***Козлова К.А.,***
*студентка магістратури другого року навчання*
*фізико-математичного факультету,*
*Житомирський державний університет імені Івана Франка,*
*м. Житомир, Україна*
***Франовський А.Ц.,***
*кандидат фізико-математичних наук, доцент,*
*доцент кафедри алгебри та геометрії,*
*Житомирський державний університет імені Івана Франка,*
*м. Житомир, Україна*

# ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ З ОБМЕЖЕНЯМИ

Спектр проблем, що розглядаються в геометрії, дуже широкий. Серед них особливе місце займають задачі на побудову з обмеженнями, що сприяють розвитку в учнів точності, послідовності та обґрунтованості мислення. Задачі на побудову з обмеженнями є важливим способом формування у школярів геометричних уявлень загалом. У процесі геометричних побудов учні знайомляться з властивостями геометричних фігур та їх взаємозв'язків, навчаються користуватися інструментами для креслення та отримують графічні навички.

Велика кількість праць присвячена темі проблем викладання задач на побудову з обмеженнями. Дослідження у цій сфері здійснювали такі вчені, як: М. М. Астаф'єва, О. М. Астряб, О. В. Богач, А. П. Боравльов, М. І. Бурда, І. Г. Ленчук, К. С. Марченко, С. С. Радченко, А. О. Розуменко, Н. А. Тарасенкова, Г. Б. Тлегенова, П. І. Ульшин, А. В. Фарков, Г. Б. Філіпповський, О. В. Школа тощо.

Мета статті – окреслити шляхи розв'язування задач на побудову з обмеженнями, проаналізувати та дослідити їх наслідки.

З давньоєгипетських папірусів відомо, що за допомогою лінійки та циркуля ще у XX столітті до н.е. люди могли розв'язувати елементарні задачі на побудову. До них належать:

1. Поділ відрізка навпіл і на n рівних частин;
2. Відкладання кута, рівного даному, поділ його навпіл;
3. Побудова трикутника за даними його сторонами;
4. Проведення прямої, паралельної до даної, через точку поза нею.

Рішення будь-якої задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки зводиться до обмеженої кількості основних конструкцій, що вивчаються ще в перших розділах курсу геометрії (побудова бісектриси, поділ навпіл відрізка, побудова дотичної до кола, тощо).

У IV столітті до н. е. Евклід написав свою роботу «Початки», в якій зібрав усі накопичені на той час геометричні матеріали і привів їх до логічної системи. На основі робіт Евкліда будується вся конструктивна геометрія, що охоплює задачі на побудову з обмеженнями [3].

План складається з чотирьох частин: аналіз, побудова, доведення та дослідження. Розкриємо їх зміст.

I. *Аналіз* є підготовчим етапом і водночас найважливішим для вирішення задач. Метою аналізу є встановлення таких взаємозв'язків між елементами бажаної фігури та даними задачі, які б дали змогу побудувати цю фігуру. Аналіз задачі полягає в тому, що спочатку інтуїтивно припускається її рішення і відбувається пошук різних наслідків (передумов) для цього припущення, а потім, залежно від характеру цих наслідків, відбуваються спроби знайти спосіб знаходження рішення для поставленої задачі [2].

II. *Побудова* за складеним планом – механічне виконання тих прийомів, які були встановлені з плану розв'язання задачі, тобто аналізу.

III. *Доведення.* Коли побудована необхідна фігура, необхідно продемонструвати, що вона відповідає усім вимогам задачі. У цьому випадку лінія міркувань протилежна тій, що використовується в аналізі. Тому доведення інколи називають синтезом.

IV. *Дослідження.* Метою дослідження є з'ясування, чи завжди проблема розв'язувана і скільки є рішень (одне або декілька). Необхідно розглянути всі можливі особливі випадки та з'ясувати, чи змінюється і як саме (якщо змінюється) хід рішення в цих випадках.

У роботі Евкліда «Початки» стикаємося з такою задачею: «Побудувати бісектрису кута, вершина якого недоступна». Вона є однією з перших і її досі з цікавістю розв'язують учні, щоразу пропонуючи різні варіанти побудови шуканої бісектриси кута з недоступною вершиною. Навряд чи знайдеться учень, якого це завдання не «зачепить». І це не дивно: вершина кута відсутня, а бісектриса, яка виходить із цієї вершини, все ж може бути проведена. Розглянемо декілька красивих та вишуканих способів розв'язання задачі.

*Спосіб 1 (Розв'язок запропонований Евклідом).* Позначимо невідому вершину через *A*. Проведемо довільну пряму *t*, що перетинає сторони кута в точках *B* і *C* (рис. 1). Нехай бісектриси кутів *B* і *C* перетинаються в точці *I*. Очевидно, бісектриса кута *A* теж пройде через цю точку. Потім довільно провівши пряму *k* і діставши аналогічно точку $I_1$, зробимо висновок: пряма *II1* збігається з бісектрисою кута *A*.

