УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-9

©2023. **О. Сарана**

ПРО ГОМЕОМОРФІЗМИ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ, ЯКІ ДІЮТЬ В ОБЛАСТІ З НЕРІВНОСТЯМИ ПУАНКАРЕ

Ми досліджуємо гомеоморфізми з одною умовою нормування, що переводять деяку область евклідового простору в область, регулярну за Альфорсом, та у якій виконується нерівність Пуанкаре. Ми припускаємо, що гомеоморфізми задовольняють вагову модульну нерівність Полецького. Доведено, що якщо мажоранта в цій умові задовольняє деяке співвідношення, записане в термінах сингулярних параметрів, то вказані гомеоморфізми задовольняють відповідну оцінку спотворення відстані у межових точках, записану в їх термінах. Більш докладно, рукопис написаний у руслі досліджень відображень з обмеженим і скінченним спотворенням, які активно вивчаються останнім часом. На разі оцінки щодо спотворення відстані відображень з прямою та оберненою нерівністю Полецького у внутрішніх точках області можна вважати добре відомими, оскільки такі оцінки були отримані різними авторами протягом останніх 10-15 років. Ми могли б, зокрема, вказати на результати В. Рязанова, О. Мартіо, У. Сребро, Е. Якубова, М. Крісті, Є. Севостьянова, С. Скворцова та О. Довгопятого з цього приводу. Слід відзначити, що за певних додаткових припущень відображення з прямою нерівністю Полецького включаються в клас відображень зі скінченним спотворенням за Іванцем-Мартіном. У той же самий час, згадані вище оцінки спотворення відстані у межових точках області вивчені не в достатній мірі. Наш рукопис присвячено саме отриманню такого роду оцінок. Звісно, ми вимагаємо, щоб мажоранта у нерівності Полецького задовольняла певні вимоги для їх отримання. Умови, записані в термінах сингулярних параметрів, є максимально зручними і охоплюють важливі частинні випадки. Зокрема, функції скінченного та обмеженого середнього коливання за Джоном-Ніренбергом, а також функції з інтегральною умовою розбіжності типу Лехто можуть бути описані в термінах сингулярних параметрів, і це буде враховано у наших майбутніх дослідженнях. Окрім сингулярних параметрів та використання модульної техніки, ключовим моментом нашого рукопису є простори з нерівностями Пуанкаре. Зауважимо, що однією з характерних рис таких просторів є виконання у них нерівностей типу Льовнера, тобто, метричних нижніх оцінок модуля сімей кривих через діаметр множин, які вони з'єднують. Ця нерівність є вирішальною для отримання результату статті.

MSC: Primary 30C65, Secondary 30C62, 31A15.

Ключові слова: *квазіконформні відображення, відображення з обмеженим і скінченним спотворенням, модулі сімей кривих, межова поведінка*

1. Вступ. Традиційним напрямом дослідження в теорії функцій є отримання оцінок спотворення при відображеннях. Такі оцінки в багатьох випадках забезпечують одностайну неперервність відповідних сімей і мають корисне застосування, у тому числі, в області отримання компактних/нормальних класів відображень, існуванні розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними тощо (див., напр., [4, 9]). Слід відзначити значні просунення у вказаній області, отримані всередині донецької та житомирської наукових шкіл, а також відомих світових спеціалістів з теорії відображень, див. [2,7,8,10–12] і [13]. У даній статті ми узагальнюємо досвід, отриманий у згаданій роботі [13], і розповсюджуємо оцінки спотворення відстані при гомеомеорфізмах з узагальненою нерівністю Полецького на межові точки. Точніше, мова йде про виконання у деякому класі відображень деякої верхньої оцінки, записаної в термінах модуля сімей кривих. Права частина цієї оцінки характеризується деякою мажорантою Q, і виконання спотворення відстані при відображенні залежить від того, які саме умови задовольняє ця мажоранта. В даному рукопису ми вимагаємо виконання «доволі загальних умов» на Q, які записуються в термінах так званих сингулярних параметрів I та ψ. Такий підхід неодноразово використовувався в роботах В. Рязанова так його учнів, див., напр., [9] та [14]. Результат, сформульований нижче, узагальнює відповідні дослідження, розпочаті в [3,12] та [15].

