно до функції $f=F\circ G$, яка є відкритою і дискретною, або сталою функцією, причому, з огляду на (2.73)

$$\mathrm{Re}\,f(z)=\mathrm{Re}\,F(\overline{G}(z))=\varphi(\overline{G}^{\,-1}(\overline{G}(z)))=\varphi(z)\quad\forall\ z\in\partial\mathbb{D}\,.$$

II. Оскільки за доведеним у пункті **VI** відображення G є гомеоморфізмом, з огляду на [53, теорема 1] G є регулярним розв'язком рівняння (2.7) з деякою функцією $\mu:D\to\mathbb{D}$. Оскільки множина точок функції F, де її якобіан дорівнює нулю, може складатися тільки з ізольованих точок (див. [98, пункти 5 и 6 (II), гл. V]), у випадку $F\not\equiv const$ відображення f є регулярним. Залишилось довести, що $\mu\in\mathfrak{M}_M$. Якщо $f(z)=c=const$ в області D, то завдяки умові (2.8) це є можливим лише у випадку, коли $f_n(z)=c$ у D, а $\mu_n(z)=0\in M(z)$ при майже всіх $z\in D$. В цій ситуації також $\mu(z)=0$ при майже всіх $z\in D$, зокрема, $\mu\in\mathfrak{M}_M$.

Нехай тепер $f(z)\ne const$. За доведеним вище відображення f є регулярним. Оскільки $f_n(z)$ збігається до $f(z)$ локально рівномірно в області D і, крім того, f має майже скрізь відмінний від нуля якобіан, то за [53, лема 1] $\mu(z)\in\mathrm{inv}\,\mathrm{co}M_0(z)$ для майже всіх $z\in D$, де $\mathrm{inv}\,\mathrm{co}\,A$ позначає інваріантно опуклу оболонку множини $A\subset\mathbb{C}$, а $M_0(z)$ позначає множину точок скупчення послідовності $\mu_n(z)$, $n=1,2,\ldots$. Очевидно, існує множина $D_0\subset D$ така, що $\mu_n(z)\in M(z)$ і $\mu(z)\in\mathrm{inv}\,\mathrm{co}\,M_0(z)$ при всіх $z\in D_0$ і всіх $n\in\mathbb{N}$, де $m(D\setminus D_0)=0$. Зафіксуємо $z_0\in D_0$. Нехай $w_0\in M_0(z_0)$. Тоді існує підпослідовність номерів n_k, $k=1,2,\ldots$, для якої $\mu_{n_k}(z_0)$ є збіжною при $k\to\infty$ і $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_{n_k}(z_0)=w_0$. Оскільки за припущенням $\mu_{n_k}(z_0)\in M(z_0)$ при всіх $k=1,2,\ldots$, крім того, множина $M(z_0)$ є замкненою, то $w_0\in M(z_0)$. Отже,

$$M_0(z_0)\subset M(z_0)\,. \tag{2.92}$$

Зі співвідношення (2.92) випливає, що

$$\mathrm{inv}\,\mathrm{co}\,M_0(z_0) \subset M(z_0)\,, \tag{2.93}$$

оскільки множинна $M(z_0)$ припускалася інваріантно опуклою. Отже,

$$\mu(z_0) \in \mathrm{inv}\,\mathrm{co}\,M_0(z_0) \subset M(z_0)$$

при майже всіх $z_0 \in D$, що і потрібно було довести. $\Box$

Для фіксованої функції $Q : \mathbb{C} \to [0, \infty]$, $Q(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus D$, точки $z_0 \in D$ і неперервної функції $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ позначимо через $\mathfrak{F}_{\varphi,Q,z_0}(D)$ клас усіх регулярних розв'язків $f : D \to \mathbb{C}$ задачі Діріхле (2.7)–(2.8), які задовольняють умову $\mathrm{Im}\, f(z_0) = 0$ таких, що $K_{\mu_f}(z) \leqslant Q(z)$ для майже всіх $z \in D$. Справедливо наступне твердження.

Наслідок 2.2.1. *Нехай D – деяка однозв'язна жорданова область у $\mathbb{C}$, і нехай функція φ у (2.8) неперервна. Припустимо, що функція Q є інтегровною в D і задовольняє принаймні одну з умов: або $Q \in FMO(\overline{D})$, або для кожного $z_0 \in \overline{D}$ існує $\delta_0 = \delta(z_0) > 0$ таке, що виконано умову (2.78), де $q_{z_0}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(z_0+te^{i\theta})\, d\theta$. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{F}_{\varphi,Q,z_0}(D)$ є компактною в D.*

Доведення. Дійсно, в силу рівності $K_{\mu_f}(z) = \frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}$ умова $K_{\mu_f}(z) \leqslant Q(z)$ еквівалентна умові $|\mu_f(z)| \leqslant \frac{Q(z)-1}{Q(z)+1}$. Тоді $\mu_f(z) \in \overline{B\left(0, \frac{Q(z)-1}{Q(z)+1}\right)}$, причому множини $M(z) := \overline{B\left(0, \frac{Q(z)-1}{Q(z)+1}\right)}$ є замкненими і інваріантно опуклими. В такому випадку, бажане твердження випливає з теореми 2.2.2. $\Box$

2.3. Випадок простих кінців

Результати даного підрозділу опубліковані в [24]. Тут мова йде про розв'язки рівняння Бельтрамі і задачі Діріхле, визначені в довільній області, яка є однозв'язною. Оскільки однозв'язні області не зобов'язні бути жордановими, це є деяким послабленням умов у порівнянні з результатами попередніх двох підрозділів. Відзначимо існування розв'язків задачі Діріхле за певних припущень (див., напр., [65]). Розглянемо наступну задачу Коші:

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z\,, \tag{2.94}$$

$$\lim_{\zeta \to P} \operatorname{Re} f(\zeta) = \varphi(P) \qquad \forall\ P \in E_D\,, \tag{2.95}$$

де $\varphi : E_D \to \mathbb{R}$ – наперед задана неперервна функція. Надалі вважаємо, що D – деяка однозв'язна область у $\mathbb{C}$. Розв'язок задачі (2.94)–(2.95) будемо вважати *регулярним,* якщо виконано одно з двох: або $f(z) = const$ в D, або f – відкрите дискретне відображення класу $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, таке що $J(z, f) \neq 0$ при майже всіх $z \in D$.

Зафіксуємо точку $z_0 \in D$, функцію $\varphi : E_D \to \mathbb{R}$, функцію $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ і функцію $\mathcal{M}(\Omega)$ відкритих множин $\Omega \subset D$. Нехай $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\varphi,\Phi,z_0}(D)$ позначає клас усіх регулярних розв'язків $f : D \to \mathbb{C}$ задачі Коші (2.94)–(2.95), які задовольняють умову $\operatorname{Im} f(z_0) = 0$ і, крім того,

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(K_\mu(z)) \cdot \frac{dm(z)}{(1+|z|^2)^2} \leqslant \mathcal{M}(\Omega) \tag{2.96}$$

для кожної відкритої множини $\Omega \subset D$. Справедливо наступне твердження.

Теорема 2.3.1. *Нехай D – деяка однозв'язна область у $\mathbb{C}$, $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неперервна зростаюча опукла функція, яка при деякому $\delta > \Phi(0)$ задовольняє умову*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty\,,$$

функція $\mathcal{M}$ є обмеженою, а функція $\varphi(z)$ у (2.95) неперервна. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\varphi,\Phi,z_0}(D)$ є компактною в $\overline{D}_P$.

Доведення теореми 2.3.1 див. далі по тексту.

2.3.1. Теореми збіжності відображень з верхніми оцінками модуля

Доведення основного результату спирається на теореми про глобальну поведінку відображень, що задовольняють вагову нерівність Полецького. Результати подібного характеру в деяких інших ситуаціях були отримані нами раніше, див., напр., [87]. Випадок, котрий ми будемо розглядати нижче, стосується регулярних областей та відображень з одною умовою нормування.

Нехай I – фіксований набір індексів і D_i, $i\in I$, – деяка послідовність областей. Згідно з [64, розд. 2.4], будемо говорити, що сім'я областей $\{D_i\}_{i\in I}$ є *одностайно рівномірною відносно p-модуля*, якщо для кожного $r>0$ існує число $\delta>0$ таке, що нерівність

$$M_p(\Gamma(F^*,F,D_i))\geqslant\delta$$

виконується для всіх $i\in I$ і довільних континуумів $F,F^*\subset D_i$ таких, що $h(F)\geqslant r$ і $h(F^*)\geqslant r$.

Нагадаємо, що означення регулярних областей та областей з локально квазіконформною межею, означення простого кінця, яке тут вживається, та замикання $\overline{D}_P$ області D в термінах простих кінців можна знайти в розділі 1.3.4.

Для заданої вимірної за Лебегом функції $Q:\mathbb{R}^n\rightarrow[0,\infty]$ і точки $x_0\in\mathbb{R}^n$ покладемо

$$q_{x_0}(t)=\frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,t)}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}\,, \tag{2.97}$$

де $\mathcal{H}^{n-1}$ позначає $(n-1)$-вимірну міру Хаусдорфа. Наступна лема була доведена в [95, лема 2.1].

Лема 2.3.1. *Нехай $1\leqslant p\leqslant n$, і $\Phi:[0,\infty]\rightarrow[0,\infty]$ – строго зростаюча опукла функція, ка задовольняє співвідношення*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{p-1}}}=\infty \tag{2.98}$$

для деякого $\delta_0>\tau_0:=\Phi(0)$. Нехай $\mathfrak{Q}$ – сім'я функцій $Q:\mathbb{R}^n\rightarrow[0,\infty]$ таких, що для деякого $0<M_0<\infty$ виконано умову

$$\int\limits_{D}\Phi(Q(x))\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\ \leqslant M_0\,. \tag{2.99}$$

Тоді для будь-якого $0 < r_0 < 1$ *і кожного* $\sigma > 0$ *знайдеться* $0 < r_* = r_*(\sigma, r_0, \Phi) < r_0$ *таке що*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r_0} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \geqslant \sigma\,, \qquad \varepsilon \in (0, r_*)\,,$$

для кожного $Q \in \mathfrak{Q}$.

Нехай $p \geqslant 1$, $Q : D \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Згідно [58], відображення $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ будемо називати кільцевим Q-відображенням у точці $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ відносно p-модуля, якщо нерівність

$$M_p(f(\Gamma(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2), D))) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(x) \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)\,, \qquad (2.100)$$

$$A = A(x_0, r_1, r_2)\,,$$

виконана для будь-яких

$$0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$$

і всякої невід'ємної вимірної за Лебегом функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1 \qquad (2.101)$$

Відображення $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ називається кільцевим Q-відображенням відносно p-модуля у $\overline{D}$, якщо (2.100) – (2.101) виконані у кожній точці $x_0 \in \overline{D}$.

Розглянемо ще одну допоміжну сім'ю відображень. Для $p \geqslant 1$, заданих чисел $\delta > 0$, $0 < M_0 < \infty$, області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і заданої строго зростаючої опуклої функції $\Phi \colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ позначимо через $\mathfrak{A}_{\Phi, p, \delta, M_0}(D)$ сім'ю всіх відкритих дискретних Q-відображень $f : D \to \mathbb{R}^n$ в $\overline{D}$ відносно p-модуля таких, що виконана умова (2.99). Справедливе наступне твердження, див. [95, теорема 1.2].

Лема 2.3.2. *Нехай* $p \in (n-1, n)$ *і нехай існує* $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ *таке, що виконано умову (2.98). Тоді сім'я* $\mathfrak{A}_{\Phi,p,\delta,M_0}(D)$ *є одностайно неперервною в* D.

У лемі 2.3.2 одностайну неперервність сім'ї відображень $\mathfrak{A}_{\Phi,p,\delta,M_0}(D)$ слід розуміти як між просторами (D, d) і $(\mathbb{R}^n, d)$, де d – евклідова метрика.

Для числа $p \geqslant 1$, чисел $\delta > 0$, $0 < M_0 < \infty$, області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, точки $a \in D$ і строго зростаючої функції $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ позначимо через $\mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(D)$ сім'ю всіх гомеоморфізмів $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ для яких знайдеться функція $Q = Q_f$ така, що виконані умови (2.100)–(2.101) в $\overline{D}$, причому $h(f(a), \partial f(D)) \geqslant \delta$, $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geqslant \delta$, крім того, виконується умова (2.99).

Теорема 2.3.2. *Нехай* $p \in (n-1, n]$, *область* D *регулярна, а області* $D_f^{\prime} = f(D)$ *є обмеженими одностайно рівномірними відносно* p*-модуля по всіх* $f \in \mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(D)$, *крім того, ці області мають локально квазіконформну межу. Якщо існує* $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$ *таке, що виконано умову (2.98), то кожне* $f \in \mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(D)$ *має неперервне продовження* $\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *і, крім того, сім'я* $\mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(\overline{D})$ *усіх продовжених відображень* $\overline{f} : \overline{D}_P \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *є одностайно неперервною в* $\overline{D}_P$.

Зауваження 2.3.1. В теоремі 2.3.2 одностайну неперервність слід розуміти в сенсі відображень, що діють між просторами (X, d) і $(X^{\prime}, d^{\prime})$, де $X = \overline{D}_P$ – поповнення області D її простими кінцями, а d – одна з можливих метрик, що відповідають топологічному простору $\overline{D}_P$ (див. (1.107)). Крім того, $X^{\prime} = \overline{\mathbb{R}^n}$ і $d^{\prime} = h$ – хордальна (сферична) метрика.

Приклад сім'ї плоских відображень $f_n(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $z \in \mathbb{D}$, вказує на невірність аналогу теореми 2.3.2 для відображень з розгалуженням. Зокрема, ця теорема не є вірною за умови нормування $f_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доведення. Зафіксуємо $f \in \mathfrak{F}_{\Phi,A,p,\delta,M_0}(D)$ і $Q = Q_f(x)$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ покладемо

$$Q'(x)=\begin{cases}Q(x), & x\in D, Q(x)\geqslant 1\\ 1, & x\in D, Q(x)<1\\ 1, & x\notin D\end{cases}.$$

Зауважимо, що функція $Q'(x)$ задовольняє співвідношення (2.99) з точністю до сталої. Справді,

$$\int\limits_{D}\Phi(Q'(x))\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}=\int\limits_{\{x\in D: Q(x)<1\}}\Phi(Q'(x))\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}+$$

$$+\int\limits_{\{x\in D: Q(x)\geqslant 1\}}\Phi(Q'(x))\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\leqslant M_0+\Phi(1)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}=M_0'<\infty\,.$$

В такому випадку, за лемою 2.3.1

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}'^{\frac{1}{p-1}}(t)}\rightarrow\infty$$

при довільному $0<r_0<1$ та $\varepsilon\rightarrow 0$, де $q_{x_0}'(t)=\frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,t)}Q'(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$.

Крім того, $\int\limits_{\varepsilon}^{r_0}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}'^{\frac{1}{p-1}}(t)}<\infty$ при кожному $\varepsilon\in(0,r_0)$, бо $q_{x_0}'(t)\geqslant 1$ при майже всіх $t\in(0,r_0)$.

Сильна досяжність межі кожної області $D_f'=f(D)$ по відношенню до p-модуля є результатом [87, зауваження]. В такому випадку, за [96, лема 5.2] відображення $f\in\mathfrak{F}_{\Phi,A,p,\delta,M_0}(D)$ має неперервне продовження на $\overline{D}_P$. Зауважимо, що при $p\ne n$ кожне відображення $f\in\mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(\overline{D})$ не приймає точку нескінченність (див., напр., [35, леми 2.6 і 3.1]). Тоді одностайна неперервність сім'ї $\mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(\overline{D})$ всередині області D є результатом теореми 4.1 в [72] при $p=n$ і леми 2.3.2 при $p<n$.

Доведемо одностайну неперервність $\mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(\overline{D})$ в $E_D:=\overline{D}_P\setminus D$. Припустимо протилежне, а саме, що існують $\varepsilon_*>0$, $P_0\in E_D$, послідовність $x_m\in\overline{D}_P$, $x_m\rightarrow P_0$ при $m\rightarrow\infty$, і відображення $f_m\in\mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(\overline{D})$ такі, що

$$h(f_m(x_m),f_m(P_0))\geqslant\varepsilon_*\,,\quad m=1,2,\ldots\,. \tag{2.102}$$

Оскільки кожне f_m має неперервне продовження в точку P_0, ми можемо вважати, що $x_m \in D$, крім того, існує ще одна послідовність $x'_m \in \overline{D}_P$, $x'_m \to P_0$ при $m \to \infty$, така, що

$$h(f_m(x_m), f_m(x'_m)) \geqslant \varepsilon_*/2\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,. \tag{2.103}$$

Нехай d_m – послідовність областей розрізів σ_m, що відповідає кінцю P_0 така, що $\sigma_m \subset S(x_0, r_m)$, $x_0 \in \partial D$ і $r_m \to 0$ при $m \to \infty$ (див. [48, лема 2]). Без обмеження загальності, можна вважати, що $x_m, x'_m \in d_m$. Нехай тоді γ_m – крива, що з'єднує точки x_m і x'_m всередині d_m.

Оскільки область D регулярна, простір $\overline{D}_P$ містить не менше двох простих кінців P_1 і $P_2 \in E_D$. Нехай $P_1 \subset E_D$ – простий кінець, що не співпадає з P_0. Припустимо, G_m, $m = 1, 2, \ldots$, – послідовність областей, яка відповідає простому кінцю P_1. Оскільки при кожному $m = 1, 2, \ldots$ відображення f_m має неперервне продовження на $\overline{D}_P$, можна підібрати послідовність $\zeta_m \in G_m$, $\zeta_m \to P_1$ при $m \to \infty$, такою, що $h(f_m(\zeta_m), f_m(P_1)) \to 0$ при $m \to \infty$. Зауважимо, що при всіх $m \geqslant m_0$ і деякому $m_0 \in \mathbb{N}$

$$h(f_m(a), f_m(\zeta_m)) \geqslant h(f_m(a), f_m(P_1)) - h(f_m(\zeta_m), f_m(P_1)) \geqslant \delta/2\,, \tag{2.104}$$

де, як зазвичай, $h(x, y)$ позначає хордальну відстань між x і y. Побудуємо послідовність континуумів K_m, $m = 1, 2, \ldots$, наступним чином. З'єднаємо точки ζ_1 і a довільною кривою в D, котру позначимо K_1. Далі, з'єднаємо точки ζ_2 і ζ_1 кривою K'_1, в G_1. Поєднавши криві K_1 і K'_1, отримаємо криву K_2, що з'єднує точки a і ζ_2. Аналогічно продовжимо цей процес за таким самим правилом. Нехай на деякому кроці маємо криву K_m, що з'єднує точки ζ_m і a. З'єднаємо точки ζ_{m+1} і ζ_m кривою K'_m, яка лежить в G_m. Поєднавши між собою криві K_m і K'_m, отримаємо криву K_{m+1} і так далі. Покажемо, що знайдеться номер $m_1 \in \mathbb{N}$, такий що

$$d_m \cap K_m = \varnothing \quad \forall \quad m \geqslant m_1\,. \tag{2.105}$$

Доведемо це від супротивного, а саме, припустимо, що (2.105) не виконується. Тоді знайдеться зростаюча послідовність номерів $m_k \to \infty$, $k \to \infty$, і точок $\xi_k \in K_{m_k} \cap d_{m_k}$, $m = 1, 2, \ldots,$. Тоді $\xi_k \to P_0$ при $k \to \infty$.

Зауважимо, що можливі два випадки: або всі елементи ξ_k при $k = 1, 2, \ldots$ належать $D \setminus G_1$, або знайдеться номер k_1 такий, що $\xi_{k_1} \in G_1$. В другому випадку розглянемо послідовність ξ_k, $k > k_1$. Зауважимо, що можливі два випадки: або ξ_k при $k > k_1$ належать $D \setminus G_2$, або знайдеться $k_2 > k_1$ такий, що $\xi_{k_2} \in G_2$. В другому випадку розглянемо послідовність ξ_k, $k > k_2$. І так далі. Припустимо, що елемент $\xi_{k_{l-1}} \in G_{l-1}$ вже побудований. Зауважимо, що можливі два випадки: або ξ_k належать $D \setminus G_l$ при $k > k_{l-1}$, або знайдеться номер $k_l > k_{l-1}$ такий, що $\xi_{k_l} \in G_l$, і т.д. Ця процедура може бути як скінченною, так і нескінченною, в залежності від чого маємо дві можливі ситуації:

1) або знайдуться номери $n_0 \in \mathbb{N}$ і $l_0 \in \mathbb{N}$ такі, що $\xi_k \in D \setminus G_{n_0}$ при всіх $k > l_0$;

2) або для кожного $l \in \mathbb{N}$ знайдеться елемент ξ_{k_l} такий, що $\xi_{k_l} \in G_l$, причому послідовність k_l є зростаючою по $l \in \mathbb{N}$.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо і покажемо, що в обох з них ми приходимо до суперечності. Нехай має місце ситуація 1). Тоді зауважимо, що всі елементи послідовності ξ_k належать K_{n_0}, звідки випливає існування підпослідовності ξ_{k_r}, $r = 1, 2, \ldots$, збіжної при $r \to \infty$ до деякої точки $\xi_0 \in D$. Проте, $\xi_k \in d_{m_k}$ і, отже, $\xi_0 \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{d_m} \subset \partial D$ (див. [48, пропозиція 1]). Отримана суперечність вказує на неможливість випадку 1). Нехай має місце випадок 2), тоді одночасно $\xi_k \to P_0$ і $\xi_k \to P_1$ при $k \to \infty$. Оскільки простір $\overline{D}_P$ є метричним (див. [48, зауваження 3], то звідси, за нерівністю трикутника, випливає, що $P_1 = P_0$, що суперечить обранню P_1. Отримана суперечність вказує на справедливість співвідношення (2.105).

