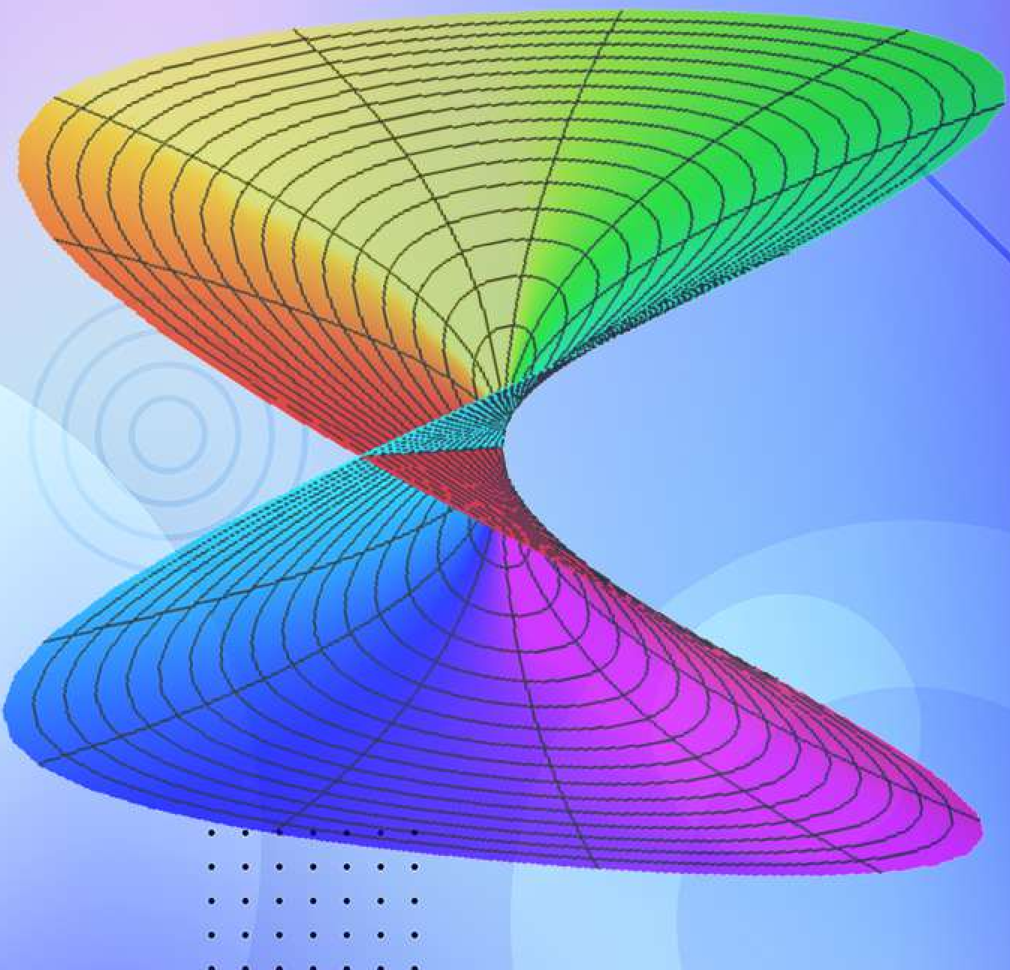
А. ФРАНОВСЬКИЙ, С. ПОСТОВА

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ТОПОЛОГІЇ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

А.Ц. ФРАНОВСЬКИЙ, С.А. ПОСТОВА

Розв’язування задач з топології та диференціальної геометрії

методичні рекомендації
для здобувачів закладів вищої освіти
спеціальності 014 «Середня освіта»

Житомир 2024

УДК 514.7:515.1
Р64

Затверджено вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка протокол № 5 від 29 березня 2024 р.

Рецензенти:

Журавльов В. П. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету.
Михайленко В. В. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка.
Сверчевська І. А. – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету «Житомирська політехніка».

Р54 **Врановський А.Ц., Постова С.А.**

Розв'язування задач з топології та диференціальної геометрії: методичні рекомендації для здобувачів закладів вищої освіти спеціальності 014 «Середня освіта» предметної спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» (ОК "Диференціальна геометрія і топологія"). – Житомир: Вид-во ЖДУ, 2024. – 38 с.

Методичні рекомендації призначені для використання здобувачами закладів вищої освіти під керівництвом викладача на лекціях та практичних заняттях. Видання містить вказівки до вивчення основних розділів, винесених навчальним планом на самостійну роботу, а також відомі та оригінальні задачі для самостійного розв'язування. Викладений матеріал відповідає діючій програмі Житомирського державного університету імені Івана Франка з ОК "Диференціальна геометрія і топологія" для спеціальності 014 «Середня освіта» предметної спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)».

УДК 514.7:515.1

Зміст

Вступ

Практична підготовка здобувачів освіти до розв'язування задач передбачена стандартами та освітньо-професійними програмами підготовки фахівців різних освітніх рівнів кожної галузі. Практична підготовка майбутніх вчителів математики передбачає формування та розвиток у них аналітичного мислення, уміння застосовувати різноманітний математичний апарат.

Метою методичних рекомендацій є набуття та закріплення здобувачами теоретичних знань, отриманих на лекційних заняттях, формування у них практичних навичок розв'язування задач з подальшим їх застосування на практичних заняттях.

Методичні рекомендації містять як короткі теоретичні відомості з тем, так приклади розв'язування практичних завдань та задачі для самостійного розв'язання з метою вироблення у них стійких практичних навичок.

Матеріал методичних рекомендацій структурований, його зручно використовувати як під час виконання домашніх завдань, так і для самостійного опрацювання навчального матеріалу.

У результаті успішного опанування навчального матеріалу здобувач буде знати: основні поняття диференціальної геометрії, зокрема: крива, поверхня, топологічний простір, гомеоморфізм, тригранник Френе, кривина, скрут, перша і друга квадратичні форми поверхні, повна та середня кривини, геодезичні лінії, тензорне поле; вміти: задавати криву та поверхню різними способами, застосовувати першу та другу квадратичні форми поверхні при розв'язуванні задач, обчислювати кривину, скрут кривої, повну та середню кривини поверхні, знаходити елементи тригранника Френе, використовувати топологічні поняття та методи, обчислювати коваріантну похідну.

Тема 1. Лінійна алгебра і геометрія

Теоретичні відомості

Евклідовий *n*—вимірний простір позначатимемо R^n і вважатимемо, що стандартною базою в ньому є система векторів

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n, \text{ де } \bar{e}_i=(0, \ldots, 1, \ldots 0)=(x^1, \ldots, x^n),$$

$$x^j = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Евклідовий складовий добуток двох векторів $\bar{x}=(x^1, \ldots, x^n)$.
$\bar{y}=(y^1, \ldots, y^n)$ *визначається формулою:* $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$

а довжина вектора (норма) $\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Якщо визначено скалярний добуток, то кут між векторами $\bar{x}$ і $\bar{y}$ визначається з точністю до π: $cos(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|x\| \|y\|}$.

Векторним добутком двох векторів $\bar{a}, \bar{b} \in R^3$ називається вектор (позначається $[\bar{a}, \bar{b}]$), який визначається такими умовами:

а) він перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}, \bar{b}$;

б) його модуль дорівнює $\|a\| \|b\| \, sin(a,^{\wedge} b)$;

в) напрям векторного добутку визначається за правилом лівої руки. Це означає, що коли великий палець лівої руки спрямувати по вектору $\bar{a}$, середній по вектору $\bar{b}$, то вказівний палець покаже напрям векторного добутку.

Якщо $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\bar{y} = (y^1, y^2, y^3)$-координати векторів $\bar{x}, \bar{y}$ в базі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, то в символічному записі $[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \\ x^1 x^2 x^3 \\ y^1 y^2 y^3 \end{vmatrix}$

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^3$ (позначається $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$) є скаляр: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \langle [\bar{a}, \bar{b}], \bar{c} \rangle$.

Геометрично мішаний добуток трьох векторів - це орієнтовний об'єм паралелепіпеда ,побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^{3.}$. У базі e_1, e_2, e_3

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x^1 x^2 x^3 \\ y^1 y^2 y^3 \\ z^1 z^2 z^3 \end{vmatrix}, \quad \text{де } \boldsymbol{\bar{c}=(z^1, z^2, z^3)}$$

Розглядаються також подвійний векторний добуток $\left[[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}\right]$ та скалярний добуток двох векторних добутків $\left([\bar{a}, \bar{b}], [\bar{c}, \bar{d}]\right)$.

