ISSN 1683-4720

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Том 37(2)
2023
Volume 37(2)

Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine

Праці ІПММ НАН України, Том 37, № 2, 2023

Наукове видання

ПРАЦІ
ІНСТИТУТУ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ
Том 37, № 2

Підписано до друку 23.01.2024

Інститут прикладної математики і механіки
НАН України

84116, м. Слов'янськ, вул. Батюка, 19
тел.: (0626) 66 55 00

Формат 60 x 84 1/8. Ум. друк. арк. 10.
Друк лазерний. Зам. № 5540. Тираж 100 прим

Надруковано в ТОВ «ТехПринтЦентр»
Адреса: м. Слов'янськ, вул. Батюка, 19
тел.: +38 06262 3 20 99

Науковий збірник "Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України" публікує оригінальні статті в галузі фундаментальної та прикладної математики. Всі статті проходять рецензування міжнародною редакційною колегією.

Згідно Наказу Міністерства освіти і науки України від 19.04.2021 року № 420 збірник включено до Переліку наукових фахових видань України та присвоєно категорію «Б» за спеціальностями 111 – Математика, 113 – Прикладна математика.

Адреса редколегії: 84100 Слов'янск, вул. Добровольського, 1
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Тел. (0626) 66 55 00

Затверджено до друку Вченою радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України
23.01.2024 протокол № 1
Свідоцтво про реєстрацію: серія КВ № 22887-12787 ПР від 03.07.2017 р.

The journal "Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine" is devoted to the publication of original papers in pure and applied mathematics, and is reviewed and edited by an international editorial board.

According to the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated 19.04.2021 No. 420 the journal is included in the List of scientific professional editions of Ukraine and assigned category «B» by specialties 111 – Mathematics, 113 – Applied mathematics.

Editorial Address: 84100 Slovyansk, Dobrovolsky str., 1
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Tel. (0626) 66 55 00

Approved for publication by the Academic Council of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, January 23, 2024 protocol 1
Certificate of registration: series KB No. 22887-12787 ПР from 07.03.2017.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Том 37, № 2
Слов'янськ, 2023
Заснований у 1997 р.

Праці інституту прикладної математики і механіки НАН України

З М І С Т

УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-10

©2023. **О. Довгопятий**[1], **Є. Севостьянов**[1,2]

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОЇ МОДУЛЬНОЇ НЕРІВНОСТІ ДО ТЕОРІЇ ВІДОБРАЖЕНЬ

Вивчаються відображення, які задовольняють деяку оцінку спотворення модуля сімей. Нами встановлено, що за певних умов на області, між якими діють відображення, ці відображення задовольняють умови типу логарифмічної неперервності за Гельдером у межових точках. Неперервність за Гельдером встановлена для багатьох класів відображень, скажімо, для квазіконформних і квазірегулярних відображень. З цього приводу можна вказати на класичні оцінки спотворення типу Мартіо–Рікмана–Вяйсяля, а також оцінки, які відносяться до сучасних класів відображень зі скінченним спотворенням. Зокрема, В.І. Рязановим разом із Р.Р. Салімовим та Є.О. Севостьяновим встановлені локальні оцінки спотворення відстані при плоских і просторових відображеннях за умови типу FMO, або інтегральної умови типу Лехто у фіксованій точці. Нещодавно другим співавтором отримана логарифмічна неперервність за Гельдером для класу, що вивчається, в точках одиничної сфери. В даній статті розглядається ситуація аналогічних відображень різних областей, а не тільки одиничної кулі. Саме, в прообразі при відображенні ми розглянемо області квазіекстремальної довжини, а в образі – опуклі області. Зауважимо, що області квазіекстремальної довжини (скорочено – QED-області), впроваджені Герінгом і Мартіо, є структурами, в котрих модуль сімей кривих метрично пов'язаний з діаметром множин. Також у формулюванні основного результату задіяні опуклі області; ми розглядаємо відображення, що сюр'єктивно діють на них. Крім того, в статті сформульовані і доведені деякі інші результати на цю тему. Ми докладно розглядаємо ще декілька випадків, зокрема коли: 1) областю визначення відображення є область з локально квазіконформною межею, а областю значень є обмежена опукла область; 2) областю визначення відображення є регулярна область в сенсі простих кінців, а областю значень є обмежена опукла область; 3) відображення діє між QED-областю та обмеженою опуклою областю і має фіксовану точку. В усіх трьох випадках відображення є локально логарифмічно гельдеровим; причому, у випадку 2), який відноситься до простих кінців, логарифмічну неперервність так само слід розуміти в термінах простих кінців.

MSC: Primary 30C65, Secondary 30C62, 31A15.

Ключові слова: *квазіконформні відображення, відображення з обмеженим і скінченним спотворенням, модулі сімей кривих, оцінки типу Льовнера, опуклі області*

1. Вступ.

Даний рукопис присвячено відображенням з оберненою нерівністю Полецького. Такі нерівності встановлені для багатьох класів відображень (див., напр., [5, теорема 3.2], [6, теорема 8.5] та [10, теорема 6.7.II]). Нещодавно другим співавтором отримана логарифмічна неперервність за Гельдером для вказаного класу в точках одиничної сфери (див. [11]). В даній статті розглядається ситуація аналогічних відображень різних областей, а не тільки одиничної кулі, як в [11]. Саме, в про-

Робота підтримана у рамках виконання наукового проекту Міністерства освіти і науки України «Сучасні проблеми геометричної теорії функцій і відображень» (2022–2024), № реєстрації УкрІНТЕІ: 0122U000821.

образі при відображенні ми розглянемо області квазіекстремальної довжини, а в образі – опуклі області. Зауважимо, що області квазіекстремальної довжини (скорочено – QED-області) впроваджені Герінгом і Мартіо [2] та є структурами, в котрих модуль сімей кривих метрично пов'язаний з діаметром множин. Також у формулюванні основного результату задіяні опуклі області; ми будемо розглядати відображення, що сюр'єктивно діють на них.