За співвідношенням (2.105) та за означенням розрізів $\sigma_m \subset S(x_0, r_m)$, маємо:

$$\Gamma\left(|\gamma_m|, K_m, D\right) > \Gamma(S(x_0, r_m), S(x_0, \widetilde{\varepsilon_0}), D)\,.$$

Отже,

$$f_m(\Gamma\left(|\gamma_m|, K_m, D\right)) > f_m(\Gamma(S(x_0, r_m), S(x_0, \widetilde{\varepsilon_0}), D))\,,$$

звідки, за означенням класу $\mathfrak{F}_{\Phi,a,p,\delta,M_0}(\overline{D})$

$$M_p(f_m(\Gamma(|\gamma_m|,K_m,D)))\leqslant M_p(f_m(\Gamma(S(x_0,r_m),S(x_0,\widetilde{\varepsilon_0}),D))\leqslant \tag{2.106}$$
$$\leqslant\int\limits_{A\cap D} Q_m(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x)\,,$$

де $A=A(x_0,r_m,\widetilde{\varepsilon_0})$, η – довільна невід'ємна вимірна за Лебегом функція, яка задовольняє (2.101) при $r_1\mapsto r_m$ і $r_2\mapsto\widetilde{\varepsilon_0}$, крім того, $Q_m:=Q_{f_m}$ відповідає функції Q у (2.100). Встановимо нерівність

$$M_p(f_m(\Gamma(S(x_0,r_m),S(x_0,\widetilde{\varepsilon_0}),D))\leqslant\frac{\omega_{n-1}}{I_m^{p-1}}\,, \tag{2.107}$$

де $I_m=\int\limits_{r_m}^{\widetilde{\varepsilon_0}}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{mx_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}$, $q_{mx_0}(t)=\frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,t)}Q_m(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}$ і $Q_m:=Q_{f_m}$ (ми покладаємо $Q_m(x)\equiv 0$ при $x\notin D$). Для цього будемо міркувати аналогічно доведенню леми 1 в [76]. Можна вважати, що $I\neq 0$, оскільки (2.107) очевидно в цьому випадку. Можна також вважати, що $I\neq\infty$, бо в протилежному випадку можна розглянути $Q(x)+\delta$ замість $Q(x)$ в (2.107), а потім перейти до границі при $\delta\to 0$. Нехай $I\neq\infty$. Тоді $q_{x_0}(r)\neq 0$ при $r\in(r_m,\widetilde{\varepsilon_0})$. Покладемо

$$\psi(t)=\begin{cases}1/[t^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)], & t\in(r_m,\widetilde{\varepsilon_0})\,,\\ 0, & t\notin(r_m,\widetilde{\varepsilon_0})\,.\end{cases}$$

За теоремою Фубіні

$$\int\limits_A Q_m(x)\cdot\psi^p(|x-x_0|)\,dm(x)=\omega_{n-1}I_m\,, \tag{2.108}$$

де $A=A(x_0,r_m,\widetilde{\varepsilon_0})$ визначено в (1.10). Зауважимо, що функція $\eta_1(t)=\psi(t)/I$, $t\in(r_m,\widetilde{\varepsilon_0})$, задовольняє співвідношення (2.101). Тоді з (2.100) і (2.108) отримаємо бажане співвідношення (2.107).

Остаточно, з (2.106), (2.107) і з леми 2.3.1 випливає, що

$$M_p(f_m(\Gamma(|\gamma_m|,K_m,D)))\leqslant\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_m}^{\widetilde{\varepsilon_0}}\frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}}q_{mx_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{p-1}}\to 0\,,\quad m\to\infty\,, \tag{2.109}$$

де $q_{mx_0}(t) = \frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,t)} Q_m(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$ і $Q_m := Q_{f_m}$ відповідає функції Q у (2.97). Співвідношення (2.106) суперечить одностайній рівномірності послідовності областей $D'_m := f_m(D)$. Дійсно, $h(f_m(K_m)) \geqslant \delta/2$ згідно з (2.104), а $h(f_m(|\gamma_m|)) > \varepsilon_*/2$ за співвідношенням (2.103). Отже, оскільки послідовність областей $D'_m := f_m(D)$ є одностайно рівномірною, для деякого $\delta_* > 0$ і всіх $m = 1, 2, \ldots,$ маємо:

$$M_p(f_m(\Gamma(|\gamma_m|, K_m, D))) = M_p(\Gamma(f_m(|\gamma_m|), f_m(K_m), f_m(D))) \geqslant \delta_* > 0\,,$$

що суперечить співвідношенню (2.109). Отримана суперечність вказує на невірність припущення в (2.102). Теорема доведена. $\Box$

2.3.2. Одностайна неперервність сімей відображень з оберненою нерівністю Полецького відносно простих кінців

Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, точок $a \in D$, $b \in D'$ і числа $M_0 > 0$ позначимо через $\mathfrak{S}_{a,b,M_0}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на D', що задовольняють умову (1.11) з деяким $Q = Q_f$, $\|Q\|_{L^1(D')} \leqslant M_0$, для кожного $y_0 \in f(D)$, таких що $f(a) = b$. Наступне твердження у випадку фіксованої функції Q доведено в [6, теорема 1] (див. також теорему 2.1.4 для випадку «гарних меж» і змінної функції Q, а також [8, теорема 7.1] для випадку «гарних меж» і фіксованої функції Q. Для змінних Q див. також теорему 1.5 в [81]. Доведення цього твердження повністю аналогічно у ситуації $Q = Q_f$, $\|Q\|_{L^1(D')} \leqslant M_0$.

Теорема 2.3.3. *Припустимо, що область D має слабко плоску межу, жодна із зв'язних компонент якої не вироджена. Якщо область D' є регулярною, то кожне відображення $f \in \mathfrak{S}_{a,b,M_0}(D, D')$ має неперервне продовження $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}_P$, причому, $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}_P$ і, крім того, сім'я $\mathfrak{S}_{a,b,M_0}(\overline{D}, \overline{D'})$ усіх продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}_P$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$.*

2.3.3. Компактність сімей розв'язків задачі Діріхле

Доведення теореми 2.3.1 схоже на доведення теореми 2.1.2, тому обмежимося схемою доведення.

I. Нехай $f_m,\ m=1,2,\ldots,$ – довільна послідовність сім'ї $\mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\varphi,\Phi,z_0}(D)$. Згідно теореми Стойлова про факторизацію (див., напр., [98, п. 5 (III), гл. V]) для відображення f_m справедливе зображення

$$f_m=\varphi_m\circ g_m\,, \tag{2.110}$$

де g_m – деякий гомеоморфізм, а φ_m – аналітична функція. Міркуючи аналогічно доведенню теореми 2.1.2, можна показати, що:

а) $J(z,g_m)\neq 0$ для майже всіх $z\in D$, крім того, $K_{\mu_{f_m}}(z)=K_{\mu_{g_m}}(z)$;

б) межа області $g_m(D)$ містить не менше двох точок;

в) відображення f_m можна подати в вигляді:

$$f_m=\varphi_m\circ g_m=\varphi_m\circ\psi_m^{-1}\circ\psi_m\circ g_m=F_m\circ G_m\,,\quad m=1,2,\ldots\,,$$

де F_m є аналітичною функцією в одиничному крузі, а G_m – регулярний гомеоморфізм класу Соболєва в області D. Можна вважати, що $\operatorname{Im}F_m(0)=0$ для всіх $m\in\mathbb{N}$;

г) L^1-норми функцій $K_{\mu_{G_m}}(z)$ в $L^1(D)$ обмежені зверху деякою універсальною додатною сталою $C>0$ рівномірно по всіх $m=1,2,\ldots$.

II. Доведемо, що кожне відображення $G_m,\ m=1,2,\ldots,$ має неперервне продовження на E_D, крім того, сім'я продовжених відображень $\overline{G}_m,\ m=1,2,\ldots,$ є одностайно неперервною в $\overline{D}_P$. Дійсно, за доведеним у пункті **I** $K_{\mu_{G_m}}\in L^1(D)$. З огляду на це, за [54, теорема 3.1] кожне відображення $G_m,\ m=1,2,\ldots,$ є так званим кільцевим Q-гомеоморфізмом в $\overline{D}$ при $Q=K_{\mu_{G_m}}(z)$, де μ визначається зі співвідношення (2.3), а K_μ обчислюється по формулі (2.2). Зауважимо, що одиничний круг $\mathbb{D}$ є рівномірною областю як скінченнозв'язна на своїй межі плоска область зі скінченною кількістю компонент межі (див., напр., [63, теорема 6.2 і наслідок 6.8]). Тоді бажаний висновок є твердженням теореми 2.3.2.

III. Доведемо також, що обернені гомеоморфізми G_m^{-1}, $m = 1, 2, \ldots$, продовжується по неперервності на $\partial\mathbb{D}$ до відображення $\overline{G_m^{-1}}$ в термінах простих кінців в D і, крім того, сім'я відображень $\{\overline{G_m^{-1}}\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$ як сім'я відображень з $\overline{\mathbb{D}}$ в $\overline{D}_P$. Справді, оскільки за доведеним у пункті **II** відображення G_m, $m = 1, 2, \ldots$, є кільцевими $K_{\mu_{G_m}}(z)$-гомеоморфізмами в D, обернені до них відображення G_m^{-1} задовольняють співвідношення (1.11). Оскільки $G_m^{-1}(0) = z_0$ для всіх $m = 1, 2, \ldots$, неперервне продовження кожного відображення G_m^{-1} на $\partial\mathbb{D}$, а також одностайна неперервність сім'ї відображень $\{\overline{G_m^{-1}}\}_{m=1}^{\infty}$ на $\overline{\mathbb{D}}$ (в термінах $G_m^{-1} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D}_P$) є результатом теореми 2.3.3.

IV. Оскільки за доведеним сім'я відображень $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в D, за критерієм Арцела-Асколі існує зростаюча підпослідовність номерів m_k, $k = 1, 2, \ldots$, така що послідовність G_{m_k} збігається локально рівномірно в D при $k \to \infty$ до деякого неперервного відображення $G : D \to \overline{\mathbb{C}}$ (див., напр., [99, теорема 20.4]). За лемою 2.3.1 має місце альтернатива: або G – гомеоморфізм області D у $\mathbb{C}$, або G – стала в $\overline{\mathbb{C}}$. Міркуючи аналогічно пункту **VI** доведення теореми 2.1.2, можна показати, що другий випадок неможливий.

V. За доведеним у пункті **II** сім'я відображень $\{\overline{G_m^{-1}}\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$. Отже, за критерієм Арцела-Асколі (див., напр., [99, теорема 20.4]) ми також можемо вважати, що послідовність $\overline{G_{m_k}^{-1}}(y)$, $k = 1, 2, \ldots$, збігається рівномірно в $\overline{\mathbb{D}}$ до декого неперервного відображення $\widetilde{F} : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{D}_P$ при $k \to \infty$. Встановимо, що $\widetilde{F} = \overline{G^{-1}}$. Для цього покажемо, що $G(D) = \mathbb{D}$. Зафіксуємо $y \in \mathbb{D}$. Оскільки $G_{m_k}(D) = \mathbb{D}$ при всіх $k = 1, 2, \ldots$, ми маємо $G_{m_k}(x_k) = y$ при деякому $x_k \in D$. Оскільки область D регулярна, метричний простір $(\overline{D}_P, \rho)$ є компактним. Отже, можна вважати, що $\rho(x_k, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$, де $x_0 \in \overline{D}_P$. Далі, використовуючи нерівність трикутника і з огляду на одностайну неперервність $\{\overline{G_m}\}_{m=1}^{\infty}$ на $\overline{D}_P$ (пункт **II**) будемо мати:

$$|\overline{G}(x_0) - y| = |\overline{G}(x_0) - \overline{G}_{m_k}(x_k)| \leqslant$$

$$\leqslant |\overline{G}(x_0) - \overline{G}_{m_k}(x_0)| + |\overline{G}_{m_k}(x_0) - \overline{G}_{m_k}(x_k)| \to 0$$

при $k \to \infty$. Звідси $G(x_0) = y$. Зауважимо, що $x_0 \in D$, оскільки G – гомеоморфізм. В силу довільності точки $y \in \mathbb{D}$ рівність $G(D) = \mathbb{D}$ доведена. В такому випадку, $G_{m_k}^{-1} \to G^{-1}$ локально рівномірно в $\mathbb{D}$ при $k \to \infty$ (див., напр., [39, лема 2.16]). Таким чином, $\widetilde{F}(y) = G^{-1}(y)$ при всіх $y \in \mathbb{D}$. Нарешті, оскільки $\widetilde{F}(y) = G^{-1}(y)$ при всіх $y \in \mathbb{D}$ і, крім того, відображення $\widetilde{F}$ має неперервне продовження на межу області $\mathbb{D}$, то в силу єдиності границі в межових точках маємо також $\widetilde{F}(y) = \overline{G^{-1}}(y)$ при всіх $y \in \overline{\mathbb{D}}$. Отже, ми довели, що $\overline{G_{m_k}^{-1}} \to \overline{G^{-1}}$ рівномірно в $\overline{\mathbb{D}}$ при $k \to \infty$ в термінах метрики ρ в $\overline{D}_P$.

VI. Міркуючи аналогічно пункту **VIII** доведення теореми 2.1.2, можна показати, що послідовність $f_{m_k} = F_{m_k} \circ G_{m_k}$ збігається локально рівномірно до функції $f = F \circ G$, яка є відкритою і дискретною, або сталою функцією, причому, $\operatorname{Im} F(0) = 0$, F є аналітичною функцією в $\mathbb{D}$, крім того, з огляду на (2.95) для довільного $P \in E_D$

$$\lim_{\zeta \to P} \operatorname{Re} f(\zeta) = \lim_{\zeta \to P} \operatorname{Re} F(G(\zeta)) = \varphi(G^{-1}(G(P))) = \varphi(P)\,.$$

VII. Оскільки за доведеним у пункті **VI** відображення G є гомеоморфізмом, з огляду на [52, лема 1, теорема 1] G є регулярним розв'язком рівняння (2.94) з деякою функцією $\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$. Оскільки множина точок функції F, де її якобіан дорівнює нулю, може складатися тільки з ізольованих точок (див. [98, пункти 5 и 6 (II), гл. V]), у випадку $F \not\equiv const$ відображення f є регулярним. Зауважимо, що для відповідної функції $K_\mu = K_{\mu_f}$ виконується співвідношення типу (2.96) (див. [52, лема 1]). Отже, $f \in \mathfrak{F}^{\mathcal{M}}_{\varphi,\Phi,z_0}(D)$. $\Box$

Висновки до розділу 2

У другому розділі досліджені проблеми компактності класів розв'язків рівняння Бельтрамі і задачі Діріхле для нього. Отримані наступні результати:

1. Доведені теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі у деякій жордановій області, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють

певні обмеження інтегрального характеру. Отримано результати про компактні класи розв'язків відповідних задач Діріхле, які розглядаються в деякій жордановій області.

2. Доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження теоретико-множинного типу. Отримано результати про компактні класи розв'язків відповідних задач Діріхле, які розглядаються в деякій жордановій області.

3. Отримано результати щодо компактності розв'язків задачі Діріхле в однозв'язній області в термінах простих кінців для випадку, коли максимальні дилатації цих розв'язків задовольняють певні інтегральні обмеження.

Матеріали другого розділу викладено в публікаціях здобувача [1], [24], [31].

РОЗДІЛ 3
ЛІНІЙНІ І КВАЗІЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ БЕЛЬТРАМІ. ВІДОБРАЖЕННЯ З ГІДРОДИНАМІЧНИМ НОРМУВАННЯМ

Третій розділ присвячений лінійним і квазілінійним рівнянням Бельтрамі. Розділ складається з трьох підрозділів. У першому підрозділі отримані теореми про існування гомеоморфних ACL-розв'язків цього рівняння за певних умов на комплексні коефіцієнти. Крім того, за деяких відносно слабких умов отримані теореми про існування відповідних неперервних ACL-розв'язків, які є логарифмічно гельдеровими в заданій області. У другому підрозділі вивчається випадок, коли розв'язки рівняння Бельтрамі задовольняють гідродинамічне нормування в околі нескінченності. Доведено існування розв'язків класу Соболєва рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками, які задовольняють певну умову на дилатації обернених відображень. Третій підрозділ присвячений просторовим відображенням, які задовольняють деякий просторовий аналог гідродинамічної умови зростання в околі нескінченно віддаленої точки. Доведено, що гомеоморфізми вказаного класу формують одностайно неперервні сім'ї за деяких умов на їх характеристику. Розглянуто також питання щодо замкнености цих класів відносно локально рівномірної збіжності. Отримані відповідні результати для відображень з інтегральними обмеженнями, а також для класів відповідних обернених відображень.

3.1. Існування розв'язків квазілінійних рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками

3.1.1. Формулювання основних результатів

Результати даного підрозділу опубліковані в [2]. Цей підрозділ присвячений застосуванню теорії відображень до теорем існування розв'язків рівнянь Бельтрамі. Зокрема, йдеться про квазілінійні рівняння Бельтрамі з двома комплексними характеристиками. Відносно нещодавно були отримані значні просування у напрямку існування розв'язків лінійних рівнянь Бельтрамі, див., напр., [12], [14]– [16] і [39]. Вказані результати переважно стосуються випадку, коли максимальна дилатація рівняння має скінченне середнє коливання в кожній точці, або задовольняє умову розбіжності інтегралу типу Лехто. В даному підрозділі ми розглянемо аналогічні квазілінійні рівняння, тобто, випадок, коли відповідні коефіцієнти можуть залежати від розв'язку рівняння. Вказана ситуація достатньо повно розглянута в роботах Є. Севостьянова для одного комплексного коефіцієнта. Нижче розглядається випадок рівняння з двома коєфіцієнтами. Окремо будуть розглянуті умови, які забезпечують наявність не гомеоморфних, а просто неперервних розв'язків. Слід зауважити, що вони мають вищу степінь гладкості у порівнянні з розв'язками, про які йшлося вище, і є логарифмічно неперервними за Гельдером (див. відповідні публікації [7] і [89] для рівнянь з одним коефіцієнтом).

Перейдемо до означень. Нехай D– область в $\mathbb{C}$. Будемо говорити, що функція $\nu=\nu\,(z,w):D\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{D}$ задовольняє *умову Каратеодорі,* якщо ν вимірна по $z\in D$ при кожному фіксованому $w\in\mathbb{C}$ і неперервна по $w\in\mathbb{C}$ при майже всіх $z\in D$. Нехай функції $\mu=\mu(z,w)$ і $\nu=\nu(z,w)$ задовольняють умову Каратеодорі і, крім того, $|\mu(z,w)|+|\nu(z,w)|<1$ при всіх $w\in\mathbb{C}$ і майже всіх $z\in D$. Покладемо

$$K_{\mu,\nu}(z,w)=\quad\frac{1+|\mu(z,w)|+|\nu(z,w)|}{1-|\mu\,(z,w)|-|\nu(z,w)|}\,. \tag{3.1}$$

Нехай $\mu=\mu(z,w):D\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{D}$ і $\nu=\nu(z,w):D\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{D}$ – функції такі, що при кожному фіксованому $w\in\mathbb{C}$ виконано умову $|\mu(z,w)|+|\nu(z,w)|<1$ при майже всіх $z\in D$. Розглянемо *квазілінійне рівняння Бельтрамі з двома характеристиками:*

$$f_{\overline{z}}=\mu(z,f(z))\cdot f_z+\nu(z,f(z))\cdot\overline{f_z}\,. \tag{3.2}$$

Функція $K_{\mu,\nu}(z,w)$ в (3.1) називається *дилатацією рівняння (3.2)*. Відображення $f:D\rightarrow\mathbb{C}$ будемо називати *регулярним розв'язком рівняння (3.2),* якщо $f\in W_{\rm loc}^{1,1}$ і $J(z,f)\neq 0$ майже скрізь у D. Позначимо через $q_{z_0}(r)$ середнє значення функції Q над колом $S(z_0,r)=\{|z-z_0|=r\}$,

$$q_{z_0}(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q(z_0+re^{i\theta})\,d\theta\,. \tag{3.3}$$

Є правильним наступне твердження.

Теорема 3.1.1. *Нехай функції* $\mu(z,w):\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ *і* $\nu(z,w):\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ *задовольняють умови Каратеодорі і, крім того,* $|\mu(z,w)|+|\nu(z,w)|<1$ *при всіх* $w\in\mathbb{C}$ *і майже всіх* $z\in\mathbb{D}$. *Припустимо, що існує функція* $Q:\mathbb{D}\to[1,\infty]$ *така, що* $K_{\mu,\nu}(z,w)\leqslant Q(z)\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{D})$ *для майже всіх* $z\in\mathbb{D}$ *і всіх* $w\in\mathbb{C}$, *де* $K_{\mu,\nu}$ *визначено в (3.1). Припустимо, що* $Q\in FMO(\mathbb{D})$, *або для кожного* $z_0\in\mathbb{D}$ *виконано умову*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)}\frac{dr}{rq_{z_0}(r)}=\infty\,, \tag{3.4}$$

де $\delta(z_0)$ *– деяке додатне число,* $\delta(z_0)<{\rm dist}\,(z_0,\partial\mathbb{D})$, *а* $q_{z_0}(r)$ *визначено в (3.3). Тоді рівняння (3.2) має регулярний гомеоморфний розв'язок* f *класу* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *в* $\mathbb{D}$, *такий що* $f^{-1}\in W^{1,2}_{\rm loc}(f(\mathbb{D}))$.

