УДК 517.5

Севостьянов Євген,
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Житомирський державний університет імені Івана Франка
Ількевич Наталія,
кандидат хімічних наук, старший викладач
Житомирський державний університет імені Івана Франка

СПОТВОРЕННЯ ВІДСТАНЕЙ ПРИ ВІДОБРАЖЕННЯХ QED ОБЛАСТЕЙ НА ОБЛАСТІ З ЛОКАЛЬНО КВАЗІКОНФОРМНОЮ МЕЖЕЮ

В одній нашій публікації ми розглянули відображення одиничної кулі з оберненою умовою спотворення модуля сімей кривих типу Полецького. Тут була встановлена їх логарифмічна неперервність за Гельдером у межових точках (див. [6]). Дана публікація присвячена розгляду цього питання в інших областях. Логарифмічна неперервність за Гельдером у внутрішніх точках була доведена раніше, причому у довільній області [7]. Отже, дане питання є актуальним лише для межових точок. Відзначимо також, що обернені модульні нерівності відомі давно і відіграють ключову роль при вивченні квазіконформних і квазірегулярних відображень, а також відображень зі скінченним спотворенням довжини (див., напр., [1, теорема 3.2], [2, теорема 8.5] і [5, теорема 6.7.II]).

Нагадаємо деякі означення. Нехай $Q\colon R^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького*, якщо співвідношення

$$M(\Gamma) \leqslant \int_{f(D)} Q(y) \cdot \rho_*^n(y)\, dm(y) \qquad (1)$$

виконується для будь-якої сім’ї (локально спрямлюваних) кривих Γ в D і для будь-якої $\rho_* \in \mathrm{a}dm\, f(\Gamma)$.

Нехай B^n – одинична куля в R^n. Наступне означення запропоновано Няккі [4] і дещо узагальнено Д. Ковтонюком та В. Рязановим [3]. Межа області D в R^n

називається *локально квазіконформною,* якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U, для якого існує квазіконформне відображення ϕ околу U на одиничну кулю $B^n \subset R^n$ таке, що $\phi(\partial D \cap U) = B^n_+$, де

$$B^n_+ = \{x = (x_1, \dots x_n) \in B^n : x_n > 0\}.$$

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D^{'} \subset R^n$, $n \geq 2$, невиродженого континуума $A \subset D^{'}$ і вимірної за Лебегом функції $Q: D^{'} \to [0, \infty]$ позначимо через $S_{\delta,A,Q}(D, D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на область $D^{'}$, що задовольняють умову (1) і таких, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geq \delta$. Справедливо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $Q \in L^1(D^{'})$, D *є областю квазіекстремальної довжини, а* D' *є обмеженою областю з локально квазіконформною межею. Тоді будь-яке відображення* $f \in S_{\delta,A,Q}(D, D')$, *яке задовольняє співвідношення (1), продовжується до відображення* $f: \overline{D} \to \overline{D'}$, *при цьому, для кожної точки* $x_0 \in \partial D$ *знайдуться окіл* U *цієї точки і сталі* $C = C(n, A, D, D^{'}, x_0) > 0$ *і* $0 < \alpha = \alpha(n, A, D, D^{'}, x_0) \leq 1$ *такі, що*

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)|^{\frac{n}{\alpha^2}} \leq \frac{C \cdot \|Q\|_1}{log\left(1 + \frac{\delta}{2|x-y|}\right)} \tag{2}$$

для всіх $x, y \in U \cap \overline{D}$, де $\| Q \|_1$ – норма функції Q в $L^1(D^{'})$.

Висновки. Розглянута проблема межового спотворення відображень з оберненою нерівністю Полецького. Отримана нерівність типу логарифмічної неперервності за Гельдером в межових точках за умови, що відповідна мажоранта в зазначеній нерівності є інтегровною. Оцінка є одностайно неперервною по класу, по права частина нерівності (2) прямує до нуля при $x \to y$ і не залежить від f.

Список використаних джерел та літератури

1. Martio O., Rickman S., and Väisälä J. Distortion and singularities of quasiregular mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, 1970. V. 465. P. 1–13.

2. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

3. Kovtonyuk D., Ryazanov V. On the theory of prime ends for space mappings // Ukrainian Math. J. 2015. V. 67, no. 4. P. 528–541.

4. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings. J. Anal. Math. 1979. V. 35. P. 13-40.

5. Rickman S. Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

6. Sevost'yanov E.A. On logarithmic Hölder continuity of mappings on the boundary. Annales Fennici Mathematici. 2022. V. 47. P. 251–259.

7. Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.O., Dovhopiatyi O.P. On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. Journal of Mathematical Sciences. 2021. V. 252, no. 4. P. 541–557.