Нагадаємо деякі означення. Борелева функція $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називається *допустимою* щодо сім'ї Γ кривих γ у $\mathbb{R}^n$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geqslant 1 \tag{1}$$

для всіх (локально спрямованих) кривих $\gamma \in \Gamma$. У цьому випадку ми пишемо: $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. *Модулем* сім'ї кривих Γ зветься величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x)\, dm(x)\,. \tag{2}$$

Нехай $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького*, якщо співвідношення

$$M(\Gamma) \leqslant \int\limits_{f(D)} Q(y) \cdot \rho_*^n(y)\, dm(y) \tag{3}$$

виконується для будь-якої сім'ї (локально спрямлюваних) кривих Γ в D і для будь-якої $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$. Зауважимо, що оцінки типу (3) добре відомі та виконуються у багатьох класах відображень (див., напр., [5, теорема 3.2], [10, теорема 6.7.II] та [6, теорема 8.5]). Відображення $f : D \to \mathbb{R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ кожної точки $y \in \mathbb{R}^n$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U \subset D$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^n$. Відображення f області D на D' називається *замкненим*, якщо $f(E)$ є замкненим в D' для будь-якої замкненої множини $E \subset D$ (див., напр., [15, розд. 3]).

Область D в $\mathbb{R}^n$ називається *областю квазіекстремальної довжини* (скор. *QED-областю*), якщо знайдеться таке число $A_0 \geqslant 1$, що для будь-яких континуумів $E, F \subset D$ виконується нерівність

$$M(\Gamma(E, F, \mathbb{R}^n)) \leqslant A_0 \cdot M(\Gamma(E, F, D))\,. \tag{4}$$

Зауважимо, що одинична куля, півпростір або півкуля є областями квазіекстремальної довжини, див. [16, лема 4.3].

У подальшому, в розширеному просторі $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ використовується *сферична (хордальна) метрика* $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, де π – стереографічна проекція

$\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, а саме,

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\,,$$

$$h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}\,, \quad x \ne \infty \ne y \tag{5}$$

(див., напр., [14, означення 12.1]). У подальшому, для множин $A, B \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ покладемо

$$h(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} h(x,y)\,, \quad h(A) = \sup_{x,y\in A} h(x,y)\,,$$

де h – хордальная відстань, визначена в (5).

Для числа $\delta > 0$, областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, невиродженого континуума $A \subset D'$ і вимірної за Лебегом функції $Q : D' \to [0,\infty]$ позначимо через $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на область D', що задовольняють умову (3) і таких, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta$. Як звично, покладемо

$$B(x_0,r) = \{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0| < r\}\,, \qquad \mathbb{B}^n = B(0,1)\,,$$

$$S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = r\}\,.$$

Справедливо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $Q \in L^1(D')$, D є областю квазіекстремальної довжини, а D' є обмеженою опуклою областю. Тоді будь-яке відображення $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ продовжується до відображення $f : \overline{D} \to \overline{D'}$, при цьому, для кожної точки $x_0 \in \partial D$, $x_0 \ne \infty$, знайдуться окіл U цієї точки і стала $C = C(n,A,D,D') > 0$ така, що*

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| \leqslant \frac{C\cdot(\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1+\frac{\delta}{|x-y|}\right)} \tag{6}$$

для всіх $x, y \in U \cap \overline{D}$, де $\|Q\|_1$ – норма функції Q в $L^1(D')$.

2. Допоміжні леми.

Перед доведенням основного твердження доведемо наступну важливу лему, яка у випадку одиничної кулі доведена в [11, лема 2.1].

Лема 1. *Нехай D і D' – області, які задовольняють умови теореми , і нехай E – довільний континуум, що належить області D', $Q \in L^1(D')$. Тоді існує $\delta_1 > 0$ таке, що $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q} \subset \mathfrak{S}_{\delta_1,E,Q}$. Іншими словами, якщо f – відкрите дискретне і замкнене відображення області D на D' з умовою (3), таке, що $h(f^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta$, то існує $\delta_1 > 0$, не залежне від f таке, що $h(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$.*

Доведення. Будемо загалом використовувати схему доведення [11, лема 2.1]. Доведемо лему від супротивного. Припустимо, що її висновок не є вірним. Тоді знайдуться послідовності $y_m \in E$, $f_m \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ і $x_m \in D$ такі, що $f_m(x_m) = y_m$ і $h(x_m, \partial D) \to 0$ при $m \to \infty$. Без обмеження загальності можна вважати, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$, де x_0 може набувати значення ∞ у випадку, якщо область D необмежена. Зауважимо, що з теореми 3.1 в [12] випливає можливість неперервного продовження відображення f_m в точку x_0, більше того, сім'я $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в точці x_0 (див., напр., [12, теорема 1.2]). Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $m_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) < \varepsilon$ при $m \geqslant m_0$. З іншого боку, оскільки f_m – замкнене, $f_m(x_0) \in \partial D'$. З огляду на компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ та замкненість $\partial D'$, можна вважати, що $f_m(x_0)$ збігається до деякого елемента $B \in \partial D'$ при $m \to \infty$. Отже, за нерівністю трикутника,

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geqslant h(f_m(x_m), B) - h(B, f_m(x_0)) \geqslant \frac{1}{2} \cdot h(E, \partial D')$$

для достатньо великих $m \in \mathbb{N}$. Остаточно, маємо суперечність: $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geqslant \delta_0$, $\delta_0 := \frac{1}{2} \cdot h(E, \partial D')$ і одночасно $h(f_m(x_m), f_m(x_0)) < \varepsilon$ при $m \geqslant m_0$. Отримана суперечність спростовує вихідне припущення. Лему доведено. $\Box$

Наступна лема була доведена в випадку, коли область D' є одиничною кулею (див. хід доведення теореми 1.1 в [11]). Для довільної випуклої області її встановлення є істотно складнішим, оскільки попередня методологія істотно спиралася на геометрію кулі.