Іншого роду результати стосуються випадку, коли рівняння (3.2) має лише неперервний, але логарифмічно гельдеревий розв'язок, див. роботи [7], [89] з приводу аналогічних лінійних рівнянь з одним коефіцієнтом μ. Нехай $J(z,f)\neq 0$ і нехай відображення f має частинні похідні f_z і $f_{\overline{z}}$ у точці z. Тоді *максимальною дилатацією відображення* f в точці z будемо називати наступну функцію:

$$K_{\mu_f}(z)=\frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|}{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}\,. \tag{3.5}$$

Покладемо $K_{\mu_f}(z)=1$ в точках z, де $|f_z|+|f_{\overline{z}}|=0$ та $K_{\mu_f}(z)=\infty$ у точках z, де $|f_z|+|f_{\overline{z}}|\neq 0$, але $J(z,f)=0$. Визначимо також *внутрішню дилатацію порядку* $p\geqslant 1$ відображення f за допомогою співвідношення

$$K_{I,p}(z,f)=\frac{|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2}{(|f_z|-|f_{\overline{z}}|)^p} \tag{3.6}$$

де $J(z,f)\neq 0$. Як і у (3.5), покладемо $K_{I,p}(z)=1$, якщо $|f_z|+|f_{\overline{z}}|=0$, і $K_{I,p}(z)=\infty$ у точках, де $J(z,f)=0$, проте $|f_z|+|f_{\overline{z}}|\neq 0$. Зауважимо, що $K_{I,2}(z)=K_\mu(z)$. Покладемо $\|f'(z)\|=|f_z|+|f_{\overline{z}}|$. Нагадаємо, що гомеоморфізм $f:D\to\mathbb{C}$ називається *квазіконформним,* якщо $f\in W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ і, крім того, існує стала $K\geqslant 1$ така, що $\|f'(z)\|^2\leqslant K\cdot|J(z,f)|$ майже скрізь.

Нехай $\mu=\mu(z,w):\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ і $\nu=\nu(z,w):\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ функції, для яких існує вимірна за Лебегом функція $q:\mathbb{D}\to[0,1)$ така, що при кожному фіксованому $w\in\mathbb{C}$ і майже всіх $z\in\mathbb{D}$ виконано умову $|\mu(z,w)|+|\nu(z,w)|\leqslant q(z)<1$. Зафіксуємо $n\geqslant 1$ і покладемо

$$\mu_n(z,w)=\begin{cases}\mu(z,w), & Q_0(z)\leqslant n,\\ 0\,, & Q_0(z)>n\,,\end{cases}\tag{3.7}$$

і

$$\nu_n(z,w)=\begin{cases}\nu(z,w), & Q_0(z)\leqslant n,\\ 0\,, & Q_0(z)>n\,,\end{cases}\tag{3.8}$$

де Q_0 визначено рівністю

$$Q_0(z)=\frac{1+q(z)}{1-q(z)}\,.\tag{3.9}$$

Нехай f_n – гомеоморфний ACL-розв'язок рівняння (3.2) $f_n(\mathbb{D})=\mathbb{D}$, в якому покладемо $\mu\mapsto\mu_n(z,w)$, $\nu\mapsto\nu_n(z,w)$, такий що $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$ (вказаний розв'язок визначено коректно з огляду на теорему Боярського про існування розв'язків квазілінійних рівнянь, див. теорему 8.2 в [13]). Зауважимо, що відображення $g_n=f_n^{-1}$ є квазіконформним, зокрема, воно є диференційовним майже скрізь. Нехай $K_{\mu_{g_n}}(w)$ – дилатація оберненого відображення g_n, тобто,

$$K_{\mu_{g_n}}(w)=\frac{|(g_n)_w|^2-|(g_n)_{\overline{w}}|^2}{(|(g_n)_w|-|(g_n)_{\overline{w}}|)^2}\,.\tag{3.10}$$

Визначимо також *внутрішню дилатацію порядку* p *відображення* g_n *в точці* w за допомогою рівності

$$K_{I,p}(w,g_n)=\frac{|(g_n)_w|^2-|(g_n)_{\overline{w}}|^2}{(|(g_n)_w|-|(g_n)_{\overline{w}}|)^p}\,.\tag{3.11}$$

Виконується наступне твердження.

Теорема 3.1.2. *Нехай μ, ν, μ_n, ν_n, f_n і g_n такі, як вказано вище. Нехай $Q:\mathbb{D}\to[1,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Припустимо, що виконуються наступні умови:*

1) для кожних $0<r_1<r_2<1$ і $y_0\in\mathbb{D}$ існує множина $E\subset[r_1,r_2]$ додатної лебегової міри така, що функція Q є інтегровною по колах $S(y_0,r)$ для кожного $r\in E$;

2) знайдеться число $1 < p \leqslant 2$ *і стала* $M > 0$ *такі, що*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} K_{I,p}(w, g_n)\, dm(w) \leqslant M \tag{3.12}$$

для всіх $n = 1, 2, \ldots,$ *де* $K_{I,p}(w, g_n)$ *визначено у (3.11);*

3) Нерівність

$$K_{\mu_{g_n}}(w) \leqslant Q(w) \tag{3.13}$$

виконується для майже всіх $w \in \mathbb{D}$, *де* $K_{\mu_{g_n}}$ *визначено в (3.10). Тоді рівняння (3.2) має неперервний* $W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{D})$ *-розв'язок* f *в* $\mathbb{D}$.

Наслідок 3.1.1. *Зокрема, твердження теореми 3.1.2 виконується, якщо в цій теоремі ми відмовляємося від умови 1), вимагаємо умову 3), а умову 2) заміняємо наступною:* $Q \in L^1(\mathbb{D})$. *В цьому випадку, розв'язок* f *рівняння (3.2) може бути обраним таким, що рівність*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/2}}{\log^{1/2}\left(1 + \frac{r_0}{2|x-y|}\right)} \tag{3.14}$$

виконується для довільного компакту $K \subset \mathbb{D}$ *і всяких* $x, y \in K$, *де* $\|Q\|_1$ *позначає* L^1 *-норму функції* Q *в* $\mathbb{D}$, $C > 0$ *деяка стала і* $r_0 = d(K, \partial\mathbb{D})$. *Якщо додатково* $Q(z) \in FMO(\mathbb{D})$, *або виконано умову (3.4) в кожній точці* $z_0 \in \mathbb{D}$, *то відображення* f *можна обрати гомеоморфізмом.*

Доведення теорем 3.1.1, 3.1.2 та наслідку 3.1.1 наведено далі в тексті.

3.1.2. Існування гомеоморфного розв'язку квазілінійного рівняння в одиничному крузі

Для зручності покладемо $\partial f = f_z$, $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}}$. Наступне твердження доведено в [39, теорема 9.1].

Пропозиція 3.1.1. *Нехай* $D \subset \mathbb{C}$, *і нехай* $f_n : D \to \mathbb{C}$ – *послідовність гомеоморфних розв'язків рівняння* $\overline{\partial} f_n = \mu_n(z)\partial f_n + \nu_n(z)\overline{\partial f_n}$ *класу* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *таких, що*

$$\frac{1 + |\mu_n(z)| + |\nu_n(z)|}{1 - |\mu_n(z)| - |\nu_n(z)|} \quad \leqslant \quad Q(z) \,\in\, L^1_{loc}(D)$$

при всіх $n = 1, 2, \ldots$. *Якщо* $f_n \to f$ *локально рівномірно в* D *при* $n \to \infty$ *і* $f : D \to \mathbb{C}$ *– гомеоморфізм у* D, *то* $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ *і, крім того,* ∂f_n *і* $\overline{\partial} f_n$ *збігаються слабко в* L^1_{loc} *до* ∂f *і* $\overline{\partial} f$, *відповідно. Якщо* $\mu_n \to \mu$ *при* $n \to \infty$ *і* $\nu_n \to \nu$ *при* $n \to \infty$ *майже скрізь, то* $\overline{\partial} f = \mu(z)\partial f + \nu(z)\partial f$ *майже скрізь.*

Важливою є наступна лема, аналоги якої неодноразово доводились в інших ситуаціях (див., напр., [39, лема 9.1]).

Лема 3.1.1. *Нехай функції* $\mu(z, w) : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *і* $\nu(z, w) : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *задовольняють умови Каратеодорі і, крім того,* $|\mu(z, w)| + |\nu(z, w)| < 1$ *при всіх* $w \in \mathbb{C}$ *і майже всіх* $z \in \mathbb{D}$. *Нехай, крім того, існує функція* $Q : \mathbb{D} \to [1, \infty]$ *така, що* $K_{\mu,\nu}(z, w) \leqslant Q(z) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{D})$ *для майже всіх* $z \in \mathbb{D}$ *і всіх* $w \in \mathbb{C}$, *де* $K_{\mu,\nu}$ *визначено в (3.1). Припустимо, що для будь-якого* $z_0 \in \mathbb{D}$ *існують* $0 < \varepsilon_0' \leqslant \varepsilon_0 < {\rm dist}\,(z_0, \partial\mathbb{D})$, $c > 0$, $0 < p < 2$ *і вимірна за Лебегом функція* $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *такі, що*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \tag{3.15}$$

при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$, $I(\varepsilon) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і, при цьому,*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z) \cdot \psi^2(|z - z_0|)\, dm(z) \leqslant c \cdot I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)\,. \tag{3.16}$$

Тоді рівняння (3.2) має регулярний гомеоморфний розв'язок f *класу* $W^{1,1}_{\rm loc}$ *в* $\mathbb{D}$, *такий що* $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(f(\mathbb{D}))$.

Доведення. Скористаємося підходом, який був застосований при доведенні леми 9.1 в [39]. Розглянемо послідовності функцій

$$\mu_n(z, w) = \begin{cases} \mu(z, w), & Q(z) \leqslant n, \\ 0\,, & Q(z) > n \end{cases} \tag{3.17}$$

і

$$\nu_n(z, w) = \begin{cases} \nu(z, w), & Q(z) \leqslant n, \\ 0\,, & Q(z) > n\,. \end{cases} \tag{3.18}$$

Зауважимо, що $K_{\mu_n,\nu_n}(z,w)\leqslant n$ при майже всіх $z\in\mathbb{D}$ і всіх $w\in\mathbb{C}$. Отже,

$$|\mu_n(z,w)|+|\nu_n(z,w)|\leqslant\frac{n-1}{n+1}<1$$

при майже всіх $z\in\mathbb{D}$ і майже всіх $w\in\mathbb{C}$. Отже, за теоремою Боярського про існування розв'язків квазілінійних рівнянь (див. теорему 8.2 в [13]) існує n-квазіконформний розв'язок f_n рівняння

$$\overline{\partial}f_n=\partial f_n\mu_n(z,f_n)+\overline{\partial f_n}\nu_n(z,f_n)$$

такий, що $f_n(0)=0,\ f_n(1)=1$. З огляду на означення відображень μ_n і ν_n маємо: $K_{\mu_{f_n}}(z)\leqslant Q(z)$ майже скрізь, де $K_{\mu_{f_n}}(z)$ визначено в (3.5). В такому випадку, за [50, співвідношення (6.6), гл. V] кожне f_n задовольняє оцінку

$$M(f_n(\Gamma(S(z_0,r_1),S(z_0,r_2),\,A)))\leqslant\int\limits_{A(z_0,r_1,r_2)}Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)dm(z)\qquad(3.19)$$

у будь-якому кільці $A=A(z_0,r_1,r_2)=\{z\in\mathbb{C}:r_1<|z-z_0|<r_2\}$ при довільному $z_0\in\mathbb{D}$, довільних $0<r_1<r_2<\operatorname{dist}(z_0,\partial\mathbb{D})$ і кожної вимірної за Лебегом функції $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant1\,.\qquad(3.20)$$

Тоді з огляду на лему 5 в [82] послідовність f_n є одностайно неперервною відносно хордальної (сферичної) метрики h в $\mathbb{R}^n$. За критерієм Арцела-Асколі (див., напр., [99, теорема 20.4]) існує підпослідовність f_{n_k} послідовності f_n, $k=1,2,\ldots,$ яка збігається при $k\to\infty$ до декого відображення f локально рівномірно в $\mathbb{D}$. Отже, за лемою 4.2 в [71] відображення f є або гомеоморфізмом у $\mathbb{D}$, або сталою в $\overline{\mathbb{C}}$. Друга ситуація виключена враховуючи умови нормування $f_n(0)=0,\ f_n(1)=1$. Зауважимо, що для майже всіх $z\in\mathbb{D}$ знайдеться номер $k_0=k_0(z)$ такий, що $\mu_{n_k}(z,w)=\mu(z,w),\ \nu_{n_k}(z,w)=\nu(z,w)$ при $n_k\geqslant n_{k_0}(z)$ і всіх $w\in\mathbb{C}$. Отже, для м.в. z,

$$\mu_{n_k}(z)=\mu_{n_k}(z,f_{n_k}(z))\to\mu(z,f(z))\,,$$

$$\nu_{n_k}(z)=\nu_{n_k}(z,f_{n_k}(z))\to\nu(z,f(z))$$

при $k \to \infty$, бо функції μ і ν неперервні по другому аргументу за умовою. За твердженням 3.1.1 $\overline{\partial} f = \mu(z,f)\partial f + \nu(z,f)\partial f$, тобто, f – гомеоморфний розв'язок рівняння (3.2), причому $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$.

Зауважимо, що за теоремою збіжності розв'язків рівняння Бельтрамі $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}$ (див. [39, наслідок 2.4]). Тоді за теоремою Малого-Мартіо f^{-1} має N-властивість Лузіна (див., напр., [55, наслідок B]). Нарешті, за теоремою Пономарьова $J(z,f) \neq 0$ майже скрізь (див., доведення пункту (ii) на стор. 150 в [58]). Лема доведена. $\Box$

Доведення теореми 3.1.1 випливає з леми 3.1.1 і [96, лема 1.3].

3.1.3. Існування неперервного розв'язку

Аналог наступної леми доведений в [39, теорема 9.1], див. також [89, лема 5.1].

Лема 3.1.2. *Нехай $1 < p \leqslant 2$, і f_n, $n = 1, 2, \ldots$, є послідовністю гомеоморфізмів,які зберігають орієнтацію, області D в $\mathbb{R}^n$, належать до класу $W^{1,2}_{\rm loc}(D)$ та задовольняють рівняння*

$$\overline{\partial} f_n = \partial f_n \mu_n(z) + \overline{\partial f_n} \nu_n(z)\,, \qquad (3.21)$$

де $\partial f = f_z$, $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}}$ та μ_n і ν_n – вимірні за Лебегом функції, що задовольняють нерівність $|\nu_n(z)| + |\mu_n(z)| < 1$ майже скрізь. Припустимо, що f_n збігається до відображення $f : D \to \mathbb{C}$ локально рівномірно при $n \to \infty$, і $\mu_n(z)$ і $\nu_n(z)$ збігаються до $\mu(z)$ і $\nu(z)$ при $n \to \infty$ майже всюди. Припустимо, що обернені відображення $g_n := f_n^{-1}$ належать $W^{1,2}_{\rm loc}(f_n(D))$, при

$$\int\limits_{f_n(D)} K_{I,p}(w, g_n)\, dm(w) \leqslant M$$

для деякого $M > 0$ і будь-яких $n = 1, 2, \ldots$. Тоді $f \in W^{1,p}_{\rm loc}(D)$ і, крім того, μ і ν є комплексними характеристиками відображення f, іншими словами, $\overline{\partial} f = \partial f \mu(z) + \overline{\partial f} \nu(z)$ для майже всіх $z \in D$.

Доведення. Ми будемо доводити лему 3.1.2 аналогічно доведенню [39, теорема 9.1], див. [89, лема 5.1]. Нехай C довільний компакт у D. Оскільки $g_n = f_n^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}$, за припущенням, g_n мають N-властивість Лузіна, див. напр. [55, наслідок B]. Тоді $J(z, f_n)$ майже скрізь не дорівнює нулю (див. доведення пункту (ii) на стор. 150 в [58]). Крім того, справедлива формула заміни змінних під інтегралом, див. [33, теорема 3.2.5]. У цьому випадку ми отримуємо, що

$$\int\limits_C \|f_n'(z)\|^p\,dm(z) = \int\limits_C \frac{\|f_n'(z)\|^p}{J(z,f_n)}\cdot J(z,f_n)\,dm(z) =$$

$$= \int\limits_{f_n(C)} K_{I,p}(w,g_n)\,dm(w) \leqslant M < \infty\,. \tag{3.22}$$

З (3.22) випливає, що $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ і, крім того, ∂f_n і $\overline{\partial} f_n$ слабко збігаються в $L^1_{\rm loc}(D)$ до ∂f і $\overline{\partial} f$, відповідно (див. [74, лема III.3.5]; див. також [73, лема 2.1]).

Залишилося показати, що f є розв'язком рівняння $f_{\overline{z}} = \mu(z)\cdot f_z + \nu(z)\cdot\overline{f_z}$. Покладемо $\zeta(z) = \overline{\partial} f(z) - \mu(z)\partial f(z) - \nu\overline{\partial f(z)}$ і покажемо, що $\zeta(z) = 0$ майже скрізь. Нехай B — довільний круг, що належить D з його замиканням. За нерівністю трикутника

$$\left|\int\limits_B \zeta(z)\,dm(z)\right| \leqslant I_1(n) + I_2(n) + I_3(n)\,, \tag{3.23}$$

де

$$I_1(n) = \left|\int\limits_B (\overline{\partial} f(z) - \overline{\partial} f_n(z))\,dm(z)\right|\,, \tag{3.24}$$

$$I_2(n) = \left|\int\limits_B (\mu(z)\partial f(z) - \mu_n(z)\partial f_n(z))\,dm(z)\right| \tag{3.25}$$

і

$$I_3(n) = \left|\int\limits_B (\nu(z)\overline{\partial f(z)} - \nu_n(z)\overline{\partial f_n(z)})\,dm(z)\right|\,. \tag{3.26}$$

Враховуючи отримане вище, $I_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Залишилося проаналізувати вирази $I_2(n)$ та $I_3(n)$. Для цього зауважимо, що за нерівністю трикутника, $I_2(n) \leqslant I_2'(n) + I_2''(n)$, де

$$I_2'(n) = \left|\int\limits_B \mu(z)(\partial f(z) - \partial f_n(z))\,dm(z)\right|$$

і

$$I_2''(n) = \left|\int\limits_B (\mu(z) - \mu_n(z))\partial f_n(z)\,dm(z)\right|.$$

З огляду на слабку збіжність $\partial f_n \to \partial f$ у $L^1_{\rm loc}(D)$ при $n \to \infty$, ми отримаємо, що $I_2'(n) \to 0$ при $n \to \infty$, тому що $\mu \in L^\infty(D)$. Крім того, оскільки відображення ∂f є інтегровним у степені $p > 1$, інтеграл $\int\limits_E |\partial f(z)|\,dm(z)$ є абсолютно неперервним відносно E. Крім того, оскільки $\partial f_n \to \partial f$ слабко в $L^1_{\rm loc}(D)$, для заданого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що

$$\int\limits_E |\partial f_n(z)|\,dm(z) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E |\partial f_n(z) - \partial f(z)|\,dm(z) + \int\limits_E |\partial f(z)|\,dm(z) < \varepsilon\,, \tag{3.27}$$

коли $m(E) < \delta$, $E \subset B$, і число n– достатньо велике.