Умова а) ортогональності векторів в R^n: $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 0$

б) колінеарності векторів в R^3: $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$

в) компланарності векторів в R^3: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$

г)лінійної незалежності векторів $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ в R^n:

$$det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \neq 0, \text{ де } \bar{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^n).$$

За допомогою умов а), б), в), г) легко записуються рівняння прямих, площин і гіперплощин у просторі R^n.

Матрицею переходу від "старої" бази $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ до "нової" бази $(\bar{e}_1{}', \dots, \bar{e}_n{}')$ називається матриця $T=(t_{ij})$, стовпчиками якої є координати нових базових векторів у "старій" базі, тобто

$$(\bar{e}_1{}', \dots, \bar{e}_n{}') = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)T,$$

а координати вектора $\bar{x}$ у старій і новій базі пов'язані співвідношенням:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x^{1\prime} \\ \vdots \\ x^{n\prime} \end{pmatrix}$$

Якщо в лінійному просторі L зафіксовано деяку базу $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, то будь-якому лінійному відображенню (оператору) f: $L \to L$ однозначно відповідає матриця $e_i A_f$, стовпчиками якої є координати образів векторів бази $\bar{e}_i$ при відображенні f. Ця матриця називається матрицею лінійного оператора f у базі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$. При переході до нової бази $\bar{e}_1{}', \dots, \bar{e}_n{}'$ матриця оператора f змінюється за формулою $e'_i A'_f = T_{e_i} A_f T^{-1}$, де T - матриця переходу від бази $\bar{e}_i$ до $\bar{e}_i{}'$.

Якщо f: $(a, b) \to R^n$ відображення з інтервалу (a, b) в евклідовий простір R^n, то кажуть, що визначено вектор функцію f скалярного аргумента. Якщо в просторі R^n вибрано базу, то вектор-функція f повністю визначається координатними функціями $x^i(t)$:

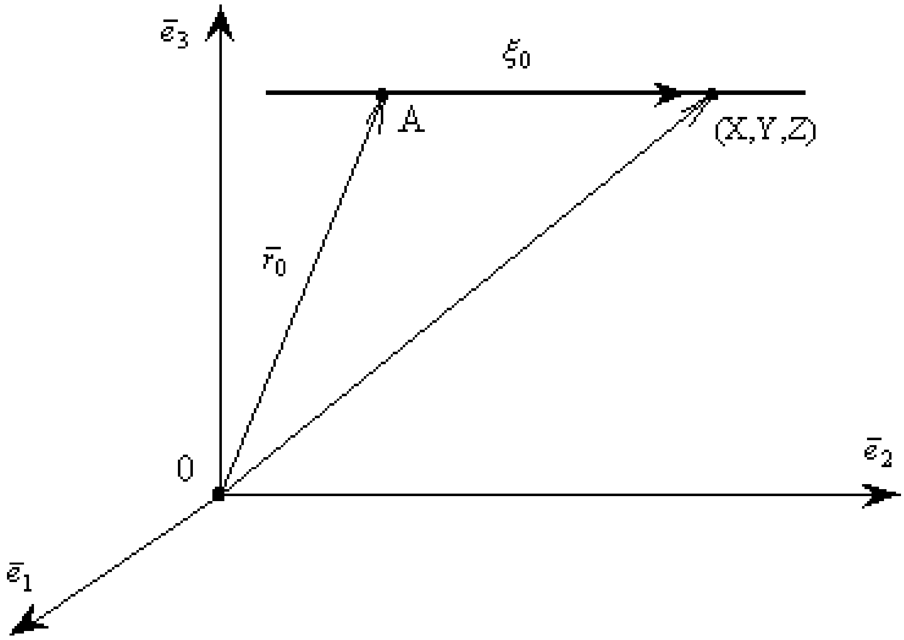
$$f: t \to (x^1(t), \dots, x^n(t)), t \in (a, b).$$

За допомогою цього зображення, очевидно, можна ввести поняття неперервності, гладкості, ортогональності і ін. вектор-функцій Достатньо вимагати виконання цих умов для координатних функцій.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Записати векторне рівняння прямої, що має напрямний вектор $\bar{\xi}_0=(1,2,-1)$ і проходить через точку $A(-1,1,0)$

Розв'язок. Нехай $\bar{R}(X, Y, Z) -$ вектор, проведений з початку координат у біжучу точку (X, Y, Z) на прямій. З умови колінеарності (б) векторів $(\bar{R} - \bar{r}_0)$ і $\bar{\xi}_0$ маємо: $[(\bar{R} - \bar{r}_0), \bar{\xi}_0] = 0$ або $[(X+1, Y-1, Z), (1,2,-1)]=0$.



Задача 2. Записати рівняння площини, що проходить через точку x_0, y_0, z_0 з нормальним вектором $\bar{n} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Розв'язок: Аналогічно попередній задачі розглянемо вектори $(\bar{R} - \bar{r}_0)$ і $\bar{n}$. З умови а) ортогональності отримуємо: $((\bar{R} - \bar{r}_0), \bar{n}) = 0$.

Розв'язок: Аналогічно попередній задачі розглянемо вектори $(\bar{R} - \bar{r}_0)$ і $\bar{n}$. З умови а) ортогональності отримуємо:$((\bar{R} - \bar{r}_0), \bar{n}) = 0$або $(X - x_0)\xi_1 + (Y - y_0)\xi_2 + (Z - z_0)\xi_3 = 0$

Нехай лінійний оператор f у просторі R^n має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 5\,4\,0 - 1 \\ 3\,2\,0\,3 \\ 6\,1 - 1\,7 \end{pmatrix} \text{ в базі } \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4.$$

Задача 3. Знайти матрицю цього оператора в базі *($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$)*.

Розв'язок. За означенням матриці переходу маємо:

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4) \begin{pmatrix} 0100 \\ 1000 \\ 0010 \\ 0001 \end{pmatrix}$$

Матрицю оператора в базі *($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$)* тоді визначають так:

$$(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4)A=\begin{pmatrix}0100\\1000\\0010\\0001\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\ 1\ 2\ 3\\5\ 4\ 0-1\\3\ 2\ 0\ 3\\6\ 1-1\ 7\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0100\\1000\\0010\\0001\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4\ 5\ 0\ 0\\1\ 0\ 2\ 3\\2\ 3\ 0\ 3\\-1\ 6-1\ 7\end{pmatrix}$$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Довести тотожності:

а)$[[\bar{a},\bar{b}],\bar{c}] = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle\bar{b} - \langle\bar{b},\bar{c}\rangle\bar{a}$

б)$\langle[\bar{a},\bar{b}],[\bar{c},\bar{d}]\rangle = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle\langle\bar{b},\bar{d}\rangle - \langle\bar{a},\bar{d}\rangle\langle\bar{b},\bar{c}\rangle$

Нехай *r*=*r(t)*- вектор функція

2. Знайти похідні таких вектор-функцій:

а) $\overline{r'}$

б) $\overline{r''}$

в) $\overline{r'''}$

г) $(\overline{r'})^2$

д) $[\overline{r'},\overline{r''}\ ]$

е) $(\overline{r'},\overline{r''},\overline{r'''})$

є) $[[\bar{r}',\bar{r}''],\bar{r}''']$

ж) $([\bar{r}',\bar{r}''],[\bar{r}'',\bar{r}'''])$

3.Чи випливає з гладкості вектор-функції $\bar{r}=\bar{r}(t)$ гладкість функції $\|\bar{r}\|=\|\bar{r}(t)\|$?

4. Чи справедливі формули:$\|r'\|=\|r\|'$і $\langle\bar{r},\bar{r}'\rangle=\|\bar{r}\|\cdot\|\bar{r}'\|$?

5. Нехай *r* =*r(t)* − гладка вектор-функція, $\bar{r}(t)\neq 0$. Для того, щоб вектор $\bar{r}(t)$ мав постійний напрямок, необхідно і досить, щоб вектори $\overline{r}(t)$ і $\overline{r'}(t)$ були колінеарні. Довести.

6. Вектор-функція $\overline{r}=\bar{r}(t)$ визначена на інтервалі (a,b) і має на цьому інтервалі похідні до третього порядку включно. Нехай *s*=*s(t)* − монотонна на цьому інтервалі гладка функція, а *t=t(s)* − обернена до неї. Провести заміну аргумента у виразах:

а) $(\bar{r})^2$

б) $[\bar{r}', \bar{r}'']$

в) $\left[[\bar{r}', \bar{r}''], \bar{r}'''\right]$

г) $(\overline{r'})^2$

д) $(\overline{r'}, \overline{r''}, \overline{r'''})$

е) $\left[[\bar{r}', \bar{r}''], \bar{r}'''\right]$

з) $\sqrt{\bar{r}^2}$

ж) $\sqrt{\bar{r}'^3}$

7. Знайти вектор-функцію r=$r(t)$, яка задовольняє рівняння: $r'(t) = [\bar{a}, \bar{r}(t)]$, де $\overline{a} \neq 0$– постійний вектор.

