А.Ц. ФРАНОВСЬКИЙ, С.А. ПОСТОВА,
М.В. АНДРОЩУК

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

В ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Навчально-методичний посібник

2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

А.Ц. ФРАНОВСЬКИЙ, С.А. ПОСТОВА,
М.В. АНДРОЩУК

Лінійна алгебра та аналітична геометрія в прикладах та задачах

Навчально-методичний посібник
для здобувачів закладів вищої освіти
спеціальності 014 «Середня освіта»
предметної спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Житомир 2024

УДК 512.64:514.12
Л 67

Затверджено вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка протокол № 15 від 30 серпня 2024 р.

Рецензенти:

Журавльов В. П. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету.

Погоруй А. О. – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка

Сверчевська І. А. – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету «Житомирська політехніка».

Л 67 **Франовський А.Ц., Постова С.А., Андрощук М.В.**

Лінійна алгебра та аналітична геометрія в прикладах та задачах: навчально-методичний посібник для здобувачів закладів вищої освіти спеціальності 014 «Середня освіта» предметної спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)». – Житомир: Вид-во ЖДУ, 2024. – 173 с.

Навчально-методичний посібник призначений для використання здобувачами закладів вищої освіти під керівництвом викладача на лекціях та практичних заняттях. Видання містить вказівки до вивчення основних розділів, винесених навчальним планом на самостійну роботу, а також відомі та оригінальні задачі для самостійного розв'язування. Викладений матеріал відповідає діючій програмі Житомирського державного університету імені Івана Франка з для спеціальності 014 «Середня освіта» предметної спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)».

УДК 512.64:514.12

Зміст

Вступ

Державні стандарти вищої освіти та освітньо-професійні програми всіх спеціальностей наголошують на важливості практичної підготовки фахівців. Зокрема, майбутні вчителі математики повинні не лише володіти теоретичними знаннями, а й мати глибокі практичні навички. Це передбачає розвиток у них аналітичного мислення, уміння застосовувати різноманітний математичний апарат для розв’язання задач різної складності, а також здатність передавати ці знання та вміння своїм майбутнім учням.

Метою навчально-методичного посібника є не лише набуття та закріплення теоретичних знань, а й формування у студентів системного мислення, творчого підходу до розв'язання задач та здатності до самостійного навчання. Це дозволить їм успішно застосовувати отримані знання в подальшому навчанні та професійній діяльності

Навчально-методичний посібник містить не лише стислий теоретичний матеріал, а й різноманітні практичні завдання, від простих до складних. Це дозволяє студентам поступово заглиблюватися в тему та закріплювати знання.

Крім того, посібник надає зразки розв’язання типових задач, що слугують наочним прикладом застосування теоретичних положень.

Посібник має чітку структуру, що дозволяє студентам швидко знаходити необхідну інформацію. Кожна тема розглядається окремо, що полегшує розуміння складних концепцій. Завдяки цьому, посібник є зручним інструментом для систематичного вивчення дисципліни.

Завершивши цей курс, студент отримає міцну основу в галузі лінійної алгебри та аналітичної геометрії та зможе демонструвати глибоке розуміння фундаментальних понять диференціальної геометрії. Він буде здатний описувати та аналізувати криві та поверхні, використовуючи різноманітні математичні інструменти, а також зможе глибоко розуміти структуру лінійних просторів, властивості лінійних перетворень та їх геометричну інтерпретацію.

Зокрема, студент навчиться: оперувати векторами, матрицями, системами лінійних рівнянь, а також досліджувати різноманітні геометричні об’єкти, такі як прямі, площини, конічні перерізи та багатогранники, використовуючи векторний та координатний методи; обчислювати геометричні характеристики кривих і поверхонь (кривину, скрут, квадратичні форми), досліджувати топологічні властивості просторів, застосовувати тензорний апарат для опису геометричних об’єктів.

Тема 1. Вектори. Лінійні операції над векторами

При підготовці до практичного заняття слід звернути увагу на наступні питання:

Вектор. Означення. Лінійні операції над векторами (додавання векторів, множення вектора на число). Закони, що задовольняють лінійні операції.