Нарешті, за теоремою Єгорова (див. [75, теорема III.6.12]), для будь-якого $\delta > 0$ існує множина $S \subset B$ така, що $m(B \setminus S) < \delta$ і $\mu_n(z) \to \mu(z)$ рівномірно в S. Тоді $|\mu_n(z) - \mu(z)| < \varepsilon$ для всіх $n \geqslant n_0$, деякого $n_0 = n_0(\varepsilon)$ і всіх $z \in S$. З огляду на (3.22), (3.27) та за нерівністю Гельдера ми отримуємо, що

$$I_2''(n) \leqslant \varepsilon \int\limits_S |\partial f_n(z)|\,dm(z) + 2\int\limits_{B\setminus S} |\partial f_n(z)|\,dm(z) <$$

$$< \varepsilon \cdot \left\{\left(\int\limits_{f_n(D)} K_{I,p}(w, g_n)\,dm(w)\right)^{1/p} \cdot (m(B))^{(p-1)/p} + 2\right\} \leqslant \tag{3.28}$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \left\{M^{1/p} \cdot (m(B))^{(p-1)/p} + 2\right\}$$

для $n \geqslant n_0$. Отже, $I_2''(n) \to 0$ при $n \to \infty$, тому $I_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогічно можна встановити, що

$$I_3(n) \to 0 \tag{3.29}$$

при $n \to \infty$. Отже, з (3.24), (3.25), (3.26), (3.28) і (3.29) випливає, що $\int\limits_B \zeta(z)\,dm(z) = 0$ для будь-яких кругів B, компактно вкладених у D. За теоремою Лебега про диференціювання невизначеного інтеграла (див. [75, IV(6.3)]), випливає, що $\zeta(z) = 0$ майже скрізь в D. Лема доведена. $\square$

Доведення теореми 3.1.2. Розглянемо послідовність комплекснозначних функцій

$$\mu_n(z,w) = \begin{cases} \mu(z,w), & Q_0(z) \leqslant n, \\ 0\ , & Q_0(z) > n \end{cases} \tag{3.30}$$

і

$$\nu_n(z,w) = \begin{cases} \nu(z,w), & Q_0(z) \leqslant n, \\ 0\ , & Q_0(z) > n\,, \end{cases} \tag{3.31}$$

де $Q_0(z)$ визначається співвідношенням (3.9). Нехай f_n – гомеоморфний ACL-розв'язок рівняння (3.2), в якому покладемо $\mu \mapsto \mu_n(z,w)$, $\nu \mapsto \nu_n(z,w)$, такий що $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ (вказаний розв'язок визначено коректно з огляду на теорему Боярського про існування розв'язків квазілінійних рівнянь, див. теорему 8.2 у [13]). Зауважимо, що відображення $g_n = f_n^{-1}$ є квазіконформним, зокрема, воно є диференційовним майже скрізь і належить класу $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{D})$. За [57, теорема 6.10] і з огляду на умову (3.13) для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$M(g_n(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}} K_{\mu_{g_n}}(w) \cdot \rho_*^2(w)\,dm(w) \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}} Q(w) \cdot \rho_*^2(w)\,dm(w) \tag{3.32}$$

для довільної сім'ї кривих Γ в $\mathbb{D}$ і кожної функції $\rho_* \in \operatorname{adm}\Gamma$, де M – модуль сім'ї кривих. За [89, теорема 1.1] сім'я відображень f_n одностайно неперервна в $\mathbb{D}$. Отже, з огляду на теорему Арцела-Асколі f_n є нормальною сім'єю (див. [99, теорема 20.4]), іншими словами, знайдеться підпослідовність f_{n_l} послідовності f_n, що збігається локально рівномірно в $\mathbb{D}$ до деякого відображення $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$. Нагадаємо, що кожне відображення f_n задовольняє рівняння

$$\overline{\partial} f_n = \mu_n(z, f_n(z))\partial f_n + \nu_n(z, f_n(z))\overline{\partial f_n}\,.$$

Оскільки $Q_0(z)$ скінченна майже скрізь, для майже всіх $z \in \mathbb{D}$ знайдеться номер $l_0 = l_0(z)$ такий, що $\mu_{n_l}(z,w) = \mu(z,w)$, $\nu_{n_l}(z,w) = \nu(z,w)$ при $l \geqslant l_0$ і всіх $w \in \mathbb{C}$. Оскільки за припущенням функції μ і ν задовольняють умову Каратеодорі, будемо мати:

$$\mu_{n_l}(z, f_{n_l}(z)) \to \mu(z, f(z))\,,$$

$$\nu_{n_l}(z, f_{n_l}(z)) \to \nu(z, f(z))$$

при $l \to \infty$. Тоді за лемою 3.1.2 відображення f належить класу $W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{D})$ і є розв'язком вихідного рівняння Бельтрамі (3.2). $\square$

Доведення наслідку 3.1.1 відбувається аналогічно доведенню наслідку 5.1 в [89]. Дійсно, за теоремою Фубіні з умови $Q \in L^1(\mathbb{D})$ випливає вимірність інтегралів $\int\limits_{S(x_0,r)\cap D} Q(x)\,d\mathcal{H}^1(x)$ як функцій від r так їх скінченність майже скрізь при $0 < r < \infty$ (див., напр., [75, теорема 8.1.III]). В цьому випадку, умова (3.12) виконується при $p = 2$. Отже, існування розв'язку рівняння (3.2) і його належність класу $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{D})$ безпосередньо випливають з теореми 3.1.2.

Крім того, за [89, теорема 1.2], див. також [8, теорема 1]

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \frac{C\cdot(\|Q\|_1)^{1/2}}{\log^{1/2}\left(1 + \frac{r_0}{|x-y|}\right)} \quad \forall\, x, y \in K$$

для довільного компакту $K \subset \mathbb{D}$, де $\|Q\|_1$ – норма Q в $L^1(\mathbb{D})$, C – деяка стала і $r_0 = d(K, \partial\mathbb{D})$. Переходячи тут до границі при $n \to \infty$, маємо співвідношення (3.14). Тут f_n – відображення визначенні в доведенні теореми 3.1.2.

Припустимо тепер, що $Q \in FMO(\mathbb{D})$, або в кожній точці $z_0 \in \mathbb{D}$ виконується співвідношення (3.4). Тоді послідовність g_n утворює одностайно неперервну сім'ю відображень (див. [72, теореми 6.1 і 6.5]). Отже, з огляду на теорему Арцела-Асколі g_n є нормальною сім'єю (див. [99, теорема 20.4]), іншими словами, знайдеться підпослідовність g_{n_l} послідовності g_n, що збігається локально рівномірно в $\mathbb{D}$ до деякого відображення $g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$. В силу умов нормування $f_n(0)=0$ і $f_n(1)=1$ ми отримаємо, що $g_{n_l}(0)=0$ і $g_{n_l}(1)=1$ при всіх $l=1,2,\ldots$. Тоді в силу [71, теореми 4.1 і 4.2] відображення g є гомеоморфізмом в $\mathbb{D}$, крім того, за [71, лема 3.1] ми маємо також, що $f_{n_l}\to f=g^{-1}$ при $l\to\infty$ локально рівномірно в $\mathbb{D}$. Далі застосуємо схему міркувань, використану вище у випадку інтегровної функції Q. Оскільки $\mu_n(z)\to\mu(z)$ і $\nu_n(z)\to\nu(z)$ при $n\to\infty$ і при майже всіх $z\in\mathbb{D}$, за лемою 3.1.2 відображення f належить класу $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{D})$ і є розв'язком вихідного квазілінійного рівняння Бельтрамі (3.2). Наслідок 3.1.1 доведений. $\Box$

3.1.4. Приклади

Приклад 3.1.1. Побудуємо приклад неперервного, але не гомеоморфного розв'язку квазілінійного рівняння (3.2), який задовольняє умови наслідку 3.1.1 (зокрема, теореми 3.1.2). Будемо розглядати ситуацію, коли $\nu(z,w)\equiv 0$, причому, користуємося конструкцію прикладу, наведеного в [7, розділ 3]. Нехай $p\geqslant 1$ – довільне число і нехай $0<\alpha<2/p$. Як зазвичай, ми використовуємо запис $z=re^{i\theta}$, $r\geqslant 0$ и $\theta\in[0,2\pi)$. Покладемо

$$\mu(z,w)=\begin{cases} e^{2i\theta}\cdot\frac{2r-\alpha(2r-1)}{2r+\alpha(2r-1)}, & 1/2<|z|<1, |w|\geqslant 1,\\ e^{2i\theta}\cdot\frac{|w|^{\alpha}+1-\alpha(2r-1)}{|w|^{\alpha}+1+\alpha(2r-1)}, & 1/2<|z|<1, |w|<1,\\ 0\,, & |z|\leqslant 1/2\,.\end{cases} \tag{3.33}$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{\overline{\partial}f}{\partial f}=e^{2i\theta}\frac{rf_r+if_\theta}{rf_r-if_\theta}\,, \tag{3.34}$$

див. рівність (11.129) в [58], ми отримуємо, що відображення

$$f(z)=\begin{cases}\frac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}, & 1/2<|z|<1,\\ 0\,, & |z|\leqslant 1/2\end{cases} \tag{3.35}$$

є розв'язком рівняння $f_{\overline{z}}=\mu(z,f(z))\cdot f_z$, де функція μ задається співвідношенням (3.33). Зауважимо, що існування розв'язку вказаного рівняння забезпечується теоремою 3.1.2 (для цього перевіримо виконання всіх умов цієї теореми). Дійсно, функція $\varphi(x,c)=\frac{x-c}{x+c}$ має додатну похідну при

$c:=\alpha(2r-1)>0,$ тому при $x\in[0,1]$ ця функція досягає свого максимального значення в точці $x=1.$ Отже,

$$\left|e^{2i\theta}\cdot\frac{|w|^{\alpha}+1-\alpha(2r-1)}{|w|^{\alpha}+1+\alpha(2r-1)}\right|=\frac{|w|^{\alpha}+1-\alpha(2r-1)}{|w|^{\alpha}+1+\alpha(2r-1)}\leqslant \tag{3.36}$$

$$\leqslant\frac{2-\alpha(2r-1)}{2+\alpha(2r-1)}\,.$$

Беручи до уваги дріб праворуч у (3.36), покладемо

$$q(z):=e^{2i\theta}\cdot\frac{2-\alpha(2r-1)}{2+\alpha(2r-1)}\,. \tag{3.37}$$

Для заданої співвідношенням (3.37) функції q відповідною до неї функцією $Q_0(z)$ буде функція

$$Q_0(z)=\begin{cases}\frac{2}{\alpha(2|z|-1)}, & 1/2<|z|<1,\\ 1\,, & |z|\leqslant 1/2\end{cases}\,. \tag{3.38}$$

Нехай $k>1/\alpha$. Зауважимо, що $Q_0(z)\leqslant k$ при $|z|\geqslant\frac{2+k\alpha}{2k\alpha}$ і $Q_0(z)>k$ в іншому випадку. Нехай, як і раніше,

$$\mu_k(z,w)=\begin{cases}\mu(z,w), & K_{\mu}(z)\leqslant k,\\ 0\,, & K_{\mu}(z)>k\,.\end{cases}$$

Відзначимо, що розв'язками рівняння $f_{\overline{z}}=\mu_k(z,f(z))\cdot f_z$ є відображення

$$f_k(z)=\begin{cases}\frac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}, & \frac{2+k\alpha}{2k\alpha}<|z|<1,\\ \frac{z}{\left(\frac{2+k\alpha}{2k\alpha}\right)}\cdot\left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}\,, & |z|\leqslant\frac{2+k\alpha}{2k\alpha}\end{cases}\,,$$

при цьому, обернені відображення $g_k(y)=f_k^{-1}(y)$ обчислюються за формулою

$$g_k(y)=\begin{cases}\frac{y(|y|^{\alpha}+1)}{2|y|}, & \left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}<|y|<1,\\ \frac{y\cdot\frac{2+k\alpha}{2k\alpha}}{\left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}}, & |y|\leqslant\left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}\end{cases}\,. \tag{3.39}$$

Прямими обчисленнями і використовуючи формулу (3.34), можна показати, що $\frac{(f_k)_{\overline{z}}}{(f_k)_z}=e^{2i\theta}\frac{2r-\alpha(2r-1)}{2r+\alpha(2r-1)}$. Тоді

$$K_{\mu_{f_k}}(z)=\begin{cases}\frac{4|z|}{2\alpha(2|z|-1)}, & \frac{2+k\alpha}{2k\alpha}<|z|<1,\\ 1\,, & |z|\leqslant\frac{2+k\alpha}{2k\alpha}\end{cases}\,. \tag{3.40}$$

Нам слід перевірити, чи виконується (3.13) для деякої інтегровної в $\mathbb{D}$ функції Q. Для цієї мети, підставимо відображення g_k з (3.39) у максимальну дилатацію K_{μ_k}, визначену рівністю (3.40) (див. з цього приводу формулу (4) гл. I, С в [10]). Тоді

$$K_{\mu_{g_k}}(y) := K_{\mu_k}(g_k(y)) = \begin{cases} \frac{|y|^\alpha+1}{\alpha|y|^\alpha}, & \left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha} < |y| < 1\,, \\ 1\,, & |y| \leqslant \left(\frac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha} \end{cases} .$$

Зауважимо, що $K_{\mu_{g_k}}(y) \leqslant Q(y) := \frac{|y|^\alpha+1}{\alpha|y|^\alpha}$ при всіх $y \in \mathbb{D}$, при цьому, функція Q інтегровна в $\mathbb{D}$ навіть в степені p, а не тільки в степені 1 (див. міркування, використані при розгляді [58, пропозиція 6.3]). За побудовою $f_k(0) = 0$ і $f_k(1) = 1$. Тому всі умови наслідку 3.1.1 (зокрема, теореми 3.1.2) виконуються, а у якості бажаного розв'язку рівняння $f_{\overline{z}} = \mu(z)\cdot f_z$ можна розглянути відображення $f = f(z)$, визначене рівністю (3.35). Більше того, з доведення цієї теореми випливає, що відображення f є вказаним там розв'язком, оскільки f є локально рівномірною границею послідовності f_k. Зауважимо, що відображення f не є гомеоморфним розв'язком, також воно не є ані відкритим, ані дискретним.

Приклад 3.1.2. Нехай f – відображення, визначене співвідношенням (3.35). Користуючись формулою $f_z = f_r r_z + f_\theta \theta_z$, ми отримаємо, що $f_z = (2r-1)^{(1/\alpha)-1}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2r-1}{2r}\right)$. Звідси випливає, що f_z є дійсним числом при всіх $z \in \mathbb{D}$, отже, $f_z = \overline{f_z}$. Отже, ми можемо записати:

$$f_{\overline{z}} = \mu(z,f)f_z = \frac{1}{2}\cdot\mu(z,f)f_z + \frac{1}{2}\cdot\nu(z,f)\overline{f_z}\,,$$

де $\mu(z,w) = \nu(z,w)$ і $\mu(z,w)$ визначено співвідношенням (3.33). За доведеним вище в прикладі 3.1.1 рівняння $f_{\overline{z}} = \mu(z,f)f_{\overline{z}} + \nu(z,f)\overline{f_z}$ має розв'язок f, визначений співвідношенням (3.35), причому коефіцієнти цього рівняння задовольняють умови наслідку 3.1.1 (зокрема, теореми 3.1.2).

3.2. Існування розв'язків лінійних рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками та гідродинамічним нормуванням

Результати даного підрозділу опубліковані в [30]. У роботах донецької та житомирської наукових шкіл розглядалися проблеми, пов'язані з існуванням розв'язків рівнянь Бельтрамі, які задовольняють умови (див., напр., [7], [39], [58] і [89]) $f(0)=0$ та $f(1)=1$. У цьому підрозділі ми розглянемо деяке інше, так зване гідродинамічне нормування. Нехай $\mu : D\to\mathbb{D}$ і $\nu : D\to\mathbb{D}$ – вимірні за Лебегом функції. Як і раніше, позначимо

$$K_{\mu,\nu}(z)=\quad\frac{1+|\mu(z)|+|\nu(z)|}{1-|\mu\,(z)|-|\nu(z)|}\,. \tag{3.41}$$

Розглянемо рівняння Бельтрамі з двома характеристиками:

$$f_{\overline{z}}=\mu(z)\cdot f_z+\nu(z)\cdot\overline{f_z}\,, \tag{3.42}$$

де $\mu=\mu(z)$ і $\nu=\nu(z)$ задані вимірні функції, причому, $|\mu(z)|<1$ і $|\nu(z)|<1$ майже скрізь. Нехай $\mu : D\to\mathbb{D}$ і $\nu : D\to\mathbb{D}$ є такими, що співвідношення $|\mu(z)|+|\nu(z)|<1$ виконується для майже всіх $z\in D$. Ми будемо вважати, що $\mu(z)=\nu(z)\equiv 0$ для будь-якого $z\in\mathbb{C}\backslash D$. Зафіксуємо $n\geqslant 1$ і покладемо:

$$\mu_n(z)=\begin{cases}\mu(z), & z\in\mathbb{C}, K_{\mu,\nu}(z)\leqslant n,\\ \ \ 0\ , & z\in\mathbb{C}, K_{\mu,\nu}(z)>n,\end{cases} \tag{3.43}$$

і

$$\nu_n(z)=\begin{cases}\nu(z), & z\in\mathbb{C}, K_{\mu,\nu}(z)\leqslant n,\\ \ \ 0\ , & z\in\mathbb{C}, K_{\mu,\nu}(z)>n.\end{cases} \tag{3.44}$$

Нехай $f_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ є гомеоморфним розв'язком рівняння $(f_n)_{\overline{z}}=\mu_n(z)\cdot(f_n)_z+\nu_n(z)\cdot\overline{(f_n)_z}$ (він існує за [39, теорема 9.2]). Покладемо $g_n(z):=f_n^{-1}(z)$. Зауважимо, що f_n є конформним в околі нескінченності, отже, існує неперервне продовження $f_n:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$. Таким чином $f_n(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ і $f_n(\infty)=\infty$. Зауважимо, що $g_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ є квазіконформним, зокрема, g_n є майже скрізь диференційовним в $\mathbb{C}$. За пропозицією 2.1 в [38], $f_n(z)=a_nz+b_n+o(1)$ при $z\to\infty$, де $a_n, b_n\in\mathbb{C}$ і $a_n\ne 0$. Можна вважати, що $a_n=1$ і $b_n=0$ для будь-якого $n\in\mathbb{N}$. У протилежному випадку покладаємо $\widetilde{f}_n(z):=\frac{1}{a_n}\left(f_n(z)-b_n\right)$, бо $\widetilde{f}_n$ також задовольняє рівняння $f_{\overline{z}}=\mu(z)\cdot f_z+\nu(z)\cdot\overline{f_z}$ в $\mathbb{C}$.

Відмітимо, що така функція f_n є єдиною. Дійсно, f_n є розв'язком звичайного рівняння Бельтрамі $f_{\overline{z}}=\mu^*_n(z)\cdot f_z$, де $\mu^*_n(z)=\mu_n(z)+\nu_n(z)\cdot\frac{\overline{(f_n)_z}}{(f_n)_z}$. За нерівністю трикутника, $|\mu^*_n(z)|\leqslant|\mu_n(z)|+|\nu_n(z)|\leqslant\frac{n-1}{n+1}<1$. Таким чином, f є єдиним за [12, теорема 20.4.15]. У подальшому величини $K_{\mu_{g_n}}(w)$

та $K_{I,p}(w,g_n)$ визначені співвідношеннями (3.10) і (3.11). Є справедливим наступне твердження:

Теорема 3.2.1. *Нехай D — область у $\mathbb{C}$ така, що $\overline{D}$ є компактною множиною в $\mathbb{C}$, нехай $\mu:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ і $\nu:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ вимірні за Лебегом функції, що дорівнюють нулю в точках, які не належать D і нерівність $|\mu(z)|+|\nu(z)|<1$ виконується для майже всіх $z\in D$. Крім того, нехай μ_n, ν_n, f_n і g_n такі, як вказано вище, $n=1,2,\ldots$, і нехай $Q:\mathbb{C}\to[1,\infty]$ — деяка вимірна за Лебегом функція. Припустимо, що виконуються наступні умови:*

1) для будь-яких $0<r_1<r_2<1$ і $y_0\in\mathbb{C}$ існує множина $E\subset[r_1,r_2]$ додатної міри Лебега така, що функція Q є інтегровною по колах $S(y_0,r)$ для будь-якого $r\in E$;

2) знайдеться число $1<p\leqslant 2$, що для будь-якого обмеженої області $G\subset\mathbb{C}$ існує константа $M=M_G>0$ така, що

$$\int\limits_{G} K_{I,p}(w,g_n)\,dm(w)\leqslant M \tag{3.45}$$

для всіх $n=1,2,\ldots$, де $K_{I,p}(w,g_n)$ визначена в (3.11);

3) нерівність

$$K_{\mu_{g_n}}(w)\leqslant Q(w) \tag{3.46}$$

виконується для майже всіх $w\in\mathbb{C}$, де $K_{\mu_{g_n}}$ визначено в (3.10). Тоді рівняння (3.42) має неперервний $W_{\rm loc}^{1,p}(\mathbb{C})$-розв'язок f в $\mathbb{C}$ такий, що $f(z)=z+\varepsilon(z)$, де $\varepsilon(z)\to 0$ при $z\to\infty$.

Наслідок 3.2.1. *Зокрема, твердження теореми 3.2.1 виконується, якщо, у цій теоремі ми відмовляємося від умови 1), вимагаємо умову 3), а умову 2) заміняємо на більш сильну: $Q\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$. Якщо G є обмеженою областю в $\mathbb{C}$ і K є компактом в G, то існує область $G'\subset\mathbb{C}$ і функція Q', що дорівнює Q у G' і обертається в нуль зовні G', такі що Q' є інтегровною в $\mathbb{C}$ і нерівність*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{C}{\log^{1/2}\left(1+\frac{r_0}{2|x-y|}\right)} \tag{3.47}$$

виконується для будь-яких $x, y \in K$, *де* $C = C(K, \|Q'\|_1, G) > 0$ *— деяка константа, що залежить лише від* K, G *і* $\|Q'\|_1$, $\|Q'\|_1$ *позначає* L^1*-норму* Q' *у* $\mathbb{R}^n$, $r_0 = d(K, \partial G)$.

Доведення теореми 3.2.1 і наслідку 3.2.1 наводяться нижче.

3.2.1. Існування неперервних розв'язків рівнянь Бельтрамі

Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і вимірної за Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, яка дорівнює нулю в точках, які не належать області D', ми будемо позначати через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних відображень $f : D \to D'$ таких, що в кожній точці $y_0 \in D'$ виконується співвідношення (1.11). Зауважимо, що означення класу $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ не передбачає сюр'єктивності відображення області D на D' у цьому класі $f \in \mathfrak{R}_Q(D, D')$.