8. Дано два вектори $\overline{a}(1, -1, 1)$ і $\overline{b}(5, 1, 1)$. Обчислити координати вектора $\overline{c}$, який має довжину 1 і ортогональний до векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Скільки розв'язків має задача?

9. Знайти кут між площинами $\bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \bar{a}_2 \tau$ і $\bar{b}_0 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 \tau$, де $\bar{a}_0 = (3,1,0,1)$, $\bar{b}_0 = (2,1,1,3)$, $\bar{a}_1 = (1,0,0,0)$,$\bar{b}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{a}_2 = (0,1,0,0)$, $\bar{b}_2 = (1, -1, 1, -1)$.

10. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 00\ldots1 \\ 00\ldots10 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10\ldots00 \end{pmatrix}$ порядку n, знайти невироджену матрицю T, для якої B=$T^{-1}AT$–діагональна.

11. Оператор φ в базі $\bar{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\bar{a}_2 = (-16, 7, 13)$, $\bar{a}_3 = (9, -3, 7)$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$ Знайти його матрицю в базі $\bar{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\bar{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\bar{b}_3 = (2, 1, 2)$.

12. Оператор φ в базі $\bar{a}_1 = (-3, 7)$, $\bar{a}_2 = (1, -2)$ має матрицю $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, а оператор ψ в базі $\bar{b}_1 = (6, -7)$, $\bar{b}_2 = (-5, 6)$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.Знайти матрицю оператора $\phi_0\psi$ в базі, в якій задано координатами всіх векторів.

13. Відомо, що $\bar{a} = [\bar{b}, \bar{c}], \bar{b} = [\bar{c}, \bar{a}], \bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$. Знайти, довжини векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, і кути між ними.

14. Довести тотожність $([\bar{a}, \bar{b}], [\bar{c}, \bar{d}]) = \begin{vmatrix} \langle a, c\rangle \langle a, d\rangle \\ \langle b, c\rangle \langle b, d\rangle \end{vmatrix}$.

15.Довести тотожність $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} \langle a, x\rangle & \langle b, x\rangle & \langle c, x\rangle \\ \langle a, y\rangle & \langle b, y\rangle & \langle c, y\rangle \\ \langle a, z\rangle & \langle b, z\rangle & \langle c, z\rangle \end{vmatrix}$.

16.Довести, що всі чотири грані довільного тетраедра рівновеликі тоді і тільки тоді, коли вони конгруентні.

17. При яких a площини $x+ay+z=0$ і $ax+9y+\frac{a^3}{9z}+3=0$ *1)*перетинаються, *2)*паралельні, *3)*збігаються?

18. Знайти кут між прямими

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + 3y - z + 2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

19. У просторі дано чотири точки $A(1,2,1)$, $B(-1,3,0)$, $C(2,5,3)$, $D(-2,3,4)$ і площина. $2x+y-3z+2=0$ Скласти рівняння цієї площини в новій системі координат: $(A, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$.

20. Визначити тип кривої, заданої рівнянням:

а) $17x^2 - 2xy + y^2 - 3x - y = 0$

б) $4x^2 + 28xy + 49y^2 - 3x - 15y + 2 = 0$

в) $2x^2 + 2xy + 49y^2 - 2y + 4 = 0$

г) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x + y + 4 = 0$

д) $x^2 + 10x + 25y^2 + 2x + 10y - 3 = 0$

е) $5x^2 - 16x + 13y^2 + 6x - 10y + 2 = 0$

є) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$

ж) $x^2 - 8xy + 16y^2 + 6x - 24y + 9 = 0$

з) $\rho = 1$

и) $\rho = \frac{1}{1-2\cos\phi}$

і) $\rho = 3(2 - \cos\phi)^{-1}$

ї) $\rho = (sin^2 \frac{\phi}{2})^{-1}$

21. Визначити тип поверхні:

а) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0$

б) $4x^2 + 4y^2 + 4xy - 12x - 12y - 5z + 1 = 0$

в) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x + 10y + 1 = 0$

г) $4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 10y + 1 = 0$

д) $6xy - 8y^2 - z^2 + 60y + 2z + 89 = 0$

е) $5x^2 + 8y^2 + 4xy + 2xy + 44y - 36z + 65 = 0$

є) $16x^2 + 9y^2 - z^2 - 24xy - 9x - 12y + 4z + 71 = 0$

ж) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 10xy + 20x - 4y + z - 1 = 0$

з) $-x^2 + 7y^2 - 24yz + 2x + 120y = 0$

и) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz + 2x + 120y = 0$

і) $3x^2 + 4xy + 8x + 8y - 4z = 0$

ї) $-x^2 - 9y^2 + 6xy + 50x - 50y - 15z - 100 = 0$

й) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 18x - 6y = 0$

к) $3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz - 4x = 0$

л) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xy + 8xz - 8x - 4y - 4 = 0$

м) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 6x - 2y + 11 = 0$

н) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 10xy + 4xz - 4yz + 24x - 12z - 12 = 0$

22. Позначимо через $x^1, \dots, x^n$ і $y^1, \dots, y^n$– координати векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$ в деякій базі *n*-вимірного простору, Визначити, чи може задана функція *F(x,y)* задавати скалярний добуток.

а) $F(\bar{x}, \bar{y}) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 10x^2y^2, \qquad n = 2.$

б) $F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 - x^iy^i.$

Тема 2. Криві на площині та в просторі

Теоретичні відомості

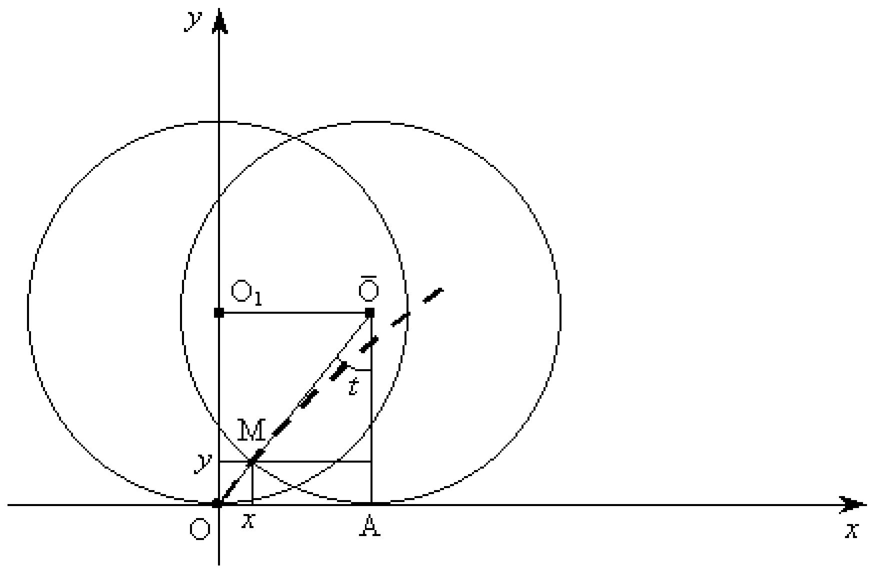
Гладкою параметризованою кривою в області $U=R^n$ називається гладке відображення $\gamma:[a, b]\to U$ числового проміжку $[a, b]$ в U. Якщо $(x^1 \ldots x^n)-$ координати в області U, то гладкість відображення γ: $t\to(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ означає, що координатні функції $x^i=x^i(t)$, $i=1, \ldots,n$ гладкі в деякому інтервалі $(\alpha, \beta)\supset[a, b]$.Ми також вимагатимемо, щоб в кожній точці $t_0\in(a, b)$ модуль $\|v(t)\|=\left(\sum_i\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ вектора швидкості $\bar{v}(t)=\left(\frac{dx^1}{dt},\ldots,\frac{dx^n}{dt}\right)$ був відмінний від нуля. Відомо, що криву можна задати таким чином:

а) параметрично:

на площині - $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

в просторі - $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

б) явно – $x=f(y)$



в) неявно - $F(x)=0$, або $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Коло радіуса *a* котиться по прямій без ковзання. Скласти рівняння траєкторії точки *M*, яка жорстко зв'язана з колом і знаходиться на відстані *d* від його центра.

