

Keywords. environmental education, training of a future specialist, professional education of a teacher, student.

References (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- [1] Kazanishena N. Environmental training of students is an important prerequisite for solving environmental problems of today. Preparation of the future teacher of natural sciences in the conditions of simulation of the educational environment, XI Karyshyn readings: Collection. of science works Poltava 2004. 408-410.
- [2] Tarasenko H.S. Relationship between aesthetic and ecological teacher training in the professional education system: Monograph. Cherkasy: "Vertical", published by PP Kandych S.G., 2006. 308.
- [3] Lukash L. Formation of ecological consciousness among future economists. The educational system of Ukraine in the conditions of globalization: state of affairs and forecasts: Progr. and materials of the XIV International student, scientist conf. (Kharkiv) April 21, 2007 / Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv. region Mr. Administration, Council of Rectors of Kharkiv. region, Nar. Ukrainian Acad.; [Editor: V. I. Astakhova and others]. X.: Izd-vo NUA, 2007. 62.
- [4] T.D. Radchenko Sustainable Development and Environmental Education. Availability and continuity of environmental education - the need of the hour: All-Ukrainian scientific and practical conference. Transcarpathia July 4-7, 2004 Uzhhorod, 2005. 13-17.
- [5] Diordieva G. Conditions for improving environmental competence of students - future teachers. Preparation of the future teacher of natural sciences in the conditions of simulation of the educational environment, XI Karyshyn readings: Collection. of science works Poltava 2004. 387-389.
- [6] Shved M. Environmental education abroad and in Ukraine. Lviv: ed. "world", 1997. 106.

УДК [37.016:514]

DOI: 10.31652/2412-1142-2024-71-157-170

Ленчук Іван Григорович

доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії,

Житомирський державний університет імені Івана Франка,

м. Житомир, Україна

ORCID ID: 0000-0003-1923-9540

lench456@gmail.com

КУЛЬТУРА ВИКОНАННЯ РИСУНКІВ У ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Анотація. Сучасні учні 7-9 класів ЗЗСО розв'язують, головним чином, планіметричні задачі на обчислення мінімального рівня складності. Їх практично не навчають доводити, не говорячи вже про те, що задачі на побудову для вчорашніх випускників середньої школи є справжнім «камнем спотикання». Виконуючи контрольні роботи з дисципліни «Елементарна геометрія», більшість першокурсників університету не в змозі розв'язувати задачі з підручників, за якими навчалися. До того ж, рисунки до будь-якої пропозиції чи то на обчислення, чи на доведення не витримують жодної критики. Поведінка більшості студентів першого курсу проявляється не з кращої сторони. Ми це засвідчуємо, посилаючись на власний досвід спілкування зі студентами при проведенні лекційних і практичних занять. Тому в даному дослідженні ми поставили завдання на конкретних пропозиціях планіметрії продемонструвати надважливу роль правильного і наочного, а отже, якісного моделювання бінарними зображеннями рисунків до теорем і задач. Розглянуто дванадцять прикладів. Розв'язано чотири задачі на обчислення, сім задач на доведення і одну задачу на побудову. Усі задачі олімпіадного змісту, мають підвищений рівень складності. До кожної із задач, ефективно використовуючи можливості текстового редактора Microsoft Word, змодельовано в належному стилі кольорові рисунки. Наведено коментарі про роль і місце рисунка, в ефективному, грамотному його використанні для відшукування оптимального покрокового шляху до результату. Оскільки мова йде про задачі геометричного характеру, в тексті описано деталізовані алгоритми розв'язання кожної з них. Подається постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій, яких, до речі, з даної тематики надто мало в нашій державі. Сформульовано мету напрацювань. На завершення роботи достатньо повно описано висновки та перспективи подальших досліджень в евклідовій геометрії. Наголошено, зокрема, на можливому застосуванні сучасних комп'ютерів, ІКТ та інших новітніх технологічних засобів навчання в роботі як з учнями школи, так і студентами університету.

Ключові слова: планіметрія; конструктивізм задач; моделювання; бінарні рисунки; задачі на обчислення, доведення і побудову.

1. ВСТУП

Постановка проблеми. Учителю ЗЗСО, викладачу університету достеменно відомо, що без якісно виконаного рисунка до геометричної теореми чи задачі важко, інколи навіть неможливо, обґрунтувати хід міркувань на шляху до очікуваного результату. Однак у навчальних програмах відсутня тема правильного, вираженого виконання рисунків, автори програм чомусь не звертають увагу на схожі «дрібниці». Учні переважно ставляться до рисування в геометрії несумлінно, без почуття відповідальності. Причину такого стану речей, у першу чергу, варто шукати у відсутності належних вимог учителя до учнів, у розв'язуванні задач в один-два кроки як у класі, так під час виконання домашніх завдань.

Працюючи із планіметричними фігурами у вирішенні будь-яких пропозицій, потрібно на бінарних моделях (рисунках), які є зображеннями фігур, дотримуватися зазначених в умові взаємних розташувань та, в переважній більшості випадків, метричних співвідношень між окремими їх елементами. Маємо на увазі, що рівні кути чи відрізки на рисунку мають бути справді рівними, прямі кути – прямими, паралельні прямі – паралельними, дотичні до кола – дотичними тощо. Так, за вказаних умов рисунок матиме статус правильного і наочного. Навіть сторонній спостерігач сприйматиме геометричний об'єкт таким, яким він є насправді. За такого підходу до рисування стандартизовані лінії («риски») визначених типів, а також традиційно вживані, прийняті в геометрії умовні позначення будуть важливими додатковими засобами поліпшення якісного візуального виконання та прочитання рисунка.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. «Моделювання в широкому сенсі – це особливий пізнавальний процес, метод теоретичного та практичного опосередкованого пізнання, коли суб'єкт замість безпосереднього об'єкта пізнання вибирає чи створює схожий з ним допоміжний об'єкт-замісник (модель), досліджує його, а здобуту інформацію переносить на реальний предмет вивчення. Моделювання – це процес створення та дослідження моделі, а модель – засіб, форма наукового пізнання» [Вікіпедія].

Питанням презентації в освітньому процесі візуальної грамотності, її експлуатації в **культурі мислення** приділяють помітну увагу вчені [1-8].

У навчанні геометрії, окрім доведень, обчислень і побудов, не менш затребуваною є «**візуальна культура**» освітян. «Важливою формою активізації освітнього процесу в середній і вищій школі сьогодні постає візуальна грамотність. Актуальним завданням педагогічної діяльності є осмислення практики освітнього процесу, в якому візуальний аспект набуває дедалі більшої ваги. Це означає трансформацію традиційних форм і способів навчання до вимог візуальної культури, яка сьогодні набирає дедалі більшої сили впливу і значення, оскільки демонструє перехід до нових педагогічних технологій» [1, с. 1].

Ми, у свою чергу, неодноразово відмічали, що «рисунок у геометрії представляє собою умовне графічне зображення фігури чи комбінації кількох фігур. Це не розмальовка і не живописний твір, не картина й не ілюстрація до книги, ба – навіть не спеціальна зарисовка. Його призначення чітке і однозначне: візуальне поінформування студента (учня) стосовно **істинних** взаємних розміщень, форми й розмірів геометричної конструкції та, зокрема, її визначальних елементів. Набуті знання, навички роботи з рисунком і добре розвинена інтуїція ефективно сприятимуть «баченню» розумом ситуації, яка склалася, що налаштовує уявлення, упорядковує закономірну логіку міркувань й підказує покроковий шлях алгоритмізованого розв'язання задачі» [9, с. 27].

Ми досягнули певних успіхів у розробленні теорії та практики моделювання не лише площинних, але й просторових геометричних об'єктів, напрацювали підходи до розв'язування різнохарактерних задач планіметрії та стереометрії конструктивними методами [10-15].

Достатньо якісний рисунковий супровід викладеного теоретичного матеріалу й задач можна спостерігати також у підручниках для 7-9 класів (див., напр., [16, 17]).

Шкода, що стиль конструктивізму, як форма наочно-образної візуалізації (унаочнення) геометричних пропозицій, поки що недостатньо поцінований. У ЗЗСО та ЗВО ним майже не користуються. Учитель (викладач) традиційно не приділяє належної уваги процесу якісного виконання рисунків, хоча й істинно переконаний, що об'єктом геометрії є **фігура**, а головним засобом навчання – **рисунок**.

Метою даного дослідження є демонстрація на прикладах стрижневої ролі візуальної культури вчителя (учня) в ретельному моделюванні планіметричних рисунків, у творчому конструюванні чітких правил-орієнтирів образно-уявлюваних, побудовних і формально-логічних дій у пошуку шляхів розв'язання задач «із родзинкою».

Увага до задач «із родзинкою» надто важлива, оскільки жоден фахівець не сумнівається, що змістовно прості геометричні пропозиції, які мають мінімальний рівень складності чи розв'язуються за усталеним зразком, ніяк не відповідають діяльнісному принципу навчання, не сприяють розвитку особистості. Геометрична суть задачі, її структуроване розв'язування піддається покроковій алгоритмізації, розшифруванню змісту, завдячуючи, у першу чергу, як не дивно, старанному виконанню адекватного умові **рисунка** та відмінно поставленим уявленню й логічному мисленню. Не секрет, що перш ніж виконувати рисунок, учню потрібно ретельно проаналізувати умову задачі.

2. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Подаємо спочатку кілька задач на обчислення.

Приклад 1. Паралелограм $ABCD$ і ромб $AB_1C_1D_1$ мають спільний кут A . Відомо, що BD паралельна CC_1 . Нехай P є точкою перетину прямих AC і B_1C_1 , а Q – прямих AC_1 і CD . Знайти градусну міру кута AQP .

Лише якісне, акуратне виконання рисунка в цій задачі зорієнтує учня на майже **очевидні** міркування на шляху до результату.

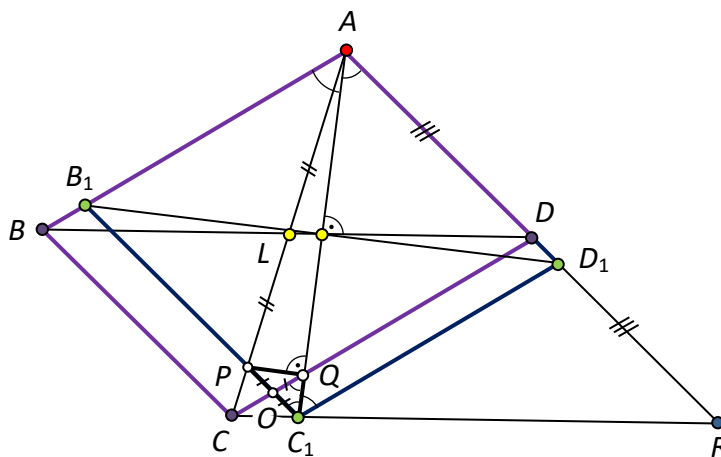


Рис. 1

Проаналізуємо умову задачі та зробимо певні висновки (рис. 1). Відмітимо точки: $L = AC \cap BD$, $O = CQ \cap PC_1$, $R = AD \cap CC_1$. Констатуємо, що $AL = LC$ і $LD \parallel CR$, звідки (за теоремою Фалеса) $AD = DR$. Отже, CD є медіаною трикутника ACR , а CO – медіаною трикутника PCC_1 , адже $PC_1 \parallel AR$. Таким чином, $PO = OC_1$ (*). Неважко також побачити, що $\angle OQC_1 = \angle QC_1D_1$ (як внутрішні різносторонні при

паралельних прямих CD і C_1D_1). Однак у ромба $AB_1C_1D_1$ кожна з діагоналей ділить пару протилежних кутів навпіл, тому маємо: $\angle QC_1D_1 = \angle OC_1Q$. Констатуємо факт, що трикутник OC_1Q – рівнобедрений, де $OC_1 = OQ$ (**). Остаточо з рівностей (*) і (**) випливає, що точка O є центром кола, описаного навколо трикутника PQC_1 , звідки й отримуємо: кут PQC_1 , що спирається на діаметр PC_1 кола, дорівнює 90° . Оскільки кут AQC_1 розгорнутий, то $\angle AQP = 90^\circ$.

Приклад 2. У накреслене коло вписано п'ятикутник $ABCDF$. Точки M , Q , N і P є основами перпендикулярів, опущених із вершини F відповідно на сторони AB , BC , CD (чи на їх продовження) і на діагональ AD . Відомо, що $FP = d$, а $S_{\Delta MQF} : S_{\Delta PNF} = k$. Знайти довжину відрізка MF .

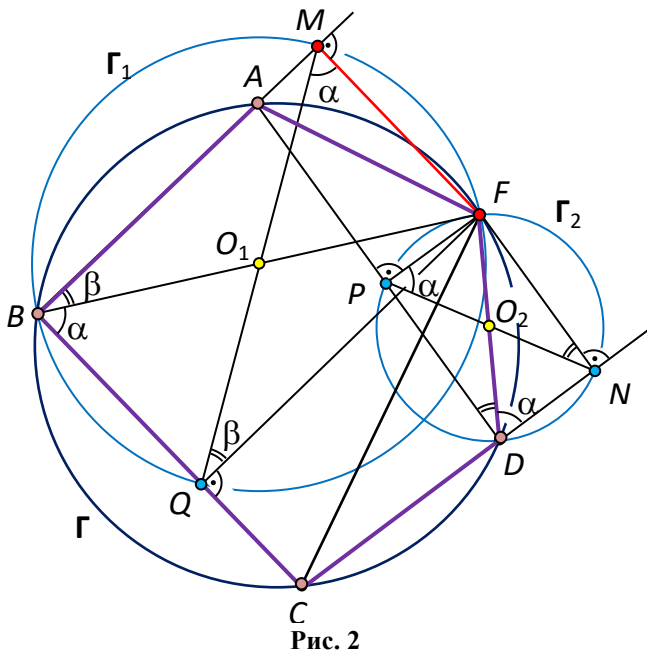


Рис. 2

Хоч задача за своїм змістом не надто складна, проте без якісного, акуратно виконаного рисунка розв'язати її дуже не просто. Аналізуючи в міркуваннях дані умови синтетичним шляхом та оглянувши уважно рисунок 2, можна висунути гіпотезу, спрогнозувавши при цьому подібність трикутників MQF і PNF , лінійні елементи яких відносяться як $\sqrt{k}$ (за теоремою про площі подібних фігур). Отже, уважно споглядаючи рисунок, доведемо це припущення.

Відразу неважко помітити, що чотирикутник $FMBQ$ є вписаним у коло Γ_1 із діаметром FB , адже $\angle FMB + \angle BQF = 180^\circ$. Схожа ситуація з чотирикутником $FPDN$, який уписаний у коло Γ_2 з діаметром PN ($\angle FPD + \angle DNF = 180^\circ$).

Звідси з урахуванням фактів, що вершини чотирикутника $FBCD$ належать колу Γ і кут CDN – розгорнутий, випливає: $\angle FMQ = \angle FBQ = 180^\circ - \angle FDC = \angle FDN = \angle FPN$. Аналогічно, скориставшись колами Γ_1 і Γ_2 й візуально зафіксувавши, що кути FBA і FDA спираються на одну і ту саму дугу кола Γ , матимемо ще й інший ланцюжок рівностей: $\angle FQM = \angle FBA = \angle FDA = \angle PNF$. Отже, трикутники MQF і PNF істинно подібні (за двома кутами) з коефіцієнтом подібності $\sqrt{k}$. Таким чином, $\frac{FM^2}{FP^2} = \frac{FM^2}{d^2} = S_{\Delta MQF} : S_{\Delta PNF} = k$. Звідси остаточно дістанемо, що $MF = d \cdot \sqrt{k}$.

Приклад 3. Два кола з радіусами R і r перетинаються. A є однією з точок перетину цих кіл, а BC – їх спільна дотична в точках B і C . Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC .

Нехай на рисунку 3 кола $\Gamma_1(O_1, R)$ і $\Gamma_2(O_2, r)$ зображено й вони перетинаються в точках A і A_1 , а BC є їх спільною дотичною. Відомо, що шуканий радіус ρ кола $\Gamma(O, \rho)$, описаного навколо трикутника ABC , можна обчислювати за формулою: $\rho = \frac{BC}{2 \cdot \sin \angle BAC}$ (*).

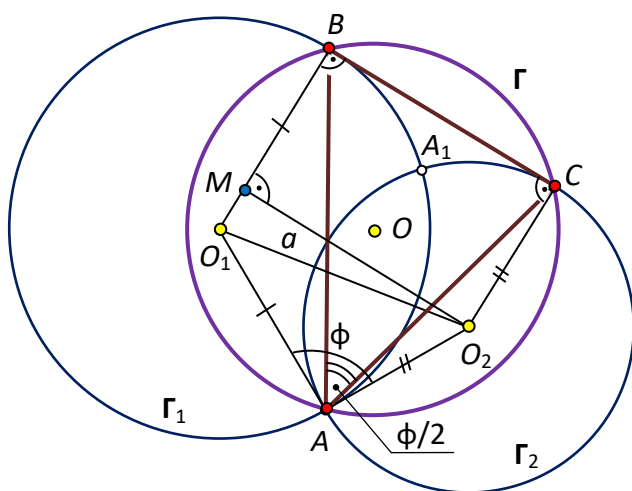


Рис. 3

Для зручності в записях, введемо позначення: $O_1O_2 = a$, $\angle O_1AO_2 = \varphi$, а через центр O_2 кола Γ_2 проведемо пряму паралельну BC до перетину в точці M із радіусом O_1B кола Γ_1 . Тоді напевне, що фігура O_2MBC буде прямокутником, а O_2MO_1 – прямокутним трикутником із катетами $O_2M = BC$ та $O_1M = R - r$. Отже, матимемо: $BC = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ (**).

Тепер зосередимо увагу на трикутниках AO_1B і AO_2C , які є рівнобедреними, а також – на трикутнику O_1AO_2 . В останньому (за теоремою косинусів) отримаємо: $\cos \varphi = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}$ (***) . У кожному із двох перших

трикутників кути при основах AB і AC відповідно рівні, тому матимемо таке: $\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCA = 180^\circ - (90^\circ - \angle ABO_1) - (90^\circ - \angle ACO_2) = \angle ABO_1 + \angle ACO_2 = \angle BAO_1 + \angle CAO_2 = \angle O_1AO_2 - \angle BAC = \varphi - \angle BAC \Rightarrow 2\angle BAC = \varphi \Leftrightarrow \angle BAC = \frac{\varphi}{2}$ (очевидно, що для точки

$A_1 \angle BA_1C = 180^\circ - \frac{\varphi}{2}$). Не секрет також, що $\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$, а $\sin(180^\circ - \frac{\varphi}{2}) = \sin \frac{\varphi}{2}$. Підставивши знайдені результати у формулу (*) та виконавши прості перетворення, остаточно отримаємо: $\rho = \sqrt{Rr}$.

Отже, радіус кола Γ є середнім геометричним відносно радіусів заданих кіл Γ_1 і Γ_2 .

Уже вкотре звертаємо увагу читача на особливу роль ретельно виконаного рисунка в пошуку розв'язку задачі.

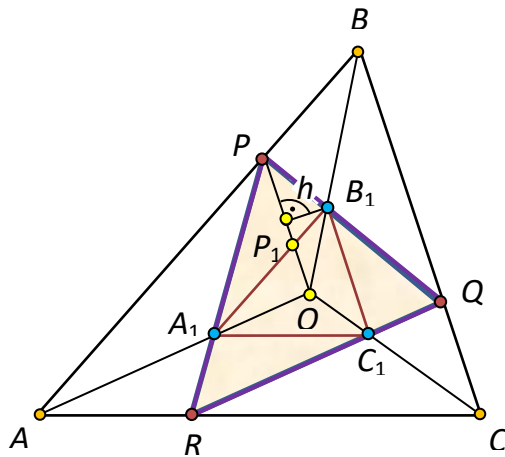


Рис. 4

Приклад 4. На сторонах AB , BC , CA трикутника ABC узяті точки P , Q , R відповідно, а на відрізках RP , PQ , QR – точки A_1 , B_1 , C_1 таким чином, що $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$. Площі трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно дорівнюють a та b . Знайти площу трикутника PQR .

Очевидно, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ гомотетичні з центром гомотетії в точці $O = AA_1 \cap BB_1$ ($O \in CC_1$) і коефіцієнтом гомотетії $k = \frac{OA}{OA_1}$ (рис. 4).

Здавалося б, як пов'язати зумовлену гомотетію із площею трикутника PQR ? Проста **добудова** рисунка та трохи уявлення й логіки міркувань дозволяють побачити і, навіть, результативно реалізувати цей зв'язок.

Оскільки відомо, що $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = a : b$, то довжини відповідних лінійних елементів заданих трикутників відносяться як $\sqrt{\frac{a}{b}}$. З'єднаємо, наприклад, точки P й O

відрізком і зафіксуємо його перетин з A_1B_1 : $P_1 = PO \cap A_1B_1$. Нами вже з'ясовано, що $\frac{PO}{P_1O} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Однак трикутники POB_1 і P_1OB_1 (див. рис.) мають спільну висоту h , тому $\frac{S_{\triangle POB_1}}{S_{\triangle P_1OB_1}} = \frac{\frac{1}{2}PO \cdot h}{\frac{1}{2}P_1O \cdot h} = \frac{PO}{P_1O} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Міркуючи аналогічно стосовно кожного із решти трикутників QOB_1 , QOC_1 , ROC_1 ,

ROA_1 і POA_1 , прийдемо до висновку, що $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Звідки остаточно маємо: $S_{\triangle PQR} = b \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab}$.

Далі наведемо приклади розв'язання кількох оригінальних задач на **доведення**, що помітно різняться за змістом і ступенем складності.

Приклад 5. На гіпотенузі прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) узяті точки K і N . Доведіть, що коли ортоцентри трикутників BCK і ACN збігаються, то $\tan^2 \angle A = \frac{BN}{AK}$.

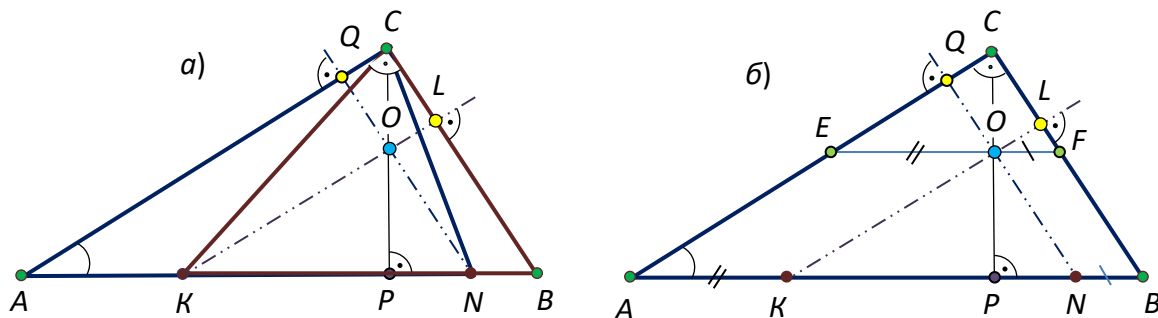


Рис. 5

У перше чергу на чітко виконаному рисунку 5 помічаємо те, що трикутники BCK і ACN мають спільну висоту (CP), яка є одночасно висотою заданого трикутника ABC і проведена з вершини прямого кута C на гіпотенузу AB .

Нехай ортоцентром трикутників з умови є точка O перетину висот KL ($\triangle BCK$) і NQ ($\triangle ACN$) з їх висотою CP . Проведемо через точку O в межах даного трикутника ABC відрізок EF , що паралельний AB , тобто виконаємо просту допоміжну побудову (рис. 5, б). Зауважимо, що навички і вміння здійснювати такі (й схожі до них) побудови рисунків часто-густо призводять до відшукування шляху розв'язання задачі. Тепер помічаємо, що чотирикутники $AEOK$ і $BFON$ є паралелограмами. Отже, в них $EO = AK$ й $FO = BN$. До того ж, $\triangle ECF \sim \triangle ACB$. Звідси $\frac{EF}{AB} = \frac{CO}{CP}$ або, дещо по іншому, $\frac{AP}{EO} = \frac{CP}{CO} = \frac{BP}{FO} \Leftrightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{FO}{EO} = \frac{BN}{AK}$. Таким чином, залишилося довести, що $\tan^2 \angle A = \frac{BP}{AP}$. Але ж кожен із катетів прямокутного трикутника ABC є середнім геометричним між його гіпотенузою та власною проекцією на гіпотенузу. Тобто $AC^2 = AB \cdot AP$ і $BC^2 = AB \cdot BP$. Отже, остаточно дістанемо: $\tan^2 \angle A = \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BP}{AP}$, що й потрібно було довести.

Приклад 6. У задане коло Γ вписано гострокутний трикутник PNK . Діаметр NM цього кола перетинає сторону PK у точці A . На меншій із дуг PN обрано довільну точку H і навколо трикутника PNA описане коло Γ_1 , яке перетинає прямі MN і PN у точках B і D відповідно. На відрізку BN як на діаметрі побудоване коло Γ_2 , котре перетинає прямі PN і NK у точках F і Q відповідно. Відрізок FQ перетинає діаметр MN у точці C . Пряма CD перетинає коло Γ_1 , описане навколо трикутника PAN , у точці E ($E \neq D$). Довести, що точки H, E, N лежать на одній прямій.

Відверто кажучи, перше прочитання схожої задачі може шокувати учня громіздкістю її умови, перенаповненням конструкції фігурами та їх окремими елементами. Однак слід розуміти, що так (і не інакше) подається деталізований алгоритм побудови супутнього зображення. А тому осмислення суті умови, ретельний, виважений аналіз ситуації й надто акуратне виконання рисунка приводять, як правило, до позитивного результату. Читачеві ж залишається тільки уважно вивчити вже вербально та візуально змодельовану реальність у покроковому її співставленні з указаними даними (рис. 6).

Міркуючи від умови, варто вдумливо аналізувати факти, наявні в такій ситуації, і фіксувати суть важливих, наслідків з них. Отже, спочатку впадає у вічі гомотетичність кіл Γ_2 і Γ , з центром N і коефіцієнтом гомотетії $k = NB : NM$ (для учня без досвіду – найважчий момент у читанні креслення). Звідси маємо, що $FQ \parallel PK$, а $\angle KPN = \angle QFN$. Оскільки чотирикутник $APDB$ вписаний в коло Γ_1 , то $\angle APD + \angle ABD = 180^\circ$, але кут MBN – розгорнутий, тому $\angle DBC = \angle KPN$. Таким чином, отримаємо $\angle QFN = \angle DBC$. Тепер зосередимося на чотирикутнику $BFDC$. За доведеним, його сторону DC із точок B і F видно під рівними кутами, отже цей чотирикутник теж вписаний. Але $\angle BFN = 90^\circ$ (як такий, що спирається на діаметр BN кола Γ_2), а тому протилежний йому кут DCB також прямий ($\angle DBC = 90^\circ$). Крім того, $\angle MHN = 90^\circ$, що очевидно.

Якщо в подальших міркуваннях пощастить з'ясувати, що й $\angle MHE = 90^\circ$, то це означатиме колінеарність точок H, E і N (що природно, адже промені HN і HE зіллються). Із рисунка вочевидь впливає факт, що $\angle HPN = \angle HMN$ (як кути, котрі спираються на одну дугу кола Γ). Для зручності позначимо ці кути через φ . Тоді матимемо $\angle HED = 180^\circ - \varphi$ (тому, що $\angle HPD + \angle HED = 180^\circ$ у колі Γ_1). Оскільки $\angle HMC + \angle HEC = \varphi + 180^\circ - \varphi = 180^\circ$, то чотирикутник $MHEC$ також – вписаний, а через це $\angle MHE = 180^\circ - \angle MCE = 90^\circ = \angle MHN$. До отриманого факту, власне, й зводилося доведення.

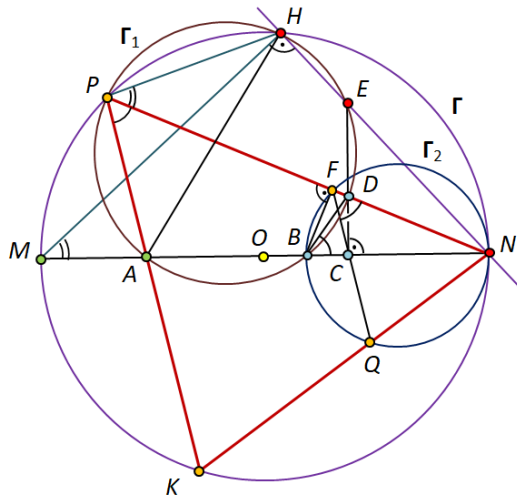


Рис. 6

Приклад 7. У трикутнику ABC проведено медіану BM і бісектрису BL ($L \neq M$). На прямій BM відмітили точку E таку, що $LE \parallel BC$. Із точки E опустили перпендикуляр ED на пряму BL . Потрібно довести, що $MD \parallel AB$.

Тут, як власне у кожній задачі «з родзинкою», надто важливо покроково змодельовати умову акуратним рисунком й аналізуючи, вміло виконати доречні додаткові побудови.

Отже, вже відомо, що $LE \parallel BC$, а $ED \perp BL$ (рис. 7). Додатково проведемо через точку E паралельно AB пряму t і зафіксуємо її точки P і Q перетину із прямими AC і BL відповідно. Тоді, двічі підряд скориставшись властивістю пар паралельних прямих і даними умови, дістанемо: $\angle EQL = \angle ABL = \angle CBL = \angle ELQ$. Таким чином, маємо, що трикутник EQL – рівнобедрений, в якого $QD = DL$. Уважно прочитуючи рисунок, помічаємо дві пари подібних трикутників MPE і MAB , MLE і MCB . Звідси $\frac{MP}{MA} = \frac{ME}{MB} = \frac{ML}{MC}$. Однак, згідно з умовою, відомо, що $MA = MC$. Тому $MP = ML$, а MD буде середньою лінією трикутника PQL . Остаточно отримаємо: $MD \parallel PQ \parallel AB$, що й потрібно було довести.

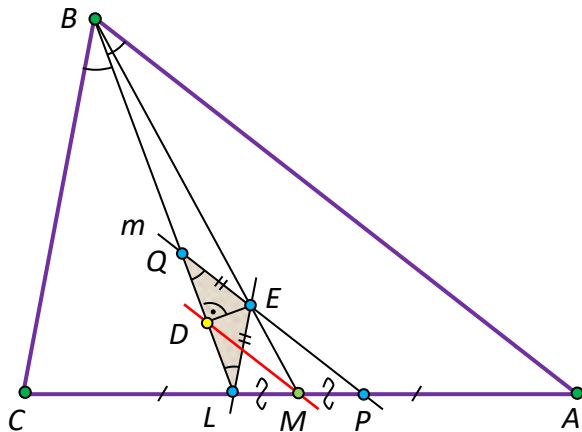


Рис. 7

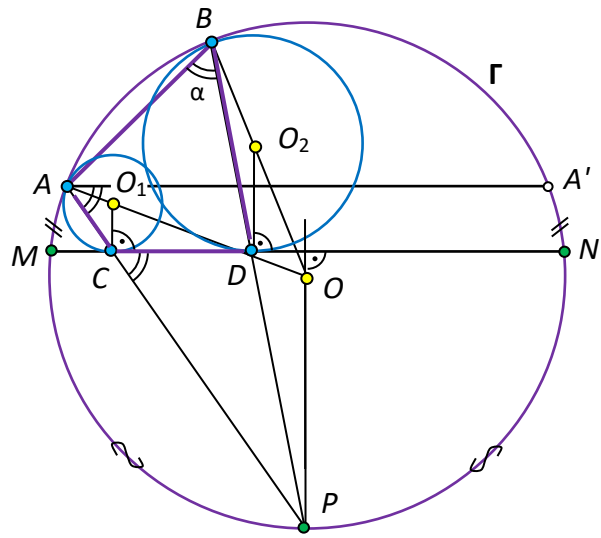


Рис. 8

Приклад 8. У сегмент кола (O) , що обмежений хордою MN , уписано два кола (O_1) і (O_2) , які дотикаються до кола (O) в точках A і B , а хорди MN – у точках C і D . Довести, що точки A, B, D і C лежать на одному колі.

Ключ до розв'язання задачі вміщує рисунок, тому потрібне його якісне виконання, розуміння та грамотне прочитання *конструкції*, навички і вміння міркувати, виконувати доречні додаткові побудови. Отже, основні факти на шляху до результату слід черпати з рисунка, оскільки після його моделювання формальна складова задачі набуває статусу елементарної. Обґрунтуємо щойно сказане.

Нехай сегмент даного кола Γ обмежений хордою MN , а $O_1C \perp MN$ і $O_2D \perp MN$, де O_1C та O_2D – радіуси кіл (O_1) і (O_2) відповідно (рис. 8).

Неважко побачити, що кожне з кіл (O_1) і (O_2) гомотетичне базовому колу (O) . Так, $H_A^{AO_1}(O_1) = (O)$ і $H_B^{BO_2}(O_2) = (O)$, тому образом кожного з радіусів уписаних кіл $(O_1C$ і $O_2D)$ є один і той самий радіус OP базового кола. Тут $OP \parallel O_2D$, $OP \parallel O_1C$ та, звичайно ж, $OP \perp MN$. Якщо тепер (додатково) через точку A провести хорду AA' кола (O) так, щоб AA' була паралельна MN , то легко можна констатувати, що дуга AMP рівна дузі $A'NP$, через що маємо $\angle A'AP = \angle ABP = \alpha$. Проте $\angle A'AP = \angle NCP$ (як відповідні кути при паралельних прямих AA' і MN), а кут ACP – розгорнутий і $\angle ACD = 180^\circ - \alpha$. Таким чином, остаточно матимемо таке: $\angle ABP + \angle ACD = 180^\circ$ й чотирикутник $ABDC$ є вписаним, що й потрібно було довести.

Приклад 9. Два кола Γ_1 і Γ_2 перетинаються в точках A і B . Довільна пряма, що проходить через точку B , повторно перетинає Γ_1 у точці C , а Γ_2 – у точці D . Дотична до Γ_1 у точці C і дотична до Γ_2 у точці D перетинаються в точці M . Через точку O перетину AM і CD проходить пряма, паралельна CM , яка перетинає AC у точці K . Доведіть, що KB дотикається Γ_2 .

Узагалі, висновок задачі (в її умові) оформлено не однією, а двома останніми фразами. Цікаво, що подати його можна було по іншому: *В точці B до кола Γ_2 проведено дотичну, яка перетинає AC у точці K. Довести, що KO паралельна CM.* Два взаємно обернені висновки – еквівалентні в даній задачі, тому розв'язання можна вести для будь-якого з варіантів. Якщо, все ж таки, зупинитися на другому з них, то щоб довести факт паралельності прямих CM і KO , достатньо показати, що $\angle AOK = \angle AMC$ (рис. 9).

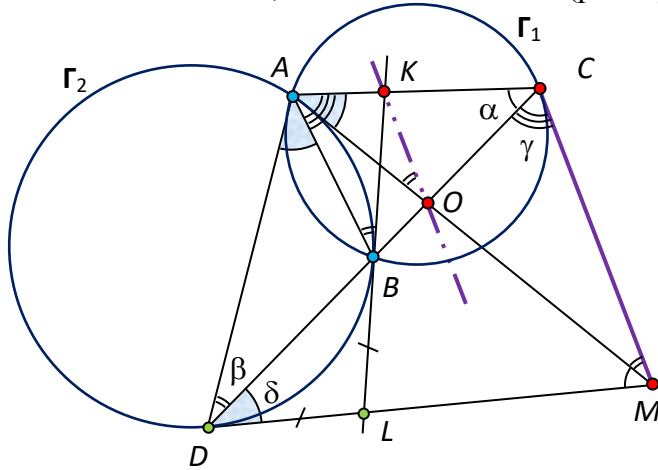


Рис. 9

Для зручності проведення аналізу (за рисунком) і компактності в записях, введемо такі позначення. Нехай кут $\angle ACO$, що спирається на дугу AB кола Γ_1 , дорівнює α , а кут $\angle ADB$, що спирається на дугу AB кола Γ_2 , дорівнює β . Крім того, нехай також $\angle BCM = \angle BAC = \gamma$ (дуга BC кола Γ_1), а $\angle BDM = \angle DAB = \delta$ (дуга BD кола Γ_2). Нарешті, літерою L позначимо точку перетину дотичних до кола Γ_2 в точках D і B відповідно.

Далі накопичуємо факти і робимо кваліфіковані висновки.

Користуючись рисунком, а також врахувавши позначення, не важко побачити, що $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = \gamma + \delta$. У свою чергу, із трикутника CDM випливає, що $\angle DMC = 180^\circ - (\gamma + \delta) = 180^\circ - \angle DAC$. Отже, чотирикутник $DACM$ – вписаний, звідки $\angle DMA = \angle ACD = \alpha$, а $\angle ADC = \angle AMC = \beta$ (*).

Привертає до себе увагу трикутник DBL . Він рівнобедрений, оскільки утворений двома дотичними до кола Γ_2 і хордою, котра з'єднує точки дотику. Тому $\angle DBL = \angle BDL$, але $\angle DBL = \angle KBO = \delta$ (як вертикальні). З тієї ж причини $\angle AOC = \angle MOD$. Однак у трикутнику MOD $\angle MOD = 180^\circ - (\alpha + \delta)$, а у трикутнику AOC $\angle AOC = 180^\circ - (\alpha + \angle OAC)$, тож звідси маємо: $\angle OAC = \delta$. Помічаємо також, що кут $\angle ABO$, з одного боку, є зовнішнім для трикутника ABD , тому $\angle ABO = \beta + \delta$, а з іншого, $\angle ABO = \angle ABK + \delta$. Отже, $\angle ABK = \beta$.

Із того, що відрізок KO з точок A і B видно під одним і тим самим кутом δ , випливає, що чотирикутник $ABOK$ теж вписаний. Це ж означає, що відрізок AK з інших двох його вершин B і O теж видно під одним кутом β , адже доведено, що $\angle ABK = \beta$, тому й $\angle AOK = \beta$ (**).

Отримані результати (*) і (**) якраз і є свідченням того, що прями KO і CM паралельні, адже для цих прямих відповідні кути $\angle AMC$ і $\angle AOK$ (при січній CD) рівні між собою.

Приклад 10. На катетах AC і BC заданого прямокутного трикутника зовні його побудовано квадрати $ACKL$ і $BCMN$. Довести, що чотирикутник, обмежений катетами і двома прямими LB та NA , рівновеликий трикутнику, котрий утворено гіпотенузою AB й тими ж прямими LB і NA .

Для зручності в подальших записях введемо позначення: $P = LB \cap AC$, $R = LB \cap AN$ і $Q = AN \cap CD$. Нехай також $CB = a$ і $AC = b$.

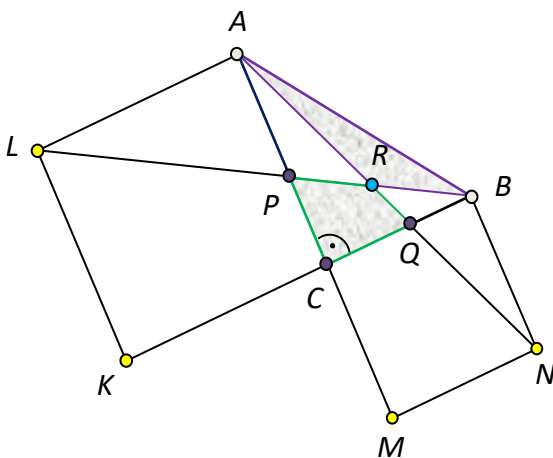


Рис. 10

Уважно оглядаючи рисунок 10, не важко помітити, що пошук розв'язку зводиться до встановлення рівновеликості трикутників ABP і AQC , оскільки кожен із них уміщує спільний компонент – трикутник APR . Кидаються у вічі також дві пари подібних трикутників LKB і PCB , AMN і ACQ . Із подібності першої пари маємо: $\frac{LK}{PC} = \frac{KB}{CB}$, а з подібності іншої пари – $\frac{AM}{MN} = \frac{AC}{CQ}$. Але $LK = AC = b$, $KB = AM = a + b$, а $CB = MN = a$. Звідси прямо випливає, що $PC = CQ$ і $PC = \frac{LK \cdot CB}{KB} = \frac{b \cdot a}{b + a}$. Тепер уже можемо виразити через a і b площі порівнюваних двох трикутників ABP і AQC . При цьому остаточно дістанемо таке: $S_{\Delta AQC} = \frac{1}{2} AC \cdot QC = \frac{1}{2} b \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{ab^2}{2(a+b)}$, а $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ACB} - S_{\Delta PCB} = \frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} a \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{ab^2}{2(a+b)}$. Отже, $S_{\Delta AQC} = S_{\Delta ABP}$. Вилучивши з останніх рівних площ площу трикутника ARP , отримаємо: $S_{PRQC} = S_{\Delta ARB}$, що й потрібно було довести.

Легко помітити, що дана задача на доведення належить до класу геометричних пропозицій на рівновеликість та рівноскладеність багатокутників. Напевно, в кожному із випадків без виваженого моделювання ситуації якісним, завершеним рисунком визначитися з потрібними в міркуваннях поділами обраних фігур на трикутники було б досить непросто.

Тепер розглянемо одну задачу, котру потрібно віднести до міжпредметних чи прикладних, оскільки вона досить тісно пов'язана з фізикою (точніше, з механікою).

Приклад 11. Два велосипедисти їдуть кожен уздовж свого кола із власною постійною швидкістю. Кола перетинаються в точках A і B . Виїхавши одночасно з точки A і зробивши по одному оберту, велосипедисти зустрілися в тій самій точці A . Доведіть, що існує така нерухома точка P , відстань від якої до обох велосипедистів залишається весь час однаковою, якщо вони їдуть: 1) в одному напрямі (проти годинникової стрілки); 2) у різних напрямках.

Уявимо спочатку, що велосипедисти рухаються в одному напрямі, а точки M і N є місцем їх розташування в певний час (рис. 11, а). Якщо ці точки лежать з одного боку від спільної хорди AB заданих кіл, то $\angle ABM = \angle ABN$, адже доля кола Γ_2 в дузі AM і кола Γ_1 – в дузі AN від повного оберту (360°) одна і та сама: $\angle ABM = \frac{1}{2} \angle AO_2M$, а $\angle ABN = \frac{1}{2} \angle AO_1N$. Коли ж точки M і N лежать з різних боків від AB , то $\angle ABM + \angle ABN = 180^\circ$, тобто в кожному з випадків точки B , M і N належать одній прямій. Якщо точки K і L (див. рис.) – діаметрально протилежні (фіксовано відносно точки B), то оскільки $\angle LNM = \angle NKM = 90^\circ$, точка $P = p \cap NM$, як середина відрізка KL , є шуканою, де p – серединний перпендикуляр відрізка NM . Просто переконалися, що точки P і B центрально симетричні також відносно середини відрізка O_1O_2 .

Зауважимо, що точку P (за умови, що P і A лежать з одного боку від O_1O_2 і $P \neq A$) можна було вибирати так, щоб $\Delta O_1PO_2 = \Delta O_1AO_2$. Їх рівність зовсім легко довести, адже O_1PO_2B – паралелограм, O_1O_2 – спільна сторона цих трикутників, а $PO_2 = O_1A = R_1$ і $O_1P = AO_2 = R_2$, що очевидно.

Тепер розглянемо інший випадок, коли велосипедисти рухаються своїми колами в різних напрямках. Нехай O_1 і O_2 – центри кіл Γ_1 і Γ_2 відповідно (рис. 11, б). Виберемо точку P так, щоб чотирикутник O_1AO_2P був паралелограмом. Оглядаючи рисунок, бачимо, що $\Delta MO_1P = \Delta NO_2P$, оскільки $MO_1 = AO_1 = PO_2$, $O_1P = AO_2 = NO_2$, а $\angle MO_1P = \alpha + \angle AO_1P = \alpha + \angle PO_2A = \angle NO_2P$, де α – центральний кут, відповідний дугам, які пройшли кожен із велосипедистів.

Отже, шукана точка P центрально симетрична точці A перетину кіл відносно середини відрізка O_1O_2 .

Доведення завершено.

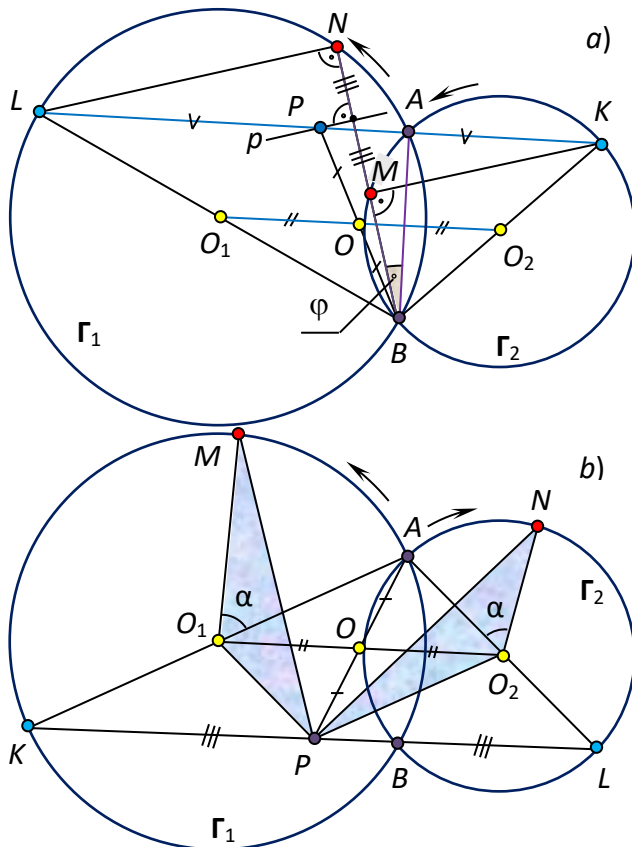


Рис. 11

обов'язковим і вважається найбільш важливим. Не менш важливим є етап **доведення**.

Аналіз. Нехай трикутник ABC задовольняє умову задачі (рис. 12): $BC = a$, $CA = b$, де a , b – задані відрізки, а $\angle CBA = 3\angle CAB$.

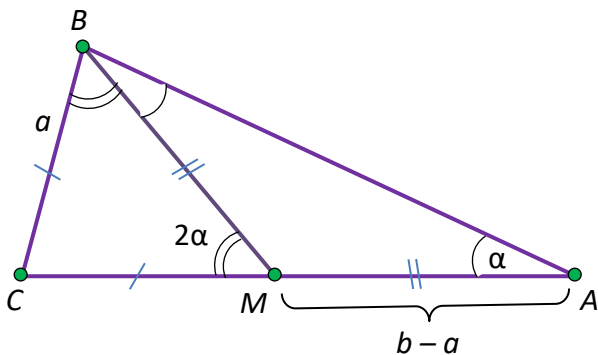


Рис. 12

трикутник ABC задовольняє трьом даним умови задачі.

Доведення. У трикутнику ABC (за кроками побудови) $BC = a$, $CA = a + b - a = b$, що очевидно. Трикутник ABM – рівнобедрений, тому $\angle A = \angle ABM$; кут $СМВ$, як зовнішній для трикутника ABM , у два рази більший кута A . Але ж трикутник $СВМ$ теж рівнобедрений (за побудовою), тому $\angle CBM = 2\angle A$. Отже, $\angle CBA = 3\angle CAB = 3\alpha$.

Дослідження. Задача матиме єдиний розв'язок за умови, що трикутник $СВМ$ (зі сторонами $CB = CM = a$ і $BM = b - a$) існує, тобто коли $2a > b > a$.

Тепер розв'яжемо порівняно просту **задачу на побудову**, яка представлятиме третю групу можливих планіметричних пропозицій. В її вирішенні скористаємося виключно відомими фактами планіметрії.

Приклад 12. Слід побудувати трикутник, якщо задано дві його сторони і відомо, що градусна міра кута навпроти однієї із даних сторін у три рази більша градусної міри кута навпроти іншої сторони.

«Розв'язування задачі полягає не стільки в побудові фігури, скільки в знаходженні способу, як це зробити, і відповідному доведенні. Задача вважається розв'язаною, якщо знайдено спосіб побудови фігури і доведено, що в результаті виконання зазначених побудов справді виходить фігура з потрібними властивостями» [16, с. 67, 68].

Отож, у конструктивних задачах планіметрії найперший етап **аналізу**, який полягає у відшукуванні покрокового способу зображення шуканої фігури, є

Відкладемо від променя BA в півплощину з точкою C $\angle ABM = \angle CAB = \alpha$. Тоді трикутник ABM – рівнобедрений ($AM = BM$). Однак кут BMC є зовнішнім для трикутника ABM . Тому $\angle BMC = 2\alpha = \angle CBM$ (адже за умовою $\angle CBA = 3\angle CAB$). Звідси матимемо: $CM = CB = a$. Отже, $MA = b - a$. У трикутнику BCM усі три сторони відомі, його можна побудувати (1)¹. На промені CM від точки M відкладемо відрізок $MA = b - a$ (2). З'єднаємо точки A та B (3). Стверджуємо, що

¹ У дужках подано кроки етапу «Побудова»

3. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У контексті задач із фізичним змістом доречно пригадати статтю достатньо відомого педагога-геометра Шаригіна І. Ф., який у журналі «Математика в школі» розповів цікаву бувальщину, додавши до неї власні висновки: «Розвиваючи думку Пуанкаре, висловлену ним на початку XX століття (*«Не було б у природі твердих тіл, не було б і геометрії»*), роблячи її в деякому розумінні абсурдною, В. Арнольд у кінці того ж століття говорить про те, що *«Математика – це частина фізики»*. Погоджуючись з цією формулою, я все ж хотів би її продовжити: *«А фізика – частина геометрії»*.

Вболіваючи за місце геометрії в освіті, переймаючись її роллю в особистісному розвитку людини і суспільства в цілому, математик-геометр переконує читача в тому, що саме геометрія в навчанні кожного учня є *«найпершою з наук»*, *«вітаміном для мозку»*. Глибоко розуміючи суть питання і реалії його постановки в сьогоденні, геометр робить висновок: *«Воістину, сучасна цивілізація – це Цивілізація Геометрії»*.

Грамотного вчителя математики неможливо здивувати задачами на обчислення окремих метричних характеристик геометричних фігур чи їх елементів. У природі (та в предметних збірниках) таких задач багато. Наведені в статті приклади різнохарактерні, хоч і відрізняються за ступенем оригінальності та складності. Розуміючи, що вправи такого типу призначені для розвитку наочно-образного і логічного мислення, техніки пошукових операцій, активізації процесу опанування фактів і основних положень планіметрії, все ж ми наголос робили на *рисунковому моделюванні*, якості його здійснення і, як наслідок, – на формуванні усталених навичок умілого, творчого використання учнями візуально представленої інформації при діяльнісному конструюванні правил-орієнтирів розв’язання.

У свою чергу, має місце думка, що всяка геометрична задача на доведення є теоремою. В геометрії доводять майже все, навіть найпростіші, очевидні твердження (окрім аксіом). Не секрет, що геометричні закономірності доводяться помітно легше ніж формально-логічні (приміром, алгебричні). Першопричиною такого стану речей є акуратно, вдумливо, якісно виконаний *рисунок*, який зримо ілюструє сформульовану пропозицію, супроводить у покроковому режимі процес її доведення. Рисунок ще при його виконанні спонукає учня до осмислення геометричної ситуації, допомагає швидше, переконливіше знайти шлях до результату. Через це навіть шкільну евклідову геометрію є можливість розбудовувати на строго науковому рівні (див. [16]). Наразі чимало суть важливих геометричних фактів (окрім стрижневих теорем) автори підручників подають як задачі на доведення. Отже, доведенням у навчанні евклідової геометрії відведена вельми важлива роль.

До слова, ще на початку XIX століття видатний норвезький математик («абстрактний логіст» – за покликанням і результатами досліджень) Н. Г. Абель (1802-1829 рр.) наголошував, що *«Геометрія – це мистецтво якісно розмірковувати на не надто якісно виконаних кресленнях»*. По-іншому це може означати, що рисунок, виконаний переважно «від руки», є і «базисом», і «надбудовою» найпершого із предметів.

Ставлячи перед собою завдання продемонструвати кожною оригінальною пропозицією планіметрії *значимість конструктивного компоненту*, ми підкреслювали роль навичок й умінь якісного рисункового моделювання учнями ситуацій та ефективного, виваженого використання зображення в пошуку шляхів їх вирішення. Не слідуючи строго за схемами методичних ліній аналізу й синтезу в досягненні результату, схилилися до міркувань аналітико-синтетичним методом, без чіткого дотримання його канонів (накопичування фактів). Оскільки одним із головних критеріїв усталеного оволодіння практичною складовою евклідової геометрії визнано навченість професійно здійснювати аналіз умови задачі (обов’язково з допомогою акуратно й правильно виконаного рисунка), в усіх розв’язаних вище прикладах цьому етапу надавалось достатньо місця з належними коментарями.

Привертаємо увагу вчителя, студента (а отже й учня) до прикладів, в яких стрижневу роль відігравали перетворення фігур на площині. Таких задач небагато. Перетворення – це основа-основ геометрії. Не варто нехтувати можливістю діяльнісно досягнути порівняно

непросте (природне) питання теорії курсу геометрії, вільно чи невільно оминаючи схожі вправи. Навпаки, чим частіше той хто вчиться користується специфічним динамічним дійством подібності (гомотетії чи руху) на різнохарактерних і різного рівня складності рисункових моделях, тим повніше й детальніше пізнаються чудові закони та несуперечливі, строго обґрунтовані правила, стає відчутно близькою образно-логічна досконалість і справжня, не завуальована **краса диво-науки**, яку з незапам'ятних часів називають «Геометрія».

У перспективі подальших досліджень плануємо вести системну роботу в напрацюванні методичних прийомів розв'язування й покрокової екранізації у відомих програмних середовищах та в мультимедійному просторі планіметричних і стереометричних задач як графічними, так і графоаналітичними методами. Маємо також плани типізації планіметричних задач на побудову за методами їх розв'язання, наступної алгоритмізації та комп'ютерного моделювання процесу, що веде до результату.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] В. Г. Кремень, & В. В. Ільїн, (2020). «Презентація візуальної грамотності в освітньому процесі та її експлуатація в культурі мислення». Інформаційні технології і засоби навчання, 75(1), 1-12. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.3660>.
- [2] D. Hattwig, K. Bussert, A. Medaille, & J. Burgess, (2013). «Visual Literacy Standards in Higher Education: an Opportunities for Libraries and Student Learning». Libraries and the Academy, Vol. 13, No. 1 pp. 61-89.
- [3] Callow, J. (2008). Show Me: Principles for Assessing Students' Visual Literacy. *The Reading Teacher*, 61(8), 616–626. [Електронний ресурс]. Доступно: DOI: <https://doi.org/10.1598/RT.61.8.3>.
- [4] U. Boden, & L. Stenliden, (2019). Emerging Visual Literacy through Enactments by Visual Analytics and Students. *Designs for Learning*, 11 (1), pp. 40-50. [Електронний ресурс]. Доступно: <http://www.designsforlearning.nu/article/10.16993/dfl.108/>.
- [5] Richard S. Palais, (1999). «The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium», *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46 (6), pp. 647–658.
- [6] M. Sturken, (2001). «Practices of Looking: An Introduction in Visual Culture». New York: Oxford University Press, 496 p.
- [7] Л. І. Белоусова, Н. В. Житенева, (2017). «Функціональний підхід до використання технологій візуалізації для інтенсифікації навчального процесу». Інформаційні технології і засоби навчання, 57(1), 38-49. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://doi.org/10.33407/itlt.v57i1.1525>.
- [8] Т. І. Коваль, & О. П. Бесклінська, (2020). «Використання засобів візуалізації для створення електронних освітніх ресурсів у процесі навчання математичних дисциплін у закладах вищої освіти». Інформаційні технології і засоби навчання, 77(3), 145-161. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3411>.
- [9] І. Г. Ленчук, М. В. Працьовитий, (2017). Роль рисунка в задачах планіметрії. Вид-во: «Педагогічна преса». Наук.-метод. журнал «Математика в рідній школі». №6. С. 26-32.
- [10] Боравльов А. П., Ленчук І. Г., (2002). Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ. К.: Вища школа. 191 с.
- [11] I. Lenchuk, A. Prus., (2023). Graphic culture of constructive modeling of figures in metric stereometry. *Mathematics and Informatics. Journal article*, България, Вестник „Аз-буки“, Национално издателство за образование и наука, Vol. 66. Iss. 3. P. 281-297. [Електронний ресурс]. Доступно: DOI: 10.53656/math2023-3-6-gra.
- [12] Ленчук І. Г., (2010). Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ. Житомир: вид-во ЖДУ ім. І Франка. 367 с.
- [13] I. G. Lenchuk & O. O. Mosiiuk, (2023). «Constructive geometry in implementations of modern 3D graphics», *ITLT*, vol. 94, no. 2, pp. 19–37. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://doi.org/10.33407/itlt.v94i2.5157>
- [14] І. Г. Ленчук & А. Й. Щехорський, (2021). «Методологія комп'ютерного моделювання перерізу піраміди у програмних середовищах», *ITLT*, вип. 86, вип. 6, с. 170–186. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://doi.org/10.33407/itlt.v86i6.4565>.
- [15] Ленчук І. Г., Працьовитий М. В., (2022). Основні метричні задачі конструктивної стереометрії. Сучасні інформаційні та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: збірник наукових праць. Київ-Вінниця: Тов. «Друк плюс». Вип. 64. С. 243-257. [Електронний ресурс]. Доступно: DOI: 10.31652/2412-1142-2022-64-243-257.
- [16] Погорелов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 7-9 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1998. 224 с. іл.
- [17] Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Вид-чий. дім «Освіта», 2015. – 208 с.: іл.

CULTURE OF DRAWING IN PLANIMETRIC PROBLEMS

Lenchuk Ivan Grigorievich

Doctor of Pedagogy sciences, Professor, Professor of the Department of Algebra and Geometry,
Zhytomyr State University named after Ivan Franko.,
Zhytomyr, Ukraine
ORCID ID: 0000-0003-1923-9540
lench456@gmail.com

Annotation. Today, students in grades 7-9 of secondary schools solve mainly planimetric problems to calculate the minimum level of complexity. They are practically not taught how to prove, not to mention that construction problems are a real stumbling block for yesterday's high school graduates. When taking tests in Elementary Geometry, most university freshmen are unable to solve problems from the textbooks they studied. In addition, the drawings for any proposal, whether for calculation or proof, do not stand up to any criticism. The vast majority of first-year students do not perform well. We can attest to this by referring to our own experience of communicating with students during lectures and practical classes. Therefore, in this study, we set out to demonstrate the crucial role of correct and visual, and thus high-quality, modeling of figures to theorems and problems with binary images using specific planimetry propositions. Twelve examples are considered. Four calculation problems, seven proof problems, and one construction problem are solved. All the tasks are of the Olympiad level and have an increased level of difficulty. For each of the tasks, using the capabilities of the Microsoft Word text editor, color drawings are modeled in the proper style. Comments are provided on the role and place of the figure in its effective, competent use to find the optimal step-by-step path to the result. Since we are talking about geometric problems, the text describes detailed algorithms for solving each of them. The problem statement, analysis of the latest research and publications, which, by the way, are too few in our country, are presented. The purpose of the work is formulated. Finally, the conclusions and prospects for further research in Euclidean geometry are described in detail. The author emphasizes, in particular, the possible use of modern computers, ICT and other new technological teaching tools in working with both school and university students.

Keywords: planimetry; constructivism of problems; modeling; binary drawings; problems of calculation, proof and construction.

References (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- [1] V. G. Kremen', & V. V. Il'yin, (2020). «Prezentatsiya vizual'noyi hramotnosti v osvith'omu protsesi ta yiyi ekspluatatsiya v kul'turi myslennya» [Presentation of visual literacy in the educational process and its exploitation in the culture of thinking]. *Informatsiyni tekhnolohiyi i zasoby navchannya*, 75(1), 1-12. [Elektronnyy resurs]. Dostupno: DOI: <https://doi.org/10.33407/itlt.v75i1.3660>. (in Ukrainian).
- [2] D. Hattwig, K. Bussert, A. Medaille, J. Burgess, (2013). «Visual Literacy Standards in Higher Education: an Opportunities for Libraries and Student Learning». *Libraries and the Academy*, Vol. 13, No. 1 pp. 61-89. (In English).
- [3] Callow, J. (2008). «Show Me: Principles for Assessing Students' Visual Literacy». *The Reading Teacher*, 61(8), 616–626. DOI: <https://doi.org/10.1598/RT.61.8.3>. (In English).
- [4] U. Boden, & L. Stenliden, (2019). «Emerging Visual Literacy through Enactments by Visual Analytics and Students». *Designs for Learning*, 11 (1), pp. 40-50. [Edited by Hal Foster]. Seattle: DOI: <http://www.designsforlearning.nu/article/10.16993/dfl.108/>. (In English).
- [5] Richard S. Palais, (1999). «The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratorium», *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46 (6), pp. 647–658. (In English).
- [6] M. Sturken, (2001). «Practices of Looking: An Introduction in Visual Culture». New York: Oxford University Press, 496 p. (In English).
- [7] L. I. Bilousova, & N. V. Zhytyenyova, (2017). «Funktsional'nyy pidkhid do vykorystannya tekhnolohiy vizualizatsiyi dlya intensyfikatsiyi navchal'noho protsesu» [A functional approach to the use of visualization technologies to intensify the educational process]. *Informatsiyni tekhnolohiyi i zasoby navchannya*, 57 (1), 38-49. [Elektronnyy resurs]. Dostupno: <https://doi.org/10.33407/itlt.v57i1.1525>. (in Ukrainian).
- [8] T. I. Koval', & O. P. Besklins'ka, (2020). «Vykorystannya zasobiv vizualizatsiyi dlya stvorennnya elektronnykh osvithnikh resursiv u protsesi navchannya matematychnykh dysyplin u zakladakh vyshchoyi osvity». [The use of visualization tools for the creation of electronic educational resources in the process of teaching mathematical disciplines in institutions of higher education]. *Informatsiyni tekhnolohiyi i zasoby navchannya*, 77(3), 145-161. [Elektronnyy resurs]. Dostupno: <https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3411>. (in Ukrainian).
- [9] Lenchuk I. G., Prats'ovyytyy M. V. «The role of drawing in planimetry problems» [The role of drawing in planimetry problems]. *Vyd-vo: «Pedahohichna presa»*. *Nauk.-metod. zhurnal «Matematyka v ridniy shkoli»*, 2017 – №6. – S. 26-32. (in Ukrainian).
- [10] Boravlov A. P., Lenchuk I. G. *Analiz u rozv'yazuvanni zadach na pobudovu: Navch. posib. dlya stud. matemat. spets. VPNZ. K.: Vyshcha shkola, 2002. – 191 s.* (in Ukrainian).