Всюду далі $\mathcal{H}^{n-1}$ позначає $(n-1)$-вимірну міру Хаусдорфа. Справедливе наступне твердження (див. [89, теорема 1.1]).

Пропозиція 3.2.1. *Нехай* D *і* D' *— області в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *і нехай* D' *— обмежена область. Припустимо, що для кожної точки* $y_0 \in D'$ *і для будь-яких* $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \sup\limits_{y \in D'} |y - y_0|$ *існує множина* $E \subset [r_1, r_2]$ *додатної міри Лебега така, що функція* Q *інтегровна відносно* $\mathcal{H}^{n-1}$ *над сферами* $S(y_0, r)$ *для кожного* $r \in E$. *Тоді сім'я відображень* $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ *є одностайно неперервною у кожній точці* $x_0 \in D$.

Зауваження 3.2.1. Для областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і вимірної за Лебегом функції $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, яка дорівнює нулю в точках, які не належать D', позначимо через $\mathfrak{R}_Q(D, D')$ сім'ю усіх відкритих дискретних відображень $f : D \to D'$ таких, що в кожній точці $y_0 \in D'$ виконується нерівність

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}},$$

де

$$I = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_{y_0}^{1/(n-1)}(t)},$$

$q_{y_0}(r)=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(y_0,r)}Q(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)$, ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ у $\mathbb{R}^n$, та для будь-яких $0<r_1<r_2<r_0:=\sup\limits_{y\in D'}|y-y_0|$. *Припустимо, що для кожної точки $y_0\in D'$ і для кожного $0<r_1<r_2<r_0:=\sup\limits_{y\in D'}|y-y_0|$ знайдеться множина $E\subset[r_1,r_2]$ дадатної міри Лебега така, що функція Q інтегровна відносно $\mathcal{H}^{n-1}$ над сферою $S(y_0,r)$ для кожного $r\in E$. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{R}_Q(D,D')$ є одностайно неперервною у кожній точці $x_0\in D$.*

Доведення цього твердження майже повністю повторює доведення теореми 1.1 у [89]. Зауважимо, що функцію Q у наведеному твердженні можна розповсюдити за межі області D' довільним способом і не обов'язково нулем.

Доведення теореми 3.2.1. Нехай f_n, $n=1,2,\ldots$, є відображенням з умови теореми. Доведемо, що $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ утворюють нормальну сім'ю відображень. Зафіксуємо довільну компактну множину $C\subset\mathbb{C}$. Оскільки $\overline{D}$ є компактом у $\mathbb{C}$, існує область $G\subset\mathbb{C}$ з компактним замиканням у $\mathbb{C}$ таким, що $C\cup\overline{D}\subset G$.

Покладемо $\widetilde{f_n}=\frac{1}{f_n(1/z)}$. Оскільки

$$f_n(z)=z+o(1)$$

при $z\to\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}f_n(z)=\infty$. Будемо вважати $\widetilde{f_n}(0)=0$. Міркуючи аналогічно доведенню теореми 2.1.1, можна показати, що:

а) існує $\widetilde{f_n}'(0)$, причому $\widetilde{f_n}'(0)=1$;

б) існує число $1/r_0$, яке залежить лише від G, таке що $G\subset B(0,1/r_0)$, причому відображення $\widetilde{f_n}=\frac{1}{f_n(1/z)}$ є конформним у $B(0,r_0)$ і

$$f_n(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{B(0,1/r_0)})\supset\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{B(0,4/r_0)}\,. \tag{3.48}$$

Оскільки f_n є гомеоморфізмом в $\mathbb{C}$, за (3.48) ми отримаємо, що

$$f_n(B(0,1/r_0))\subset B(0,4/r_0)\,. \tag{3.49}$$

З іншого боку, оскільки f_n являються n-квазіконформними, відображення $g_n=f_n^{-1}$ є квазіконформними, зокрема, $f_n\in W_{\rm loc}^{1,2}(B(0,4/r_0))$. За [57, теорема 6.10], (3.46) та (3.49) ми отримаємо, що

$$M(g_n(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{f_n(B(0,1/r_0))} K_{\mu_{g_n}}(w)\cdot\rho_*^2(w)\,dm(w) \leqslant \qquad (3.50)$$

$$\leqslant \int\limits_{B(0,4/r_0)} Q(w)\cdot\rho_*^2(w)\,dm(w)$$

для будь-якого $n\in\mathbb{N}$, будь-якої сім'ї кривих Γ в $f_n(B(0,1/r_0))$, і кожної функції $\rho_*\in\operatorname{adm}\Gamma$. З (3.50) випливає, що

$$M(g_n(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{B(0,4/r_0)} Q(w)\cdot\rho_*^2(w)\,dm(w)$$

для тих самих функцій ρ. За пропозицією 3.2.1 сім'я $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною у $B(0,1/r_0)$. Отже, за теоремою Арцела-Асколі f_n є нормальною сім'єю відображень (див., наприклад, [99, теорема 20.4]), іншими словами, існує підпослідовність f_{n_k}, що збігається локально рівномірно $\mathbb{C}$ до деякого відображення $f: B(0,1/r_0)\to\overline{B(0,4/r_0)}$. Зауважимо також, що $\mu_n(z)\to\mu(z)$ при $n\to\infty$ і $\nu_n(z)\to\nu(z)$ при $n\to\infty$ для майже всіх $z\in D$, тому що $|\mu(z)|<1$ майже скрізь і, отже, $K_\mu(z)$ у (3.5) є скінченною для майже всіх $z\in D$. Тоді з (3.45) і за лемою 3.1.2 відображення f належить класу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ і крім того, f є розв'язком (3.42).

Те, що граничне відображення f задовольняє умову $f(z)=z+o(1)$ при $z\to\infty$, може бути встановлено так само, як у пункті **II** доведення теореми 2.1.1. $\Box$

Доведення наслідку 3.2.1. Нехай G і K відповідають умовам наслідку. Повторюючи доведення теореми 3.2.1, ми можемо помітити, що g_n задовольняє співвідношення

$$M(g_n(\Gamma)) \leqslant \int\limits_{f_n(B(0,1/r_0))} K_{\mu_{g_n}}(w)\cdot\rho_*^2(w)\,dm(w) \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} Q'(w)\cdot\rho_*^2(w)\,dm(w)\,,$$

де $Q'(w)=\begin{cases} Q(w)\,, & w\in B(0,4/r_0)\,,\\ 0\,, & w\notin B(0,4/r_0)\end{cases}$, де функція Q' інтегровна в $\mathbb{C}$. За [89, теорема 4.1] відношення

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant\frac{C}{\log^{1/2}\left(1+\frac{r_0}{2|x-y|}\right)}$$

виконується для будь-яких $x,y\in K$ і будь-якого компакту K в G, де $C=C(K,\|Q'\|_1,G)>0$ — деяка константа, що залежить лише від K, G і $\|Q'\|_1$, $\|Q'\|_1$ позначає L^1-норму Q' в $\mathbb{R}^n$, та $r_0=d(K,\partial G)$. Переходячи тут до границі при $n\to\infty$, отримуємо потрібне співвідношення (3.47). $\square$

3.2.2. Теорема збіжності

Нагадаємо, що відображення $f:D\to\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, називається *відображенням із скінченним спотворенням*, якщо $f\in W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ і існує функція $K:D\to[1,\infty)$ така, що $\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot|J(x,f)|$ для майже будь-якого $x\in D$.

Для заданих функції $Q:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, чисел $1<p\leqslant 2$, $0<M<\infty$ і області G такої, що $\overline{G}$ є компактом в $\mathbb{C}$, позначимо за $\mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$ сім'ю всіх $W_{\rm loc}^{1,1}$-гомеоморфізмів $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ зі скінченним спотворенням, які конформні поза G і є розв'язками рівняння (3.42) в $\mathbb{C}$ таких, що

1) $f(z)=z+\varepsilon_f(z)$, де $\varepsilon_f(z)\to 0$ при $z\to\infty$;

2) існує константа $M=M_G>0$ така, що

$$\int\limits_G K_{I,p}(w,g)\,dm(w)\leqslant M, \tag{3.51}$$

де $g:=f^{-1}$ і $K_{I,p}(w,g)$ визначена в (3.11);

3) нерівність

$$K_{\mu_g}(w)\leqslant Q(w) \tag{3.52}$$

виконується для $g:=f^{-1}$ і для майже всіх $w\in\mathbb{C}$, де функція K_{μ_g} визначена в (3.10). Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.2.2. *Припустимо, для кожних $0<r_1<r_2<1$ і $y_0\in\mathbb{C}$ існує множина $E\subset[r_1,r_2]$ додатної міри Лебега така, що функція Q інтегровна* *по колах $S(y_0, r)$ для будь-якого $r \in E$. Тоді сім'я $\mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$ є нормальною. Якщо $f_n \in \mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$, $n = 1, 2, \ldots$, $f_n \to f$ при $n \to \infty$ локально рівномірно, і $\mu_n \to \mu$ і $\nu_n \to \nu$ при $n \to \infty$, тоді f задовольняє рівняння (3.42). У цьому випадку $f(z) = z + \varepsilon(z)$, $\varepsilon(z) \to 0$ при $z \to \infty$.*

Наслідок 3.2.2. *Зокрема, твердження теореми 3.2.2 виконується, якщо замість умов на функцію Q, зазначених у цій теоремі, ми вимагаємо, щоб $Q \in L^1_{\rm loc}$.*

Доведення теореми 3.2.2. Зауважимо, що для доведення використовується той самий принцип, що й при доведенні попередньої теореми 3.1.2. Через це ми обмежуємося тільки схемою доведення. По-перше, доведемо, що $\mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$ утворює нормальну сім'ю відображень. Зафіксуємо довільну область $G \subset \mathbb{C}$ з компактним замиканням. Тепер міркуючи подібно до доведення співвідношення (3.49), ми отримуємо, що співвідношення

$$f(B(0, 1/r_0)) \subset B(0, 4/r_0) \tag{3.53}$$

виконується для будь-якого $f \in \mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$. Зауважимо, що якщо f має скінчене спотворення, то $g := f^{-1}$ також має скінчене спотворення (див. [41, теорема 1.2]). Отже, [54, лема 3.1 і твердження 2.1]

$$M(g(\Sigma_{r_1,r_2})) \geqslant \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_1(r)}\,,$$

де Σ_{r_1,r_2} позначає сім'ю всіх кіл $S(y_0, r) \cap f(G)$, $r \in (r_1, r_2)$, і $\|Q\|_1(r) = \int\limits_{S(y_0,r)\cap f(G)} Q(y)\, d\mathcal{H}^1(y)$. Застосовуючи теореми Цимера та Хессе, див. [103, теорема 3.13] і [42, теорема 5.5], ми отримуємо, що

$$M(g(\Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), f(G)))) \leqslant \frac{2\pi}{\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{rq_{y_0}(r)}}\,,$$

або дещо в іншому вигляді,

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \leqslant \frac{2\pi}{\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{rq_{y_0}(r)}}\,,$$

де $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ визначено перед (1.11). Тепер з зауваження 3.2.1 випливає, що $\mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$ є одностайно неперервною у G. Нарешті, за теоремою Асколі-Арцела $\mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$ — нормальна сім'я відображень (див. наприклад, [99, теорема 20.4]).

Припустимо тепер, що $f_n \in \mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$, $n = 1, 2, \ldots$, є послідовністю, яка локально рівномірно збігається в $\mathbb{C}$ до деякого відображення $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Оскільки за умовою $\mu_n(z) \to \mu(z)$ при $n \to \infty$ і $\nu_n(z) \to \nu(z)$ при $n \to \infty$ для майже всіх $z \in D$, то за (3.51) і лемою 3.1.2 відображення f належить класу $W^{1,p}_{\rm loc}(D)$ і, крім того, f є розв'язком (3.42).

Нарешті, граничне відображення f задовольняє умову $f(z) = z + o(1)$ при $z \to \infty$. Доведення цього факту аналогічне останній частині доведення теореми 3.1.2. $\Box$

Розглянемо наступний приклад, див. [89, приклад 3].

Приклад 3.2.1. Нехай $p = 2$, $q \geqslant 1$ довільне число і нехай $0 < \alpha < 2/q$. Як зазвичай, ми використовуємо позначення $z = re^{i\theta}$, $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Покладемо

$$\mu(z) = \begin{cases} e^{2i\theta}\frac{2r-\alpha(2r-1)}{2r+\alpha(2r-1)}, & 1/2 < |z| < 1, \\ 0\,, & |z| \leqslant 1/2\,. \end{cases} \tag{3.54}$$

Використовуючи співвідношення

$$\mu_f(z) = \frac{\overline{\partial} f}{\partial f} = e^{2i\theta}\frac{rf_r + if_\theta}{rf_r - if_\theta}\,,$$

див. (11.129) в [58], ми отримуємо, що відображення

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}, & 1/2 < |z| < 1, \\ 0\,, & |z| \leqslant 1/2 \end{cases} \tag{3.55}$$

є розв'язком рівняння $f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z$, де μ визначається (3.54). Зауважимо, що для μ в (3.54) відповідна максимальна дилатація K_μ обчислюється в наступному вигляді:

$$K_\mu(z) = \begin{cases} \frac{2|z|}{\alpha(2|z|-1)}, & 1/2 < |z| < 1, \\ 1\,, & |z| \leqslant 1/2 \end{cases}\,. \tag{3.56}$$

Нехай $k > 1/\alpha$. Помітимо, що $K_{\mu}(z) \leqslant k$ для $|z| \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{k\alpha}{k\alpha-1}$ і $K_{\mu}(z) > k$ в протилежному випадку. Як і вище, покладемо:

$$\mu_k(z) = \begin{cases} \mu(z), & K_{\mu}(z) \leqslant k, \\ 0\,, & K_{\mu}(z) > k\,. \end{cases}$$

Зауважимо, що при кожному $k = 1, 2, \ldots$ відображення

$$f_k(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}, & \frac{1}{2} \cdot \frac{k\alpha}{k\alpha-1} < |z| < 1, \\ \frac{z}{\frac{1}{2}\left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1}\right)} \cdot \left(\frac{1}{k\alpha-1}\right)^{1/\alpha}, & |z| \leqslant \frac{k\alpha}{k\alpha-1} \end{cases},$$

є гомеоморфними розв'язками рівняння $f_{\overline{z}} = \mu_k(z) \cdot f_z$. Крім того, обернене відображення $g_k(y) = f_k^{-1}(y)$ обчислюється за співвідношеннями

$$g_k(y) = \begin{cases} \frac{y(|y|^{\alpha}+1)}{2|y|}, & \left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1} - 1\right)^{1/\alpha} < |y| < 1, \\ \frac{y \cdot \frac{k\alpha}{2(k\alpha-1)}}{\left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1}-1\right)^{1/\alpha}}, & |y| \leqslant \left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1} - 1\right)^{1/\alpha} \end{cases}. \tag{3.57}$$

З (3.56) випливає, що

$$K_{\mu_k}(z) = \begin{cases} \frac{4|z|}{2\alpha(2|z|-1)}, & \frac{1}{2} \cdot \frac{k\alpha}{k\alpha-1} < |z| < 1, \\ 1\,, & |z| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{k\alpha}{k\alpha-1} \end{cases}. \tag{3.58}$$

Покажемо, що співвідношення (3.13) виконується для деякої функції Q, яка є інтегровною в $\mathbb{D}$. Для цього ми підставимо відображення g_k з (3.57) у максимальну дилатацію K_{μ_k}, яка визначається рівністю (3.58). Оскільки $\mu_{f^{-1}} = -\nu \circ f^{-1}, \nu = \frac{f_z}{\overline{f_z}}\mu_f$ (див. співвідношення (4), розд. С, гл. І в [10]), то в результаті такої підстановки ми отримаємо, що

$$K_{\mu_{g_k}}(y) = \begin{cases} \frac{|y|^{\alpha}+1}{\alpha|y|^{\alpha}}, & \left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1} - 1\right)^{1/\alpha} < |y| < 1\,, \\ 1\,, & |y| \leqslant \left(\frac{k\alpha}{k\alpha-1} - 1\right)^{1/\alpha} \end{cases}.$$

Зауважимо, що $K_{\mu_{g_k}}(y) \leqslant Q(y) := \frac{|y|^{\alpha}+1}{\alpha|y|^{\alpha}}$ для всіх $y \in \mathbb{D}$. Крім того, функція Q інтегровна в $\mathbb{D}$ навіть в степені q, а не тільки в степені 1 (див. [58, пропозиція 6.3]). Продовжимо кожне відображення f_k тотожно на всю площину і покладемо $Q(y) \equiv 1$ для $y \notin \mathbb{D}$. З міркувань, наведених вище, випливає, що всі відображення f_k, $k = 1, 2, \ldots$, належать деякому класу $\mathfrak{F}_{Q,p,M}(G)$ з вказаним Q. Зауважимо, що сім'я f_k, $k = 1, 2, \ldots$, є нормальною, але не є компактною, оскільки граничне відображення f цієї послідовності не є гомеоморфізмом. Для того, щоб компактність класу мала місце, необхідні інші умови на характеристики відображень, розглянуті нижче.

Для заданої функції $Q:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ і області G, яка має компактне замикання в $\mathbb{C}$, позначимо через $\mathfrak{R}_Q(G)$ сім'ю всіх $W^{1,1}_{\rm loc}$-гомеоморфізмів $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ зі скінченним спотворенням, які є конформними поза G і є розв'язками рівняння (3.42) в $\mathbb{C}$ таких, що:

1) $f(z)=z+\varepsilon_f(z)$, де $\varepsilon_f(z)\to 0$ як $z\to\infty$;

2) нерівність
$$K_{\mu_g}(w)\leqslant Q(w) \tag{3.59}$$
виконується для $g:=f^{-1}$ і для м.в. $w\in\mathbb{C}$, де K_{μ_g} визначено в (3.10).

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.2.3. *Якщо 1) $Q\in FMO(\mathbb{C})$, або 2) $Q\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{C})$ і, крім цього,*
$$\int\limits_0^{\delta(w_0)}\frac{dt}{tq_{w_0}(t)}=\infty \tag{3.60}$$
для будь-якого $w_0\in\mathbb{C}$ і деякого $\delta(w_0)>0$, $q_{w_0}(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q(w_0+re^{i\theta})\,d\theta$. Тоді клас $\mathfrak{R}_Q(G)$ є компактним.

Доведення. Оскільки нормальність $\mathfrak{R}_Q(G)$ випливає з теореми 3.2.2, потрібно довести замкненість $\mathfrak{R}_Q(G)$. Нехай $f_n\in\mathfrak{R}_Q(G)$, $n=1,2,\ldots$, і нехай $f_n\to f$ при $n\to\infty$. Оскільки $f_n(z)=z+o(1)$ при $z\to\infty$, позначаючи $g_n:=f_n^{-1}$ і $f_n(z)=w$ отримуємо, що $z=g_n(w)=w-o(1)=w-\varepsilon(z(w))=w+\varepsilon_1(w)$, де $\varepsilon_1(w)\to 0$ при $w\to\infty$. Міркуючи аналогічно доведенню теореми 3.1.2, ми отримуємо, що $g_n(B(0,1/r_0))\subset B(0,4/r_0)$ для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ і достатньо малого $r_0>0$. Тоді послідовність $g_n:=f_n^{-1}$ також утворює одностайно неперервну сім'ю відображень (див. [72, теореми 6.1 і 6.5]). Тому, за теоремою Асколі-Арцела g_k є нормальною сім'єю (див. [99, теорема 20.4]). Іншими словами, існує підпослідовність g_{n_k} з g_n, що збігається локально рівномірно в $\mathbb{C}$ до деякого відображення $g:\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{C}}$. Міркуючи аналогічно доведенню теореми 3.1.2, отримуємо, що $g(z)$ має гідродинамічне нормування в околі нескінченно віддаленої точки. Тоді за [71, теореми 4.1, 4.2] відображення g є гомеоморфізмом в $\mathbb{C}$ і $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Крім того, $g(\mathbb{C})=\mathbb{C}$, оскільки g є гомеоморфізмом і точка ∞ — ізольована гранична точка g (див., наприклад, [58, теорема 6.2]). Отже, за [71, лема 3.1] ми також маємо, що $g_{n_k}^{-1}\to f=g^{-1}$ при $k\to\infty$ локально рівномірно в $\mathbb{C}$. Оскільки f_{n_k} має скінчене спотворення, то $g_{n_k}:=f_{n_k}^{-1}$ також має скінчене спотворення (див. [41, теорема 1.2]). Отже, $K_{\mu_g}(w)\leqslant Q(w)$ для майже будь-якого $w\in\mathbb{C}$ за [74, теорема 3.1 і зауваження 3.1]. □

3.3. Про відображення з гідродинамічним нормуванням у евклідовому просторі

Результат даного підрозділу опублікований в [3]. Він присвячений відображенням з узагальненням гідродинамічного нормування $f(z)=z+o(1)$, $z\to\infty$. Їх вивчення є важливим, зокрема, з огляду на існування відповідних гомеоморфних розв'язків рівняння Бельтрамі. В попередніх підрозділах цього розділу вже досліджувалася проблема компактності класів таких розв'язків. Метою даного підрозділу є розповсюдження аналогічних результатів у евклідовий n-вимірний простір. Зауважимо, що «просторовий» випадок відрізняється від «плоского» з огляду відсутності прямого аналогу теореми Кебе про чверть (ця теорема істотно використовувалася при доведенні, див. [18, теорема 1.3]).