Лема 2. *Нехай D' – обмежена опукла область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, і нехай $B(y_*, \delta_*/2)$ – куля з центром в точці $y_* \in D'$, де $\delta_* := d(y_*, \partial D')$. Нехай $z_0 \in \partial D'$. Тоді для будь-яких точок $A, B \in B(z_0, \delta_*/8) \cap D'$ знайдуться точки $C, D \in \overline{B(y_*, \delta_*/2)}$, для яких відрізки $[A, C]$ і $[B, D]$ є такими, що*

$$\operatorname{dist}([A, C], [B, D]) \geqslant C_0 \cdot |A - C|\,, \tag{7}$$

де $C_0 > 0$ – деяка стала, яка залежить тільки від δ_* і $d(D')$.

Доведення леми 2 у повній мірі дано в [1, лема 1].

3. Доведення теореми 1. Можливість неперервного продовження відображення f на межу області D випливає з теореми 3.1 в [12]. Зокрема, слабка плоскість ∂D є наслідком того, що D є QED-областю (див., напр., [13, лема 2]), а те, що опукла область є локально зв'язною на своїй межі є очевидним наслідком того, що її перетин з кулею з центром у межовій точці також є опуклою множиною.

Доведемо логарифмічну неперервність за Гельдером (6). Зафіксуємо точку $x_0 \in \partial D$, і нехай $y_* \in D'$ – довільна точка області D'. Покладемо $\delta_* := d(y_*, \partial D')$. Нехай $E = \overline{B(y_*, \delta_*/2)} \subset D'$. За лемою існує таке $\delta_1 > 0$ таке, що $h(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$ для всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. Крім того, оскільки за теоремою 1.2 в [12] сім'я відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$, для числа $\delta_*/8$ знайдеться окіл $U \subset B(x_0, \delta_1/2)$ точки x_0, такий що $|f(x) - f(x_0)| < \delta_*/8$ для всіх $x \in U \cap D$ і всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. Нехай $x, y \in B(x_0, \delta_1/2)$

$$\varepsilon_0 := |f(x) - f(y)| < \delta_*/4\,.$$

Застосуємо для точок $A = f(x)$, $B = f(y)$ і $z_0 = f(x_0)$ лему . Згідно цієї леми, знайдуться відрізки $I \supset A$ і $J \supset B$ в області D' такі, що $I \cap E \neq \varnothing \neq J \cap E$, причому

$$\mathrm{dist}\,(I, J) \geqslant C_0 \cdot |f(x) - f(y)|\,, \tag{8}$$

де стала C_0 залежить лише від континууму E і області D'.

Нехай α_1, β_1 – повні f-підняття кривих I і J з початками в точках x і y, відповідно (вони існують за [15, лема 3.7], див. малюнок 1). Тоді за означенням

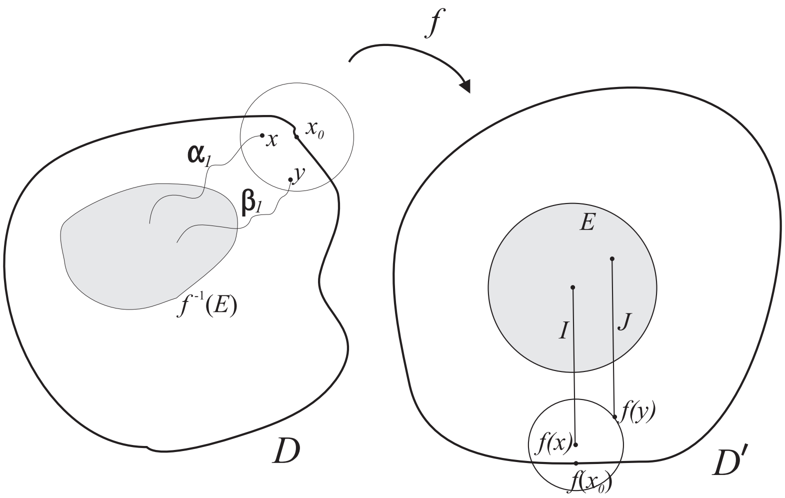

Рис. 1. До доведення теореми 1

$|\alpha_1| \cap f^{-1}(E) \neq \varnothing \neq |\beta_1| \cap f^{-1}(E)$. Оскільки $h(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$ і $x, y \in B(x_0, \delta_1/2)$, то

$$d(\alpha_1) \geqslant \delta_1/2\,, \quad d(\beta_1) \geqslant \delta_1/2\,. \tag{9}$$

Нехай

$$\Gamma := \Gamma(\alpha_1, \beta_1, D)\,.$$

Тоді з одного боку за нерівністю (4)

$$M(\Gamma) \geqslant (1/A_0) \cdot M(\Gamma(\alpha_1, \beta_1, \mathbb{R}^n))\,, \tag{10}$$

а з іншого боку, за [17, лема 7.38]

$$M(\Gamma(\alpha_1, \beta_1, \mathbb{R}^n)) \geqslant c_n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\,, \tag{11}$$

де $c_n > 0$ – деяка стала, яка залежить лише від n,

$$m = \frac{\mathrm{dist}(\alpha_1, \beta_1)}{\min\{\mathrm{diam}\,(\alpha_1), \mathrm{diam}\,(\beta_1)\}}\,.$$

Тоді поєднуючи (9), (10) і (11) і враховуючи, що $\mathrm{dist}\,(\alpha_1, \beta_1) \leqslant |x-y|$, ми отримуємо, що

$$M(\Gamma) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1+\frac{\delta_1}{2\mathrm{dist}(\alpha_1,\beta_1)}\right) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1+\frac{\delta_1}{2|x-y|}\right), \qquad (12)$$

де $\widetilde{c_n} > 0$ – деяка стала, яка залежить тільки від n і сталої A_0 з означення QED-області.