Перейдемо до означень. Нехай D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $M_p(\Gamma)$ – p-модуль сім'ї кривих Γ в $\mathbb{R}^n$ (див., напр., [16, розд. 6]). Тут і надалі $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$, де n – розмірність простору $\mathbb{R}^n$. Покладемо

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,, B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}\,,$$

$$\mathbb{B}^n := B(0,1)\,, \quad \mathbb{S}^{n-1} := S(0,1)\,, \quad \Omega_n = m(\mathbb{B}^n)\,, \quad \omega_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})\,,$$

де $\mathcal{H}^{n-1}$ позначає $(n-1)$-вимірну міру Хаусдорфа в $\mathbb{R}^n$. Нехай, крім того,

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,.$$

Для множин E, $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ і області $D \subset \mathbb{R}^n$ запис $\Gamma(E, F, D)$ позначає сім'ю усіх кривих $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ таких, що $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Нехай $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція, рівна нулю зовні D. З огляду на [9, разд. 7.6], відображення $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ називається *кільцевим Q-відображенням у точці $x_0 \in \overline{D}$ відносно p-модуля,* $x_0 \neq \infty$, $p \geqslant 1$, якщо існує $r_0 = r(x_0) > 0$ таке, що для довільних $0 < r_1 < r_2 < r_0$ виконується нерівність

$$M_p(f(\Gamma(S(x_0, r_1),\, S(x_0, r_2),\, D))) \leqslant \int\limits_{A(x_0, r_1, r_2)} Q(x) \cdot \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)\,, \qquad (1)$$

де $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ – довільна невід'ємна вимірна за Лебегом функція, така що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,. \qquad (2)$$

Борелева функція $\rho\colon D \to [0, \infty]$ називається *верхнім градієнтом* функції $u\colon D \to \mathbb{R}$, якщо для всіх спрямлюваних кривих γ, які з'єднують точки x і $y \in D$, виконується нерівність $|u(x) - u(y)| \leqslant \int\limits_{\gamma} \rho\, |dx|$ (див. [5, розділ 7.22]). Говоримо, що в області D виконується $(1; p)$-*нерівність Пуанкаре,* $p \geqslant 1$, якщо відшукаються сталі

$C \geqslant 1$ і $\tau > 0$ такі, що для всякої кулі $B \subset D$, будь-якої обмеженої неперервної функції $u\colon D \to \mathbb{R}$ і довільного її верхнього градієнта ρ виконано співвідношення

$$\frac{1}{m(B)}\int\limits_{B}|u(x)-u_B|\,dm(x) \leqslant C\cdot(\operatorname{diam}B)\left(\frac{1}{m(\tau B)}\int\limits_{\tau B}\rho^p(x)\,dm(x)\right)^{1/p},$$

$u_B := \frac{1}{m(B)}\int\limits_B u(x)\,dm(x)$. Область D *регулярна за Альфорсом,* якщо для всякого $x_0 \in D$, деякої константи $C \geqslant 1$ і всякого $0 < R < \operatorname{diam} D$ виконується співвідношення

$$\frac{1}{C}R^n \leqslant m(B(x_0,R)\cap D) \leqslant CR^n.$$

Для $A, B \subset \mathbb{R}^n$ покладаємо:

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\in A}|x-y|\,, \quad \operatorname{dist}(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B}|x-y|\,.$$

Для скорочення ми іноді використовуємо записи $d(A)$ і $d(A,B)$ замість $\operatorname{diam} A$ і $\operatorname{dist}(A,B)$.

Область $D \subset \mathbb{R}^n$ називається *локально зв'язною в точці* $x_0 \in \partial D$, якщо для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V \subset U$ точки x_0 такий, що множина $V \cap D$ є зв'язною. Область D локально зв'язна на ∂D, якщо вона локально зв'язна в кожній точці $x_0 \in \partial D$.