Нехай $Q:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція і K – компакт у $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathfrak{F}_Q(K)$ клас усіх гомеоморфізмів $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, які задовольняють умову (2.10) в кожній точці $x_0\in\mathbb{R}^n$, $f(x)\neq 0$ при всіх $x\notin K$, $f\in ACL(\mathbb{R}^n\setminus K)$, причому для будь-якого $r_0>0$ знайдеться число $M_0=M_0(r_0)>0$ таке, що

$$a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0):=\exp\left(\frac{1}{n\Omega_n}\int\limits_{\mathbb{B}^n}\log|J(x,\widetilde{f}_{r_0})|\,dm(x)\right)\geqslant M_0\,, \qquad (3.61)$$

де $\widetilde{f}_{r_0}(x):=\frac{1}{r_0}\cdot(\psi\circ f\circ\psi)(r_0x)$ і $\psi(x)=\frac{x}{|x|^2}$.

Одним з основних результатів підрозділу є наступне твердження.

Теорема 3.3.1. *Нехай функція Q задовольняє умову $Q(x) \leqslant Q_0 = const$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, крім того, припустимо, що Q задовольняє принаймні одну з умов:*

1) або $Q \in FMO(\mathbb{R}^n)$,

2) або для кожного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ існує $\delta_0 = \delta(x_0) > 0$ таке, що

$$\int\limits_0^{\delta_0} \frac{dt}{tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty\,, \tag{3.62}$$

де $q_{x_0}(t) = \frac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,t)} Q(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{F}_Q(K)$ є одностайно неперервною в $\mathbb{R}^n$.

В теоремі 3.3.1 одностайну неперервність слід розуміти як між метричними просторами (X, d) і (X', d'), де $X = \mathbb{R}^n$, $X' = \overline{\mathbb{R}^n}$, d – евклідова метрика і $d' = h$ – хордальна (сферична метрика).

Зауваження 3.3.1. Умова (3.61) в означенні класу $\mathfrak{F}_Q(K)$ є істотною, оскільки доволі легко побудувати приклад сім'ї $\mathfrak{F}$ гомеоморфізмів $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ з $Q \equiv 1$ у $\mathbb{R}^n$ таких, щоб виконувалася умова (2.10) та умови 1)–2) з формулювання теореми 3.3.1; проте, в той самий час, ця сім'я не була одностайно неперервною в $\mathbb{R}^n$. В якості такої сім'ї можна взяти, наприклад, клас відображень $f_m(x) = mx$, $m = 1, 2, \ldots$.

Доведення теореми 3.3.1 дано далі в тексті.

3.3.1. Основна лема

Наступний просторовий аналог теореми Кебе про чверть належить Астала та Герінгу, див. [11, теорема 1.8].

Пропозиція 3.3.1. *Припустимо, що D і D' – області в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Якщо $f : D \to D'$ – K-квазіконформне відображення, то для всіх $x \in D$ виконуються нерівності*

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{d(f(x), \partial D')}{d(x, \partial D)} \leqslant a_f(x) \leqslant c \cdot \frac{d(f(x), \partial D')}{d(x, \partial D)}\,, \tag{3.63}$$

де c *– стала, залежна тільки від* K *і* n*, та*

$$a_f(x) := \exp\left(\frac{1}{n\Omega_n d^n(x,\partial D)}\int\limits_{B(x,d(x,\partial D))}\log|J(x,\widetilde{f})|\,dm(x)\right)\,.$$

Зауваження 3.3.2. Як зазначено в [11, теорема 1.6], для конформних відображень площини ($n=2$) виконуються рівності: $a_f(x)=|f'(x)|$ і $c=4$. Якщо $D=\mathbb{D}$ – одиничний круг, $x=0=f(0)$ і $f'(0)=1$, то з правої частини нерівності в (3.63) ми отримаємо, що $1\leqslant 4\cdot d(0,\partial D')$, або $d(0,\partial D')\geqslant\frac{1}{4}$. Звідси випливає, що $B(0,1/4)\subset f(\mathbb{D})$, що є змістом класичної теореми Кебе.

З міркувань, наведених, наприклад, у доведенні теореми 2.1.1, випливає, що з умови $f(z)=z+o(1)$, $z\to\infty$, $z\in\mathbb{C}$, виконаної для відображення f, конформного в деякому околі нескінченності, випливає, що $\widetilde{f}(0)=0$ і $\widetilde{f}'(0)=1$ (де $\widetilde{f}$ визначено нижче формули (3.61)). Отже, в контексті теореми 3.3.1 умова (3.61) може бути замінена умовою $f(z)=z+o(1)$, $z\to\infty$.

Справедливе наступне твердження.

Лема 3.3.1. *Нехай функція* Q *задовольняє умову* $Q(x)\leqslant Q_0=const$ *при майже всіх* $x\in\mathbb{R}^n\setminus K$*. Крім того, припустимо, що існує число* $\varepsilon_0>0$ *та невід'ємна вимірна за Лебегом функція* $\psi:(0,\infty)\to[0,\infty]$ *така, що у кожній точці* $x_0\in K$ *виконується умова*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\;dm(x)\;=\;o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)\,, \tag{3.64}$$

де

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty\qquad\forall\;\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\,, \tag{3.65}$$

причому $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\to\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$*. Тоді сім'я відображень* $\mathfrak{F}_Q(K)$ *є одностайно неперервною в* $\mathbb{R}^n$*.*

Доведення. Зафіксуємо $f\in\mathfrak{F}_Q(K)$ і $r_0>0$ – число, таке що $K\subset B(0,1/r_0)$. Покладемо

$$\widetilde{f}_{r_0}(x)=\frac{1}{r_0}\cdot\frac{f\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)}{\left|f\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)\right|^2}\,,\qquad x\in\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\,. \tag{3.66}$$

Зауважимо, що для кожного відображення $f \in \mathfrak{F}_Q(K)$ виконується умова

$$\|f'(x)\|^n \leqslant C_n \cdot |J(x,f)|\, Q^{n-1}(x) \tag{3.67}$$

майже скрізь, де $\|f'(x)\| = \sup\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$, $J(x,f) = \det f'(x)$ і $C_n > 0$ – деяка стала, залежна тільки від розмірності простору n (див., напр., [78, наслідок 3.4]). Отже, з нерівності (3.67) випливає, що $\|f'(x)\|^n \leqslant C_n \cdot |J(x,f)|\, Q_0^{n-1}$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Отже,

$$K_O(x,f) \leqslant C_n \cdot Q_0^{n-1} < \infty \tag{3.68}$$

майже скрізь, де зовнішня дилатація відображення f у точці x обчислюється за правилом

$$K_O(x,f) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}, & J(x,f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в інших точках} \end{cases} . \tag{3.69}$$

Зауважимо, що f є диференційовним майже скрізь (див., напр., [78, теорема 3.2]). Тоді оскільки за припущенням $f \in ACL(\mathbb{R}^n \setminus K)$, з огляду на нерівність (3.68) відображення f є K_0-квазіконформним в $\mathbb{R}^n \setminus K$, де K_0 – деяке число, залежне тільки від розмірності простору n (див., напр., [99, теорема 34.6]).

В такому випадку, зауважимо, що таким є і відображення $\widetilde{f}_{r_0}$ визначене по f у (3.66). Дійсно, $\widetilde{f}_{r_0} = \psi_{r_0} \circ f \circ \psi_{r_0}$, де $\psi_{r_0}(x) = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{x}{|x|^2}$, причому, оскільки ψ_{r_0} є конформним відображенням і $\widetilde{f}'_{r_0}(x) = \psi'_{r_0}(f(\psi_{r_0}(x))) \cdot f'(\psi_{r_0}(x)) \cdot \psi'_{r_0}(x)$, то з огляду на співвідношення (3.68) та обчислення дилатацій від суперпозиціями з конформними відображеннями (див. [67, розд. 4, гл. I]), будемо мати, що

$$\begin{aligned} K_O(x, \widetilde{f}_{r_0}) &= K_O(f(\psi_{r_0}(x)), \psi_{r_0}) \cdot K_O(\psi_{r_0}(x), f) \cdot K_0(x, \psi_{r_0}) = \\ &= 1 \cdot K_O(\psi_{r_0}(x), f) \cdot 1 = K_O(\psi_{r_0}(x), f) \leqslant C_n \cdot Q_0^{n-1} \end{aligned} \tag{3.70}$$

для всіх $x \in \mathbb{B}^n$. Очевидно, відображення f є гомеоморфізмом в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, і що воно є диференційовним майже скрізь. Більше того, оскільки конформне відображення $\psi_{r_0}(x) = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{x}{|x|^2}$ є локальною квазіізометрією, то як внутрішня, так і зовнішня суперпозиція відображення f з ним не виводить за межі класу ACL (див., напр., [61, теорема 1, розд. 1.1.7 гл. 1]). Тоді знову $\widetilde{f}_{r_0}$ є K_0-квазіконформним в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$, де K_0 – деяке число, залежне тільки від розмірності простору n (див., напр., [99, теорема 34.6]). Зауважимо, що $\widetilde{f}_{r_0}$ має квазіконформне продовження в точку $x_0=0$ (див., напр., [99, теорема 17.3]). В такому випадку, само відображення f має квазіконформне продовження в точку ∞.

Зауважимо, що $\widetilde{f}_{r_0}(0)=0$. Дійсно, $f(\overline{\mathbb{R}^n})$ є одночасно відкритою і замкненою підмножиною $\overline{\mathbb{R}^n}$ як, з одного боку, відкритий образ відкритої множини $\overline{\mathbb{R}^n}$, а з іншого – неперервний образ компакту $\overline{\mathbb{R}^n}$. Отже, $f(\overline{\mathbb{R}^n})=\overline{\mathbb{R}^n}$. Оскільки $f(x)\ne\infty$ у $\mathbb{R}^n$, то $f(\infty)=\infty$. Звідси випливає, що $\widetilde{f}_{r_0}(0)=0$, що і було потрібно.

Позначимо через $\mathfrak{R}_Q(K)$ сім'ю всіх відображень $\widetilde{f}_{r_0}:\mathbb{B}^n\rightarrow\mathbb{R}^n:\widetilde{f}_{r_0}(x)=\frac{1}{r_0}\cdot\frac{f\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)}{\left|f\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)\right|^2}$, де $f\in\mathfrak{F}_Q(K)$. Нехай $\widetilde{f}_{r_0}\in\mathfrak{R}_Q(K)$. З огляду на співвідношення (3.61) $a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0)\geqslant M_0=M_0(r_0)$. Тоді за твердженням 3.3.1

$$B(0,c/M_0)\subset\widetilde{f}_{r_0}(\mathbb{B}^n)\,. \tag{3.71}$$

Зі співвідношення (3.71) випливає, що

$$F(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{B(0,1/r_0)})\supset B(0,cr_0/M_0)\,,\qquad F(x)=f(x)/|f(x)|^2\,. \tag{3.72}$$

З урахуванням (3.72) покажемо, що

$$f(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{B(0,1/r_0)})\supset\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{B(0,M_0/cr_0)}\,. \tag{3.73}$$

Дійсно, нехай $y\in\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{B(0,M_0/cr_0)}$, тоді $\frac{y}{|y|^2}\in B(0,cr_0/M_0)$. Зі співвідношення (3.72) будемо мати, що $\frac{y}{|y|^2}=f(x)/|f(x)|^2$, $x\in\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{B(0,1/r_0)}$. Тоді $y=f(x)$, $x\in\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{B(0,1/r_0)}$, що і доводить (3.73).

Оскільки f – гомеоморфізм у $\mathbb{R}^n$, зі співвідношення (3.73) випливає, що

$$f(B(0,1/r_0))\subset B(0,M_0/cr_0)\,. \tag{3.74}$$

Покладемо $\Delta:=h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,M_0/cr_0))$, де $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,M_0/cr_0))$ – хордальний діаметр множини $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,M_0/cr_0)$. В таком випадку, сім'я відображень

$\mathfrak{F}_Q(K)$ є одностайно неперервною в $B(0, 1/r_0)$ за [58, лема 7.6]. Отже, $\mathfrak{F}_Q(K)$ є одностайно неперервною в $\mathbb{R}^n$, бо число $r_0 > 0$ було обрано довільним додатнім. $\Box$

Твердження теореми 3.3.1 безпосередньо випливає з леми 3.3.1, бо виконання умов 1) і 2) в цій теоремі є частковим випадком співвідношень (3.64)–(3.65) зі спеціально обраними функціями ψ. Деталі див., напр., в [58, наслідок 6.3, теорема 6.4], або в [96, лема 1.3]. $\Box$

3.3.2. Замкненість одного підкласу $\mathfrak{F}_Q(K)$

В повній мірі питання щодо замкненості класу $\mathfrak{F}_Q(K)$ залишається відкритим, оскільки невідомо, чи можливий граничний перехід у нерівностях типу (3.61). Тим не менш, справедливим є наведене нижче твердження.

Нехай $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція і K – компакт у $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathfrak{M}_Q(K)$ клас усіх гомеоморфізмів $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, які задовольняють умову (2.10) в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \neq 0$ при всіх $x \notin K$, $f \in ACL(\mathbb{R}^n \setminus K)$, причому для будь-якого $r_0 > 0$ знайдуться числа $M_0 = M_0(r_0) > 0$ і $N_0 = N_0(r_0) > 0$ такі, що

$$N_0 \geqslant a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0) := \exp\left(\frac{1}{n\Omega_n}\int\limits_{\mathbb{B}^n} \log|J(x, \widetilde{f}_{r_0})|\, dm(x)\right) \geqslant M_0\,, \tag{3.75}$$

де $\widetilde{f}_{r_0}(x) := \frac{1}{r_0} \cdot (\psi \circ f \circ \psi)(r_0 x)$ і $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$. Справедлива наступна

Лема 3.3.2. *Нехай функція Q задовольняє умову $Q(x) \leqslant Q_0 = const$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, крім того, припустимо, що виконуються умови (3.64)–(3.65).*

Нехай, крім того, $f_m \in \mathfrak{M}_Q(K)$, $m = 1, 2, \ldots,$ – послідовність відображень класу $\mathfrak{M}_Q(K)$, яка збігається до деякого відображення $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ локально рівномірно у $\mathbb{R}^n$ при $m \to \infty$ відносно хордальної метрики h. Тоді $f(x) \neq \infty$ при всіх $x \in \mathbb{R}^n$, крім того, f є гомеоморфізмом, який задовольняє умову (2.10) в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \neq 0$ при всіх

$x \notin K$, $f \in ACL(\mathbb{R}^n \setminus K)$, причому для будь-якого $r_0 > 0$ знайдуться числа $M_* = M_*(r_0, f) > 0$ і $N_* = N_*(r_0, f) > 0$ такі, що виконується умова

$$N_* \geqslant a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0) := \exp\left(\frac{1}{n\Omega_n}\int\limits_{\mathbb{B}^n} \log|J(x, \widetilde{f}_{r_0})|\, dm(x)\right) \geqslant M_*\,, \tag{3.76}$$

де $\widetilde{f}_{r_0}(x) := \frac{1}{r_0}\cdot(\psi\circ f\circ\psi)(r_0x)$ і $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$.

Зауваження 3.3.3. Зауважимо, що в лемі 3.3.2 числа M_* і N_* можуть, взагалі кажучи, залежати від відображення f.

Доведення леми 3.3.2. Нехай f_m, $m = 1, 2, \ldots,$ – відображення з умови леми. За [71, лема 4.2] відображення f є або гомеоморфізмом $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, або сталою $c_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

Покажемо, що друга ситуація неможлива. Насамперед, міркуючи аналогічно доведенню леми 3.3.1 та з огляду на оцінку (3.75), ми отримаємо, що

$$f_m(B(0, 1/r_0)) \subset B(0, M_0/r_0)\,. \tag{3.77}$$

Співвідношення (3.77) виключає випадок $c_0 = \infty$.

Нехай тепер $c_0 \neq \infty$. Розглядаючи сім'ю відображень $\widetilde{f_{mr_0}}$ по аналогії з (3.66),

$$\widetilde{f_{mr_0}}(x) = \frac{1}{r_0}\cdot\frac{f_m\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)}{\left|f_m\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)\right|^2}\,, \qquad x \in \mathbb{B}^n\,. \tag{3.78}$$

З огляду на ліву частину нерівності у (3.63) та на оцінку (3.75) будемо мати, що

$$d(0, \partial\widetilde{f_{mr_0}}(\mathbb{B}^n)) \leqslant c a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0) \leqslant cN_*\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,.$$

Тоді

$$B(0, 2cN_*) \cap \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \widetilde{f_{mr_0}}(\mathbb{B}^n)\right) \neq \varnothing\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,. \tag{3.79}$$

З (3.79) випливає, що існує $x_m \in B(0, 2cN_*)$ такий, що $x_m \in B(0, 2cN_*) \cap \left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \widetilde{f_{mr_0}}(\mathbb{B}^n)\right)$. Крім того, $\widetilde{f_{mr_0}}(x) \neq \infty$ при всіх $x \in \mathbb{B}^n$ за означенням класу $\mathfrak{M}_Q(K)$ та числа r_0. Тоді

$$h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \widetilde{f_{mr_0}}(\mathbb{B}^n)\right) \geqslant h(x_m, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x_m|^2}} \geqslant \tag{3.80}$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{1+|2cN_*|^2}} := \delta_0\,.$$

Оскільки всі відображення $\widetilde{f_m}$ квазіконформні з загальною сталою квазіконформності, $m=1,2,\ldots$ (див. доведення леми 3.3.1), то при додатковій умові (3.80) ця сім'я є одностайно неперервною (див. [99, теорема 19.2]). Зокрема, для числа $\varepsilon := \frac{1}{r_0(c_0+1)}$ знайдеться $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що

$$|\widetilde{f_{mr_0}}(x)| < \frac{1}{r_0(c_0+1)} \qquad \forall \quad |x|\leqslant\delta,\ m=1,2,\ldots\,. \tag{3.81}$$

Тоді з огляду на (3.81) відповідно до (3.78) ми отримаємо, що $\frac{1}{r_0}\left|\cdot\frac{f_m(x)}{|f_m(x)|^2}\right| < \frac{1}{r_0(c_0+1)}$ при $|x|\geqslant\frac{1}{r_0\delta}$, або

$$|f_m(x)| > c_0+1\,, \qquad |x|\geqslant\frac{1}{r_0\delta}\,, \quad m=1,2,\ldots\,. \tag{3.82}$$

Якщо ж тепер $f_m(x)\to c_0=const$ при $m\to\infty$ локально рівномірно в $\mathbb{R}^n$ при $m\to\infty$, то для числа $A=1$ знайдеться номер $M^*=M^*(r_0,\delta)$ такий, що

$$|f_m(x)-c_0|<1\,, \quad |x|\leqslant\frac{2}{r_0\delta}\,, \quad m\geqslant M^*\,. \tag{3.83}$$

З (3.83) та з нерівності трикутника випливає, що

$$|f_m(x)|\leqslant c_0+1\,, \quad |x|\leqslant\frac{2}{r_0\delta}\,, \quad m\geqslant M^*\,. \tag{3.84}$$

Нерівності (3.82) та (3.84) суперечать одна одній, отже, відображення f є гомеоморфізмом $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, що і треба було довести. З огляду на умови (3.64)–(3.65) відображення f задовольняє також визначальні співвідношення (2.10)–(2.11) (див. [71, теорема 5.1]).

Далі, f є квазіконформним відображенням на кожній зв'язній компоненті відкритої множини $\mathbb{R}^n\setminus K$ як локально рівномірна границя квазіконформних відображень (див. [99, наслідок 37.3]). Отже, $f\in ACL(\mathbb{R}^n\setminus K)$ (див. [99, наслідок 31.4]).

Доведемо, що $f(x)\neq 0$ при $x\in\mathbb{R}^n\setminus K$. Дійсно, оскільки $f_m(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$ і $f_m(x)\neq 0$ при $x\in\mathbb{R}^n\setminus K$, то існує $x_m\in K$ таке, що $f_m(x_m)=0$. Оскільки

K – компакт, то можна виділити підпослідовність $x_{m_k} \in K,\ \ k = 1, 2, \ldots$ таку, що $x_{m_k} \to x_0,\ \ x_0 \in K.$ Тоді за нерівністю трикутника та з огляду на локально рівномірну збіжність f_{m_k} до f будемо мати, що

$$|f_{m_k}(x_{m_k}) - f(x_0)| \leqslant |f_{m_k}(x_{m_k}) - f_{m_k}(x_0)| + |f_{m_k}(x_0) - f(x_0)| \to 0$$

при $k \to \infty$. Оскільки $f_{m_k}(x_{m_k}) = 0$, останнє співвідношення є можливим тільки за умови $f(x_0) = 0$. Оскільки f є гомеоморфізмом у $\mathbb{R}^n$, такою точкою, в якій обертається в нуль відображення f, може бути лише x_0. Тому $f(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, що і потрібно було довести.