Встановимо тепер верхню оцінку для $M(\Gamma)$. Покладемо

$$\rho(y) = \begin{cases} \frac{1}{C_0\varepsilon_0}, & y \in D', \\ 0, & y \notin D'. \end{cases}$$

Зауважимо, що ρ задовольняє співвідношення (1) для сім'ї кривих $f(\Gamma)$ в силу співвідношення (7). Тоді за означення сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ ми отримаємо, що

$$M(\Gamma) \leqslant \frac{1}{C_0^n\varepsilon_0^n}\int\limits_{D'} Q(y)\,dm(y) = C_0^{-n}\cdot\frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(y)|^n}\,. \qquad (13)$$

З (12) і (13) випливає, що

$$\widetilde{c_n} \cdot \log\left(1+\frac{\delta_1}{2|x-y|}\right) \leqslant C_0^{-n}\cdot\frac{\|Q\|_1}{|f(x)-f(y)|^n}\,.$$

З останнього співвідношення випливає нерівність (6), де $C := C_0^{-1}\cdot \widetilde{c_n}^{\,-1/n}$ з $\delta_1/2$ замість δ. Зауважимо, що ми можемо вважати $\delta_1/2 = \delta$, бо з огляду на правило Лопіталя $\log\left(1+\frac{1}{nt}\right) \sim \log\left(1+\frac{1}{kt}\right)$ при $t \to +0$ для довільних фіксованих $k, n > 0$.

Ми довели теорему 1 для внутрішніх точок $x, y \in U\cap D$. Для точок $x, y \in U\cap\overline{D}$ це твердження випливає за допомогою граничного переходу $\overline{x} \to x$ і $\overline{y} \to y$, $\overline{x}, \overline{y} \in D$. $\Box$

Справедливий також аналог теореми 1 для відображень із фіксованою точкою області D. Для того, щоб сформулювати і довести відповідне твердження, впровадимо таке означення. Для елементів $a \in D$, $b \in D'$ і вимірної за Лебегом функції $Q : D' \to [0, \infty]$ позначимо через $\mathfrak{F}_{a,b,Q}$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на D' з умовою (3) таких, що $f(a) = b$. Справедливо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $Q \in L^1(D')$, D є областю квазіекстремальної довжини, а D' є обмеженою опуклою областю. Тоді будь-яке відображення $f \in \mathfrak{F}_{a,b,Q}$ продовжується до відображення $f : \overline{D} \to \overline{D'}$, при цьому, для кожної точки $x_0 \in \partial D$, $x_0 \neq \infty$, знайдуться окіл U цієї точки і стала $C = C(n, A, D, D') > 0$ така, що виконано співвідношення (6).*

Доведення. Можливість неперервного продовження відображення f на ∂D випливає з теореми 3.1 в [12]. Доведемо логарифмічну неперервність за Гельдером сім'ї продовжених відображень.

Покладемо $E = \overline{B(b, \varepsilon_*)}$, де $\varepsilon_* = \mathrm{dist}\,(b, \partial D')$. Можливі два випадки:

1) існує $\delta > 0$ таке, що $\mathrm{dist}\,(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta$ для всіх $f \in \mathfrak{F}_{a,b,Q}$. В цьому випадку бажане твердження випливає з теореми 1;

2) Знайдеться послідовність відображень $f_m \in \mathfrak{F}_{a,b,Q}$ і точок $x_m \in D, y_m \in D'$, $m = 1, 2, \ldots$, таких, що $f_m(x_m) = y_m$, $y_m \in E$ і $\mathrm{dist}\,(x_m, \partial D) \to 0$ при $m \to \infty$. Тоді міркуючи так само, як і при доведенні леми 1, доходимо до висновку, що сім'я відображень $\mathfrak{F}_{a,b,Q}$ не є одностайно неперервною принаймні в одній точці $x_0 \in \partial D$, проте, це суперечить твердженню теореми 7.1 в [12].

Отже, випадок 2) є неможливим, а в випадку 1) маємо бажане твердження теореми. $\Box$

4. Локально квазіконформні межі. Розглянемо наступне означення, яке було запропоновано Няккі [9], див. також [4]. Межа області D в $\mathbb{R}^n$ називається *локально квазіконформною,* якщо кожна точка $x_0 \in \partial D$ має окіл U, для якого існує квазіконформне відображення φ околу U на одиничну кулю $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ таке, що $\varphi(\partial D \cap U)$ є перетином одиничної кулі $\mathbb{B}^n$ з координатною гіперплощиною $x_n = 0$, де $x = (x_1, \ldots, x_n.)$ Справедлива наступна

Теорема 3. *Нехай $Q \in L^1(D')$, D є областю з локально квазіконформною межею, а D' є обмеженою опуклою областю. Тоді будь-яке відображення $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D, D')$ продовжується до відображення $f : \overline{D} \to \overline{D'}$, при цьому, для кожної точки $x_0 \in \partial D$ знайдуться окіл U цієї точки і сталі $C = C(n, A, D, D') > 0$ і $0 < \alpha = \alpha(x_0) \leqslant 1$ такі, що*

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| \leqslant \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta}{|x-y|^{\alpha}}\right)} \tag{14}$$

для всіх $x, y \in U \cap \overline{D}$, де $\|Q\|_1$ – норма функції Q в $L^1(D')$.

Доведення. Можливість неперервного продовження відображення f на межу області D випливає з теореми 3.1 в [12]. Зокрема, локально квазіконформні межі областей є слабко плоскими (див. [3, Proposition 2.2], див. також [14, теорема 17.10]), а опуклі області, очевидно, є локально зв'язними на своїй межі.