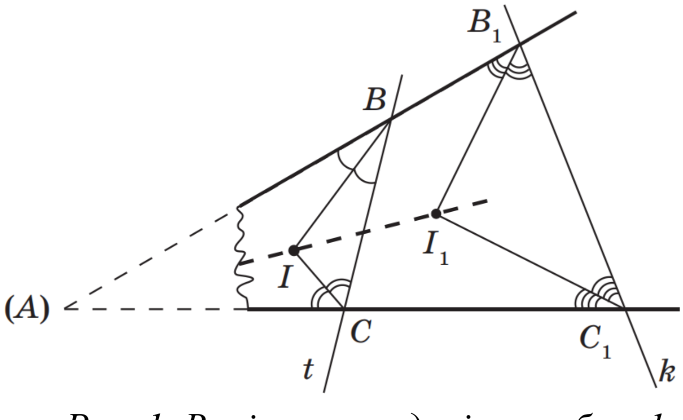


*Рис. 1. Вирішення задачі способом 1*

*Спосіб 2.* Діставши так само, як у першому способі, точку *I*, скористаємося тим, що дві зовнішні й одна внутрішня бісектриси довільного трикутника перетинаються в одній точці – точці *Q* (рис. 2). Тоді пряма *QI* збігається з бісектрисою кута *A*.

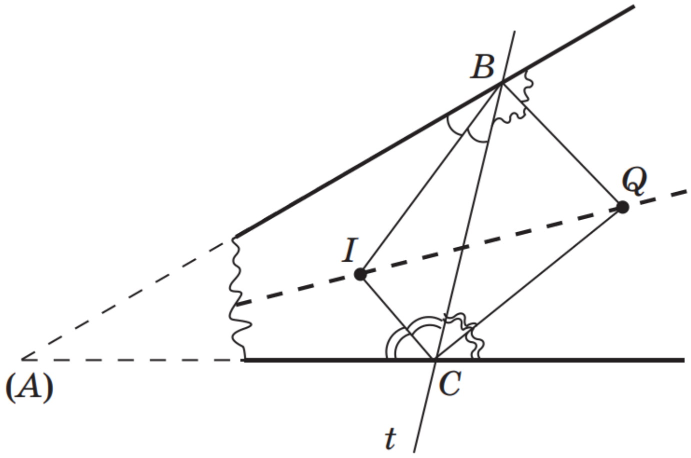


*Рис. 2. Вирішення задачі способом 2*

*Спосіб 3.* Будуємо маленький рівнобедрений трикутник *NCK*, провівши через довільну точку *N* на одній стороні кута пряму n паралельно другій стороні, а потім – коло із центром у точці *N* довільного радіуса. Дістанемо точки *C* і *K*, причому *NK*=*NC* (рис. 3). Пряма *CK* у результаті перетину із другою стороною кута утворює рівнобедрений трикутник *ABC*. Очевидно, пряма *q* – серединний перпендикуляр до *BC* – збігається з бісектрисою кута *A*.

Безсумнівно, учні й педагоги придумають нові способи розв’язання. Цим вони ще більше піднімуть рейтинг блискучої задачі Евкліда – однієї з перших у світі «задач із обмеженнями».

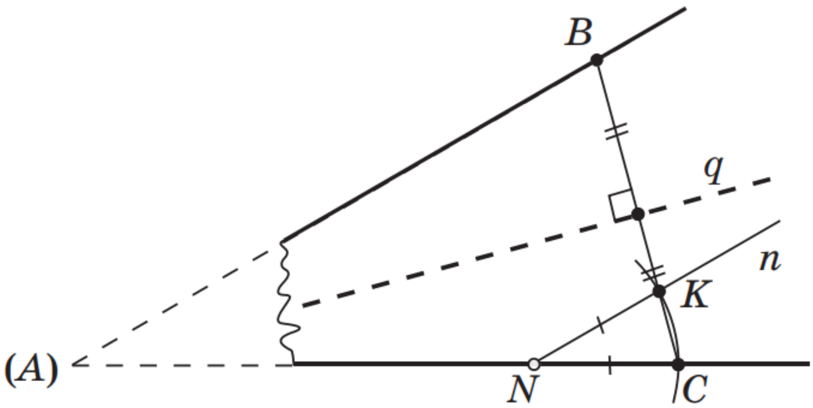


*Рис. 3. Вирішення задачі способом 3*

*Теорема Мора – Маскероні:* усі задачі, що розв’язуються циркулем і лінійкою, можна розв’язати за допомогою одного циркуля [1].

Для цього Мор і Маскероні звели розв'язання таких задач до низки елементарних побудов, яких виявилось п'ять.

1.Через дві подані точки провести пряму.

2.Із поданої точки як із центра провести коло поданого радіуса.

3.Знайти точки перетину двох поданих кіл.

4.Знайти точки перетину поданих кола і прямої, заданої двома точками.

5.Знайти точку перетину двох прямих, кожну з яких задано двома точками [1].