Нарешті, залишилося встановити співвідношення (3.76). Оскільки відображення $\widetilde{f}_{r_0}$ є квазіконформним (див. деталі доведення леми 3.3.1), то це співвідношення виконується з огляду на твердження 3.3.1. Лема 3.3.2 повністю доведена. $\Box$

Справедлива наступна

Теорема 3.3.2. *Нехай функція Q задовольняє умову $Q(x) \leqslant Q_0 = const$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, крім того, припустимо, що $Q \in FMO(\mathbb{R}^n)$, або для кожного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ існує $\delta_0 = \delta(x_0) > 0$ таке, що виконується умова (3.62). Нехай, крім того, $f_m \in \mathfrak{M}_Q(K)$, $m = 1, 2, \ldots,$ – послідовність відображень класу $\mathfrak{M}_Q(K)$, яка збігається до деякого відображення $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ локально рівномірно у $\mathbb{R}^n$ при $m \to \infty$ відносно хордальної метрики h. Тоді $f(x) \neq \infty$ при всіх $x \in \mathbb{R}^n$, крім того, f є гомеоморфізмом, який задовольняє умову (2.10) в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \neq 0$ при всіх $x \notin K$, $f \in ACL(\mathbb{R}^n \setminus K)$, причому для будь-якого $r_0 > 0$ знайдуться числа $M_* = M_*(r_0, f) > 0$ і $N_* = N_*(r_0, f) > 0$ такі, що виконується умова (3.76), де $\widetilde{f}_{r_0}(x) := \frac{1}{r_0} \cdot (\psi \circ f \circ \psi)(r_0 x)$ і $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$.*

Доведення теореми 3.3.2 безпосередньо випливає з леми 3.3.2, бо вказані у першій частині формулювання умови на функцію Q є окремим випадком співвідношень (3.64)–(3.65) зі спеціально обраними функціями ψ (див., напр., [58, наслідок 6.3, теорема 6.4]), див. також [96, лема 1.3]) $\Box$

3.3.3. Про класи відображень з інтегральними обмеженнями

Нехай $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неспадна функція, $Q_0, L_0 > 0$ – фіксовані числа і K – компакт у $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathfrak{F}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$ клас усіх гомеоморфізмів $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, для яких:

1) знайдеться вимірна за Лебегом функція $Q = Q_f : \mathbb{C} \to [0,\infty]$ така, що $Q(x) \leqslant Q_0 = const$ майже скрізь у $\mathbb{R}^n \setminus K$;

2) виконана умова (2.10) в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(Q(x)) \cdot \frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n} \leqslant L_0\,; \tag{3.85}$$

3) $f(x) \neq 0$ при всіх $x \notin K$, $f \in ACL(\mathbb{R}^n \setminus K)$;

4) для будь-якого $r_0 > 0$ знайдеться число $M_0 = M_0(r_0) > 0$ таке, що

$$a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0) := \exp\left(\frac{1}{n\Omega_n}\int\limits_{\mathbb{B}^n} \log|J(x,\widetilde{f}_{r_0})|\,dm(x)\right) \geqslant M_0\,, \tag{3.86}$$

де $\widetilde{f}_{r_0}(x) := \frac{1}{r_0}\cdot(\psi\circ f\circ\psi)(r_0x)$ і $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$.

Виконується наступний результат.

Теорема 3.3.3. *Нехай $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ – неперервна зростаюча опукла функція, яка при деякому $\delta > \Phi(0)$ задовольняє умову*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left(\Phi^{-1}(\tau)\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \infty\,. \tag{3.87}$$

Тоді сім'я відображень $\mathfrak{F}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$ є одностайно неперервною в $\mathbb{R}^n$.

Доведення теореми 3.3.3 дуже схоже на доведення леми 3.3.1, тому обмежимося лише схематичним доведенням. Зафіксуємо $f \in \mathfrak{F}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$ і довільний компакт $C \subset \mathbb{R}^n$. Нехай $r_0 > 0$ – число, таке що $C \cup K \subset B(0, 1/r_0)$. Визначимо $\widetilde{f}_{r_0}$ за співвідношенням (3.66). Аналогічно доведенню леми 3.3.1 можна показати, що f є K_0-квазіконформним в $\mathbb{R}^n \setminus K$, де K_0 – деяке число, залежне тільки від розмірності простору n. Так само, як і в лемі 3.3.1 можна показати, що і відображення $\widetilde{f}_{r_0}$ є K_0-квазіконформним в

$\mathbb{B}^n$, причому $\widetilde{f}_{r_0}(0)=0$. Позначимо через $\mathfrak{R}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$ сім'ю всіх відображень $\widetilde{f}_{r_0}:\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}^n:\widetilde{f}_{r_0}(x)=\frac{1}{r_0}\cdot\frac{f\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)}{\left|f\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)\right|^2}$, де $f\in\mathfrak{F}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$. Нехай $\widetilde{f}_{r_0}\in\mathfrak{R}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$. З огляду на співвідношення (3.61) будемо мати, що

$$f(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{B(0,1/r_0)})\supset\overline{\mathbb{R}^n}\setminus\overline{B(0,M_0/cr_0)}\,. \tag{3.88}$$

Оскільки f – гомеоморфізм у $\mathbb{R}^n$, зі співвідношення (3.88) випливає, що

$$f(B(0,1/r_0))\subset B(0,M_0/cr_0)\,. \tag{3.89}$$

Покладемо $\Delta:=h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,M_0/cr_0))$, де $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,M_0/cr_0))$ – хордальний діаметр множини $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(0,M_0/cr_0)$. В таком випадку, сім'я відображень $\mathfrak{F}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$ є одностайно неперервною в $B(0,1/r_0)$ за [71, теорема 4.1]. $\Box$

Нехай $\Phi\colon\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ – неспадна функція, $Q_0,L_0>0$ – фіксовані числа і K – компакт у $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathfrak{M}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$ клас усіх гомеоморфізмів $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, для яких:

1) знайдеться вимірна за Лебегом функція $Q=Q_f:\mathbb{C}\to[0,\infty]$ така, що $Q(x)\leqslant Q_0=const$ майже скрізь у $\mathbb{R}^n\setminus K$;

2) виконана умова (2.10) в кожній точці $x_0\in\mathbb{R}^n$, причому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi(Q(x))\cdot\frac{dm(x)}{(1+|x|^2)^n}\leqslant L_0\,; \tag{3.90}$$

3) $f(x)\ne 0$ при всіх $x\notin K$, $f\in ACL(\mathbb{R}^n\setminus K)$;

4) для будь-якого $r_0>0$ знайдуться числа $N_0=N_0(r_0)>0$ і $M_0=M_0(r_0)>0$ таке, що

$$N_0\geqslant a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0):=\exp\left(\frac{1}{n\Omega_n}\int\limits_{\mathbb{B}^n}\log|J(x,\widetilde{f}_{r_0})|\,dm(x)\right)\geqslant M_0\,, \tag{3.91}$$

де $\widetilde{f}_{r_0}(x):=\frac{1}{r_0}\cdot(\psi\circ f\circ\psi)(r_0x)$ і $\psi(x)=\frac{x}{|x|^2}$.

Виконується наступний результат.

Теорема 3.3.4. *Нехай* $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *– неперервна зростаюча опукла функція, яка при деякому* $\delta > \Phi(0)$ *задовольняє умову*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \left(\Phi^{-1}(\tau)\right)^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \,. \tag{3.92}$$

Нехай, крім того, $f_m \in \mathfrak{M}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$, $m = 1, 2, \ldots,$ *– послідовність відображень класу* $\mathfrak{M}_{\Phi}^{Q_0,L_0}(K)$, *яка збігається до деякого відображення* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *локально рівномірно у* $\mathbb{R}^n$ *при* $m \to \infty$ *відносно хордальної метрики* h. *Тоді* $f(x) \neq \infty$ *при всіх* $x \in \mathbb{R}^n$, *крім того,* f *є гомеоморфізмом, який задовольняє умову* $f(x) \neq 0$ *при всіх* $x \notin K$, $f \in ACL(\mathbb{R}^n \setminus K)$, *причому для будь-якого* $r_0 > 0$ *знайдуться числа* $M_* = M_*(r_0, f) > 0$ *і* $N_* = N_*(r_0, f) > 0$ *такі, що виконується умова*

$$N_* \geqslant a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0) := \exp\left(\frac{1}{n\Omega_n} \int\limits_{\mathbb{B}^n} \log|J(x, \widetilde{f}_{r_0})|\, dm(x)\right) \geqslant M_* \,, \tag{3.93}$$

де $\widetilde{f}_{r_0}(x) := \frac{1}{r_0} \cdot (\psi \circ f \circ \psi)(r_0 x)$ *і* $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$.

Доведення теореми 3.3.4 дуже схоже на доведення леми 3.3.2. Отже, обмежимося лише схемою доведення.

Нехай f_m, $m = 1, 2, \ldots,$ – відображення з умови теореми. За лемою 2.1.1 відображення f є або гомеоморфізмом $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, або сталою $c_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

Покажемо, що друга ситуація неможлива. Міркуючи аналогічно доведенню леми 3.3.1 та з огляду на оцінку (3.91), ми отримаємо, що

$$f_m(B(0, 1/r_0)) \subset B(0, M_0/r_0) \,. \tag{3.94}$$

Співвідношення (3.94) виключає випадок $c_0 = \infty$.

Нехай тепер $c_0 \neq \infty$. Розглядаючи сім'ю відображень $\widetilde{f_{mr_0}}$ по аналогії з (3.66),

$$\widetilde{f_{mr_0}}(x) = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{f_m\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)}{\left|f_m\left(\frac{x}{r_0|x|^2}\right)\right|^2} \,, \qquad x \in \mathbb{B}^n \,, \tag{3.95}$$

і міркуючи аналогічно доведенню леми 3.3.2, ми отримаємо, що

$$h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \widetilde{f_{mr_0}}(\mathbb{B}^n)\right) \geqslant \delta_0 \tag{3.96}$$

для деякого числа $\delta_0 > 0$. Оскільки всі відображення $\widetilde{f_m}$ квазіконформні з загальною сталою квазіконформності, $m = 1, 2, \ldots$ (див. доведення леми 3.3.1), то при додатковій умові (3.96) ця сім'я є одностайно неперервною (див. [99, теорема 19.2]). Зокрема, для числа $\varepsilon := \frac{1}{r_0(c_0+1)}$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$|\widetilde{f_{mr_0}}(x)| < \frac{1}{r_0(c_0+1)} \qquad \forall \quad |x| \leqslant \delta,\ m = 1, 2, \ldots . \tag{3.97}$$

Тоді з огляду на (3.97) відповідно до (3.95) ми отримаємо, що $\frac{1}{r_0}\left|\cdot\frac{f_m(x)}{|f_m(x)|^2}\right| < \frac{1}{r_0(c_0+1)}$ при $|x| \geqslant \frac{1}{r_0\delta}$, або

$$|f_m(x)| > c_0 + 1\,, \qquad |x| \geqslant \frac{1}{r_0\delta}\,, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{3.98}$$

Якщо ж тепер $f_m(x) \to c_0 = const$ то (міркуючи аналогічно доведенню леми 3.3.2) ми отримаємо, що

$$|f_m(x)| \leqslant c_0 + 1\,, \quad |x| \leqslant \frac{2}{r_0\delta}\,, \quad m \geqslant M^* \tag{3.99}$$

для деякого числа $M^* > 0$. Нерівності (3.98) та (3.99) суперечать одна одній, отже, відображення f є гомеоморфізмом $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, що і треба було довести.

Те, що $f \in ACL(\mathbb{R}^n \setminus K)$ і $f(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ доводиться так само, як у лемі 3.3.2, як і співвідношення (3.93). $\Box$

3.3.4. Відображення з оберненою нерівністю Полецького

Нехай $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція і K – компакт у $\mathbb{R}^n$. Позначимо через $\mathfrak{B}_Q(K)$ клас усіх гомеоморфізмів $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, які є гомеоморфізмами у $\mathbb{R}^n \setminus K$ і задовольняють умови (1.11)–(1.12) в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \neq 0$ при всіх $x \notin K$, $g = f^{-1} \in ACL(f(\mathbb{R}^n \setminus K))$, причому для будь-якого $r_0>0$ знайдеться число $M_0=M_0(r_0)>0$ таке, що

$$a_{\widetilde{f}_{r_0}}(0):=\exp\left(\frac{1}{n\Omega_n}\int\limits_{\mathbb{B}^n}\log|J(x,\widetilde{f}_{r_0})|\,dm(x)\right)\geqslant M_0\,, \tag{3.100}$$

де $\widetilde{f}_{r_0}(x):=\frac{1}{r_0}\cdot(\psi\circ f\circ\psi)(r_0x)$ і $\psi(x)=\frac{x}{|x|^2}$. Справедлива наступна

Теорема 3.3.5. *Нехай функція Q задовольняє умову $Q(x)\leqslant Q_0=const$ при майже всіх $x\in\mathbb{R}^n\setminus K$, крім того, припустимо, що для кожної точки $y_0\in\mathbb{R}^n$ і кожних $0<r_1<r_2<\infty$ знайдеться множина $E\subset[r_1,r_2]$ додатної міри Лебега така, що при кожному $r\in E$ функція Q є інтегровною по відношенню до $\mathcal{H}^{n-1}$-міри на сфері $S(y_0,r)$. Тоді сім'я відображень $\mathfrak{B}_Q(K)$ є одностайно неперервною в $\mathbb{R}^n$.*

Доведення. Зафіксуємо $f\in\mathfrak{B}_Q(K)$ і $r_0>0$ – число, таке що $K\subset B(0,1/r_0)$. Нехай, крім того, $\widetilde{f}_{r_0}$ визначається формулою (3.66). З умови (1.11) випливає, що співвідношення (2.10) виконується в $f(\mathbb{R}^n\backslash K)$ для відображення $g:=f^{\,-1}$ при $Q\mapsto Q_0$.

Зауважимо, що для кожного відображення $g=f^{\,-1}$, $f\in\mathfrak{B}_Q(K)$, виконується умова

$$\|g^{\prime}(y)\|^n\leqslant C_n\cdot|J(y,g)|\;Q^{n-1}(y) \tag{3.101}$$

майже скрізь, де $\|g^{\prime}(x)\|=\sup\limits_{|h|=1}|g^{\prime}(x)h|$, $J(y,g)=\det g^{\prime}(y)$ і $C_n>0$ – деяка стала, залежна тільки від розмірності простору n (див., напр., [77, наслідок 3.4]). Отже, з нерівності (3.101) випливає, що при майже всіх $y\in f(\mathbb{R}^n\setminus K)$

$$\|g^{\prime}(y)\|^n\leqslant C_n\cdot|J(y,g)|\;Q_0^{n-1}\,,$$

отже,

$$K_O(y,g)\leqslant C_n\cdot Q_0^{n-1}<\infty \tag{3.102}$$

майже скрізь, де зовнішня дилатація $K_O(y,g)$ відображення g у точці y обчислюється за правилом (3.69). Зауважимо, що g є диференційовним майже скрізь в $f(\mathbb{R}^n\setminus K)$ (див., напр., [78, теорема 3.2]). Тоді, оскільки за припущенням $g\in ACL(f(\mathbb{R}^n\setminus K))$, з огляду на нерівність (3.102) відображення

g є K_0-квазіконформним в $f(\mathbb{R}^n\setminus K)$, де K_0 – деяке число, залежне тільки від розмірності простору n (див., напр., [99, теорема 34.6]). Тоді також і відображення f є K_0-квазіконформним в $\mathbb{R}^n\setminus K$ (див. [99, означення 13.1]).

В такому випадку, зауважимо, що таким є і відображення $\widetilde{f}_{r_0}$ визначене по f у (3.66), що встановлюється так само, як і при доведенні леми 3.3.1. Зауважимо, що $\widetilde{f}_{r_0}$ має квазіконформне продовження в точку $x_0=0$ (див., напр., [99, теорема 17.3]). В такому випадку, само відображення f має квазіконформне продовження в точку ∞.

Зауважимо, що $\widetilde{f}_{r_0}(0)=0$ (це також встановлюється так, як при доведенні леми 3.3.1). Крім того, міркуючи аналогічно доведенню леми 3.3.1, ми отримаємо співвідношення

$$f(B(0,1/r_0))\subset B(0,M_0/cr_0) \qquad (3.103)$$

для кожного $f\in\mathfrak{B}_Q(K)$. В такому випадку, сім'я відображень є одностайно неперервною в $B(0,1/r_0)$ (див. [89, теорема 1.1]). Отже, $\mathfrak{F}_Q(K)$ є одностайно неперервною в $\mathbb{R}^n$, бо число $r_0>0$ було обрано як довільне додатне. $\Box$

Наслідок 3.3.1. *Твердження теореми 3.3.4 залишається справедливим, якщо в ньому замість відповідних умов на Q вимагати, щоб $Q(x)\leqslant Q_0=const$ при майже всіх $x\in\mathbb{R}^n\setminus K$ і крім того, що $Q\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. В цьому випадку, для будь-якої компактної множини C у $\mathbb{R}^n$ і області $D\subset\mathbb{R}^n$ такої, що $C\subset D$ знайдеться область $D'\subset\mathbb{R}^n$ і функція Q', яка дорівнює Q у D' і обертається в нуль у її доповненні така що нерівність*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{C_0}{\log^{1/n}\left(1+\frac{\widetilde{r_0}}{2|x-y|}\right)} \qquad (3.104)$$

виконується для будь-яких $x,y\in C$ і всіх $f\in f\in\mathfrak{B}_Q(K)$, де $C_0=C_0(n,C,\|Q'\|_1,D,D')>0$ – деяка стала, залежна тільки від n, C і $\|Q'\|_1$, $\|Q'\|_1$ позначає L^1-норму функції Q' в $\mathbb{R}^n$, крім того, $\widetilde{r_0}=d(C,\partial D)$.

Доведення. За теоремою Фубіні (див. [75, теорема 8.1.III]) для будь-якого $\varepsilon_0>0$ і $y_0\in\mathbb{R}^n$

$$\int\limits_{B(y_0,\varepsilon_0)}Q(y)\,dm(y)=\int\limits_0^{\varepsilon_0}\int\limits_{S(y_0,t)}Q(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,dt=\omega_{n-1}\int\limits_0^{\varepsilon_0}t^{n-1}q_{y_0}(t)\,dt<\infty\,.$$

Отже, на майже всіх сферах $S(y_0, r)$ функція Q інтегровна, тому функція Q задовольняє всі умови теореми 3.3.4. Повторюючи доведення цієї теореми, приходимо до співвідношення (3.103). Якщо тепер маємо довільний компакт $C \subset \mathbb{R}^n$, то завжди можна підібрати $r_0 > 0$ таким, що $C \subset B(0, 1/r_0)$. Далі покладемо $D = B(0, 1/r_0)$ і $D' = B(0, M_0/cr_0)$. В такому випадку, співвідношення (3.104) випливає з [89, теорема 4.1]. $\square$

Висновки до розділу 3

У третьому розділі досліджено лінійні і квазілінійні рівнянням Бельтрамі.

1. Отримано теореми про існування гомеоморфних ACL-розв'язків квазілінійного рівняння Бельтрамі з двома характеристиками за певних умов на комплексні коефіцієнти. Крім того, за деяких відносно слабких умов отримані теореми про існування відповідних неперервних ACL-розв'язків, які є логарифмічно гельдеровими в заданій області.

2. Доведено існування розв'язків класу Соболєва рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками, які задовольняють певну умову на дилатації обернених відображень, коли розв'язки рівняння Бельтрамі задовольняють гідродинамічне нормування в околі нескінченності.

3. Доведено, що гомеоморфізми, які задовольняють деякий просторовий аналог гідродинамічної умови зростання в околі нескінченно віддаленої точки, формують одностайно неперервні сім'ї за деяких умов на їх характеристику. Розглянуто також питання щодо замкненості цих класів відносно локально рівномірної збіжності. Отримані відповідні результати для відображень з інтегральними обмеженнями, а також для класів відповідних обернених відображень.

Матеріали другого розділу викладено в публікаціях здобувача [2], [3], [30].

ВИСНОВКИ

Отже, в дисертації зроблено внесок у розвиток теорії відображень зі скінченним спотворенням, а також вивчення рівнянь Бельтрамі та задачі Діріхле для нього. Усі основні результати дисертації є новими.

До основних результатів дисертації можуть бути віднесені наступні:

1. Отримано неперервне продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького на межу у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, область визначення має слабко плоску межу, а область значення є локально зв'язною на своїй межі.

2. Отримані обернені модульні нерівності типу Полецького для відкритих дискретних замкнених відображень, які диференційовні майже скрізь, мають властивість N-Лузіна відносно міри Лебега і N^{-1}-властивість на сферах.

3. Отримана логарифмічна неперервність за Гельдером відображень з оберненою нерівністю Полецького у межових точках у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, а відображена область є обмеженою опуклою. Результат є справедливим у випадку, коли областю визначення є або QED-область, або область з локально квазіконформною межею, або регулярна область в сенсі простих кінців.

4. Доведені теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі у деякій жордановій області, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження інтегрального характеру. Отримані результати про компактні класи розв'язків відповідної задачі Діріхле, яка розглядається в деякій жордановій області.

5. Доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження теоретико-множинного типу. Отримано результати про компактні класи розв'язків відповідних задач Діріхле, які розглядаються в деякій жордановій області.

6. Отримано результати щодо компактності розв'язків задачі Діріхле в однозв'язній області в термінах простих кінців для випадку, коли максимальні дилатації цих розв'язків задовольняють певні інтегральні обмеження.

7. Отримано теореми про існування гомеоморфних ACL-розв'язків квазілінійного рівняння Бельтрамі з двома характеристиками за певних умов на комплексні коефіцієнти. Крім того, за деяких відносно слабких умов отримані теореми про існування відповідних неперервних ACL-розв'язків, які є логарифмічно гельдеровими в заданій області.