Зафіксуємо $\delta > 0$ і $p \geqslant 1$, області $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, елементи $a \in D$, $x_0 \in \partial D$, і функцію $Q : D \to [0,\infty]$. Позначимо символом $\mathfrak{F}^{p,x_0}_{Q,a,\delta}(D,D')$ сім'ю всіх кільцевих Q-гомеоморфізмів f у точці x_0 відносно p-модуля, що бієктивно діють між областями D і D' і задовольняють умову $d(f(a),\partial D') \geqslant \delta$. Виконується наступний результат.

Теорема 1. *Нехай $x_0 \in \partial D$, $x_0 \neq \infty$, $n-1 < p \leqslant n$, D є локально зв'язною на своїй межі, D' є регулярною за Альфорсом обмеженою областю з $(1;p)$-нерівністю Пуанкаре. Припустимо, що виконані наступні умови:*

1) існує $r_0' = r_0'(x_0) > 0$ таке, що множина $B(x_0,r)\cap D$ є зв'язною при всіх $0 < r < r_0'$;

2) існують $1 \leqslant q < n$, $\varepsilon_0 > 0$, $K_0 > 0$, і вимірна за Лебегом функція $\psi : (0,\varepsilon_0) \to [0,\infty]$ такі, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконується співвідношення

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt < \infty\,, \tag{3}$$

причому

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) \leqslant K_0\cdot I^q(\varepsilon,\varepsilon_0) \tag{4}$$

при $\varepsilon \to 0$. *Якщо* $|x-x_0| \geqslant |y-x_0|$ *і* $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$, $I(r_1,r_2) > 0$ *при всіх* $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_0$, *то існує* $0 < \widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(x_0) < \varepsilon_0$, *константа* $\widetilde{C} = \widetilde{C}(x_0,p,n,K_0,D') > 0$ *і деяка функція* $\omega = \omega(x,x_0)$, $\omega \to 1$ *при* $x \to x_0$, *такі що оцінка*

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \widetilde{C}\omega \cdot I^{q-n}(|x-x_0|,\varepsilon_0) \tag{5}$$

виконується для всіх $x,y \in B(x_0,\widetilde{\varepsilon}(x_0)) \cap D$ *і всіх* $f \in \mathfrak{F}^{p,x_0}_{Q,a,\delta}(D,D')$.

2. Доведення теореми 1.

Оскільки область D' – обмежена, існує $R_0 > 0$ таке, що $D' \subset B(0,R_0)$. Спочатку проведемо деякі допоміжні міркування, див. [3] і [15]. Якщо ∂D містить принаймні одну скінченну точку, окрім x_0, позначимо її через y_0. У противному випадку, покладемо $y_0 := \infty$. Оскільки D локально зв'язна на своїй межі, точку a можна поєднати з точкою y_0 кривою, котра належить D цілком, за виключенням самої точки y_0 (див. [9, Proposition 13.2]). Позначимо цю криву через E. Доведемо існування точки $a_f \in E$, такої, що

$$|f(a)-f(a_f)| \geqslant (1/2)\cdot d(f(a),\partial D') \geqslant \delta/2\,. \tag{6}$$

Дійсно, нехай $z_k \in E$, $k = 1,2\ldots,$ – довільна послідовність така, що $z_k \to y_0$ при $k \to \infty$. Оскільки простір $\overline{\mathbb{R}^n}$ є компактним, можна вважати, що послідовність $f(z_k)$ також збігається до деякого y_0' при $k \to \infty$. Зауважимо, що є справедливим включення: $C(y_0,f) \subset \partial D'$, де $C(y_0,f)$ – гранична множина відображення f у точці y_0 (див., напр., [9, Proposition 13.5]). Оскільки $f(z_k) \to y_0'$ при $k \to \infty$, для числа $\delta/2$ знайдеться $k_0 = k_0(f) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$|f(z_k)-y_0'| < \delta/2 \tag{7}$$