Розв'язок. Розглянемо випадок $d=a$. Виберемо декартову систему координат *xOy* і припустимо, що в початковий момент часу центр O_1 кола знаходився на ординаті *Oy*. За параметр *t* виберемо кут повороту кола, при його русі по прямій *Ox*.

Тоді координати X і Y точки M знаходяться з трикутника MOK і умови кочення без ковзання $|MA| = |OA|,\ |MA| = at\ x = at - a\sin t$, $y = a - a\cos t$

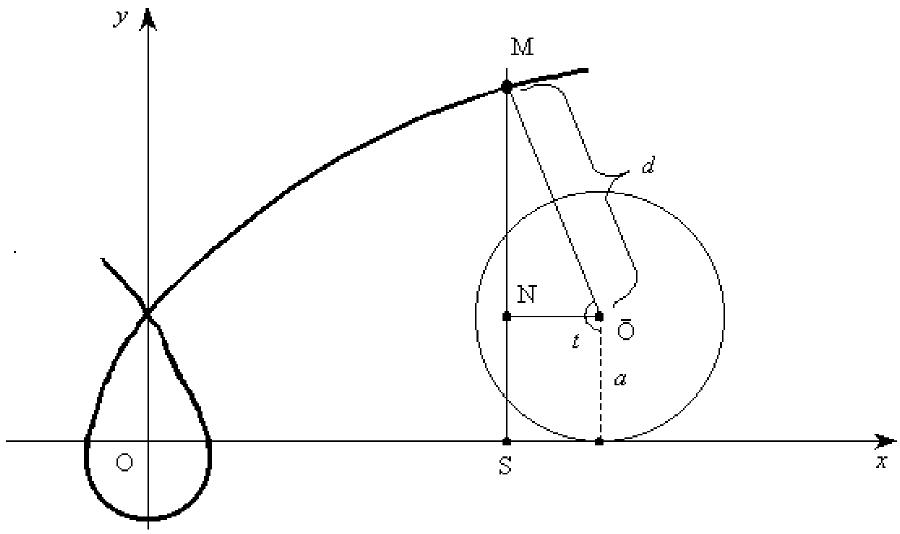
Крива, що утворюється таким чином називається *циклоїдою*, а її рівняння знайдені: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

Аналогічно у випадках $d<a$ і $d>a$: $|OA| = |LA| = at$

$$x = -d\sin t + at = at - d\sin t$$

$$y = a - d\cos t$$

$$\begin{cases} x = at - d\sin t \\ y = a - d\cos t \end{cases}$$



Ця крива має назву *вкороченої циклоїди.* При умові $d>a$, отримуємо також: $\begin{cases} x = at - d\sin t \\ y = a - d\cos t \end{cases}$. І ця крива називається *подовженою циклоїдою.*

Задачі для самостійного опрацювання

1. Коло радіуса r котиться без ковзання по колу радіуса, R залишаючись всередині нього. Напишіть рівняння траєкторії точки M , що лежить на рухомому колі. Розглянути окремо випадки $R=4r$, $R=2r$. (Гіпоциклоїда).
2. Відрізок AB довжини a ковзає своїми кінцями по осях прямокутної системи координат. Прямі AC і BC, що паралельні координатним осям, перетинаються в точці C, з якої проведено перпендикуляр CM до прямої AB. Запишіть рівняння фігури, що складається з точок M.
3. Довільний промінь OE перетинає в точках D і E коло $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ і дотичну до нього, що проходить через точку C, діаметрально ,протилежну до точки E. Через точки D і E проведені прямі , паралельні відповідно до осей O_x і O_y, до перетину в точці M. Складіть рівняння фігури, утвореної точками M.
4. Точка M рівномірно рухається по прямій ON, що рівномірно обертається навколо точки O. Скласти рівняння траєкторії точки M.
5. Записати рівняння траєкторії руху мурашки по столі, якщо настільна лампа стоїть на столі, а мурашка повзає так, що кут її зору на джерело світла постійний.
6. Записати рівняння траєкторії руху по поверхні земної кулі в постійному напрямку на північний схід.
7. Нічний метелик, помітивши джерело світла, летить так, щоб кут його зору на джерело був постійним. Записати рівняння траєкторії руху.

8. Кішка біжить по драбині довжиною ℓ, яка починає, ковзаючи по підлозі, падати вздовж стіни. Записати рівняння траєкторії руху кішки в системі координат “стіна”-“підлога”.

9. Жорстка нитка розмотується зі шпульки, яка має в перерізі, ортогональну до осі форму:

1) кола;
2) еліпса;
3) квадрата;
4) шестикутника.

Записати рівняння траєкторії кінця нитки.

10. Навколо деякої точки O кола радіуса a обертається промінь. На цьому промені по обидві сторони від точки A, яка є перетином його з колом, відкладаються відрізки AM_1 і AM_2 довжини $2b$. Складіть рівняння фігури, яка описується точками M_1 і M_2.

11. Сфера радіуса $2R$ перетинає поверхню круглого циліндра, діаметр якого дорівнює радіусу сфери, а одна з твірних проходить через центр сфери. Скласти рівняння отриманої в перерізі фігури.

12. Записати рівняння фігури, яка описується точкою M так, що добуток відстаней MF_1 і MF_2 залишається постійним числом, де F_1 і F_2 − дві фіксовані точки площини.

13. Записати рівняння фігури, у якої відрізок дотичної між точкою дотику і деякою прямою має постійну величину a.

Тема 3. Дотична до кривої. Довжина дуги кривої. Елементи тригранника Френе

Теоретичні відомості

Дотичний вектор $\bar{v}$ до гладкої параметризованої кривої $x^i=x^i(t)$ в точці $t=t_0$, або вектор швидкості − це $\bar{v}(t)|_{t=t_0} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}\right)_{t=t_0}$. Будь-яка пряма, що проходить через вектор $\bar{v}$, називається дотичною, а тому її рівняння:$\bar{R} = \bar{r} + \lambda\bar{v}$. Рівняння нормальної площини $(R - r, r') = 0$ і містить вектор головної нормалі в просторі R^3: $\bar{n} = \frac{[[r', r''], r']}{|[r', r'']|\cdot|r'|}$. Параметр S на кривій називається натуральним, якщо з точністю до постійного множника він дорівнює довжині дуги цієї кривої, тобто $S = \int_{t_0}^{S} |\bar{r}'(t)| dt$, де $r = \bar{r}(t)$ − довільна параметризація кривої.

Довжина кривої в довільній криволінійній системі координат $z^1, z^2, \dots, z^n$ обчислюється за формулою $\ell(\bar{r}(t))_\beta^\alpha = \int_\alpha^\beta \sqrt{g_{ij}\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}}\,dt$, де $g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}$ — коефіцієнти рімановой метрики криволінійної системи координат $z^1, z^2, \dots, z^n$. У випадку декартової системи $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ координат матимемо:

$$\ell(r(t))_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\, dt$$

Елементами тригранника Френе називають три взаємно перпендикулярні вектори $\bar{v}, \bar{n}, \bar{b}$ і площини $\alpha_1, \alpha_2, \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows$ α_3, що містять :

$$\bar{v} = \frac{dr}{ds}; \bar{n} = \frac{d^2r}{ds^2}\Big/\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|; \bar{b} = [\bar{v}, \bar{n}]$$

α_1: $\lambda_1\bar{v} + \lambda_2\bar{n}$ – стична площина;

α_2: $\lambda_1\bar{v} + \lambda_2\bar{b}$ – спрямляюча площина;

α_3: $\lambda_1\bar{n} + \lambda_2\bar{b}$ – нормальна площина;

Кут між кривими визначають як кут , що не перевищує розгорнутого між дотичними векторами до кривих у точці перетину.

Кривину k' і скрут χ кривої обчислюють за формулами:

$$\kappa = \frac{|[r', r'']|}{|r'|^3}, \quad \chi = \frac{(r', r'', r''')}{[\bar{r}', \bar{r}'']^2}$$

У випадку плоскої кривої: $\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$, в полярній системі координат: $\kappa = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - r'r''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$, де крива задана рівнянням $r = r(\phi)$.

Приклади розв’язування практичних задач

Задача 1. Довести , що формули Френе $\dot{\bar{v}} = k\bar{n}$, $\dot{\bar{n}} = -k\bar{v} + \chi\bar{b}$, $\dot{\bar{b}} = -\chi\bar{n}$ можна записати у вигляді:

$$\dot{\bar{v}} = [\bar{\omega}, \bar{v}]$$

$$\dot{\bar{n}} = [\bar{\omega}, \bar{n}]$$

$$\dot{\bar{b}} = \left[\bar{\omega}, \bar{b}\right]$$

де $\bar{\omega}$ – вектор, що називається вектором Дарбу. Знайдіть вектор $\bar{\omega}$.