Зафіксуємо точку $x_0 \in \partial D$. Нехай $y_* \in D'$ – довільна точка області D', $\delta_* := d(y_*, \partial D')$ і $E = \overline{B(y_*, \delta_*/2)} \subset D'$. За лемою 1 існує таке $\delta_1 > 0$ таке, що $h(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$ для всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. Тоді і $d(f^{-1}(E), \partial D) \geqslant \delta_1$ для всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$. Крім того, оскільки за теоремою 1.2 в [12] сім'я відображень $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ є одностайно неперервною в $\overline{D}$, для числа $\delta_*/8$ знайдеться окіл $U \subset B(x_0, \delta_1/2)$ точки x_0, такий що $|f(x) - f(x_0)| < \delta_*/8$ для всіх $x, y \in U \cap D$ і всіх $f \in \mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$.

За означенням локально квазіконформної межі існує окіл U^* точки x_0 і квазіконформне відображення $\varphi : U^* \to \mathbb{B}^n$, $\varphi(U^*) = \mathbb{B}^n$, таке що $\varphi(D \cap U^*) = \mathbb{B}^n_+$, де $\mathbb{B}^n_+ = \{x \in \mathbb{B}^n : x = (x_1, \ldots, x_n), x_n > 0\}$ – півкуля, див. малюнок 2. Можна вважати, що $\varphi(x_0) = 0$, причому $U^* \subset B(x_0, \delta_1/4)$ (див. хід доведення теореми 17.10

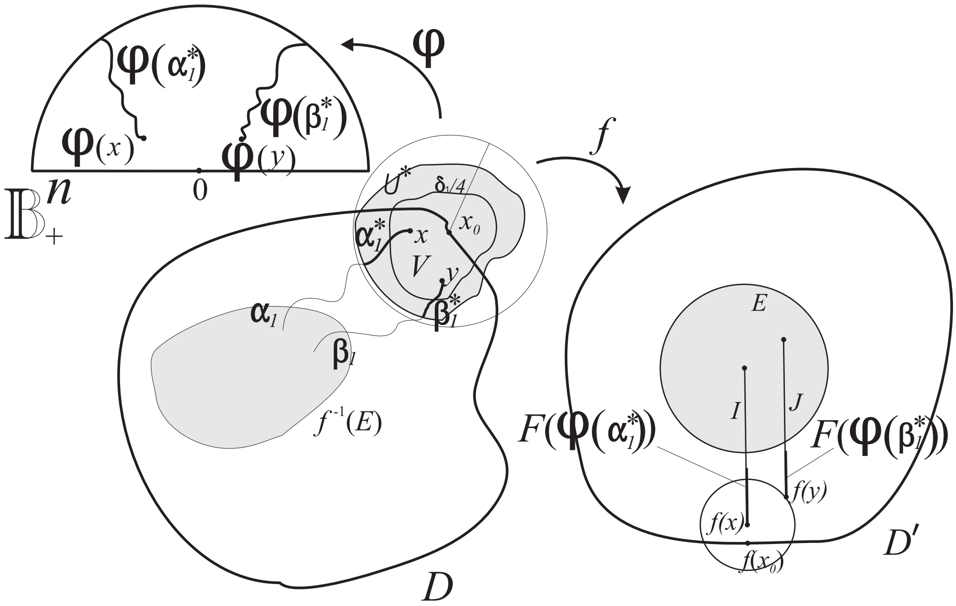

Рис. 2. До доведення теореми 3

у [14]). Нехай V – підокіл U^* такий, що $\overline{V} \subset U^*$, і нехай

$$\delta_2 := \operatorname{dist}(\partial V, \partial U^*)\,. \tag{15}$$

Розглянемо допоміжне відображення

$$F(w) := f(\varphi^{-1}(w))\,, \qquad F : \mathbb{B}^n_+ \to U^*\,. \tag{16}$$

Нехай $x, y \in U^* \cap D$ і

$$\varepsilon_0 := |f(x) - f(y)| < \delta_0 := \delta_*/4\,.$$

Застосуємо для точок $A = f(x)$, $B = f(y)$ і $z_0 = f(x_0)$ лему 2. Згідно цієї леми, знайдуться відрізки $I \supset A$ і $J \supset B$ в області D' такі, що $I \cap E \neq \varnothing \neq J \cap E$, причому

$$\operatorname{dist}(I, J) \geqslant C_0 \cdot |f(x) - f(y)|\,, \tag{17}$$

де стала C_0 залежить лише від континууму E і області D'.

Нехай α_1, β_1 – повні f-підняття кривих I і J з початками в точках x і y, відповідно (вони існують за [15, лема 3.7]). Тоді за означенням $|\alpha_1| \cap f^{-1}(E) \neq \varnothing \neq |\beta_1| \cap f^{-1}(E)$. Тоді

$$|\alpha_1| \cap U \neq \varnothing \neq |\alpha_1| \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)$$

і

$$|\beta_1| \cap U \neq \varnothing \neq |\beta_1| \cap (\mathbb{R}^n \setminus U)\,.$$

Тоді з огляду на [8, теорема 1.I.5.46]

$$|\alpha_1| \cap \partial U \neq \varnothing\,, |\beta_1| \cap \partial U \neq \varnothing\,. \qquad (18)$$

Аналогічно,

$$|\alpha_1| \cap \partial V \neq \varnothing\,, |\beta_1| \cap \partial V \neq \varnothing\,. \qquad (19)$$

З огляду на (18), α_1 і β_1 містять у собі підкриві α_1^* і β_1^* з початками у точках x і y, які належать U^* і мають кінцеві точки в ∂U^*. Завдяки (15), (18) і (19), будемо мати, що

$$d(\alpha_1^*) \geqslant \delta_2\,, \quad d(\beta_1^*) \geqslant \delta_2\,. \qquad (20)$$