Лінійна залежність векторів. Необхідні і достатні умови того, щоб два вектори були колінеарні і три вектори компланарні.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Визначити вектори, що ділять навпіл кут між даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язок. Можна вважати, що у векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ спільний початок. Відкладемо на векторі $\vec{a}$ від його початку одиничний вектор $\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, а на векторі $\vec{b}$ - вектор $\vec{b}_0=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Побудуємо на векторах $\vec{a}_0$ та $\vec{b}_0$ ромб. Його діагональ рівна сумі векторів $\vec{a}_0+\vec{b}_0$ і спрямована по бісектрисі кута $(\vec{a}_0 \hat{,} \vec{b}_0)=(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$.

Задача 2. Знайти точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ з вершинами $A(0,0),\ B(2,0),\ C(1,2),\ D(-2,3)$.

Розв'язок. Позначимо точку перетину діагоналей через O. Розглянемо відрізок AC, знайдемо, що $x_0=\frac{x_A+h_1x_C}{1+h_1},\ y_0=\frac{y_A+h_1y_C}{1+h_1}$. Але точка O належить і відрізку BD, тому $x_0=\frac{x_B+h_2x_D}{1+h_2},\ y_0=\frac{y_B+h_2y_D}{1+h_2}$. Звідси отримуємо: $\frac{x_A+h_1x_C}{1+h_1}=\frac{x_B+h_2x_D}{1+h_2};\ \frac{y_A+h_1y_C}{1+h_1}=\frac{y_B+h_2y_D}{1+h_2}$. Підставивши координати точок, отримаємо систему розв'язків:

$$\frac{h_1}{1+h_1}=\frac{2-2h_2}{1+h_2};\ \frac{2h_1}{1+h_1}\ =\frac{3h_2}{1+h_2}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь і підставивши значення h_1 або h_2 у вирази для x_0 і y_0, знайдемо координати точки $O\left(\frac{6}{11},\frac{12}{11}\right)$.

Задача 3. Знайти центр ваги суцільної однорідної трикутної пластинки, що задана координатами вершин $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

Розв'язок. Центр ваги суцільної трикутної пластинки, що зроблена з однорідного металу, знаходиться в точці перетину її медіан.

Нехай точка O – точка перетину медіан. Розглянемо медіану AD. Координати точки D $x_D=\frac{x_2+x_3}{2}$, $y_D=\frac{y_2+y_3}{2}$.

Координати точки O можна знайти по формулах: $x_0=\frac{x_A+hx_D}{1+h}$, $y_0=\frac{y_A+hy_D}{1+h}$.

Число $h=\frac{AO}{OC}=2$.

Таким чином, $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Задача 4. Визначити центр ваги трикутника, зробленого з однорідної проволоки з вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

Розв'язок. Центр ваги кожної сторони трикутника знаходиться в її середині. Нехай це будуть точки $A_1\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{x_1+x_3}{2},\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)$,$C_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Можна вважати, що маси сторін розміщені в цих точках і пропорційні довжинам сторін. Таким чином у точці A_1 розміщена маса $m_1=\rho\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$, в точці B_1

- маса $m_2 = \rho\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$, в точці C_1 - маса $m_3 = \rho\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Центр ваги такої системи знаходимо по формулам $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$, $y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$.

В розглянутому випадку

$$x_0 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \frac{x_1 + x_3}{2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{x_1 + x_2}{2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}\right) / . \left(\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}\right)$$

$$y_0 = \left(\frac{y_2 + y_3}{2}\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \frac{y_1 + y_3}{2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{y_1 + y_2}{2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}\right) / . \left(\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}\right)$$

Легко бачити, що лише у рівностороннього трикутника центр ваги буде знаходитись у точці перетину медіан.

Задача 5. Однорідна проволока зігнута у вигляді прямого кута зі сторонами a і b. Визначити центр ваги такої системи.

Розв'язок. Візьмемо систему координат так, щоб осі координат були спрямовані по сторонам кута. Нехай сторона довжиною a лежить на осі Ox, а сторона довжиною b - на осі Oy. Кінці відрізків позначимо відповідно через A і B.