8. Доведено існування розв'язків класу Соболєва рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками, які задовольняють певну умову на дилатації обернених відображень, коли розв'язки рівняння Бельтрамі задовольняють гідродинамічне нормування в околі нескінченності.

9. Доведено, що гомеоморфізми, які задовольняють деякий просторовий аналог гідродинамічної умови зростання в околі нескінченно віддаленої точки, формують одностайно неперервні сім'ї за деяких умов на їх характеристику. Розглянуто також питання щодо замкненості цих класів відносно локально рівномірної збіжності. Отримані відповідні результати для відображень з інтегральними обмеженнями, а також для класів відповідних обернених відображень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Довгопятий О. П., Севостьянов Є. О. Про компактність класів розв'язків задачі Діріхле з обмеженнями теоретико-множинного типу. *Український математичний вісник.* 2021. Т. 18, № 3. С. 319–337; English translation: On the compactness of classes of the solutions of the Dirichlet problem. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 259, № 1. P. 23–36.

2. Довгопятий О. П., Севостьянов Є. О. Про існування розв'язків квазілінійних рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками. *Український математичний журнал.* 2022. Т. 74, № 7. С. 961–972; English translation: On the Existence of Solutions of Quasilinear Beltrami Equations with Two Characteristics. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2022. Vol. 74, № 7. P. 1099–1112.

3. Довгопятий О. П., Севостьянов Є. О. Про відображення з аналогом гідродинамічного нормування у евклідовому просторі. *Український математичний вісник.* 2023. Т. 20, № 3. С. 381–399; English translation: On mappings with an analog of the hydrodynamical normalization in the Euclidean space. *Journal of Mathematical Sciences.* 2023. Vol. 276, № 5. P. 638–651.

4. Довгопятий О., Севостьянов Є. Про застосування одної модульної нерівності до теорії відображень. *Праці ІПММ НАН України.* 2023. Т. 37, № 2. С. 104–117.

5. Довгопятий О. Про рівняння Бельтрамі з оберненими умовами та гідродинамічне нормування. Збірник тез доповідей наукової конференції викладачів та молодих науковців Житомирського державного університету імені Івана Франка з нагоди Днів науки. Житомир, Житомир. держ. ун-т ім. Івана Франка, 2023. С. 306–310.

6. Ількевич Н. С., Севостьянов Є. О. Одностайна неперервність сімей відображень з умовою нормування в термінах простих кінців. *Український*

математичний журнал. 2022. Т. 74, № 6. С. 817–825. English translation: On equicontinuity of the families of mappings with one normalization condition in terms of prime ends. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2022. Vol. 74, № 6. P. 936–945.

7. Севостьянов Є. О. Про існування розв'язків рівнянь Бельтрамі з умовами на обернені дилатації. Український математичний вісник. 2021. Т. 18, № 2. С. 243–254; English translation: On the existence of solutions of the Beltrami equations with conditions on inverse dilatations. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 258, № 3. P. 338–345.

8. Севостьянов Є. О., Скворцов С. О., Довгопятий О. П. Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького. *Український математичний вісник.* 2020. Т. 17, № 3. С. 414-436; English translation: On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 252, № 4. P. 541–557.

9. Adamowicz T. Prime ends in metric spaces and quasiconformal-type mappings. *Analysis and Mathematical Physics.* 2019. Vol. 9. P. 1941–1975.

10. Ahlfors L. *Lectures on quasiconformal mappings.* Toronto, Van Nostrand, 1966. 146 p.

11. Astala K., Gehring F. Quasiconformal analogues of theorems of Koebe and Hardy–Littlewood. *Michigan Mathematical Journal.* 1985. Vol. 32, № 1. P. 99–107.

12. Astala K., Iwaniec T. and Martin G. *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane.* Princeton, Princeton University Press. NJ, 2009. 696 p.

13. Bojarski B. Generalized solution of a system of a differential equation of the first order of the elliptic type with discontinuous coefficients. Math. Sb. 1957. Vol. 43, № 85. P. 451–503.

14. Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V. General Beltrami equations and BMO. *Ukrainian Mathematical Bulletin.* 2008. Vol. 5, № 3. P. 305–326.

15. Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V. General Beltrami equations and BMO. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2009. Vol. 54, № 10. P. 305–326.

16. Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V. On existence and representation of solutions for general degenerate Beltrami equations. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2013. Vol. 59, № 1. P. 67–75.

17. Bourbaki N. *Functions of Real Variable.* Berlin: Springer. 2004. 350 p.

18. Carleson L., Gamelin T.W. *Complex dynamics*, Universitext: Tracts in Mathematics. New York etc.: Springer-Verlag, 1993. 201 p.

19. Cristea M. Open discrete mappings having local ACL^n inverses. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2010. Vol. 55, № 1–3. P. 61–90.

20. Cristea M. Some properties of open, discrete, generalized ring mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2015. Vol. 61, № 5. P. 623–643.

21. Cristea M. On the lightness of the mappings satisfying generalized inverse modular inequalities. *Israel Journal of Mathematics.* 2018. Vol. 227. P. 545–562.

22. Dovhopiatyi O. On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths. *Proceedings of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine.* 2023. Vol. 47, № 1. P. 3–12.

23. Dovhopiatyi O. On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths. *Algebraic and Geometric. Methods of Analysis : International scientific conference, devoted to 160 anniversary of D. Grave.* Odesa, May 29–June 1, 2023. Odesa, 2023. P. 34–35.

24. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in simply connected domains. *Matematychni Studii.* 2022. Vol. 58, № 2. P. 159–173.

25. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in Jordan domains. *Abstracts of the International Conference*

Complex Analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A. A. Gol'dberg, Lviv, June 28–July 1, 2021. Lviv, 2021. P. 15.

26. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compactness of classes of solution of the Dirichlet problem with restrictions of the theoretic-set type. Belgrade, *Mathematics and Applications : the book of Abstracts XI Symposium* December 3–4, 2021. Belgrade, 2021. P. 15–16.

27. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On compactness of solutions of Dirichlet problem. *Current trends in abstract and applied analysis* : the international online conference, Ivano-Frankivsk, May 12–15, 2022. Ivano-Frankivsk, 2022. P. 27.

28. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in simply connected domains. *Abstracts of the 14th International ISAAC Congress*, Sao Paulo, July, 17–July, 21. Sao Paulo, 2023. P. 50.

29. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization. *Mathematics and its applications* : the book of Abstracts of XIII Symposium, Belgrade, December 1–2, 2023. Belgrade, 2023. P. 30.

30. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization. *Acta Mathematica Hungarica.* 2023. Vol. 170. P. 244–260.

31. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On compact classes of Beltrami solutions and Dirichlet problem. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2023. Vol. 68, №. 7. P. 1182–1203.

32. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On the inverse K_I-inequality for one class of mappings. *Filomat.* 2023. Vol. 37, № 24. P. 8145–8156.

33. Federer H. *Geometric Measure Theory. Springer*, Berlin etc. 1969. 676 p.

34. Gehring F. W., Martio O. Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. *J. Anal. Math.* 1985. Vol. 45. P. 181–206.

35. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Normal Families of Discrete Open Mappings with Controlled p-Module. *Contemporary Mathematics*. 2016. № 667. P. 83–103.

36. Goluzin G. M. *Geometric theory of functions of a complex variable*. Providence: American Mathematical Society, 1969. 676 p.

37. Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I. *Infinitesimal Geometry of Spatial Mappings*. Kyiv: Akademperiodyka, 2013. 187 p.

38. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Sevost'yanov E, Yakubov E. On the degenerate Beltrami equation and hydrodynamic normalization. *J. Math Sci*. 2022. Vol. 262, № 2. P. 165–183.

39. Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E. *The Beltrami Equation*. A Geometric Approach. New York etc.: Springer, 2012. 302 p.

40. Herron J., Koskela P. Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains. *Complex Variables, Theory and Application*. 1990. Vol. 15, № 3. P. 167–179.

41. Hencl S., Koskela P. Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2006. Vol. 180, № 1. P. 75–95.

42. Hesse J. A $p-$extremal length and p-capacity equality. *Arkiv for Matematik*. 1975. Vol. 13. P. 131–144.

43. Hurwitz A. and Courant R. *Funktionentheorie, with an appendix by H. Rohrl*. 4th edition. Berlin-Gottingen- Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1964. 705 p.

44. Ilkevych N. S., Sevost'yanov E. A., Skvortsov S. A. On the global behavior of inverse mappings in terms of prime ends. *Ann. Acad. Sci. Fenn*. 2021. Vol. 46. P. 371–388.

45. Iwaniec T., Martin G. *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*. Oxford: Clarendon Press, 2001. 568 p.

46. John F., Nirenberg L. On Functions of Bounded Mean Oscillation. *Communications of Pure and Applied Mathematics*. 1961. Vol. 14, № 3. P. 415–426.

47. Koskela P., Onninen J. Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities. *J. Reine Angew. Math*. 2006. Vol. 599. P. 1–26.

48. Kovtonyuk D., Ryazanov V. On the Theory of Prime Ends for Space Mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2015. Vol. 67, № 4. P. 528–541.

49. Kuratowski K. *Topology*. Vol. 2. Academic Press, New York–London. 1968. 608 p.

50. Lehto O., Virtanen K. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. New York: Springer, 1973. 258 p.

51. Lomako T., Gutlyanskii V. and Ryazanov V. To the theory of variational method for Beltrami equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 182, № 1. P. 37–54.

52. Lomako T. On the theory of convergence and compactness for Beltrami equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2011. Vol. 63, № 3. P. 393–402.

53. Lomako T. On the theory of convergence and compactness for Beltrami equations with constraints of set-theoretic type. *Ukrainian Mathematical Journal*. Vol. 63, № 9. 2012. P. 1400–1414.

54. Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E. On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations. *Ann. Univ. Bucharest (math. series)*. 2010. V. LIX. № 2. P. 261–271.

55. Maly J. and Martio O. Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{loc}$. *J. Reine Angew. Math*. 1995. Vol. 458. P. 19–36.

56. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1*. 1969. Vol. 448. P. 1–40.

57. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Mappings with finite length distortion. *J. d'Anal. Math*. 2004. Vol. 93. P. 215–236.

58. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in Modern Mapping Theory*. New York etc.: Springer, Springer Monographs in Mathematics, 2009. 367 p.

59. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On Q-homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1*. 2005. Vol. 30, № 1. P. 49–69.

60. Martio O., Sarvas J. Injectivity theorems in plane and space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math*. 1979. Vol. 4. P. 384–401.

61. Maz'ya V. *Sobolev classes*. New York, Berlin: Springer, 1985. 512 p.

62. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings. *J. Anal. Math*. Vol. 35. 1979. P. 13–40.

63. Näkki R. Extension of Loewner's capacity theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1973. Vol. 180. P. 229–236.

64. Näkki R., Palka B. Uniform equicontinuity of quasiconformal mappings. *Proc. Amer. Math. Soc. 1973*. Vol. 37, № 2. P. 427–433.

65. Petkov I. V. Dirichlet problem for Beltrami equation in simply connected domains. *Dopovidi NAN Ukrainy*. 2015. Vol. 11. P. 12–17.

66. Rickman S. *Quasiregular mappings, Results in Mathematic and Related Areas*. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 213 p.

67. Reshetnyak Yu. G. *Space Mappings with Bounded Distortion*. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 73. AMS. 1989. 362 p.

68. Ryazanov V. I., Salimov R. R., Sevost'yanov E.A. On the Hölder property of mappings in domains and on boundaries. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 246, № 1. P. 60–74.

69. Ryazanov V., Salimov R. Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory. *Ukrainian Mathematical Bulletin*. 2007. Vol. 4, № 2. P. 199–233.

70. Ryazanov V., Sevost'yanov E. Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean. *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 2011. Vol. 36. P. 231–244.

71. Ryazanov V., Sevost'yanov E. On convergence and compactness of spatial homeomorphisms. *Romanian Journal of Pure and Applies Mathematics.* 2013. Vol. 18, № 1. P. 85–104.

72. Ryazanov V., Sevost'yanov E. Toward the theory of ring Q-homeomorphisms. *Israel J. Math.* 2008. Vol. 168. P. 101–118.

73. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Finite mean oscillation and the Beltrami equation. *Israel Math. J.* 2006. Vol. 153. P. 247–266.

74. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On convergence theory for Beltrami equations. *Ukrainian Mathematical Bulletin.* 2008. Vol. 5, № 4. P. 517–528.

75. Saks S. *Theory of the Integral.* New York: Dover Publ. Inc., 1964. 343 p.

76. Salimov R. R., Sevost'yanov E. A. Analogs of the Ikoma–Schwartz lemma and Liouville theorem for mappings with unbounded characteristic. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2012. Vol. 63, № 10. P. 1551–1565.

77. Salimov R., Sevost'yanov E. On the Equicontinuity of One Family of Inverse Mappings in Terms of Prime Ends. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2019. Vol. 70, № 9. P. 1456–1466.

78. Salimov R., Sevost'yanov E. ACL and differentiability of the open discrete ring mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2010. Vol. 55, № 1–3. P. 49–59.

79. Sevost'yanov E. An analog of the Väisälä inequality for surfaces. *Complex Analysis and Operator Theory.* 2019. Vol. 13, № 6. P. 2939–2948.

80. Sevost'yanov E. A. On the local behavior of open discrete mappings from the Orlicz–Sobolev classes. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2017. Vol. 68, № 9. P. 1447–1465.

81. Sevost'yanov E. On the Inverse Poletsky Inequality in Metric Spaces and Prime Ends. *Analysis Mathematica.* 2023. Vol. 49, № 1. P. 261–294.

82. Sevost'yanov E. On the normality of families of space mappings with branching. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2008. Vol. 60, № 10. P. 1618–1632.

83. Sevost'yanov E. A. On the openness and discreteness of mappings with unbounded characteristic of quasiconformality. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2012. Vol. 63, № 8. P. 1128–1134.

84. Sevost'yanov E. On the boundary behavior of open discrete mappings with unbounded characteristic. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2012. Vol. 64, № 6. P. 979–984.

85. Sevost'yanov E. Analog of the Montel Theorem for Mappings of the Sobolev Class with Finite Distortion. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2015. Vol. 67, № 6. P. 938–947.

86. Sevost'yanov E. A., Skvortsov S. A. On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. Vol. 70, № 7. P. 1097–1114.

87. Sevost'yanov E. A., Skvortsov S. A. On the equicontinuity of families of mappings in the case of variable domains. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2019. Vol. 71, № 7. P. 1071–1086.

88. Sevost'yanov E., Skvortsov S. On the local behavior of a class of inverse mappings. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 241, № 1. P. 77–89.

89. Sevost'yanov E. O., Skvortsov S. O. Logarithmic Hölder continuous mappings and Beltrami equation. *Analysis and Mathematical Physics*. 2021. Vol. 11. Article number 138.

90. Sevost'yanov E. A., Skvortsov S. A. On mappings whose inverse satisfy the Poletsky inequality. *Ann. Acad. Scie. Fenn. Math*. 2020. Vol. 45. P. 259-277.

91. Sevost'yanov E. A., Skvortsov S. A. On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2020. Vol. 70, № 7. P. 1097–1114.

92. Sevost'yanov E. A. The inverse Poletsky inequality in one class of mappings. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 264, № 4. P. 455–470.

93. Sevost'yanov E. A. *The investigation of space mapping by the geometrical method*. Kyiv: Naukova Dumka, 2014. 302 p.

94. Sevost'yanov E. A. On logarithmic Hölder continuity of mappings on the boundary. *Annales Fennici Mathematici*. 2022. Vol. 47. P. 251–259.

95. Sevost'yanov E. A. On global behavior of mappings with integral constraints. *Analysis and Mathematical Physics*. 2022. Vol. 12, № 3. Article number 76.

96. Sevost'yanov E. Mappings with Direct and Inverse Poletsky Inequalities. *Developments in Mathematics* (DEVM, volume 78). Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023. 433 p.

97. Smolovaya E. S. Boundary behavior of ring Q-homeomorphisms in metric spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2010. Vol. 62, № 5. P. 785–793.

98. Stoilow S. *Principes Topologiques de la Théorie des Fonctions Analytiques*. Paris: Gauthier-Villars, 1956. 194 p.

99. Väisälä J. *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*. Berlin etc. Springer-Verlag.Lecture Notes in Math. 1971. Vol. 229. 144 p.

100. Vuorinen M. Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes*. 1976. Vol. 11. P. 1–44.

101. Vuorinen M. On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings. *Ark. Math.* 1980. Vol. 18. P. 157–180.

102. Vuorinen M. *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings*. Lecture Notes in Math. Berlin etc.: Springer–Verlag. 1988. Vol. 1319. 214 p.

103. Ziemer W. P. Extremal length and conformal capacity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 126. P. 460–473.

104. Ziemer W. P. Extremal length and p-capacity. *Michigan Mathematical Journal*. 1969. Vol. 16. P. 43–51.

ДОДАТКИ

Додаток А

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Sevost'yanov E., Skvortsov S., Dovhopiatyi O. On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 252, № 4. P. 541–557. (Приналежність до бази Scopus)

2. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On the compactness of classes of the solutions of the Dirichlet problem. *Journal of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 259, № 1. P. 23–36. (Приналежність до бази Scopus)

3. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On the Existence of Solutions of Quasilinear Beltrami Equations with Two Characteristics. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2022. Vol. 74, № 7. P. 1099–1112. (Приналежність до бази Scopus і Web of Science)

4. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in simply connected domains. *Matematychni Studii.* 2022. Vol. 58, № 2. P. 159–173. (Приналежність до бази Scopus)

5. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization. *Acta Mathematica Hungarica.* 2023. Vol. 170. P. 244–260. (Приналежність до бази Scopus)

6. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compact classes of Beltrami solutions and Dirichlet problem. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2023. Vol. 68, № 7. P. 1182–1203. (Приналежність до бази Scopus і Web of Science)

7. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On the inverse K_I-inequality for one class of mappings. *Filomat.* 2023. Vol. 37, № 24. P. 8145–8156. (Приналежність до бази Scopus і Web of Science)

8. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On mappings with an analog of the hydrodynamical normalization in the Euclidean space. *Journal of Mathematical Sciences.* 2023. Vol. 276, № 5. P. 638–651. (Приналежність до бази Scopus)

9. Dovhopiatyi O. On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and

Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2023. Vol. 37, № 1. P. 3–12.

10. Довгопятий О., Севостьянов Є. Про застосування одної модульної нерівності до теорії відображень. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2023. Т. 37, № 2. С. 104–117.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

11. Dovhopiatyi O. P., Sevost'yanov E. A. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in Jordan domains. *Abstracts of the International Conference Complex Analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A. A. Gol'dberg*, Lviv, June 28–July 1, 2021. Lviv, 2021. P. 15.

12. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compactness of classes of solution of the Dirichlet problem with restrictions of the theoretic-set type. Belgrade, *Mathematics and Applications : the book of Abstracts XI Symposium* December 3–4, 2021. Belgrade, 2021. P. 15–16.

13. Dovhopiatyi O. P. Sevost'yanov E. A. On compactness of solutions of Dirichlet problem. *Current trends in abstract and applied analysis* : the international online conference, Ivano-Frankivsk, May 12–15, 2022. Ivano-Frankivsk, 2022. P. 27.

14. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On compact classes of solutions of Dirichlet problem in simply connected domains. *Abstracts of the 14th International ISAAC Congress*, Sao Paulo, July, 17–July, 21. Sao Paulo, 2023. P. 50.

15. Dovhopiatyi O. On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths. *Algebraic and Geometric. Methods of Analysis : International scientific conference, devoted to 160 anniversary of D. Grave.* Odesa, May 29–June 1, 2023. Odesa, 2023. P. 34–35.

16. Dovhopiatyi O., Sevost'yanov E. On Beltrami equations with inverse conditions and hydrodynamic normalization. *Mathematics and its applications* : the book of Abstracts of XIII Symposium, Belgrade, December 1–2, 2023. Belgrade, 2023. P. 30.

17. Довгопятий О. Про рівняння Бельтрамі з оберненими умовами та гідродинамічне нормування. *Збірник тез доповідей наукової конференції ви-*

кладачів та молодих науковців Житомирського державного університету імені Івана Франка з нагоди Днів науки. Житомир, Житомир. держ. ун-т ім. Івана Франка, 2023. С. 306–310.

Апробація матеріалів дисертації

Основні положення дисертації оприлюднені на науково-практичних конференціях: *міжнародних*: «Complex Analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A. A. Gol'dberg» (Львів, 2021, дистанційна), «Mathematics and Applications» (Белград, 2021, заочна), «Current trends in abstract and applied analysis» (Івано-Франківськ, 2022, дистанційна), «14 ISAAC Congress 2023» (Сан-Паулу, 2023, дистанційна), «Mathematics and Applications» (Белград, 2023, заочна), «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» (Одеса, 2023, дистанційна); науковій конференції викладачів та молодих науковців Житомирського державного університету імені Івана Франка з нагоди Днів науки (Житомир, 2023, заочна); *наукових семінарах*: кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка «Теорія відображень і алгебр Лі» (Житомир, 2020, 2022, 2023, дистанційна), Інституту прикладної математики і механіки НАН України (Черкаси, 2024, дистанційна); відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (Київ, 2024, дистанційна); кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету ім. Івана Франка (Львів, 2024, дистанційна).