при всіх $k \geqslant k_0$. Покладемо $a_f := z_{k_0}$. Тоді за нерівністю трикутника і з огляду на співвідношення (7), використовуючи означення класу $\mathfrak{F}^{p,x_0}_{Q,a,\delta}(D,D')$, маємо:

$$\begin{gathered}\delta \leqslant d(f(a),\partial D') \leqslant \\ \leqslant |f(a)-y_0'| \leqslant |f(a)-f(a_f)| + |f(a_f)-y_0'| \leqslant \\ \leqslant |f(a)-f(a_f)| + \delta/2\,,\end{gathered} \tag{8}$$

або, переносячи $\delta/2$ у ліву частину (8),

$$\delta/2 \leqslant \frac{1}{2}\cdot d(f(a),\partial D') \leqslant |f(a)-f(a_f)|\,.$$

Останнє співвідношення доводить (6). Покладемо

$$\widetilde{\varepsilon} = \min\{r_0', d(x_0,E), 1\}\,,$$

де r_0' – число з формулювання теореми 1. Нехай A_f – континуум у D, який є частиною кривої E від точки a до точки a_f. Нехай також $f \in \mathfrak{F}^{p,x_0}_{Q,a,\delta}(D,D')$ і $x,y \in B(x_0,\widetilde{\varepsilon})$. За визначенням $\widetilde{\varepsilon}$,

$$A_f \subset D \setminus B(x_0,\widetilde{\varepsilon})\,. \tag{9}$$

Можна вважати $\widetilde{\varepsilon}>0$ настільки малим, що співвідношення (3) і (4) виконані для будь-яких $\varepsilon\in(0,\widetilde{\varepsilon})$. Нехай $\varepsilon_1>0$ і $\varepsilon_2>0$ такі числа, що замкнені кулі $\overline{B(x,\varepsilon_1)}$ і $\overline{B(y,\varepsilon_2)}$ лежать у D. (Якщо y є такою, що $|y-x_0|<|x-x_0|$, то ми, звичайно, можемо покласти $y_*:=y$). Нехай $x_*\in B(x,\varepsilon_1)\cap B(x_0,|x-x_0|)$ і $y_*\in B(y,\varepsilon_2)\cap B(x_0,|x-x_0|)$. Оскільки множина $B(x_0,r)\cap D$ є зв'язною при всіх $0<r<r_0'$, точки x_* і y_* можна з'єднати кривою γ_*, яка повністю належить кулі $\overline{B(x_0,|x-x_0|)}$ і лежить у D. В свою чергу, множини $\overline{B(x_0,|x-x_0|)}\cap B(x,\varepsilon_1)$ і $\overline{B(x_0,|x-x_0|)}\cap B(x,\varepsilon_2)$ є опуклими як перетин двох опуклих множин, тому точки x і x_* можуть бути з'єднані відрізком γ_1 в $\overline{B(x_0,|x-x_0|)}\cap B(x,\varepsilon_1)\subset\overline{B(x_0,|x-x_0|)}\cap D$, а точки y і y_* – відрізком γ_2 в $\overline{B(x_0,|x-x_0|)}\cap B(y,\varepsilon_2)\subset\overline{B(x_0,|x-x_0|)}\cap D$. Нехай K – крива, яка є послідовним поєднанням кривих γ_1, γ_* і γ_2. Тоді крива K з'єднує точки x і y у $\overline{B(x_0,|x-x_0|)}\cap D$.

Нехай $|K|$ – носій (образ) кривої K. Зауважимо, що множини $f(|K|)$ і $f(A_f)$ є континуумами як неперервний образ континуумів при відображенні f. Тоді за [1, Proposition 4.7]

$$M_p(\Gamma(f(|K|),f(A_f),D'))\geqslant\frac{1}{M}\cdot\frac{\min\{\operatorname{diam}f(|K|),\operatorname{diam}f(A_f)\}}{R_0^{1+p-n}}\,. \tag{10}$$

Зауважимо, що

$$\Gamma(|K|,A_f,D)>\Gamma(S(x_0,|x-x_0|),S(x_0,\widetilde{\varepsilon}),D)\,. \tag{11}$$