Точки A і B мають такі координати: $A(a,0)$, $B(0,b)$. Центр ваги стрижня OA лежить в точці $A_1\left(\frac{a}{2},0\right)$, центр ваги OB - в точці $B_1\left(0,\frac{b}{2}\right)$.

В точці A_1 розглядається маса $m_1=\rho a$, в точці B_1 розглядається маса $m_2=\rho b$. Центр ваги системи позначимо точкою C.

Тоді $x_c=\frac{m_1x_{A_1}+m_2x_{B_1}}{m_1+m_2}=\frac{a^2}{2(a+b)}$,$y_c=\frac{m_1y_{A_1}+m_2y_{B_1}}{m_1+m_2}=\frac{b^2}{2(a+b)}$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Дано: $|\vec{а}|$=11, $|\vec{в}|$=23, $|\vec{а}+\vec{в}|$=20. Обчислити $|\vec{а}-\vec{в}|$.

2. Довести, що $|\vec{а}+\vec{в}|\le|\vec{а}|$+$|\vec{в}|$. При якій умові має місце рівність?

3. Довести, що можна побудувати трикутник, сторони якого рівні і паралельні медіанам трикутника.

4. Визначити вектори, що ділять порівну кут між даними векторами $\vec{а}$ і $\vec{в}$.

5. За даними вершинами $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$, $C(\vec{r}_3)$ знайти четверту вершину паралелограма.

6. Довести, що відрізки, що з'єднують середини протилежних ребер тетраедра, перетинаються в одній точці і діляться в ній навпіл. Визначити радіус-вектор цієї точки через радіус-вектори вершин тетраедра.

7. Записати умову компланарності чотирьох точок $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, $M_3(\vec{r}_3)$, $M_4(\vec{r}_4)$ заданих радіусами-векторами.

8. При яких значеннях x та y вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, зв'язані співвідношенням $(2x+y-3)\vec{a}+(2x-y-1)\vec{b}=0$, не колінеарні?

9. До точки прикладено п’ять рівних за величиною сил. Кожні дві сили $\vec{P}_i$ та $\vec{P}_{i+1}$ утворюють кут 72°. Визначити рівнодіючу цих сил.

Тема 2. Добуток двох векторів

При вивченні теоретичного матеріалу слід звернути увагу на такі питання:

Скалярний добуток. Означення дії. Закони, яким задовольняє скалярний добуток. Модуль вектора, що записаний через скалярний добуток вектора на себе. Кут між векторами. Запис скалярного добутку через ортогональну проекцію одного вектора на напрям другого. Представлення скалярного добутку через координати векторів.

Векторний добуток. Означення. Закони, яким задовольняє дія. Запис векторного добутку через координати векторів, що множаться, в ортонормованому базисі. Слід запам'ятати, що якщо $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, то $\vec{c} \| [\vec{a}, \vec{b}]$. Векторний добуток колінеарних векторів дорівнює 0.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Орти $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умові $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Обчислити $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

Розв'язок. З умови задачі випливає, що $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = 0$. Звідси отримуємо, що $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} + \vec{c}\vec{c}\right) = -\frac{3}{2}$.

Задача 2. Знайти кут між векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ і $\vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n}$, якщо $\vec{m}$ і $\vec{n}$ - орти, кут між ними $(\vec{m}^\wedge\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язок. $cos(\vec{a}^\wedge\vec{b}) = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(2\vec{m}+\vec{n},\ -3\vec{m}+2\vec{n})}{\sqrt{(2\vec{m}+\vec{n})(2\vec{m}+\vec{n})}\sqrt{(-3\vec{m}+2\vec{n})(-3\vec{m}+2\vec{n})}} =$

$$= \frac{-6(\vec{m}\vec{m}) - 3(\vec{n}\vec{m}) + 4(\vec{m}\vec{n}) + 2(\vec{n}\vec{n})}{\sqrt{4(\vec{m}\vec{m}) + 4(\vec{m}\vec{n}) + (\vec{n}\vec{n})} + \sqrt{9(\vec{m}\vec{m}) - 12(\vec{m}\vec{n}) + 4(\vec{n}\vec{n})}} =$$

$$= \frac{-6+\frac{1}{2}+2}{\sqrt{4+2+1}\sqrt{9-12\cdot\frac{1}{2}+4}} = \frac{-7}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = -\frac{1}{2};$$

$$(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{2}{3}\pi.$$

Задача 3. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \{3; -4; 4\}$ на вісь, що утворює з осями координат рівні тупі кути.