Розв’язок. Оскільки $\left(\bar{v}, \bar{n}, \bar{b}\right)$ – репер, то існують скаляри α, β, γ такі, що $\bar{\omega} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{n} + \gamma\bar{b}$

Обчислимо векторні добутки:

$$[\bar{\omega}, \bar{v}] = [\alpha\bar{v} + \beta\bar{n} + \gamma\bar{b}, v] = -\beta\bar{b} + \gamma\bar{n}$$

$$[\bar{\omega}, \bar{n}] = [\alpha\bar{v} + \beta\bar{n} + \gamma\bar{b}, \bar{n}] = \alpha\bar{b} - \lambda\bar{v}$$

$$[\bar{\omega}, \bar{b}] = [\alpha\bar{v} + \beta\bar{n} + \gamma\bar{b}, \bar{b}] = -\alpha n + \beta n$$

Підставивши в тотожності $\gamma = \kappa, \beta = 0, \alpha = \chi$ отримуємо

$$\dot{v} = k\bar{n} = [\bar{\omega}, \bar{n}]$$

$$\dot{n} = -k\bar{v} + \chi\bar{b} = [\bar{\omega}, \bar{n}]$$

$$\dot{b} = -\chi\bar{n} = \left[\bar{\omega}, \bar{b}\right]$$

і вектор $\bar{\omega} = \chi\bar{v} + \kappa\bar{b}$.

Виведені формули дають змогу надати вектору Дарбу $\bar{\omega}$ кінематичний зміст. Це вектор миттєвої кутової швидкості повороту репера Френе при русі точки по кривій з одиничною швидкістю.

Задача 2. Знайти кривину кривої $r = a\phi$

Розв'язок. $r' = a,\ r'' = 0$

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - r'r''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{|a^2\phi^2 + 2a^2|}{(a^2\phi^2 + a^2)^{3/2}} =$$

$= \frac{a^2(\phi^2+2)}{a^3(\phi^2+1)^{3/2}} = \frac{\phi^2+2}{a(\phi^2+1)^{3/2}}.$

Задача 3. Нехай $r = r(s)$ крива, для якої $\kappa(s) > 0$. Довести, що ця крива плоска тоді і тільки тоді, коли $\chi \equiv 0$.

Розв'язок. Якщо крива $r = r(s)$ – плоска, то існує ненульовий вектор $\bar{p} = const$ такий, що $(\bar{r}(s), \bar{p}) = 0$. Звідси

$\frac{d}{ds}(\bar{r}(s), \bar{p}) = (\bar{v}, \bar{p}) = 0; \frac{d^2}{ds^2}(\bar{r}(s), \bar{p}) = \left(\frac{d\bar{v}}{ds}, \bar{p}\right) = \kappa(\bar{n}, \bar{p}) = 0,$

а тому з умови $\kappa(s) > 0$ отримуємо $\bar{n} \perp \bar{p},\ \bar{v} \perp \bar{p}$ і $\bar{r}(s)$ Отже, $\bar{b} = \lambda(s)\bar{r}(s)$ і з формул Френе $-\chi\bar{n} = \dot{b} = \dot{\lambda}(s)\bar{r}(s) + \lambda(s)\bar{v}(s)$. Домножуючи на $\bar{n}$ (скалярно), отримуємо $-\chi(\bar{n}, \bar{n}) = \dot{\lambda}(s)(r(s), n) = 0$ або $\chi \equiv 0$.

Навпаки, з формул Френе, при умові, що $\chi = 0$, отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{v} = \kappa\bar{n} \\ \dot{n} = -\kappa\bar{v} \\ \dot{b} = 0 \end{cases} \qquad \frac{d}{ds}(\bar{r}(s), \bar{b}) = (\bar{v}, \bar{b}) = 0.$$

Отже, $(\bar{r}(s), \bar{b}) = const$, причому $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) = const$, бо $\bar{n}$ і $\bar{v}$ непаралельні. Маємо $x(s)b_1 + y(s)b_2 + z(s)b_3 = 0$ –рівняння плоскої кривої.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Знайти довжину відрізка $-a \le x \le a$ параболи$y = bx^2$.

2. Знайти довжину відрізка $0 \le t \le 2\pi$ циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

3. Знайти кривину і скрут таких кривих:

3.1. $\bar{r} = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2})$

3.2. $\bar{r}$=(Њ$^{t}, e^{-t}, t\sqrt{2})$

3.3. $\bar{r}$=$(e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$

3.4. $\bar{r}$=$(2t, \ln t, t^2)$

3.5. $\bar{r}$=$(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$

3.6. $\bar{r}$=$(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

3.7. $\bar{r}$=$(acht \cos t, acht, at)$

3.8. $\bar{r}$=$(e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t})$

3.9. $\bar{r}$=(cht, sht, t)

3.10. $\bar{r}$=$(t^2, 1 - t, t^3)$

3.11. $\bar{r}$=$(3a \cos t, 3a \sin t, 4at)$

3.12. $\bar{r}$=$(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

3.13. $\bar{r}$=$(2t^3, \ln t, t^2)$

3.14. $\bar{r}$=$(3t - t^3, 3t^2, 3t - t^3)$

3.15. $\bar{r}$=$(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t})$

3.16. $\bar{r}$=$(a \cos t, b \sin t, f(t))$

3.17. $\bar{r}$=$(tgt, tg^2 t, ctgt)$

3.18. $\bar{r}$=$(1 - t^3, 1 - t^2, t^3)$

3.19. $\bar{r}$=$(asht, bcht, ct)$

3.20. $\bar{r}$=$(t^3 - t^2 - 5{,}3n^2 + 1{,}2n^3 - 16)$

4. Обчислити кривину кривих:

4.1. $y = \sin x$

4.2. $y = \cos t$

4.3. $y = tgx$

4.4. $y = arctgx$

4.5. $\begin{cases} x = a(1+m)\cos mt - am\cos(1+m)t \\ y = a(1+m)\sin mt - am\sin(1+m)t \end{cases}$

4.6. $y = ach\left(\frac{x}{a}\right)$

4.7. $x^2y^2 = (a^2 - y^2)(b + y)^2$

4.8. $r^2 = a^2 \cos 2\phi$

4.9. $r = a(1 + \cos \phi)$

4.10. $r = e^{a\phi}$

4.11. $r = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$

4.12. $y = -\ln\cos x$

4.13. $r = (3t^2, 3t - t^3)$

4.14. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - \cos t) \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$

4.16. $r = a\phi^k$

4.17. $r = a^\phi$

4.18. $r = a(1 - \cos \phi)$

4.19. $r = (a \sin^3 t, a \cos^3 t)$

4.20. $y^2 = 2px$

5. Знайдіть криві, у яких кривина рівна скруту.

6. Скласти натуральні рівняння кривої:

6.1. $x = a \cos^3 t,\ \ y = a \sin^3 t$

6.2. $y = x^{\frac{3}{2}}$

6.3. $y = x^2$

6.4. $y = \ln x$

6.5. $y = a ch(x/a)$

6.6. $y = e^x$

6.7. $x = a\left(\ln tg \frac{t}{2} + \cos t\right), y = a \sin t$

6.8. $r = a(1 + \cos \phi)$

6.9. $x = a(\cos t + t \sin t),\quad y = a(\sin t - t \cos t)$

6.10. $x = t,\quad y = t^2 - t$

7. Якщо задано натуральне рівняння $k = k(s)$ плоскої кривої, то параметризація кривої може бути задана у вигляді: $x = \int \cos\alpha\,(s)ds,\quad y = \int \sin\alpha\,(s)ds,$ де $\alpha(s) = \int \kappa(s)ds$. Знайти параметричні рівняння кривих, якщо їх натуральні рівняння $\left(R = {}^{1}/_{\kappa}\right)$:

7.1. $R = as$

7.2. $\frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1$

7.3. $Rs = a^2$

7.4. $R = \frac{s^2}{a}$

7.5. $s^2 + 9R^2 = 16a^2$

7.6. $s^2 + R^2 = 16a^2$

7.7. $R^2 = 2as$

7.8. $R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s-a}$

7.9. $R\,sin^3\,\alpha = a$

7.10. $R = a\alpha + \alpha$

7.11. $R = ae^s$

7.12. $s = atgR$

7.13. $x = cht,\quad y = asht,\quad z = at$

8. Знайти рівняння елементів тригранника Френе:

8.1. $x = cos^3\,t\,,\quad y = sin^3\,t\,,\quad z = cos\,2\,t$

8.2. $x = (t - sin\,t),\quad y = a(1 - cos\,t),\quad z = 4a\,cos\,\frac{t}{2}$

8.3. $x = e^t,\quad y = e^{-t},\quad z = t\sqrt{2}$

8.4. $x = e^t\,sin\,t\,,\quad y = e^t\,cos\,t\,,\quad z = e^t$

8.5. $x = 2t,\quad y = ln\,t\,,\quad z = t^2$

8.6. $x = 3t - t^3,\quad y = 3t^2,\quad z = 3t + t^3$

8.7. $x = ach\,cos\,t\,,\quad y = acht\,sin\,t\,,\quad z = at$

8.8. $x = cht,\quad y = sht,\quad z = t$

8.9. $x = t^2,\quad y = 1 - t,\quad z = t^3$

8.10. $x = 1 - t^3, \quad y = 1 - t^2, \quad z = t^3$

8.11. $x = asht, \quad y = bcht \quad z = ct$

9. Обчислити довжину дуги кривої між вказаними точками:

9.1. $y = ln\ cos\, x$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$;

9.2. $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, точки перетину з віссю O_x;

9.3. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}ln\, x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$;

9.4. $y = ln\, sec\, x$, $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$;

9.5. $x = t - \frac{1}{2}sh2t$, $y = 2cht$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$;

9.6. Крива на сфері радіуса одиниця, $\varphi = \theta$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, де φ - широта, θ - довгота.

9.7. Крива на циліндрі, діаметр якого дорівнює 2 $\varphi = \theta$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 2$, де φ - широта, θ - довгота.

9.8. Вивести формулу для обчислення кривини кривої, заданої у вигляді: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

Тема 4. Теорія поверхонь

Теоретичні відомості

Нехай $F(x,y,z)=0$ – гладка дійсна функція трьох змінних, визначена в області R^3 з координатами (x,y,z). Поверхнею називають множину точок $M(x,y,z)\in R^3$, що задовольняє рівняння: $F(x,y,z)=0$, причому

$$grad\ F\Big|M=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}, \qquad |M\neq 0$$

З умови $grad\ F|M\neq 0$ випливає, що в деякому околі точки M рівняння $F(x,y,z)=0$ можна розв'язати відносно однієї координати. Наприклад, якщо $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$, то рівняння $F(x,y,z)=0$ локально описується $z=f(x,y)$.

Під гладкою параметризованою поверхнею розумітимемо гладке відображення $\bar{r}: U\to R^3$ де U -відкрита множина в R^2 з координатами (u,v), причому $\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u},\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]\neq 0$ в U.

Іншими словами, параметризовану поверхню визначають трьома скалярними рівняннями:

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v)\end{cases} \text{ причому } rang\begin{pmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{pmatrix}=2.$$

Дотичну площину на поверхні визначають рівняннями

1)$z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$

2)$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(z-z_0)=0$

3)$\begin{vmatrix}X-x_0, & Y-y_0, & Z-z_0\\ x_u\ , & y_u\ , & z_u\\ x_v\ , & y_v\ , & z_v\end{vmatrix}=0$ або $(R-r,r_u,r_v)=0$, де $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0,\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0,\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0$– значення часткових похідних в точці $x_0,y_0,z_0,R(X,Y,Z)$ - радіус-вектор біжучих координат. Вектор $\bar{m}=$

$\frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$ називають одиничним вектором нормалі до поверхні. Рівняння нормалі:

1) $\frac{X-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{Y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{Z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0}$, або

2) $Z - z_0 = -\frac{X-x_0}{f'_x} = -\frac{Y-y_0}{f'_y}$, або

3) $\frac{X-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u x_v \\ y_u y_v \end{vmatrix}}$

Довжину дуги кривої $u = u(t), v = v(t)$ на поверхні $r = r(u, v)$ визначають формулою:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu_t'^2 + 2Fu_t'v_t' + Gv_t'^2}$$

де

$$E = g_{11} = \bar{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = g_{12} = g_{21} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \langle \bar{r}_{\bar{u}}, \bar{r}_{\bar{v}} \rangle$$

$$G = g_{22} = \bar{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

-коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні.

Квадрат диференціала дуги поверхні $r = r(u, v)$, тобто

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

називається першою квадратичною формою , або рімановою метрикою, поверхні.

Кут між двома кривими $u = u_1(t), v = v_1(t)$ і $u = u_2(t), v = v_2(t)$, що перетинаються на поверхні визначається із співвідношення:

$$\cos\phi = \cos(d\bar{r}\hat{,} \delta\, \bar{r}) =$$

$$= \frac{Edu\delta\, u + F(du\delta\, v + dv\delta\, u) + Gdv\delta\, v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} + \sqrt{E\delta\, u^2 + 2F\delta\, u\delta\, v + G\delta\, v^2}}$$

де du, dv -диференціали функцій вздовж першої кривої $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$, а $\delta u, \delta v$– диференціали від u і v вздовж кривої $u = u_2(t)$, $v = v_2(t)$.

Площу області D на поверхні обчислюють за формулою $S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$

Коефіцієнти другої квадратичної форми $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ обчислюють за формулами

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Повна кривина поверхні $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$

середня кривина $H = \frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}$

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Знайти, під яким кутом перетинаються криві $u + v = 0$, $u - v = 0$ на прямому гелікоїді $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$.

Розв'язок. Обчислимо коефіцієнти першої квадратичної форми.

$x_u = \cos v, y_u = \sin v, z_u = 0,$

$x_v = u\sin v, y_v = u\cos v, z_v = a,$

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$F = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0$

$G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2$

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

Уздовж першої кривої $du = -dv$, а другої $\delta u = \delta v$, тому

$$\cos\phi = \pm\frac{E - G}{\sqrt{E - 2F + G}\sqrt{E + 2F + G}}$$

$$= \frac{\pm(E - G)}{\sqrt{(E - 2F + G)(E + 2F + G)}}$$

У точці перетину кривих $u = v = 0$, $E = 1$, $F = 0$, $G = a^2$,

$\cos\phi = \pm\frac{1 - a^2}{1 + a^2}$.

Задача 2. Знайти повну кривину прямого гелікоїда: $x = u\,cos\,v, y = u\,sin\,v, z = av$

Розв'язок. З попередньої задачі

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + a^2, \quad \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$x_{uu} = 0, \quad y_{uu} = 0, \quad z_{uu} = 0$$

$$x_{uv} = -\,sin\,v\,, \quad y_{uv} = cos\,v\,, \quad z_{uv} = 0$$

$$x_{vv} = -u\,cos\,v\,, \quad y_{vv} = -u\,sin\,v\,, \quad z_{vv} = 0$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{vmatrix} -\,sin\,v & cos\,v & 0 \\ cos\,v & sin\,v & 0 \\ -u\,sin\,v & u\,cos\,v & a \end{vmatrix} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{vmatrix} -u\,cos\,v & -u\,sin\,v & 0 \\ cos\,v & sin\,v & 0 \\ -u\,sin\,v & u\,cos\,v & a \end{vmatrix} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}} * 0 = 0$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-a^2}{(u^2 + a^2)(u^2 + a^2)} = \frac{-a^2}{(u^2 + a^2)^2}$$

$$H = \frac{EN - 2MF - LG}{EG - F^2} = \frac{1 * 0 - 2 * 0 * \dfrac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}} - 0 * (u^2 + a^2)}{u^2 + a^2} = 0$$

Отже, прямий гелікоїд − мінімальна поверхня від'ємної повної кривини.

Задача 3. Обчислити першу квадратичну форму поверхні $\bar{r} = \bar{\rho}(s) + \lambda\bar{e}, \bar{e} = const, |\bar{e}| = 1.$

Розв'язок. Запишемо параметричні рівняння цієї поверхні:

$$\begin{cases} x = x(s) + \lambda e_1 & x_s = x'(s) & x_\lambda = e_1 \\ y = y(s) + \lambda e_2 & y_s = y'(s) & y_\lambda = e_2 \\ z = z(s) + \lambda e_3 & z_s = z'(s) & z_\lambda = e_3 \end{cases}$$

Оскільки $S-$ натуральний параметр, то

$$E = x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = |\rho'(s)^2| = 1$$

$$F = x'(s)e_1 + x(s)e_2 + z'(s)e_3 = \langle v(s), \bar{e} \rangle$$

$G = |\bar{e}| = 1$

Відповідь. $I(ds^2) = ds^2 + 2\langle v(s), \bar{e}\rangle ds d\lambda + d\lambda^2$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Навколо осі O_z обертається плоска крива $x = \phi(v)$, $z = \psi(v)$. Скласти параметричне рівняння поверхні обертання. Розглянути частковий випадок, коли меридіан задано рівнянням $x = f(z)$.