Розглянемо криві $\varphi(\alpha_1^*)$ і $\varphi(\beta_1^*)$. Оскільки φ – квазіконформне відображення, відображення φ^{-1} також є квазіконформним. Отже, φ^{-1} є локально неперервним за Гельдером з деякою сталою $\widetilde{C} > 0$ і степеню $0 < \alpha \leqslant 1$ (див., напр., [10, теорема 1.11.III]). Можна вважати, що φ^{-1} є неперервним за Гельдером у $\mathbb{B}^n$. Тоді

$$\frac{1}{\left(\widetilde{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}|x-y|^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant |\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)| \leqslant \widetilde{C}\cdot|x-y|^{\alpha} \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{B}^n\,. \qquad (21)$$

Нехай $\overline{x}, \overline{y} \in U^*$ є такими елементами, що $d(\alpha_1^*) = |\overline{x}-\overline{y}|$. Покладемо $x^* = \varphi(\overline{x})$ і $y^* = \varphi(\overline{y})$. Тоді з (21) випливає, що

$$|x^*-y^*|^{\alpha} \geqslant \frac{1}{\widetilde{C}}\cdot|\overline{x}-\overline{y}| = \frac{1}{\widetilde{C}}d(\alpha_1^*) \geqslant \frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\,,$$

або

$$|x^*-y^*| \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}\,. \qquad (22)$$

Зі співвідношення (22) випливає, що $d(\varphi(\alpha_1^*)) \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}$. Аналогічно $d(\varphi(\beta_1^*)) \geqslant \left(\frac{1}{\widetilde{C}}\delta_2\right)^{1/\alpha}$. Нехай

$$\Gamma := \Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{B}^n_+)\,.$$

Зауважимо, що $\mathbb{B}^n_+$ є обмеженою опуклою областю, тому вона є областю Джона (див. [7, зауваження 2.4]), отже, є рівномірною областю (див. [7, зауваження 2.13(c)]), тому є також і QED-областю з деяким $A_0^* < \infty$ у (4) (див. [2, лема 2.18]). Тоді з одного боку за нерівністю (4)

$$M(\Gamma) \geqslant (1/A_0^*)\cdot M(\Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{R}^n))\,, \qquad (23)$$

а з іншого боку, за [17, лема 7.38]

$$M(\Gamma(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*), \mathbb{R}^n)) \geqslant c_n\cdot\log\left(1+\frac{1}{m}\right)\,, \qquad (24)$$

де $c_n > 0$ – деяка стала, яка залежить лише від n,

$$m = \frac{\mathrm{dist}(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*))}{\min\{\mathrm{diam}\,(\varphi(\alpha_1^*)), \mathrm{diam}\,(\varphi(\beta_1^*))\}}\,.$$

Тоді поєднуючи (23) і (24) і враховуючи, що $\mathrm{dist}\,(\varphi(\alpha_1^*), \varphi(\beta_1^*)) \leqslant |\varphi(x) - \varphi(y)|$, ми отримуємо, що

$$M(\Gamma) \geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(4\widetilde{C})^{1/\alpha}\mathrm{dist}(\alpha_1^*, \beta_1^*)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(4\widetilde{C})^{1/\alpha}|\varphi(x) - \varphi(y)|}\right)\,, \qquad (25)$$

де $\widetilde{c_n} > 0$ – деяка стала, яка залежить тільки від n і сталої A_0^* з означення QED-області.

Встановимо тепер верхню оцінку для $M(\Gamma)$. Зауважимо, що відображення F у (16) задовольняє співвідношення (3) з функцією $\widetilde{Q(x)} = K_0 \cdot Q(x)$ замість Q, де $K_0 \geqslant 1$ – стала квазіконформності відображення φ^{-1}. Покладемо

$$\rho(y) = \begin{cases} \frac{1}{C_0\varepsilon_0}, & y \in D'\,, \\ 0, & y \notin D'\,, \end{cases}$$

де C_0 – універсальна стала у нерівності (17). Зауважимо, що ρ задовольняє співвідношення (1) для сім'ї кривих $F(\Gamma)$ в силу співвідношення (7). Тоді за означенням сім'ї $\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}$ і з урахуванням означення F у (16) ми отримаємо, що

$$M(\Gamma) \leqslant \frac{1}{C_0^n\varepsilon_0^n}\int\limits_{D'} K_0 Q(y)\,dm(y) = C_0^{-n}K_0 \cdot \frac{\|Q\|_1}{|f(x) - f(y)|^n}\,. \qquad (26)$$

З (25) і (26) випливає, що

$$\widetilde{c_n} \cdot \log\left(1 + \frac{\delta_1^{1/\alpha}}{(4\widetilde{C})^{1/\alpha}|\varphi(x) - \varphi(y)|}\right) \leqslant C_0^{-n}K_0 \cdot \frac{\|Q\|_1}{|f(x) - f(y)|^n}\,.$$

З останнього співвідношення з огляду на гельдеревість відображення φ випливає, що

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_0^{-1}\widetilde{c_n}^{-\frac{1}{n}}K_0^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{(\|Q\|_1)^{\frac{1}{n}}}{\log^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{\delta_1^{1/\alpha}}{(4\widetilde{C})^{1/\alpha}|\varphi(x) - \varphi(y)|}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^{-1}\widetilde{c_n}^{-\frac{1}{n}}K_0^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{(\|Q\|_1)^{\frac{1}{n}}}{\log^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{\delta_1^{1/\alpha}}{4^{1/\alpha}(\widetilde{C})^{(1/\alpha)+1}|x-y|^{\alpha}}\right)}\,,$$

що і є бажаною нерівністю (14), де $C := C_0^{-1}\cdot \widetilde{c_n}^{-1/n}\cdot K_0^{\frac{1}{n}}$ і $r_0=\frac{\delta_2^{1/\alpha}}{(\widetilde{C})^{1/\alpha+1}}$ замість δ. Проте, можна замінити r_0 на δ, бо з огляду на правило Лопіталя $\log\left(1+\frac{1}{nt}\right)\sim \log\left(1+\frac{1}{kt}\right)$ при $t\to+0$ різних (фіксованих) $k,n>0$.