Дійсно, нехай $\gamma\in\Gamma(|K|,A_f,D)$, $\gamma:[0,1]\to D$, $\gamma(0)\in|K|$ і $\gamma(1)\in A_f$. Нагадаємо, що $|K|\subset\overline{B(x_0,|x-x_0|)}$. З огляду на (9), ми отримаємо, що $A_f\subset D\setminus B(x_0,|x-x_0|)$. Тоді $|\gamma|\cap\overline{B(x_0,|x-x_0|)}\neq\varnothing\neq|\gamma|\cap(D\setminus B(x_0,|x-x_0|))$. За [6, теорема 1.I.5.46] існує $t_1\in[0,1)$ таке, що $\gamma(t_1)\in S(x_0,|x-x_0|)$. Розглянемо криву $\gamma_1:=\gamma|_{[t_1,1]}$. Нагадаємо, що $|K|\subset B(x_0,\widetilde{\varepsilon})$, крім того, завдяки (9), $A_f\subset D\setminus B(x_0,\widetilde{\varepsilon})$. Тоді $|\gamma_1|\cap B(x_0,\widetilde{\varepsilon})\neq\varnothing\neq|\gamma_1|\cap(D\setminus B(x_0,\widetilde{\varepsilon}))$. За [6, теорема 1.I.5.46] існує $t_2\in(t_1,1)$ таке, що $\gamma_1(t_2)=\gamma(t_2)\in S(x_0,\widetilde{\varepsilon})$. Покладемо $\gamma_2:=\gamma|_{[t_1,t_2]}$. Тоді γ_2 є підкривою γ і $\gamma_2\in\Gamma(S(x_0,|x-x_0|),S(x_0,\widetilde{\varepsilon}),D)$. Це доводить (11). В цьому випадку, за міноруванням модуля сімей кривих (див., напр., [16, теорема 6.4]), з огляду на (1) і (11) ми отримаємо, що

$$\begin{aligned}M_p(\Gamma(f(|K|),f(A_f),D'))&=M_p(f(\Gamma(|K|,A_f,D)))\leqslant\\&\leqslant M_p(f(\Gamma(S(x_0,|x-x_0|),S(x_0,\widetilde{\varepsilon}),D)))\leqslant\\&\leqslant\int\limits_{A(x_0,|x-x_0|,\varepsilon_0)}Q(z)\cdot\eta^p(|z-x_0|)\,dm(z)\,,\end{aligned} \tag{12}$$

де η – довільна вимірна за Лебегом функція, що задовольняє умову (2) при $r_1=|x-x_0|$ і $r_2=\widetilde{\varepsilon}$. Покладемо

$$\eta(t):=\begin{cases}\frac{(\psi(t))^{n/p}}{(I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon}))^{n/p}}\,, & t\in(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})\,,\\ 0\,, & t\notin(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})\,.\end{cases}$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_{|x-x_0|}^{\widetilde{\varepsilon}} \frac{\psi(t)\,dt}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})} = \frac{1}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})}\cdot\int\limits_{|x-x_0|}^{\widetilde{\varepsilon}} \psi(t)\,dt = 1\,.$$

Тоді за нерівністю Гельдера ми отримаємо, що

$$1 = \int\limits_{|x-x_0|}^{\widetilde{\varepsilon}} \frac{\psi(t)\,dt}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{|x-x_0|}^{\widetilde{\varepsilon}} \left(\frac{\psi(t)}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})}\right)^{\frac{n}{p}} dt\right)^{\frac{p}{n}} \cdot (\widetilde{\varepsilon}-|x-x_0|)^{\frac{n-p}{n}} \leqslant \tag{13}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{|x-x_0|}^{\widetilde{\varepsilon}} \left(\frac{\psi(t)}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})}\right)^{\frac{n}{p}} dt\right)^{\frac{p}{n}} = \left(\int\limits_{|x-x_0|}^{\widetilde{\varepsilon}} \eta(t)\,dt\right)^{\frac{p}{n}}.$$