2. Навколо осіO_zобертається коло $x = a + b\cos v$, $z = b\sin v$ $(0 < b < a)$. Скласти рівняння поверхні обертання (тор).

3. Скласти рівняння поверхні, утвореної головними нормалями гвинтової лінії (прямий гелікоїд).

4. Скласти рівняння поверхні, утвореної сім'єю дотичних до даної кривої $\bar{r} = \bar{r}(s)$.

5. Скласти рівняння псевдо сфери, яка утворюється при обертанні трактиси $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a(ln\, t\, g\frac{u}{2} + \cos u)$ навколо осі O_z.

6. Запишіть параметричні рівняння:

6*а)* еліпсоїда: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

6*б*) гіперболічного параболоїда: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$

6*в*) циліндра: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

7. Скласти рівняння конуса, який утворюється прямими, що проходять через точку $M(a, b, c)$ і перетинають параболу $y^2 = 2px$, $z = 0$.

8. Покажіть, що рівняння

$x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = \frac{v}{u^2+v^2}$, $z = \frac{1}{u^2+v^2}$ $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$ $x^2 + y^2 + z = 0$ задають одну і ту ж поверхню.

9. Знайдіть координатні лінії на таких поверхнях:

а) $x = u - v$, $y = u + v$, $z = u$

б) $x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = uv$

в) $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v$

г) $x = a\cos v\cos u, \quad y = b\cos v\sin u, \quad z = c\cos v$

д) $x = \cos u\cos v, \quad y = \sin u\, shv, \quad z = 0$

е) $x = u + \sin v, \quad y = u + \cos v, \quad z = u + a$

є) $x = a\sin u\cos v, \quad y = a\sin u\sin v, \quad z = a(ln\,t\,g\frac{\phi}{2} + \cos u)$

ж) $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av$

з) $xyz = 1$

и) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

10. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхонь у заданих точках M:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad M(0,0,a)$

б) $\begin{cases} x = a\sin u\cos v, & y = a\sin u\sin v \\ z = a(ln\,t\,g\frac{u}{2} + a\cos u, & M = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = hv \end{cases} \quad u_0 = \frac{\pi}{4}, \quad v_0 = \frac{\pi}{2}$

г) $xy^2 + z^2 = 8 \quad M(1, 2, 2)$

д) $z = x^3 + y^3 \quad M(1, 2, 9)$

е) $x^2 + y^2 + z^2 = 169 \quad M(3, 4, 12)$

є) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0 \quad M(3, 1, -1)$

ж) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad M(x_0, y_0, z_0)$

11. Знайти точки на торі

$$x = (a + b\cos u)\cos v$$
$$y = (a + b\cos u)\sin v$$
$$z = b\sin u \quad ,$$

в яких нормаль перпендикулярна площині $3x + 4y + 5z + 6 = 0$

12. Довести, що дотичні площини до поверхні $z = x\phi\left(\frac{x}{y}\right)$ проходять через початок координат.

13. Знайти *а*) першу квадратичну форму;

б) другу квадратичну форму

таких поверхонь

а) $\begin{cases} x = r\ \cos u\ \cos v \\ y = r\ \cos u\ \sin v \\ z = r\ \sin u \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = a\ \cos u\ \cos v \\ y = a\ \cos u\ \cos v \\ z = b\ \cos u \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = a\ shu\ \cos v \\ y = a\ shu\ \sin v \\ z = c\ chu \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = a\ shu\ \cos v \\ y = a\ shu\ \sin v \\ z = c\ chu \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = u\ \cos v \\ y = u\ \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$

е) $\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = \frac{v}{u^2+v^2} \\ z = \frac{1}{u^2+v^2} \end{cases}$

є) $\begin{cases} x = 3u + v^2 + 1 \\ y = 2u + v^2 - 1 \\ z = -u + 2v \end{cases}$

ж) $x = a\frac{uv+1}{u+v}, \quad y = b\frac{u-v}{u+v}, \quad z = \frac{uv-1}{u+v}$

з) $x = r\ \cos v\,, \quad y = r\ \sin v\,, \quad z = u$

і) $x = u\cos v\,, \quad y = u\sin v\,, \quad z = ku \quad (u \neq 0)$

ї) $x = (a + b\cos v)\cos u\,, \quad y = (a + b\cos v)\sin u\,, \quad z = b\sin v$

и) $x = ach(\frac{u}{a})\cos v\,, \quad y = ach(\frac{u}{a})\sin v\,, \quad z = u$

й) $x = a\sin u\cos v\,,\quad y = a\sin u\sin v\,,\quad z = a(\ln tg\frac{u}{2} + \cos u)$

к) $\begin{cases} x = a\left(v + \frac{1}{v}\right)\cos u \\ y = b\left(v + \frac{1}{v}\right)\sin u \\ z = c\left(v - \frac{1}{v}\right) \end{cases}$ однополий гіперболоїд

л) $\begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)\cos u \\ y = \frac{b}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)\sin u \\ z = \frac{c}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right) \end{cases}$ двополий гіперболоїд

м) $\begin{cases} x = v\sqrt{p}\cos u \\ y = v\sqrt{p}\sin u \\ z = \frac{v^2}{2} \end{cases}$ еліптичний параболоїд

н) $\begin{cases} x = (u+v)\sqrt{p} \\ y = (u-v)\sqrt{q} \\ z = 2uv \end{cases}$ гіперболічний параболоїд

о) $\begin{cases} x = a\cos u \\ y = b\sin u \\ z = v \end{cases}$ еліптичний циліндр

п) $\begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \\ y = \frac{b}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \\ z = v \end{cases}$ гіперболічний циліндр

14.Обчислити першу квадратичну форму поверхонь:

а) $\bar{r} = \bar{r}(v,s) = \bar{v}\rho(s)$

б) $\bar{r} = \rho(s) + \lambda\bar{e}(s)$, а $|\bar{e}(s)| = 1$

в) $\bar{r} = \bar{\rho}(s) + \bar{n}(s)\cos\phi + \bar{b}(s)\sin\phi$

г) $\bar{r} = \bar{\rho}(s) + \lambda\bar{n}(s)$

д) $\bar{r} = \bar{\rho}(s) + \lambda\bar{n}(s)$, де $\lambda -$ параметр

е)$\bar{r} = \bar{\rho}(s) + \lambda\ \bar{b}(s)$, де $\lambda -$ параметр

15. Показати, що поверхню обертання можна параметризувати так, що її перша квадратична форма буде мати вигляд: $ds^2 = du^2 + G(u)dv^2$.

16. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням $u = v$ на поверхні з першою квадратичною формою $I = du^2 + sh^2 u dv^2$.

17. Знайти кут, під яким перетинаються координатні лінії $x = x_0$, $y = y_0$ на поверхні $z = axy$.

18. Показати, що на гелікоїді $x = au\cos v$, $y = au\sin v$, $z = bv$ координатна сітка (u, v) ортогональна.

19. Знайти сім'ю кривих, що перетинаються під прямим кутом з прямолінійними твірними $x = const$ параболоїда $z = axy$.

20. Знайти криві на сфері (такі криві називають *локсодромами*), що перетинають меридіани під постійним кутом.

21. Знайти площу чотирикутника на гелікоїді $x = au\cos v$, $y = au\sin v$, $z = bv$ обмеженого кривими $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

22. Знайдіть кут між кривими $v = 2u$ і $v = -2u$ на поверхні
$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = mv \end{cases}$$

23. Знайдіть кут між кривими $v = u + 1$ і $v = 3 - u$ на поверхні $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$.

24. Знайти периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника $u = \pm\frac{av^2}{2}$, $v = 1$ на поверхні гелікоїда $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = av \end{cases}$.

25.Довести, що існує ізометричне відображення гелікоїда $\begin{cases} x = u\,cos\,v \\ y = u\,sin\,v \\ z = mv \end{cases}$

на катеноїд $\begin{cases} x = \alpha\,cos\,\beta \\ y = \alpha s\,sin\,\beta \\ z = marcch\,\frac{\alpha}{m} \end{cases}$, при якому прямолінійним твірним гелікоїда відповідають меридіани катеноїда.

26.Знайти на поверхні

$$x = u\,cos\,v$$

$$y = u\,sin\,v$$

$$z = a\,ln(\,u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

криві, які перетинають криву $v = const$ під постійним кутом.