Ми довели теорему 3 для внутрішніх точок $x,y\in U\cap D$. Для точок $x,y\in U\cap\overline{D}$ це твердження випливає за допомогою граничного переходу $\overline{x}\to x$ і $\overline{y}\to y$, $\overline{x},\overline{y}\in D$. $\Box$

5. Прості кінці. Означення простого кінця, яке використовується нижче, може бути знайдено в [4]. Тут і далі $\overline{D}_P$ позначає поповнення області D її простими кінцями, а $E_D=\overline{D}_P\setminus D$ – множина всіх простих кінців в D. Говоримо, що обмежена область D в $\mathbb{R}^n$ *регулярна*, якщо D може бути квазіконформно відображена на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в $\mathbb{R}^n$, крім того, кожен простий кінець $P\subset E_D$ є регулярним. Зауважимо, що замикання $\overline{D}_P$ регулярної області D є *метризовним*, при цьому, якщо $g:D_0\to D$ – квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, то для $x,y\in\overline{D}_P$ покладемо:

$$\rho(x,y):=|g^{-1}(x)-g^{-1}(y)|\,, \tag{27}$$

де для $x\in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміється як деяка (єдина) точка межі D_0, коректно визначена з огляду на [9, теорема 4.1]. Має місце наступний результат.

Теорема 4. *Нехай $Q\in L^1(D')$, D є регулярною областю, а D' є обмеженою опуклою областю. Тоді будь-яке відображення $f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$ продовжується до відображення $f:\overline{D}_P\to\overline{D'}$, при цьому, для кожної точки $P_0\in E_D$ знайдуться окіл U цієї точки у метричному просторі $(\overline{D}_P,\rho)$ і сталі $C=C(n,A,D,D',P_0)>0$ і $0<\alpha=\alpha(P_0)\leqslant 1$ такі, що*

$$|\overline{f}(P_1)-\overline{f}(P_2)|\leqslant\frac{C\cdot(\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1+\frac{\delta}{\rho^{\alpha}(P_1,P_2)}\right)} \tag{28}$$

для всіх $P_1,P_2\in U$, де $\|Q\|_1$ – норма функції Q в $L^1(D')$.

Доведення. Нехай $f\in\mathfrak{S}_{\delta,A,Q}(D,D')$. Достатньо обмежитися випадком $P_1,P_2\in U\cap D$. Оскільки D – регулярна область, існує квазіконформне відображення g^{-1} області D на область D_0 з локально квазіконформною межею, причому, за означенням метрики ρ в (27),

$$\rho(P_1,P_2):=|g^{-1}(P_1)-g^{-1}(P_2)|\,. \tag{29}$$

Розглянемо допоміжне відображення

$$F(x)=(f\circ g)(x)\,,\quad x\in D_0\,. \tag{30}$$

Оскільки відображення g^{-1} є квазіконформним, то існує стала $1\leqslant K_1<\infty$ така, що

$$\frac{1}{K_1}\cdot M(\Gamma)\leqslant M(g(\Gamma))\leqslant K_1\cdot M(\Gamma) \tag{31}$$

для будь-якої сім'ї кривих Γ в D_0. З огляду на нерівності (31) та з урахуванням того, що f задовольняє співвідношення (3), ми отримаємо, що також F задовольняє співвідношення (3) з новою функцією $\widetilde{Q}(x) := K_1 \cdot Q(x)$. Крім того, оскільки g – фіксоване відображення, яке є гомеоморфізмом, то $h(F^{-1}(A), \partial D) \geqslant \delta_0 > 0$, де $\delta_0 > 0$ – деяке фіксоване число. Тоді до відображення F можна застосувати теорему 3. Застосовуючи цю теорему, ми отримаємо, що для будь-якої точки $x_0 \in D_0$ знайдуться окіл V цієї точки і сталі $C^* = C^*(n, A, D_0, D') > 0$ і $0 < \alpha = \alpha(x_0) \leqslant 1$ такі, що

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \frac{C^* K_1^{\frac{1}{n}} \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta_0}{|x-y|^{\alpha}}\right)} \tag{32}$$

для всіх $x, y \in V \cap D_0$, де $\|Q\|_1$ – норма функції Q в $L^1(D')$. Нехай $V = g^{-1}(U)$, $P_0 := g(x_0)$. Тоді за означенням U є околом простого кінця $P_0 \in E_D$. Якщо $P_1, P_2 \in D_P \cap U$, то $P_1 = g(x)$ і $P_2 = g(y)$ для деяких $x, y \in V \cap D_0$. З огляду на співвідношення (32) та враховуючи те, що $|x-y| = |g^{-1}(P_1) - g^{-1}(P_2)| = \rho(P_1, P_2)$, ми отримаємо, що

$$|F(g^{-1}(P_1)) - F(g^{-1}(P_2))| \leqslant \frac{C^* K_1^{\frac{1}{n}} \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta_0}{\rho^{\alpha}(P_1,P_2)}\right)},$$

або, з огляду на (30),

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leqslant \frac{C^* K_1^{\frac{1}{n}} \cdot (\|Q\|_1)^{1/n}}{\log^{1/n}\left(1 + \frac{\delta_0}{\rho^{\alpha}(P_1,P_2)}\right)}.$$

Останнє співвідношення і є бажаним, якщо в ньому покласти $C := C^* K_1^{\frac{1}{n}}$. $\Box$

Цитована література

1. *Dovhopiatyi O.* On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths //Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. – 2023. – Т. 47, № 1. – С. 3–12.
2. *Gehring F.W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings //J. Anal. Math. – 1985. – V. 45. – P. 181–206.
3. *Ilkevych N.S., Sevost'yanov E.A., Skvortsov S.A.* On the global behavior of inverse mappings in terms of prime ends // Annales Fennici Mathematici. – 2021. – V. 46. – P. 371–388.
4. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the theory of prime ends for space mappings // Ukrainian Math. J. – 2015. – V. 67. no. 4. – P. 528—541.
5. *Martio O., Rickman S., and Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – V. 465. – P. 1–13.
6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York etc.: Springer Monographs in Mathematics, 2009.
7. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1978/1979. – V. 4. – P. 384–401.
8. *Kuratowski K.* Topology, v. 2. – New York–London: Academic Press, 1968.

