

Прус Алла Володимирівна,

кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри алгебри та геометрії
Житомирський державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Житомир, Україна

<https://orcid.org/0000-0002-8869-2544>

pruswork@gmail.com

ПІДХОДИ, ПЕРСПЕКТИВИ ТА ТРАЄКТОРІЇ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ОСВІТІ

Анотація. У статті аналізуються роботи зарубіжних авторів, які стосуються підходів та перспектив в області математичного моделювання у відношенні до освіти. Зокрема, на базі двох підходів «моделювання як транспортний засіб» та «моделювання як зміст» виокремлено найбільш поширені у наукових дослідженнях перспективи: реалістичне або прикладне моделювання; контекстне моделювання; підхід виявлення моделі або модельний підхід; освітнє моделювання; соціально-критичне моделювання; епістемологічне або теоретичне моделювання; когнітивне або пізнавальне моделювання. Зауважимо, що ця систематизація базується на тандемі ціль-завдання, тобто вона розрізняє різні перспективи відповідно до їхніх головних цілей у зв'язку з моделюванням та модельними завданнями, які у ній використовуються. Кожна перспектива, як правило поширена у відповідній країні або країнах, хоча публікації науковців щодо математичного моделювання варіюються в рамках як однієї, так і декількох перспектив. Дослідження дали змогу скласти коротку характеристику кожної перспективи та представити приклад модельного завдання. Кожна перспектива може формувати відповідну траєкторію математичного моделювання (і не одну) в освітній системі конкретної країни. Під траєкторією математичного моделювання розумітимемо реальний шлях інтеграції математичного моделювання у математичну освіту, який базується на відповідній перспективі математичного моделювання із урахуванням її особливостей. Форми траєкторій математичного моделювання можуть бути різноманітними: спеціально розроблені курси математичного моделювання для професійного розвитку вчителів; модельні олімпіади; тижні моделювання; авторські модельні технології тощо. Так, в Україні прослідковуються одночасно декілька траєкторій математичного моделювання, які утворились внаслідок впливу таких перспектив як контекстне моделювання та освітнє моделювання. Зазначимо, що у нашій країні розроблена також своя власна теорія математичного моделювання відома як «прикладна спрямованість математики», яка базується на освітній перспективі. Відповідна траєкторія прикладної спрямованості, практично, не проявляється у шкільній практиці. Також у статті йдеться, що досі не спостерігається широкого впровадження математичного моделювання в освіту у всьому світі, незважаючи на значимість моделювання для життєвих компетенцій учнів (студентів) та численні теоретичні та практичні розробки в цій області.

Ключові слова: математичне моделювання, підходи математичного моделювання, перспективи математичного моделювання, траєкторії математичного моделювання, модельне завдання.

1. ВСТУП

Рух за моделювання як невід'ємну частину математичної освіти, виник приблизно в 70-х роках минулого століття. Як стартову точку, відомі у світі дослідники математичного моделювання K. Houston, P. Galbraith, G Kaiser. [1, с. 1], визначили 1973 рік, у якому вийшов звіт про дослідження R. McLone щодо підготовки математиків. У звіті, зокрема, йшлося, що багато випускників не мають компетенцій, яких від них очікують [2, с. 270]. Отже, в 2023 році маємо 50-річчя математичного моделювання (ММ), що дає привід підвести певні підсумки щодо інтеграції ММ в математичну освіту.

У всьому світі спостерігається тенденція до моделювання (у широкому розумінні) у математичній освіті, на шкільному та університетському рівнях. Особливо чітко прослідковується акцентування на процесах формалізації та інтерпретації (перекладу), а не лише на роботі з готовими моделями [3, с. 5]. Популярність ММ стрімко зросла за останні двадцять років і стала сьогодні важливою галуззю дослідження в математичній освіті. Фактично, у сучасних освітніх системах, ММ включено до навчальних програм із математики, які використовуються на всіх рівнях від початкової школи до вищої освіти у

багатьох країнах, таких як Німеччина, Сполучені Штати Америки, Австралія, Фінляндія, Швейцарія, Швеція, Сінгапур, Китай і Туреччина [4, с. 241].

Постановка проблеми. На сьогоднішній день вже існує добре розвинене розуміння ключової ролі моделювання та застосувань у збалансованій математичній освіті, а також деякі високоякісні приклади того, як це можна реалізувати на практиці [5, с. 183]. Однак реалізація ММ у школі є рідкісним явищем, хоча міжнародні дослідження в цій галузі є досить потужними, вони мають емпіричні докази, практичні підказки, а також завдання моделювання, які доступні для всіх класів [6, с. 44]. Українські вчені наприкінці минулого століття теж дійшли думки про необхідність навчання ММ учнів загальноосвітніх шкіл. Проте впровадження в шкільний курс математики методу ММ, як методу наукового дослідження і навчального пізнання, в останні три десятиріччя, фактично, обмежалося лише побажаннями щодо їх необхідності [7, с. 65]. Як бачимо, висновки про стан ММ в освіті, які зроблені зарубіжними та українськими науковцями практично в той же час, однакові.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. ММ – це процес перекладу між реальним світом і математикою в обох напрямках [8, с. 45]. Варто розрізнити ММ та застосування математики. Під час застосування математики фокусом діяльності є напрямок математика → реальність. Іншими словами: «Де я можу використати цю конкретну частину математичних знань?». Модель вже вивчена і побудована. Під час ММ у центрі уваги стає зворотний напрямок: реальність → математика. «Де я можу знайти трохи математики, щоб допомогти мені вирішити цю проблему?». Модель має бути побудована шляхом ідеалізації, конкретизації та математизації реальної ситуації. Іншими словами, задача математичного моделювання не визначається своїм математичним змістом; скоріше, математичний зміст повинен бути обраний відповідно до проблеми реального світу. Звичайно, це виклик, який вимагає не тільки глибокого розуміння математичних концепцій, але й мета-пізнання і знання здорового глузду про реальний світ [9, с. 2].

Можна виокремити два глобальні підходи до ММ в освіті, які мають різні мотиви та різні глобальні цілі, однак у загальному їх не варто вважати антагоністичними [10, с. 5]. Перший підхід – це моделювання для вивчення математики або його ще називають «моделювання як транспортний засіб» (англійською «Modelling-as-vehicle»). Другий підхід – це застосування математики для розв'язування проблем за межами математики або «моделювання як зміст» (англійською «Modelling-as-content»). Зазначимо, що терміни «моделювання як транспортний засіб» та «моделювання як зміст» ввели науковці з Південної Африки Cyril Julie та Vimolan Mudaly в своїй роботі «Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa» в 2007 році. З того часу, хоча ці терміни не є загальноприйнятими, однак вони досить часто використовуються науковцями у всьому світі у відношенні до ММ в освіті.

«Моделювання як транспортний засіб» – це підхід до вивчення абстрактних математичних понять, які вбудовані у контексти (під час введення поняття або на етапі застосування поняття). Таке включення моделювання в математику не ставить на меті навчитись будувати моделі. В цьому випадку моделювання є засобом вивчення понять, тверджень математики. «Моделювання як зміст» полягає в тому, щоб мати контекстну проблему як відправну точку. Такий підхід визначає моделювання як мету навчання, без спеціального акценту на математичному змісті. Це спричинює побудову математичних моделей різних явищ та процесів без припису, що вивчення певних математичних концепцій є результатом процесу побудови моделі. Це надає учням (студентам) досвід справжнього вирішення проблем, пов'язаних із реальним світом. Але, крім того, цей підхід тягне за собою уважне критичне вивчення, препарування, розширення та адаптацію існуючих моделей із завданням розібратися з механізмами, які лежать в основі ММ [11, с. 504].

Мета статті. Виділити та проаналізувати існуючі перспективи ММ в освіті та окреслити траєкторії ММ, зокрема, в Україні.

2. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В межах визначених вище підходів для різних точок зору в численних освітніх дослідженнях ММ розроблені та широко дискутуються різні перспективи ММ [12, с. 304]; [13, с. 3]; [14, с. 56]; [15, с. 54). Єдиної загальноприйнятої систематизації їх немає, однак можна виокремити перспективи ММ, які найбільш поширені: 1) реалістичне або прикладне моделювання (Realistic or applied modelling); 2) контекстне моделювання (Contextual modelling); 3) підхід виявлення моделі або модельний підхід (Model eliciting approach); 4) освітнє моделювання (Educational modeling); 5) соціально-критичне моделювання (Socio-critical modelling); 6) епістемологічне або теоретичне моделювання (Epistemological or theoretical modelling); 7) когнітивне або пізнавальне моделювання (Cognitive modelling).

Зауважимо, що ця систематизація базується на тандемі ціль-завдання, тобто вона розрізняє різні перспективи відповідно до їхніх головних цілей у зв'язку з моделюванням та модельними завданнями, які у ній використовуються.

Зазначимо також, що кожна країна має своє історичне соціокультурне походження, яке впливає на освіту та формує відповідну систему освіти, зокрема систему математичної освіти. Відповідно, підходи до ММ та пов'язані з ними різні перспективи ММ проявляються, проектується у різні траєкторії ММ. Під траєкторією ММ розумітимемо реальний шлях інтеграції ММ у математичну освіту, який базується на відповідній перспективі ММ із урахуванням її особливостей. Форми траєкторій ММ можуть бути різноманітними: спеціально розроблені курси ММ для професійного розвитку вчителів; модельні олімпіади; тижні моделювання; авторські модельні технології; навіть нові предмети, пов'язані з математикою та моделюванням (наприклад, «Mathematics A» в Нідерландах) та ін.

1) Ціль реалістичного (прикладного) моделювання – розвивати навички моделювання та розуміння автентичних сценаріїв реального світу. Моделювання розуміється як діяльність для вирішення автентичних проблем, а не як розвиток математичної теорії. В цій перспективі важливо поглиблено вивчати процеси математичного моделювання в різних професіях і сферах суспільного застосування математичних моделей. Моделювання розглядається як зміст. Теоретичні основи цієї тенденції тісно пов'язані з прикладною математикою та історично пов'язані з прагматичними підходами до моделювання, які були розроблені Генрі Поллаком. Як уже зазначалось, розвиток компетенцій ММ – один із фокусів цієї перспективи. Компетентність ММ визначається як здатність самостійно та цілеспрямовано проходити всі етапи процесу ММ. Процес ММ починається у реальному світі, математизується в математичний світ і закінчується в реальному світі. Цикл моделювання є ітеративним (багаторазовим). Робота учнів (студентів) із моделювання повинна підтримуватися використанням відповідних технологій, таких як, наприклад, сучасні комп'ютерні програми для налаштування та аналізу математичних моделей. У прикладному моделюванні акцент робиться на реальній життєвій ситуації (див. модельне завдання 1 – типовий приклад перспективи). Ця перспектива поширена у дослідженнях у Великобританії.

Модельне завдання 1 [16, с. 12]. У ролі пішохода вам багато разів на день доводиться переходити дорогу. Для деяких доріг, де немає багато транспорту, ви чекаєте проміжку між автомобілями, а потім перетинаєте дорогу; для більш завантажених доріг є спеціальні переходи «зебра» або «пелікан» (радимо переходити лише там). Місцева влада має вирішити, чи встановлювати регульовані переходи на певних дорогах і коли. Ця задача досліджує стратегії перетину доріг. Сформулюйте математичну модель переходу вулиці з одностороннім рухом, щоб пішохід міг безпечно переходити дорогу. Використайте свою модель, щоб вирішити, за яких умов місцева влада повинна встановити пішохідний перехід.

Однією із траєкторій реалістичного моделювання в математичній освіті можна вважати щорічний конкурс моделювання, який проводиться в Нідерландах і називається «Math Olympiad» (буква «А» пов'язана з предметом «Mathematics A» в старших класах середньої школи). Він організовується з 1989 року. Тоді у конкурсі брали участь лише 14 шкіл Нідерландів, а зараз – більше 150 (це 20% усіх шкіл цієї країни). Кожен раунд математичного конкурсу містить лише одну задачу. Протягом багатьох років ці задачі брали з області

політики, соціології, археології, спорту, наук про життя і так далі. Це змагання має вже продовження на міжнародному рівні, до нього долучились школи з Данії, Німеччини, Японії.

2) Центральні цілі контекстного моделювання – це предметні та психологічні цілі, компетенції моделювання не мають особливого значення. Контекстне моделювання базується на обширних дослідженнях вирішення проблем і ролі текстових задач у навчанні математики. ММ розглядається як особливий вид вирішення проблем, тому психологічні аспекти вирішення проблем вважаються основою для розуміння труднощів навчання, пов'язаних з ММ. ММ розглядається тут як зміст, а також як засіб. Однак сильніший акцент робиться на вивченні математики. Ця перспектива веде свій початок від сучасних нащадків Піаже та Виготського, а також від американських прагматиків. Перспектива розвинулась, в основному, у дослідженнях у Північній Америці.

Траєкторію цього моделювання можна досі прослідкувати у математичній освіті в Україні. Навчальні програми з математики для 6-9 класів, які були чинні, зокрема, і у 2022-2023 навчальному році наголошують на необхідності залучення учнів до використання рівнянь і функцій як засобів математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язування на цій основі прикладних задач. Ці програмові завдання реалізуються у діючих підручниках з алгебри та геометрії. Їх аналіз дає підстави зробити висновок, що різні авторські колективи у своїх підручниках активно впроваджують ідею математичного моделювання та математичної моделі здебільшого на основі розв'язування відповідних текстових задач. Це відноситься, наприклад, до тем «Системи лінійних рівнянь як моделі реальних ситуацій», «Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій», «Квадратні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій» та ін.

Далі ми наводимо типовий приклад модельного завдання для цієї перспективи, який взятий із досліджень закордонних авторів. Однак фабула цієї задачі, на нашу думку, є цілком типовою для текстових задач і в українських підручниках теж.

Модельне завдання 2 [17, с. 251]. Ви можете прочитати про пожертви у розділі "Підтримка Грінпіс". Тут ви можете дізнатися, як витрачаються гроші: 18% йде до Грінпіс Інтернешнл; 25-30% йде на кампанії в Бельгії; 18% йде на комунікацію та інформацію для підтримки кампаній; близько 10% йде на адміністрування та розташування; близько 10% йде на збір коштів та обслуговування прихильників. У 2001 році організація отримала 3 433 000 євро. Скільки було грошей витрачено на кампанію в Бельгії?

3) Підхід виявлення моделі (модельний підхід) тісно пов'язує математичне моделювання та навчання, яке відбувається через нього. Метою цієї перспективи є психологічні цілі, тобто застосування моделі, одержаної в результаті розв'язування початкової проблеми, до нової проблеми. Цикл моделювання в цій перспективі є ітеративним, починається він у реальному (або уявному) світі, потім будується модель. Далі шляхом роботи з моделлю досягається можливе вирішення вихідного завдання. Результати цієї роботи повертаються в реальний світ, де відбувається перевірка для підтвердження знайденого розв'язку. Діяльність із пошуку моделі визначається як діяльність із розв'язування проблем, побудована з використанням конкретних принципів навчального дизайну, під час якої учні розуміють значущість ситуації та винаходять, розширюють і вдосконалюють власні математичні побудови. Іншими словами, у той час як традиційна мета вирішення проблем полягає в обробці інформації за допомогою заданої процедури, виявлення моделі є самим цим процесом. Далі наведено приклад (завдання 3) цієї перспективи.



Рис. 1

Модельне завдання 3 [18, с. 6]. Сьогодні рано вранці поліція виявила, що вчора пізно ввечері деякі добрі люди перебудували старий цегляний фонтан у парку. Міський голова дякує людям, які це зробили. Проте хто це був, ніхто не бачив. Поліція знайшла лише купу слідів. Людина, яка залишила один із цих слідів (рис. 1) здається дуже великою. Але, щоб знайти цю людину та її друзів, було б корисно, якби ми могли зрозуміти, наскільки це велика людина насправді. Ваше завдання таке. Створіть набір інструментів, за допомогою якого поліція зможе визначити, наскільки великі люди, просто подивившись на їхні сліди. Ваш набір інструментів має працювати для відбитку, який показано тут на рисунку. Однак це також має працювати для інших слідів.

4) Метою освітнього моделювання є не лише розвиток навичок математичного моделювання, а й вивчення математики. Основна ідея освітньої перспективи полягає в тому, щоб інтегрувати моделі та моделювання у навчання математики як засоби для вивчення математики. ММ зводить мости між реальним життєвим досвідом учнів і математикою. Це мотивує студентів. Із точки зору освітнього моделювання, «моделювання як зміст» і «моделювання як транспортний засіб» наголошуються одночасно. Освітнє моделювання поділяється на дидактичне моделювання та концептуальне моделювання. Дидактичне моделювання включає, з одного боку, заохочення до процесу навчання моделюванню, а з іншого – роботу з прикладами моделювання для впровадження та практики нових математичних методів. Таким чином, моделювання повністю включено в навчання математики. Метою концептуального моделювання є покращення розвитку та розуміння студентами термінології в галузі математики та процесів моделювання. Це також включає в себе навчання мета-знань про цикли моделювання. Освітнє моделювання є продовженням пізніх робіт Ганса Фройденталя у сфері математичної освіти. Ця перспектива є домінуючою в Західній Європі протягом останніх трьох десятиліть. Подвійний фокус на компетенціях математичного моделювання та математиці в освітньому моделюванні приводить до того, що оригінальні завдання ММ є зазвичай більш спрощеними, ніж автентичні завдання. Наведемо приклад такого завдання.



Рис.2

Модельне завдання 4 [19, с. 125]. Одна з відомих історичних пам'яток знаходиться у місті Бонні, столиці Західної Німеччини до об'єднання. Це статуя (рис. 2) з головою Конрада Аденауера (1876–1967), першого канцлера Західної Німеччини у 1949–1963 роках. Якими були б розміри статуї, якби вона зображала Аденауера у повний зріст, виходячи з цього масштабу? Поясніть всі свої твердження.

Крім того, в освітній перспективі математичні моделі створюються, коли учні аналізують реальну проблему щодо їхніх інтересів. Це призводить до реальної моделі, яка містить необхідні характеристики вихідної реальної ситуації. Потім реальна модель переводиться в математику або математизується. Коли робота в математичному світі завершена і висновки зроблені, їх перекладають у реальний світ, щоб перевірити модель. Цикл моделювання в цій перспективі теж є ітеративним.

Траєкторія освітнього моделювання проявляється наразі у математичній освіті в Україні на рівні молодшої та основної школи у рамках реформи НУШ. Зокрема, у модельних програмах різних авторських колективів паритетно з суто математичними завданнями предмету «Математика» сформульовані «модельні завдання». Реалізацію всіх цих завдань можна знайти у відповідних модельних підручниках. Авторські колективи, які створювали свої підручники, не завжди однаково трактують поняття прикладної (модельної, життєвої,

практичної тощо) задачі, однак однозначно можна стверджувати, що у модельних підручниках в Україні вже міститься система таких задач поряд із традиційними текстовими задачами.

Слід також зазначити, що на початку цього століття, в рамках освітньої перспективи, у нашій країні було розроблено ще одну теорію – теорію прикладної спрямованості математики. Вона розроблялась для учнів основної та старшої школи для предметів алгебра і початки аналізу, геометрія, стереометрія. Серед її авторів можна виокремити Катеринюк Галину, Прус Аллу, Соколенко Лілію, Філімонову Марію, Філон Лідію, Швеця Василя та ін. Створені відповідні системи завдань для ММ, наприклад, [20-22]. Однак ця теорія не знайшла широкого втілення в школах, хоча відбитки цієї траєкторії спостерігаються в окремих початкових закладах України.

5) Педагогічні цілі соціально-критичного моделювання - критичне розуміння навколишнього світу. Соціально-критичне моделювання підкреслює роль математики в суспільстві та стверджує необхідність розвивати та підтримувати критичне мислення учнів (студентів) про роль математики в суспільстві, про роль і природу математичних моделей і функцію математичного моделювання в суспільстві. Рефлексивні дискусії серед учнів (студентів) у процесі моделювання розглядаються як невід'ємна частина цього процесу. Загалом, у соціально-критичній перспективі домінуючу роль відіграють рефлексія та критика. Математична освіта, а особливо навчання математичного моделювання та застосування, має потенціал для розширення можливостей учнів як автономних і незалежних громадян у суспільстві. Стосовно математичного моделювання та застосування моделей, критичні роздуми можуть зосереджуватися на процесі моделювання або вибраних підпроцесах; фактичному застосуванні математичної моделі у суспільних проблемах, де математичне моделювання та моделі використовуються як засоби для аналізу та критики політичних рішень чи суспільних явищ. Компетенції ММ учнів (студентів) формуються через проектну роботу. Ця перспектива швидко розвивається, особливо в деяких країнах Латинської Америки.

У відповідній траєкторії ММ студенти працюють із проблемами реального життя (часто соціального, медичного та екологічного характеру), до прикладу, завдання 5. Розвивати математичні навички та навички моделювання для прийняття рішень у суспільстві – центральна мета цієї траєкторії навчання математики. Відповідну траєкторію можна прослідкувати в математичній освіті в Бразилії.

Модельне завдання 5 [23, с. 294]. Насіння квасолі та кукурудзи, яке закуплене урядом, почали розповсюджувати вчора вдень. Всього було 37,5 т: 25 т бобових та 12,5 т кукурудзи. Насіння отримають близько 8000 фермерів. За словами міського голови, кожен фермер отримає 3 кг квасолі та 2 кг кукурудзи. Чи правильно був здійснений розподіл? Чи справедливим є те, що всі фермери отримують порівну? Як варто було б розподілити насіння, на вашу думку?

б) Епістемологічна (теоретична) перспектива має такі цілі: сприяння розвитку зв'язків між моделюванням та математичною діяльністю, переосмислення математики та реорганізація шкільної математики з точки зору моделювання. У цій перспективі ММ підпорядковується розробці більш загальних теорій навчання та вивчення математики. Фундаментальні математичні поняття повинні бути заново винайдені у навчанні математики шляхом роботи з моделюванням реальних явищ. Ця перспектива не потребує моделювання реальної проблеми чи ситуації. В епістемологічній перспективі кожне математичне завдання можна описати як завдання моделювання, і моделювання не обмежується математизацією нематематичних проблем. Процес ММ в цій перспективі часто починається в реальному світі, але закінчується завжди математикою.

Прикладом цієї перспективи є теорія реалістичної математичної освіти (Reality Mathematics Education або скорочено RME), яка втілилась у відповідну траєкторію в освіті Нідерландів. Як компонент предметно-орієнтованої теорії навчання, створеної в рамках RME, було розроблено також теорію емерджентного моделювання. Зазначимо, що термін

«емергентний» відноситься як до природи процесу, за допомогою якого моделі виникають із досвіду учнів, так і до процесу, за допомогою якого ці моделі підтримують появу формальних математичних способів пізнання, які більше не залежать від підтримки оригінальних моделей. Кілька проектів навчальних планів запровадили ці нові процедури в голландській математичній освіті, починаючи з 1981 року.

Ще одним прикладом цієї перспективи є теорія математичних праксеологій. Дослідницьке навчання в рамках цієї теорії проводилось в окремих школах Іспанії. Далі пропонуємо приклад типового завдання.

Моделльне завдання 6 [24, с. 240]. Ми хочемо завчасно спланувати поїздку всього класу наприкінці навчального року. Для цього потрібно з'ясувати які є способи заощадити гроші, щоб зібрати необхідну суму грошей, необхідних для цієї поїздки. Хоча ми ще не знаємо цієї суми, ми можемо почати підраховувати необхідну суму і приймати рішення щодо наших особистих заощаджень: кількість внесків, акцій тощо. Очевидно, що наше завдання не полягає в тому, щоб сьогодні вирішити скільки грошей ми повинні віддати і як, але спробуймо передбачити потреби, які ми матимемо, коли знатимемо витрати на поїздку.

7) Однією з головних цілей когнітивної (пізнавальної) перспективи є реконструкція індивідуальних маршрутів моделювання або індивідуальних перешкод і труднощів учнів (студентів) під час моделювання, а також аналіз когнітивних процесів, що відбуваються під час процесів моделювання. Серед психологічних цілей можна виокремити такі: сприяння процесам математичного мислення шляхом використання моделей у вигляді уявних образів чи навіть фізичних зображень або наголошенням, що моделювання – розумовий процес, такий як абстракція чи узагальнення. Основний інтерес полягає в тому, щоб зрозуміти, які когнітивні функції активуються в діяльності ММ кожного окремого учня (студента). Цю перспективу ще називають мета-перспективою. Вона спрямована на аналіз різних процесів моделювання з різними типами ситуацій моделювання, які відрізняються за ступенем достовірності або математичної складності. Для завдань у цій перспективі не встановлені чіткі вимоги, наводимо приклад – завдання 7. Ця перспектива поширена в Німеччині.

Моделльне завдання 7 [25, с. 44]. У 2007 році через порт Гамбургу було відправлено 9,9 мільйонів контейнерів. Це робить Гамбург дев'ятим за величиною портом у світі. За 365 днів лише два-три контейнери ставлять не на те місце. Потім починається пошук. Докер, який знайшов контейнер, отримує один вихідний. Між іншим, у Гамбурзі жодного разу не губився контейнер. Наскільки велика площа потрібна для перевалки контейнерів?

3. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теоретичний аналіз існуючих перспектив ММ в освіті, окреслення траєкторій їх реального впровадження в навчання математику по всьому світі дає досвід коректної інтеграції ММ в освітню систему України на різних рівнях, починаючи з початкової до вищої школи. Приклади модельних завдань у різних перспективах допоможуть не лише доповнити систему вже існуючих у навчальних виданнях прикладних завдань, а й надихнути науковців та вчителів до створення власних, нових.

Подальші дослідження ми вбачаємо у з'ясуванні ролі та місця ММ у системі професійної підготовки майбутніх учителів математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Houston, K., Galbraith, P., Kaiser, G. (2009). *ICTMA: The first twenty-five years. History of ICMI*. <https://www.icmihistory.unito.it/ictma.php#up>
- [2] Frejd, P., Vos, P. (2023). The spirit of mathematical modeling – a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education, *The Mathematics Enthusiast*, 21(1), 269-300.
- [3] Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Teaching and learning mathematics in context*, 3-14.
- [4] Kutluca, T., Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, 11 (21), 240-274. <https://doi.org/10.18009/jcer.1242785>

- [5] Burkhardt, H. with contributions by Pollak, H.O. (2006) Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zeitschrift für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 178-195.
- [6] Borromeo Ferri, R. (2020). Make mathematical modeling marvelous! Follow teacher Mr. K. for your lesson tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher*, 78(1), 44-53.
- [7] Катеринюк, Г. Д. (2020). Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи. [Неопубл. дис. канд. пед. наук]. Вінницький державний педагогічний університет Михайла Коцюбинського.
- [8] Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1, 45–58.
- [9] Stillman, G. (2012). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? *In Preproceedings of ICME12*. Korea, Seoul.
- [10] Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 3–16.
- [11] Julie, C., Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In Blum, W., Galbraith, P., Niss, M., Henn, H.-W. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). New York: Springer.
- [12] Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-differentiating perspectives and delineating commonalities. *Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2035-2041) Larnaca, Cyprus.
- [13] Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In Blomhøj, M. and Carreira, S. (Eds.), *Proceedings from topic study group 21 at the 11th International congress on mathematical education* (pp. 1-17). Monterrey, Mexico.
- [14] Abassian, A., Safi, F., Bush, S., Bostic, J. (2020) Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning*, 12:1, 53-65, DOI: 10.1080/19477503.2019.159536.
- [15] Kaiser, G., Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51–76
- [16] Berry, J., Houston, K. (1995). *Mathematical modelling*. Elsevier.
- [17] Depaepe, F., De Corte, E., Verschafel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. In Verschafel, L., Greer, B., Van Dooren, W., Mukhopadhyay, S. (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 245– 263). Sense Publishers
- [18] Lesh, R., Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In Lesh, R., Doerr, H. M. (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum
- [19] Мааф, К. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 113-142.
- [20] Матяш О. І., Катеринюк Г. Д. (2019). *Методичний інструментарій формування здатності учнів до математичного моделювання*. ТОВ «Твори».
- [21] Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. (2010). *Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу*. НПУ імені М.П. Драгоманова.
- [22] Швець В.О., Прус А.В. (2007). *Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії*. ЖДУ ім. І. Франка.
- [23] Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 293–301.
- [24] García, F.J., Gascón, J., Ruiz, Higuera, L., Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 226-246.
- [25] Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.

Prus Alla Volodymyrivna

Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry
Zhytomyr Ivan Franko State Pedagogical University,

Zhytomyr, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0002-8869-2544>

pruswork@gmail.com

APPROACHES, PROSPECTS AND PATHS OF MATHEMATICAL MODELLING IN EDUCATION

Abstract. The works of foreign authors concerning approaches and prospects in the field of mathematical modelling in relation to education are analyzed in this paper. In particular, the most common prospects in the scientific research are identified on the basis of two approaches “modelling-as-vehicle” and “modelling-as-content”: realistic or applied modelling; contextual modelling; model eliciting approach or model

approach; educational modelling; socio-critical modelling; epistemological or theoretical modelling; cognitive modelling. It is worth mentioning that this systematization is based on a goal-task combination, that is, it distinguishes different prospects according to their main goals in relation to modelling and the problems used in it. Each outlook tends to be prevalent in its respective country or countries, though published papers by MM scholars vary within one or more prospects. Relevant studies have made it possible to compile a brief description of each outlook and provide an example of a model problem. Any outlook can form a suitable path of a mathematical modelling (and more than one) in the educational system of a particular country. The path of mathematical modelling is considered the real way of the integration of the mathematical modelling into mathematical education, which is based on the appropriate outlook of mathematical modelling, taking into account its features. Forms of the mathematical modelling paths can be different: specially designed courses of mathematical modelling for the professional development of teachers; model Olympiads; modelling weeks; original modelling technologies, etc. Thus, several paths of the mathematical modelling are seen simultaneously in Ukraine, which were formed as a result of such prospects as a contextual modelling and an educational modelling. It should be noted that our country has also developed its own theory of mathematical modelling, known as the “applied orientation of Mathematics” based on an educational outlook. The corresponding path of the applied orientation practically does not appear in a school practice. The paper also states that there is still no widespread introduction of the mathematical modelling in education throughout the world, despite the importance of modelling for the life competencies of pupils (students) and numerous theoretical and practical development in this field.

Key words: mathematical modelling, mathematical modelling approaches, mathematical modelling perspectives, mathematical modelling paths, model problem.

References (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- [1] Houston, K., Galbraith, P., Kaiser, G. (2009). *ICTMA: The first twenty-five years. History of ICMI*. <https://www.icmihistory.unito.it/ictma.php#up>
- [2] Frejd, P., Vos, P. (2023). The spirit of mathematical modeling – a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education, *The Mathematics Enthusiast*, 21(1), 269-300.
- [3] Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Teaching and learning mathematics in context*, 3-14.
- [4] Kutluca, T., Kaya, D. (2023). Mathematical modelling: A retrospective overview. *Journal of Computer and Education Research*, 11 (21), 240-274. <https://doi.org/10.18009/jcer.1242785>
- [5] Burkhardt, H. with contributions by Pollak, H.O. (2006) Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zeitschrift fur Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 178-195.
- [6] Borromeo Ferri, R. (2020). Make mathematical modeling marvelous! Follow teacher Mr. K. for your lesson tomorrow. *The New Jersey Mathematics Teacher*, 78(1), 44-53.
- [7] Kateryniuk, H.D. (2020). Formuvannia umin matematychnoho modeliuvannia v uchniv profilnoi shkoly. [Neopubl. dys. kand. ped. nauk]. Vinnytskyi derzhavnyi pedahohichnyi universytet Mykhaila Kotsiubynskoho. [
- [8] Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1, 45–58.
- [9] Stillman, G. (2012). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? *In Preproceedings of ICME12*. Korea, Seoul.
- [10] Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 3–16.
- [11] Julie, C., Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In Blum, W., Galbraith, P., Niss, M., Henn, H.-W. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). New York: Springer.
- [12] Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-differentiating perspectives and delineating commonalities. *Paper presented at the Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2035-2041) Larnaca, Cyprus.
- [13] Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In Blomhøj, M. and Carreira, S. (Eds.), *Proceedings from topic study group 21 at the 11th International congress on mathematical education* (pp. 1-17). Monterrey, Mexico.
- [14] Abassian, A., Safi, F., Bush, S., Bostic, J. (2020) Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education, *Investigations in Mathematics Learning*, 12:1, 53-65, DOI: 10.1080/19477503.2019.159536.
- [15] Kaiser, G., Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. *Journal fu`r Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51–76
- [16] Berry, J., Houston, K. (1995). *Mathematical modelling*. Elsevier.
- [17] Depaepe, F., De Corte, E., Verschafel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education in Flanders. In Verschafel, L., Greer, B., Van Dooren, W., Mukhopadhyay, S. (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 245– 263). Sense Publishers

- [18] Lesh, R., Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In Lesh, R., Doerr, H. M. (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum
- [19] Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 113-142.
- [20] Matiash O. I., Kateryniuk H. D. (2019). Metodychnyi instrumentarii formuvannia zdatnosti uchniv do matematychnoho modeliuвання. TOV «Tvory».
- [21] Sokolenko L.O., Filon L.H., Shvets V.O. (2010). Prykladni zadachi pryrodnychoho kharakteru v kursu alhebry i pochatkiv analizu. NPU imeni M.P. Drahomanova.
- [22] Shvets V.O., Prus A.V. (2007). Teoriia ta praktyka prykladnoi spriamovanosti shkilnoho kursu stereometrii. ZhDU im. I. Franka.
- [23] Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 293–301.
- [24] García, F.J., Gascón, J., Ruiz, Higuera, L., Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 226-246.
- [25] Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.