Розв'язок. $пр_{\vec{u}}\vec{a} = пр_{\vec{u}_0}\vec{a}$, де $|\vec{u}_0| = 1$ і його координати $\{cos\,\alpha\,, cos\,\beta\,, cos\,\gamma\}$, де $\alpha = (\vec{u},\hat{\ } Ox)$, $\beta = (\vec{u},\hat{\ } Oy)$, $\gamma = (\vec{u},\hat{\ } Oz)$. Таким чином, $пр_{\vec{u}}\vec{a} = x\,cos\,\alpha + y\,cos\,\beta + z\,cos\,\gamma$, якщо $\vec{a} = \{x; y; z\}$. По умові задачі $\alpha = \beta = \gamma$.

Підставляючи координати вектора $\vec{a}$, знайдемо що $пр_{\vec{u}}\vec{a} = 3\,cos\,\alpha$.

Між напрямними косинусами існує відношення $cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$. Так як $\alpha = \beta = \gamma$, то це відношення приймає вигляд: $3\,cos^2\,\alpha = 1$.

Звідси $cos\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Згідно умові $\alpha > \pi$, отже $cos\,\alpha < 0$, тобто $cos\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким чином, $пр_{\vec{u}}\vec{a} = -\sqrt{3}$.

Задача 4. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}\hat{\ }\vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язок. $\mathrm{S_{пар}} = \left|\left[\vec{\mathrm{a}}\vec{\mathrm{b}}\right]\right| = |[\vec{\mathrm{m}} - 2\vec{\mathrm{n}}, 2\vec{\mathrm{m}} + 3\vec{\mathrm{n}}]| == |2[\vec{\mathrm{m}}\vec{\mathrm{m}}] + 3[\vec{\mathrm{m}}\vec{\mathrm{n}}] - 4[\vec{\mathrm{n}}\vec{\mathrm{m}}] - 6[\vec{\mathrm{n}}\vec{\mathrm{n}}]| = 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 7$

Задача 5. Визначити площу трикутника з вершинами $A(3{,}1)$, $B(-1{,}2)$, $C(0{,}3)$.

Розв'язок. Площа трикутника $S = \frac{1}{2}|[AB,\ AC]|$.

Вектори $AB = \{-4,1\}$, $AC = \{-3,2\}$.

Таким чином, $S = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}$.

Задача 6. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a} = \{8, -15,3\}$, утворює гострий кут з віссю Ox. Знаючи, що $|\vec{m}| = 51$, знайти його координати.

Розв'язок. Орт осі Oz $\vec{k} = \{0,0,1\}$. Вектор $\vec{m} \| [\vec{a}, \vec{k}] = \{-15, -8,0\}$. Отже, $\vec{m} = \{-15\lambda, -8\lambda, 0\}$. З умови $|\vec{m}| = 51$.

З іншого боку $|\vec{m}|^2 = (15\lambda)^2 + (8\lambda)^2$.

Таким чином, $51^2 = 225\lambda^2 + 64\lambda^2$, або $51^2 = (17\lambda)^2$.

Звідси $9 = \lambda^2$; $\lambda = \pm 3$ і $\vec{m} = \pm\{45, 24, 0\}$.

Згідно умові задачі $(\vec{m}\ Ox) < \frac{\pi}{2}$, тому перша координата $x = |\vec{m}| \cos\alpha > 0$.