9. *Näkki R.* Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – V. 35. – P. 13–40.
10. *Rickman S.* Quasiregular mappings. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.
11. *Sevost'yanov E.A.* On logarithmic Hölder continuity of mappings on the boundary // Annales Fennici Mathematici. – 2022. – V. 47. – P. 251–259.
12. *Севостьянов Є.О., Скворцов Є.О., Довгопятий О.П.* Про негомеоморфні відображеня з оберненою нерівністю Полецького // Укр. мат. вісник. – 2020. – Т. 17, № 3. – С. 414–436.
13. *Севостьянов Е.А., Скворцов С.А.* О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 7. – С. 952–967.
14. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math., 229. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
15. *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes. – 1976. – V. 11. – P. 1–44.
16. *Vuorinen M.* On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings // Ark. Math. – 1980. – V. 18. – P. 157–180.
17. *Vuorinen M.* Conformal Geometry and Quasiregular Mappings. Lecture Notes in Math., 1319. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1988.

References

1. Dovhopiatyi, O. (2023). On the possibility of joining two pairs of points in convex domains using paths. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України, 47*(1), 3–12.
2. Gehring, F.W., Martio, O. (1985). Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings. *J. Anal. Math., 45*, 181–206.
3. Ilkevych, N.S., Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2021). On the global behavior of inverse mappings in terms of prime ends. *Annales Fennici Mathematici, 46*, 371–388.
4. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V. (2015). On the theory of prime ends for space mappings. *Ukrainian Math. J., 67*(4), 528—541.
5. Kuratowski, K. (1968). *Topology, v. 2.* New York–London, Academic Press.
6. Martio, O., Rickman, S., and Väisälä, J. (1970). Distortion and singularities of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1., 465,* 1–13.
7. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer Monographs in Mathematics. New York etc., Springer.
8. Martio, O., Sarvas, J. (1978/1979). Injectivity theorems in plane and space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math., 4,* 384–401.
9. Näkki, R. (1979). Prime ends and quasiconformal mappings. *J. Anal. Math., 35,* 13–40.
10. Rickman, S. (1993). *Quasiregular mappings.* Berlin, Springer-Verlag.
11. Sevost'yanov, E.A. (2022). On logarithmic Hölder continuity of mappings on the boundary. *Annales Fennici Mathematici, 47,* 251–259.
12. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2018). On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions. *Ukr. Math. J., 70*(7), 1097–1114.
13. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.O., Dovhopiatyi, O.P. (2021). On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences, 252*(4), 541–557.
14. Väisälä, J. (1971). Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. *Lecture Notes in Math., 229.* Berlin etc., Springer–Verlag.
15. Vuorinen, M. (1976). Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1. Math. Dissertationes, 11,* 1–44.
16. Vuorinen, M. (1980). On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings. *Ark. Math., 18,* 157–180.
17. Vuorinen, M. (1988). Conformal Geometry and Quasiregular Mappings. *Lecture Notes in Math., 1319.* Berlin etc., Springer–Verlag.

O. Dovhopiatyi[1], **E. Sevost'yanov**[1,2]

On the application of one modulus inequality to the mapping theory.

The authors study mappings that satisfy some estimate of the distortion of the modulus of families of paths. Under certain conditions on the domains between which the mappings act, we established that, these mappings are Hölder logarithmic continuous at the boundary points. It is known that, the Hölder continuity is established for many classes of mappings, say quasiconformal and quasiregular mappings. In this regard, it is possible to point to the classical distortion estimates by Martio-Rickman-Väisälä type, as well as the estimates related to the modern classes of mappings with finite distortion. In particular, V.I. Ryazanov together with R.R. Salimov and E.O. Sevost'yanov established local distortion estimates for plane and spatial mappings under FMO condition, or under the Lehto-type integral condition. Recently, the second co-author have obtained Hölder logarithmic continuity for the studied class at points of the unit sphere. This article considers the situation of similar mappings of different domains, not only the unit sphere. Namely, we consider mappings between quasiextremal distance domains (QED-domains) and convex domains. Note that, quasiextremal distance domains introduced by Gehring and Martio are structures in which the modulus of families of paths is metrically related to the diameter of sets. Also, convex domains are involved in the formulation of the main result; we consider mappings that surjectively act onto them. In addition, the article contains the formulations and proofs for some other results on this topic. We consider several more cases in detail, in particular when: 1) the definition domain is a domain with a locally quasiconformal boundary, and the image domain is a bounded convex domain; 2) the definition domain is a regular domain in the sense of prime ends, and the image domain is a bounded convex domain; 3) the mapping acts between the QED-domain and the bounded convex domain and has a fixed point. In all three cases, the mapping is Hölder logarithmic continuous; moreover, in case 2), which refers to prime ends, logarithmic continuity should also be understood in terms of prime ends.

Ключові слова: *quasiconformal mappings, mappings with bounded and finite distortion, moduli of families of paths, Loewner type estimates, convex domains.*

Житомирський державний університет імені Івана Франка[1],
Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ[2]
Alexdov1111111@gmail.com

Отримано 03.12.2023

THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE

Volume 37, No. 2
Slavyansk, 2023

Founded in 1997.

Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine

CONTENTS