З огляду на (13) випливає, що функція η задовольняє умову (2) при $r_1 = |x-x_0|$ і $r_2 = \widetilde{\varepsilon}$. В цьому випадку, з огляду на (12) та враховуючи (3) і (4), ми отримаємо, що

$$M_p(\Gamma(f(|K|), f(A_f), D')) \leqslant \frac{1}{I^n(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})} \int\limits_{A(x_0,|x-x_0|,\varepsilon_0)} Q(z)\cdot\psi^n(|z-x_0|)\,dm(z) =$$

$$= \left(\frac{I(|x-x_0|,\varepsilon_0)}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})}\right)^n \cdot \frac{1}{I^n(|x-x_0|,\varepsilon_0)} \int\limits_{A(x_0,|x-x_0|,\varepsilon_0)} Q(z)\cdot\psi^n(|z-x_0|)\,dm(z) \leqslant \tag{14}$$

$$\leqslant \left(1+\frac{I(\widetilde{\varepsilon},\varepsilon_0)}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})}\right)^n \cdot K_0 I^{q-n}(|x-x_0|,\varepsilon_0)\,.$$

З (14) маємо:

$$M_p(\Gamma(f(|K|), f(A_f), D')) \leqslant \left(1+\frac{I(\widetilde{\varepsilon},\varepsilon_0)}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})}\right)^n \cdot K_0 I^{q-n}(|x-x_0|,\varepsilon_0)\,. \tag{15}$$

Поєднуючи (10) і (15), ми отримаємо, що

$$\frac{1}{M}\cdot\frac{\min\{\mathrm{diam}\, f(|K|), \mathrm{diam}\, f(A_f)\}}{R_0^{1+p-n}} \leqslant \omega K_0 I^{q-n}(|x-x_0|,\varepsilon_0)\,, \tag{16}$$

де

$$\omega = \omega(x,x_0) := \left(1+\frac{I(\widetilde{\varepsilon},\varepsilon_0)}{I(|x-x_0|,\widetilde{\varepsilon})}\right)^n \to 1\,, \quad x\to x_0\,.$$

З огляду на (6),

$$\min\{\operatorname{diam} f(|K|), \operatorname{diam} f(A_f)\} \geqslant \min\{\operatorname{diam} f(|K|), \delta/2\}\,.$$

Тоді з (16) будемо мати:

$$\min\{\operatorname{diam} f(|K|), \delta/2\} \leqslant \omega M R_0^{1+p-n} K_0 I^{q-n}(|x-x_0|, \varepsilon_0)\,. \tag{17}$$

Зауважимо, що $\omega M R_0^{1+p-n} K_0 I^{q-n}(|x-x_0|, \varepsilon_0) \to 0$ при $x \to x_0$, бо $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$ за умовою теореми, та $q < n$ за припущенням. Тоді існує $0 < \sigma = \sigma(x_0, M, R_0, n, p, \delta)$ таке, що

$$\omega M R_0^{1+p-n} K_0 I^{q-n}(|x-x_0|, \varepsilon_0) < \delta/2, \qquad \forall\, x \in B(x_0, \sigma)\,. \tag{18}$$

Нехай $|x-x_0| < \sigma$, тоді з огляду на (17) і (18), ми отримаємо, що

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \operatorname{diam} f(|K|) \leqslant \omega M R_0^{1+p-n} K_0 I^{q-n}(|x-x_0|, \varepsilon_0)\,. \tag{19}$$

Зауважимо, що за нерівністю трикутника $|f(x)-f(y)| \leqslant 2R_0$, тому при $|x-x_0| \geqslant \sigma$ маємо:

$$I^{q-n}(|x-x_0|, \varepsilon_0) \geqslant I^{q-n}(\sigma, \varepsilon_0) := P_0\,, \tag{20}$$

$$\omega = \omega(x, x_0) = \left(1 + \frac{I(\widetilde{\varepsilon}, \varepsilon_0)}{I(|x-x_0|, \widetilde{\varepsilon})}\right)^n \geqslant \left(1 + \frac{I(\widetilde{\varepsilon}, \varepsilon_0)}{I(\sigma, \widetilde{\varepsilon})}\right)^n := Q_0\,.$$