Відповідь: $\vec{m} = +\{45, 24, 0\}$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Вектори a і b взаємно перпендикулярні; вектор c утворює з ними кути, що дорівнюють $\frac{\pi}{3}$; знаючи, що $|a| = 3$, $|b| = 5$, $|c| = 8$. Знайдіть: 1) (3a-2b)(b+3c); 2) $(a + b + c)^2$ 3) $(a + 2b - 3c)^2$
2. Доведіть, що вектор $p = b(ac) - c(ab)$, перпендикулярний до вектора a.
3. Доведіть, що вектор $p = b - \frac{a(ab)}{a^2}$, перпендикулярний до вектора a.

4. Дано вершини трикутника A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1). Визначте чому дорівнює зовнішній кут при вершині A даного трикутника.
5. Вектор x, колінеарний вектору $a = \{6;\ -8;\ -7{,}5\}$, утворює гострий кут з віссю Oz. Знаючи, що $|x| = 50$, знайдіть його координати.
6. Знайдіть вектор x, колінеарний вектору $a = \{2;\ 1;\ -1\}$ і задовольняючий умову $xa = 3$.
7. Знайдіть проекцію вектора $S = \{4;\ -3;\ 2\}$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні гострі кути.
8. Вектори a, b і c задовольняють умову $a + b + c = 0$. Доведіть, що $[ab] = [bc] = [ca]$.
9. Вектори a, b, c і d пов'язані відношеннями $[ab] = [cd]$, $[ac] = [bd]$. Доведіть колінеарність векторів a – d і b – c.
10. Дано вершини трикутника A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1). Обчисліть довжину його висоти, опущеної з вершини B, на сторону AC.

Тема 3. Добуток трьох векторів

При підготовці до практичного заняття слід звернути увагу на наступні питання:

Мішаний добуток трьох векторів. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах. Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів.

Мішаний добуток, записаний через координати векторів в ортонормованому базисі.

Подвійний векторний добуток векторів.

Запам'ятати формулу $\left[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}\right] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}[\vec{b}\vec{c}]$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Вектор с перпендикулярний до векторів a і b, кут між векторами a і b дорівнює 30°. Знаючи, що $|a| = 6$, $|b| = 3$, $|c| = 3$, обчислити abc.
2. Доведіть, що вектори a, b, c, задовольняючі умову $[ab] + [bc] + [ca] = 0$, компланарні.
3. Доведіть, що чотири точки A (1; 2; -1), B (0; 1; 5), C (-1; 2; 1), D (2; 1; 3) лежать в одній площині.
4. Дані вершини тетраедра A (2; 3; 1), B (4; 1; -2), C (6; 3; 7), D (-5; -4; 8). Знайдіть довжину його висоти, опущеної з вершини D.
5. Об'єм тетраедра дорівнює 5, три його вершини знаходяться в точках A (2; 1; -1), B (3; 0; 1), C (2; -1; 3). Знайдіть координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.
6. Дано вектори $a = \{2;\ -3;\ 1\}$, $b = \{-3;\ 1;\ 2\}$ та $c = \{1;\ 2;\ 3\}$. Обчислити $\left[[ab]c\right]$ та $\left[a[bc]\right]$.

7. Довести тотожність:

   1) $\left[a[bc]\right] + \left[b[ca]\right] + \left[c[ab]\right] = 0$

   2) $[ab][cd] = (ac)(bd) - (ad)(bc)$

   3) $[ab][cd] + [ac][db] + [ad][bc] = 0$

   4) $\left[[ab][cd]\right] = c(abd) - d(abc)$

   5) $[ab][bc][ca] = (abc)^2$

   6) $\left[a\left[a\left[a[ab]\right]\right]\right] = a^4 b$, за умови, що вектори a і b взаємно перпендикулярні.

   7) $\left[a\left[b[cd]\right]\right] = [ac](bd) - [ad](bc)$

   8) $\left[a\left[b[cd]\right]\right] = (acd)b - (ab)[cd]$

8. Три некомпланарні вектори a, b, c, зведені до спільного початку. Довести, що площина, яка проходить через кінці цих векторів, перпендикулярна до вектора $[ab] + [bc] + [ca]$.

Тема 4. Рівняння лінії

При підготовці до практичного заняття слід звернути увагу на наступні питання.