Взагалі у своєму трактаті Лоренцо Маскероні здійснив колосальну роботу. Сучасники почали за його записами відтворювати усі побудови за допомогою сервісу GeoGebra — найпопулярнішої в світі безкоштовна математична програма, за допомогою якої можна розв'язувати різноманітні типи математичних задач, в т.ч. і на побудову.

Наведемо приклад однієї задачі, яку розглядав Л. Маскероні у своїй роботі.

*Задача.* Побудуйте квадрат навколо діагоналі АВ лише за допомогою циркуля (дев'ята книга, с. 134 § 141) [1].

*Розв'язання.*

1. Побудуйте коло з центром *A* та радіусом *AB* (коло *a*) (рис. 4; 5).
2. Намалюйте коло з центром *B* і радіусом *AB* (коло *b*).
3. Позначте за допомогою *C* перетин між колами *b* і *a*.
4. Намалюйте коло з центром *C* і радіусом *AB* (коло *c*).
5. Позначте за допомогою *D* перетин між колами а і с.
6. Намалюйте коло з центром *D* і радіусом *AB* (коло *d*).
7. Позначте за допомогою Е перетин між колами *a* і *d*.
8. Намалюйте коло з центром *B* і радіусом *CE* (коло *e*).
9. Намалюйте коло з центром *E* і радіусом *CE* (коло *f*).
10. Позначте за допомогою перетину між колами f та e.
11. Намалюйте коло з центром *E* і радіусом *Aa* (коло *g*).
12. Позначте за допомогою *P* перетин між колами *g* та *b*.
13. Намалюйте коло з центром *B* і радіусом *AP* (коло *h*).
14. Намалюйте коло з центром *A* і радіусом *AP* (коло *i*).
15. Позначте за допомогою *L* перетин між колами *i* та *h*.
16. Позначте за допомогою *M* перетин між колами *i* та *h*.
17. З'єднайте точки *M* та *A*.
18. З'єднайте точки *M* та *B*.
19. З'єднайте точки *B* та *L*.
20. З'єднайте точки *A* та *L*.
21. *MBLA* – це квадрат, побудований навколо заданої діагоналі *AB*.
22. Переконайтеся, що *MBLA* – це квадрат, побудований навколо заданої діагоналі *AB*.

22\. Переконайтеся, що *MBLA* – це квадрат .

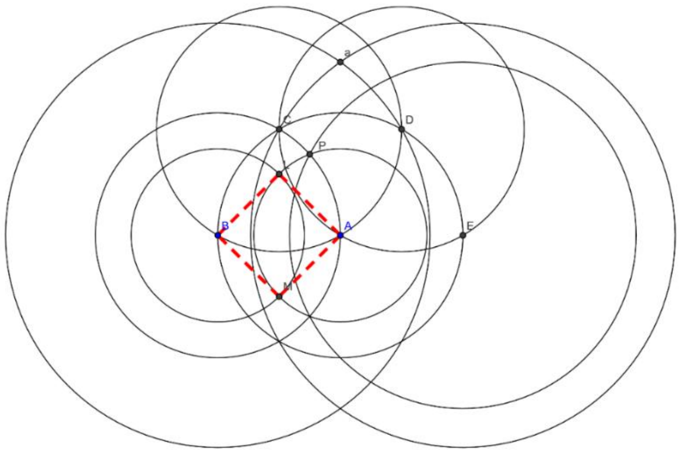


*Рис. 4. Побудова до задачі, запропонованої Л. Маскероні на с. 134 §141 роботи «Геометрія циркуля», здійснена в сервісі GeoGebra*

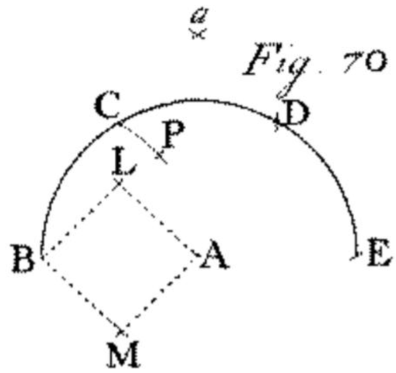


*Рис. 5. Оригінал побудови, наведений самим Маскероні у трактаті [1]*

Висновки та перспективи подальших досліджень полягають у можливості їх використання для розробки факультативних курсів з геометрії для учнів шкіл з поглибленим вивченням математики. Задля досягнення цієї мети було запропоновано приклади вирішення задач на побудову з обмеженнями, а також доведено, що ці задачі є дуже важливими для виховання людини, що вміє мислити критично. Це важливо, адже критичне мислення – це виклик сьогодення. Або ти мислиш критично, або ти не досягнеш успіху.

**Список використаних джерел та літератури**

1. Lorenzo Mascheroni. La geometria del compasso. 1797. 299 p.
2. Моторіна В.Г. Методика вивчення геометричних побудов в курсі геометрії загальноосвітньої школи. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць, 2002, С. 236-252.
3. Філіпповський Г.Б. Чудові обмеження в задачах на побудову/ Г.Б.Філіпповський. Х.: Вид. група «Основа», 2011,143 с.