27.Обчислити другу квадратичну форму поверхні $xyz = a^3$.

28.Обчислити другу квадратичну форму катеноїда

$$\begin{cases} x = \sqrt{u^2 + a^2}\,cos\,v \\ y = \sqrt{u^2 + a^2}\,sin\,v \\ z = a\,ln(\,u + \sqrt{u^2 + a^2}) \end{cases}$$

Тема 5. Лінії на поверхні

Теоретичні відомості

Рівняння індекатриси Дюпена для поверхні, коефіцієнти першої та другої квадратичних форм відповідно рівні E, F, G, L, M, N: $\frac{L}{E}x^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}xy + NGy^2 = \pm 1$

Два напрямки на поверхні з кутовими коефіцієнтами k і k', що виходять з точки M, спряжені тоді і тільки тоді, коли виконується рівність: $\frac{L}{E} + \frac{M}{\sqrt{EG}}(k + k') + \frac{N}{G}kk' = 0$.

Для задання спряженої сітки можна взяти довільну однопараметричну сім'ю кривих і знайти спряжену йому сім'ю. Якщо позначити диференціали двох взаємно спряжених напрямків відповідно через du, dv та δu, δv, отримаємо умову спряженості $Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0$, тобто умовою спряженості двох напрямків є перетворення в нуль білінійної форми, полярної відносно другої квадратичної форми.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. На поверхні еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ проведені криві, що є перерізами площин $x + y = const$.Знайти сім'ю кривих, які утворюють з цими перерізами спряжену сітку.

Розв'язок. Нехай (x, y) − криволінійні координати поверхні параболоїда. Для заданої поверхні $L = \frac{1}{a}$,$M = 0$, $N = \frac{1}{b}$ умова спряженості $\frac{dx\delta x}{a} + \frac{dy\delta y}{b} = 0 \quad (*)$

Оскільки $x + y = const$, то $\delta x + \delta y = 0$, тому в рівнянні $(*)$можна покласти:$\delta x = 1$, $\delta y = -1$.

Отримуємо диференціальне рівняння $\frac{dx}{a} - \frac{dy}{b} = 0$, загальний розв'язок якого $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = const$.

Таким чином, шукана сім'я складається з перерізів параболоїда паралельними площинами $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = const$.

Асимптотичні напрямки $(du; dv)$ визначають з квадратичного рвіняння $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$.

Крива на поверхні називається *асимптотичною лінією*, якщо її напрямок в кожній точці є асимптотичним.

Задача 2. Знайти асимптотичні лінії на псевдосфері

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v \\ y = a \sin u \sin v \\ z = a\left(\ln t\, g \dfrac{u}{2} + \cos u\right) \end{cases}$$

Розв'язок. Для псевдосфери: $L = -\frac{a \cos u}{\sin u}$, $M = 0$, $N = a \cos u \sin u$. Рівняння асимптотичних ліній: $du^2 - \sin^2 u\, dv^2 = 0$, або $\frac{du}{\sin u} = dv$, $\frac{du}{\sin u} = -dv$.

Розглянемо перше з них. Проінтегрувавши його, отримуємо: $v = v_0 + \ln t\, g \frac{u}{2}$. З другого: $v = v_0 - \ln t\, g \frac{u}{2}$.

Напрямок на поверхні вданій точці називають *головним*, якщо він збігається з головним напрямком індекатриси Дюпена в цій точці. Оскільки головні напрямки $dr,\ \delta r$ спряжені і ортогональні, то вони задовільняють умову $(dr, \delta r) = -(dr, \delta m) = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Останнє рівняння можна розглядати як диференціальне рівняння ліній кривини, тобто таких кривих, напрямок яких у кожній точці збігається з головним напрямком.

Задача 3. Знайти лінії кривини на гелікоїді $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v. \\ z = bv \end{cases}$

Розв'язок. Маємо $ds^2 = du^2 + (u^2 + b^2)dv^2$, $\langle d^2 r, \bar{m} \rangle = -\frac{2bdudv}{\sqrt{u^2+b^2}}$.

Рівняння $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$ розпадається на два: $\begin{cases} \frac{du}{\sqrt{u^2-b^2}} - dv = 0 \\ \frac{du}{\sqrt{u^2-b^2}} + dv = 0 \end{cases}$.

Інтегруючи їх, знаходимо: $u = \pm b\ sh(v - v_0)$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Дано поверхню $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = 2uv \end{cases}$ і сім'ю кривих на ній $u^2 - cv^2 = c$.

Знайти диференціальне рівняння спряженої сім'ї кривих.

2. На поверхні $z = 2x^2 + y^2$ в точці $(0,0,0)$ в системі координат XOY в дотичній площині знайти кутовий коефіцієнт напрямку, спряженого до напрямку $k = \frac{1}{2}$.

3. На поверхні $x = u \cos v$, $y = u^2 \sin v$, $z = hv$ задано сім'ю кривих v. Знайти спряжену сітку.

4. На поверхні $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ знайти сім'ю кривих, спряжену до сім'ї $y = const$.

5. Показати, що криві переносу ($u = const$, $v = const$) на поверхні переносу $\bar{r} = \bar{r}(u, v) = U(u) + V(v)$ утворюють спряжену сітку.

6. Знайти асимптотичні лінії поверхні$z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

7. Знайти асимптотичні лінії катеноїда $\begin{cases} x = ch u \cos v \\ y = ch u \sin v \\ z = u \end{cases}$.

8. Показати, що на гелікоїді одна сім'я асимптотичних ліній складається з прямих, а інша з гвинтових ліній.

9. Знайти асимптотичні лінії:

а) гіперболічного параболоїда;

б) псевдосфери;

в) поверхні бінормалей $\bar{r} = \bar{\rho}(s) + \lambda \bar{b}(s)$;

г) тора;

д) однополого гіперболоїда.

10. Знайти скрут асимптотичних ліній на псевдосфері.

11. Для того, щоб координатні лінії на поверхні були асимптотичними лініями, необхідно і досить, щоб $N = L = 0$. Довести.

12. Покажіть, що на площині будь-яка лінія є асимптотичною і навпаки.

13. Покажіть, що крива $x = \frac{2}{1+t}, y = \frac{2}{1-t}, z = t$ є асимптотичною лінією поверхні $z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$.

14. Знайти лінії кривини на

а) гелікоїді;

б) параболоїді $z = axy$;

в) циліндричній поверхні;

г) конічній поверхні;

д) поверхні обертання;

е) поверхні $x = u^2 + v^2, \qquad y = u^2 - v^2, \qquad z = v$;

є) еліптичному параболоїді.

15. На площині і сфері будь-яка лінія є лінією кривини. Довести.

16. Доведіть, що координатні лінії поверхні є лініями кривини тоді і тільки тоді, коли $F = M = 0$.

17. Покажіть, що координатні лінії поверхні

$x = 3u - u^3 + 3uv^2$

$y = v^3 - 3u^2v - 3v$

$z = 3(u^2 - v^2)$

Рекомендована література

1. Кованцов М.І. Диференціальна геометрія. К.:Вища шк., 1973. 276 с.
2. Гуран Ігор, Гутік Олег, Лисецька Олександра, Мокрицький Тарас. Диференціальна геометрія: теорія кривих і поверхонь. Львів, 2021. 326 с.
3. Підстригач Я.С. Тензори на многовидач: Навч. Посібник. Львів: ЛДУ, 1986. 78с.
4. Пришляк О. Диференціальна геометрія. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014.
5. Франовський А. Ц., Карплюк С. О. Диференціальна геометрія : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. Житомир : Видво ЖДУ ім. І. Франка, 2013. 188 с.
6. Франовський А.Ц. Диференціальна геометрія: Практикум з розв’язування задач. Житомир: Поліграфічний центр ЖДПУ, 2011. 64 с.
7. Ямпольський О.Л. Диференціальна геометрія. Базовий курс лекцій. [Електронний ресурс]. URL : http://geometry.karazin.ua/resources/documents/35a2040.pdf (Дата перегляду: 05.06.2023

Навчальне видання

ФРАНОВСЬКИЙ Анатолій Цезарович
ПОСТОВА Світлана Анатоліївна

Розв'язування задач з топології та диференціальної геометрії

методичні рекомендації для здобувачів вищої освіти
спеціальності 014 «Середня освіта»
предметної спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»

Надруковано з оригінал-макета авторів

Підписано до друку 01.04.2024. Формат 60x90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк різографічний.
Ум. друк. арк. 5,6. Обл. вид. арк. 5. Наклад 300. Зам. 805.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка
м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.
електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua