

В І Д Г У К
офіційного опонента на дисертацію
Довгопятого Олександра Петровича
«До теорії локальної і межової поведінки
плоских і просторових відображень»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Дисертаційна робота присвячена відображенням зі скінченим спотворенням, теоремам збіжності, нормальності й компактності сімей відображень, оцінкам спотворення відображень та їх межовій поведінці. У роботі також вивчається використання теорії відображень для доведення теорем компактності класів розв'язків рівняння Бельтрамі та задачі Діріхле для нього.

Актуальність теми. Добре відомо, що гомеоморфні розв'язки системи рівнянь Коші-Рімана здійснюють конформне відображення у кожній точці. Якщо ж розглянути узагальнену систему Коші-Рімана у формі рівняння Бельтрамі $f_{\bar{z}} = \mu(z)f_z$, де $|\mu(z)| \leq k < 1$, його розв'язками є вже квазіконформні відображення f , де стала k визначає певну сталу квазіконформності $1 \leq K < \infty$. Умови $|\mu(z)| \leq k < 1$ теж можна позбутися, вимагаючи просто $|\mu(z)| < 1$ майже скрізь. Тоді маємо (взагалі кажучи) відповідне відображення f зі скінченим спотворенням. Саме таким відображенням присвячена дисертація. Автор досліджує їх поведінку одразу з декількох ракурсів: зокрема, досліджує проблему неперервного межового продовження, вивчає проблеми нормальності і компактності сімей, проблеми існування розв'язків рівнянь $f_{\bar{z}} = \mu(z)f_z$ і більш загальних до них $f_{\bar{z}} = \mu(z, f)f_z + \nu(z, f)\bar{f}_z$ і т.п. Якщо вивчаються відображення з модульними умовами (типу Полецького і обернені до них), то теж слід розуміти, що такі умови встановлені для більшості відомих класів зі скінченим спотворенням, у тому числі, конформних і квазіконформних відображень, про які вже йшлося. Отже, усі дослідження дисертації – це так чи інакше дослідження з теорії відображень зі скінченим спотворенням. Варто зазначити, що перелік прізвищ математиків, які присвятили свої дослідження цим

відображенням, є достатньо великим. Серед спеціалістів, які працювали в Україні, можна згадати прізвища класиків М. Лаврентьєва, Л. І. Волковиського, І. М. Песіна, а також більш сучасних спеціалістів В. Гутлянського, В. Рязанова, Р. Салімова, Є. Севостьянова, С. Скворцова, Є. Афанасьєвої, А. Єфімушкіна, І. Петкова та деяких інших. Серед світових спеціалістів можна зазначити достатньо великий перелік як класиків, так і сучасників (К. Астала, Б. Боярський, М. Бракалова, Е. Віламор, Ф. Герінг, Т. Іванець, П. Коскела, М. Крісті, Дж. Манфреді, Г. Мартін, О. Мартіо, У. Сребро, Е. Якубов). Роботи з теорії відображень зі скінченим спотворенням активно вивчаються протягом останніх 20-30 років у роботах багатьох відомих математиків, включаючи прізвища, наведені вище. Отже, в актуальності обраної дисертантом теми сумнівів немає.

Основні результати роботи, їх новизна і обґрунтованість. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел (104 найменування) і додатку. Загальний обсяг дисертації становить 172 сторінки (158 основного тексту). У першому розділі досліджується межева поведінка відображень, що діють між областями евклідового простору. Переважно розглядаються ті відображення, які пов'язані з умовами спотворення модулів сімей кривих типу Полецького. Досліджено обернені нерівності вказаного типу. Другий розділ присвячений теоремам компактності класів розв'язків рівняння Бельтрамі і задачі Діріхле. Доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі у деякій жордановій області, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження інтегрального характеру. Також отримано результати про компактні класи розв'язків відповідної задачі Діріхле, яка розглядається в деякій жордановій області. Доведено теореми про компактні класи гомеоморфізмів з гідродинамічним нормуванням, які є розв'язками рівняння Бельтрамі, характеристики яких мають компактний носій і задовольняють певні обмеження теоретико-множинного типу. Розглянуті питання, які стосуються проблеми компактності розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі в деякій однозв'язній області. Третій розділ присвячений лінійним і квазіліній-

ним рівнянням Бельтрамі. Отримані теореми про існування гомеоморфних ACL-розв'язків цього рівняння за певних умов на комплексні коефіцієнти. Крім того, за деяких відносно слабких умов отримані теореми про існування відповідних неперервних ACL-розв'язків, які є логарифмічно гелдеровими в заданій області. Вивчається випадок, коли розв'язки рівняння Бельтрамі задовольняють гідродинамічне пормування в околі нескінченності. Доведено існування розв'язків класу Соболева рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками, які задовольняють певну умову на дилатації обернених відображень. Досліджено просторові відображення, які задовольняють деякий просторовий аналог гідродинамічної умови зростання в околі нескінченно віддаленої точки. Доведено, що гомеоморфізми вказаного класу формують одностайно неперервні сім'ї за деяких умов на їх характеристику. Розглянуто також питання щодо замкненості цих класів відносно локально рівномірної збіжності. Отримані відповідні результати для відображень з інтегральними обмеженнями, а також для класів відповідних обернених відображень.

Відзначу основні наукові результати, які отримані у дисертаційній роботі:

1. Отримано неперервне продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького на межу у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, область визначення має слабо плоску межу, а область значення є локально зв'язною на своїй межі (теорема 1.1.1).

2. Отримана логарифмічна неперервність за Гельдером відображень з оберненою нерівністю Полецького у межових точках у випадку, коли мажоранта в цій нерівності інтегровна, а відображена область є обмеженою опуклою. Результат є справедливим у випадку, коли областю визначення є або QED-область, або область з локально квазіконформною межею, або регулярна область в сенсі простих кінців (теореми 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4).

3. Отримані теореми компактності класів розв'язків задачі Діріхле для рівняння Бельтрамі для областей з різною геометрією (теореми 2.1.2, 2.2.2, 2.3.1).

4. Отримані теореми розв'язків лінійних і квазілінійних рівнянь Бель-

трамі як з однією, так і двома комплексними характеристиками, включаючи розв'язки з гідродинамічним порушенням в околі нескінченно віддаленої точки (теореми 3.1.1, 3.1.2 і 3.2.1).

Усі результати дисертації є новими та строго доведеними. Достовірність проведених досліджень забезпечена також достатньою кількістю друкованих праць за темою дисертації та узгодженістю з відомими раніше результатами.

Повнота викладу в опублікованих працях і апробація роботи. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковані у 10 статтях. Дві роботи опубліковані у фаховому науковому виданні у галузі фізико-математичних наук, що входить до переліку, затвердженого МОН України (Праці ІПММ НАН України). 8 статей опубліковані в журналах, що входять до наукометричної бази SCOPUS (Journal of Mathematical Sciences, Ukrainian Mathematical Journal, Matematychni Studii, Acta Mathematica Hungarica, Complex Variables and Elliptic Equations, Filomat). Апробація пройшла на шести міжнародних конференціях та одній конференції, проведеної у межах Житомирського державного університету імені Івана Франка (опубліковано 7 тез доповідей), а також на семінарах кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка «Теорія відображень і алгебр Лі», Інституту прикладної математики і механіки НАН України, відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України, кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету імені Івана Франка.

Зауваження та побажання.

1) Не наведене означення класу Соболева $W_{loc}^{1,1}$, незважаючи на те, що це поняття часто використовується в дисертації (хоча слід зазначити, що воно справді є достатньо відомим серед науковців, які займаються цією тематикою).

2) Немає переліку умовних позначень. Зокрема, це дуже уповільнює читання дисертації.

3) Робота містить певну кількість неточностей, що ускладнює її аналіз,

а саме: на с. 32 (12 рядок зверху) фрагмент « $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ » є зайвим, а співвідношення (2.16) є некоректним. Проте, зазначені помилки являються суто механічними і неважко здогадатися, що саме мав на увазі автор.

4) С. 45, 2 рядок знизу. Незрозуміло, що означає запис: $M_f(y_0, r_1, r_2)$.

5) У зауваженні 1.3.1 автор позначає криву через δ_* , що є не дуже вдалим рішенням, оскільки загалом у дисертації через « δ » позначаються числа, а криві через « γ ».

6) У формулюванні теореми 1.3.4 сказано, що $P_1, P_2 \in U$, проте в процесі доведення припускається, що $P_1, P_2 \in U \cap D$.

Наведені зауваження не є суттєвими і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації.

Порушення академічної доброчесності у дисертації та публікаціях, у яких висвітлені основні результати Довгопятого Олександра, не знайдені.

Висновки. Дисертаційна робота Олександра Петровича Довгопятого на тему «До теорії локальної і межової поведінки плоских і просторових відображень» за своїм науково-теоретичним рівнем, актуальністю, обсягом виконаних досліджень, новизною отриманих результатів, обґрунтованістю основних положень і висновків повністю відповідає усім вимогам наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації», пунктам 6-9 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (Постанова КМУ № 44 від 12.01.2022 р.), а її автор заслуговує на присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних

наук, завідувач кафедри

математичного аналізу

та оптимізації Дніпровського

національного університету імені

Олеся Гончара, доцент



Наталія ПАРФІНОВИЧ

Проректор
наукової роботи

Марина О.С.