Рівняння з двома змінними відносно деякої декартової системи координат на площині представляє лінію. З рівняння слід вміти розрізняти тип лінії та її розміщення на площині. Навпаки, кожній плоскій лінії відповідає рівняння з двома змінними відносно декартової системи координат. При складанні рівняння лінії слід знайти відношення між координатами x і y довільної точки лінії.

Звернути увагу на параметричне рівняння лінії $x = x(t)$, $y = y(t)$. Навчитися знаходити рівняння лінії в полярних координатах.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Через початок координат проведено всі можливі хорди кола $(x-8)^2 + y^2 = 64$. Скласти рівняння множини середин цих хорд.

Розв'язок. Задане коло проходить через початок координат, її центр знаходиться в точці (8,0), радіус $r = 8$. Один кінець хорд знаходиться в початку координат.

Отримаєм систему рівнянь $2l + n = 0$, $8l + 4m + 3n = 0$.

Звідси отримаємо, що $l: m: n = 2: -1: -4$, а рівняння шуканої площини $2x - 2y - 3z = 0$.

Задача 2. Визначити головні напрямки поверхні $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x - 6y - 6z + 9 = 0$.

Розв'язок. Запишемо характеристичне рівняння заданої поверхні $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$, або $\lambda^3 - 7\lambda^2 - 36 = 0$. Його корні $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$.

Головні напрямки поверхні визначаються системою рівнянь: $(a_{11} - \lambda)l + a_{12}m + a_{13}n = 0,\ a_{12}l + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n = 0,\ a_{13}l + a_{23}m + (a_{33} - \lambda)n = 0$.

В даному випадку ця система має вигляд $(1-\lambda)l - 3m - 3n = 0$, $-3l + (1-\lambda)m + n = 0, -l + m + (5-\lambda)n = 0$.

Для $\lambda = 3$ отримаємо $2l + 3m + 3n = 0,\ -3l - 2m + n = 0,\ -l + m + 2n = 0$.

Серед цих рівнянь лише два лінійно незалежних. Можна взяти лише два з них: $2l + 3m + 3n = 0, 3l + 2m - n = 0$.

Знаходимо, що $l{:}\,m{:}\,n = 1{:} -1{:}\,1$.

Вектор $\vec{u}_2 = \{-1,1,2\}, \vec{u}_3 = \{1,1,0\}$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Із точки P(6; -8) проведено максимально можливу кількість променів до перетину з віссю абсцис. Складіть рівняння геометричного місця їх середин.
2. Складіть рівняння геометричного місця точок, різниця квадратів відстаней яких д точок A(-a; 0) і B(a; 0) дорівнює c.
3. Дано рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$. Складіть рівняння геометричного місця середин тих хорд цього кола, довжина яких дорівнює 8.

4. Виведіть рівняння геометричного місця точок, для яких відстань до даної точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ дорівнює відстані до даної прямої $x=-\frac{p}{2}$. Це геометричне місце є параболою, точка F – фокус параболи, дана пряма – її директриса.
5. Виведіть рівняння геометричного місця точок, для яких найкоротша відстань до двох заданих кіл $(x+3)^2+y^2=1$, $(x-3)^2+y^2=81$ рівні між собою.
6. Виведіть рівняння геометричного місця точок, для яких найкоротша відстань до заданого кола $(x-5)^2+y^2=9$, і до заданої прямої $x+2=0$ рівні між собою.
7. Із точки А (-a; 0), де a>0, проведено промінь АВ (рис. 1), на якому по обидві сторони від точки В відкладено відрізки ВМ і BN однакової довжини b (b=const). При обертанні променя точки M і N описують криву, яку називають конхоїдою. Складіть її рівняння спершу в полярних координатах, розташувавши полюс в точці А і направляючи полярну вісь в додатному напрямку осі Ох, а потім перейти до даної системи декартових прямокутних координат.