Отже,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 2R_0 \leqslant \frac{2R_0}{Q_0 P_0} \cdot I^{q-n}(|x-x_0|, \varepsilon_0)\omega\,. \tag{21}$$

Покладемо $\widetilde{C} := \max\left\{M R_0^{1+p-n} K_0, \frac{2R_0}{Q_0 P_0}\right\}$. Стала $\widetilde{C}$ залежить тільки від K_0, x_0, p, n і D', бо M і R_0 цілком визначаються по області D', а число $\varepsilon_0 > 0$ за умовою залежить тільки від x_0. Доведення завершено. □

Цитована література

1. *Adamowicz T. and Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – V. 35. – P. 609—626.
2. *Arsenović M., Mateljević M.* On the Hölder continuity of ring Q-homeomorphisms // Georgian Math. J. – 2022. – V. 29, no. 6. – P. 805—811.
3. *Dovhopiatyi O.P., Sevost'yanov E.A.* On distortion estimates of mappings with the Poletsky condition in domains with Poincare inequality. https://arxiv.org/abs/2305.11028.
4. *Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. – New York etc.: Springer, 2012.
5. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on metric spaces. – New York: Springer Science+Business Media, 2001.
6. *Kuratowski K.* Topology, v. 2. – New York–London: Academic Press, 1968.
7. *Martio O., Näkki R.* Boundary Hölder continuity and quasiconformal mappings // J. London Math. Soc. (2). – 1991. – V. 44. – P. 339–350.
8. *Martio O., Rickman S., and Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1970. – V. 465. – P. 1–13.

9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York etc.: Springer Monographs in Mathematics, 2009.
10. *Mateljević M., Salimov R., Sevost'yanov E.* Hölder and Lipschitz Continuity in Orlicz-Sobolev Classes, Distortion and Harmonic Mappings // Filomat. – 2022. – V. 36, no. 16. – P. 5359–5390.
11. *Ryazanov V.I., Salimov R.R. and Sevost'yanov E.A.* On the Hölder property of mappings in domains and on boundaries // J. Math. Sci. – 2020. – V. 246, no. 1. – P. 60–74.
12. *Sevost'yanov E.A.* On logarithmic Hölder continuity of mappings on the boundary // Annales Fennici Mathematici. – 2022. – V. 47. – P. 251–259.
13. *Севостьянов Є.О., Скворцов Є.О., Довгопятий О.П.* Про негомеоморфні відображеня з оберненою нерівністю Полецького // Укр. мат. вісник. – 2020. – Т. 17, № 3. – С. 414–436.
14. *Севостьянов Е.А., Скворцов С.А.* О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 7. – С. 952–967.
15. *Sevost'yanov E.A.* On boundary Hölder continuity of mappings with the Poletsky condition // https://arxiv.org/abs/2303.11050.
16. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math., 229. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.

References

1. Adamowicz, T. and Shanmugalingam, N. (2010). Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 35*, 609—626. DOI: https://doi.org/10.5186/aasfm.2010.3538
2. Arsenović, M., Mateljević, M. (2022). On the Hölder continuity of ring Q-homeomorphisms. *Georgian Math. J., 29*(6), 805—811. DOI: https://doi.org/10.1515/gmj-2022-2186
3. Dovhopiatyi, O.P., Sevost'yanov, E.A. (2023). On distortion estimates of mappings with the Poletsky condition in domains with Poincare inequality. https://arxiv.org/abs/2305.11028.
4. Gutlyanskii, V.Ya., Ryazanov, V.I., Srebro, U., Yakubov, E. (2012). *The Beltrami Equation: A Geometric Approach.* New York etc., Springer.
5. Heinonen, J. (2001). Lectures on Analysis on metric spaces. New York, Springer Science+Business Media.
6. Kuratowski, K. (1968). *Topology, v. 2.* New York–London, Academic Press.
7. Martio, O., Näkki, R. Boundary Hölder continuity and quasiconformal mappings. *J. London Math. Soc. (2), 44,* 339–350. DOI: https://doi.org/10.2307/2047491
8. Martio, O., Rickman, S., and Väisälä, J. (1970). Distortion and singularities of quasiregular mappings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1., 465,* 1–13.
9. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* Springer Monographs in Mathematics. New York etc., Springer.
10. Mateljević, M., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2022). Hölder and Lipschitz Continuity in Orlicz-Sobolev Classes, Distortion and Harmonic Mappings. *Filomat, 36*(16), 5359–5390. DOI: https://doi.org/10.2298/FIL2216359M
11. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. and Sevost'yanov, E.A. (2020). On the Hölder property of mappings in domains and on boundaries. *J. Math. Sci., 246*(1), 60–74. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-04723-2
12. Sevost'yanov, E.A. (2022). On logarithmic Hölder continuity of mappings on the boundary. *Annales Fennici Mathematici, 47,* 251–259. DOI: https://doi.org/10.54330/afm.113348
13. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.O., Dovhopiatyi, O.P. (2021). On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences, 252*(4), 541–557. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-020-05179-0
14. Sevost'yanov, E.A., Skvortsov, S.A. (2018). On the Convergence of Mappings in Metric Spaces with Direct and Inverse Modulus Conditions. *Ukr. Math. J., 70*(7), 1097–1114. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-018-1554-4 .
15. Sevost'yanov, E.A. (2023). On boundary Hölder continuity of mappings with the Poletsky condition,

https://arxiv.org/abs/2303.11050.
16. Väisälä, J. (1971). Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. *Lecture Notes in Math., 229.* Berlin etc., Springer–Verlag.

Oleksandr Sarana

On homomorphisms with integral constraints acting in a domain with Poincare inequalities.

We study homeomorphisms with one normalization condition that transform some domain of the Euclidean space onto a domain which is Ahlfors regular and supports Poincare inequality. We assume that, the homeomorphisms satisfy the weighted modulus Poletsky condition. If the majorant in this condition satisfies some relation written in terms of singular parameters, then the specified homeomorphisms satisfy the corresponding distortion estimate at the boundary points written in their terms. In more detail, the manuscript is written in the vein of research on mappings with bounded and finite distortion, which have been actively studied recently. Observe that, for mappings with direct and inverse Poletsky inequality, the estimates of the distortion under the mappings at the inner points of a domain may be considered known, since such estimates have been obtained by various authors over the last 10-15 years. We could, in particular, point to the results of V. Ryazanov, O. Martio, U. Srebro, E. Yakubov, M. Cristea, E. Sevost'yanov, S. Skvortsov, and O. Dovhopiatyi in this regard. It should be noted that, under certain additional assumptions, mappings with a direct Poletsky inequalities are included in the class of mappings with finite distortion by Iwaniec-Martin. At the same time, the above-mentioned estimates of distance distortion at the boundary points of the domain have not been sufficiently studied. Our manuscript is dedicated to obtaining such estimates. Of course, we require that the majorant in Poletsky's inequality satisfy certain requirements for obtaining them. The conditions written in terms of singular parameters are the most convenient and cover important partial cases. In particular, functions of finite and bounded mean oscillation by John-Nirenberg, as well as functions with the Lehto integral divergence condition can be described in terms of singular parameters, and this will be taken into account in our future research. In addition to singular parameters and the use of modulus techniques, the key point of our manuscript is spaces with Poincare inequalities. Note that one of the characteristic features of such spaces is their fulfillment of Loewner-type inequalities, i.e., metric lower bounds of the modulus of families of curves through the diameter of the sets they join. This inequality is crucial for obtaining the result of the paper.

Ключові слова: *quasiconformal mappings, mappings with bounded and finite distortion, moduli of families of paths, boundary behavior.*

Житомирський державний університет імені Івана Франка
sarana-alex@ukr.net

Отримано 20.12.2023