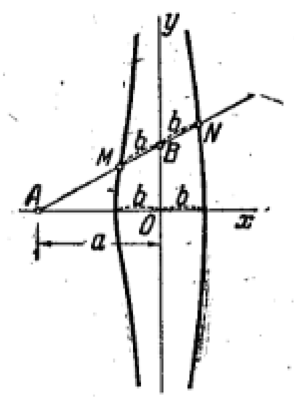


Рис. 1

8. Круг з радіусом a котиться без опору по колу $x^2 + y^2 = b^2$, залишаючись поза ним. Траєкторія деякої точки M кола круга що котиться називається епіциклоїдою (рис. 2). Виведіть параметричні рівняння епіциклоїди, обираючи за параметр t кут нахилу до осі Ox радіуса нерухомого кола, проведеного в точку дотику з рухомим; вважати при цьому, що в момент початку (t=0) точка M знаходиться праворуч на осі Ox. Доведіть, що кардіоїда є частинним випадком епіциклоїди.

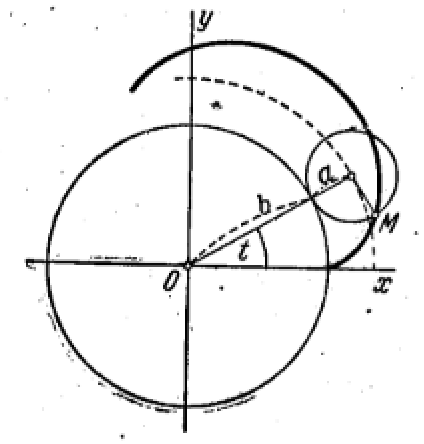


Рис. 2

Тема 5. Визначення типу і розміщення поверхні другого порядку по її загальному рівнянню

При підготовці до заняття слід добре вивчити інваріанти ортогональних перетворень з коефіцієнтів рівняння поверхні другого порядку.

Засвоїти метод приведення до аналітичного виду центральних поверхонь, параболоїдів, циліндрів. Запам'ятати всі класи поверхонь другого порядку. Звернути увагу на той факт, що розглядувана класифікація поверхонь другого порядку є афінною класифікацією.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Визначити тип поверхні, що задана рівнянням $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy - 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$, її канонічне рівняння і розміщення відносно вихідної системи координат. Привести перетворення координат переходу від початкової системи координат до канонічної.

Розв'язок. Знайдемо $I_4 = -2560$. Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $\lambda^3 - 15\lambda^2 + 66\lambda - 80 = 0$.

Його корні $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 8$. Всі значення λ відмінні від 0, отже, $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, поверхня центральна.

Канонічне рівняння центральної поверхні має вигляд $\lambda_1 x^{12} + \lambda_2 y^{12} \lambda_3 z^{12} + \frac{I_4}{I_3} = 0$. В даному випадку канонічне рівняння заданої поверхні має вигляд $2x^{12} + 5y^{12} + 8z^{12} - 32 = 0$. Задане рівняння задає еліпсоїд.

Центр еліпсоїда знаходиться із системи рівнянь $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$. В даному випадку ця система має вигляд $2x - y + 1 = 0$, $2x - 5y - 2z - 3 = 0$, $y + 3z + 1 = 0$.

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо координати центра поверхні $O'(-1, 1, 0)$. Центр поверхні є початком канонічної системи координат.

Знайдемо головні напрямки поверхні із системи: $(4 - \lambda)l - 2m = 0$, $-2l + (5 - \lambda)m + 2n = 0$, $2m + (6 - \lambda)n = 0$.

Головні напрямки поверхні задають вектори $\vec{u}_1 = \{2,2,1\}$, $\vec{u}_2 = \{2, -1,2\}$ і $\vec{u}_3 = \{1, -2, -2\}$.

Пронумеруємо їх і орти цих векторів позначимо $\vec{l}_1 = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, $\vec{l}_2 = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ і $\vec{l}_3 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$.

Якщо напрямки осей початкової системи координат задають вектори i, j, k, то $\vec{l}_1 = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$, $\vec{l}_2 = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$ і $\vec{l}_3 = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$.

Ці відношення дають перехід від базиса початкової системи координат до базису канонічної системи.

Перетворення координат має вигляд $x = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' - 1$, $y = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' + 1$, $z = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z'$.

Задача 2. Розв'язати аналогічні питання (як у прикладі 1) для поверхні, що задана рівнянням $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz - 6x + 6y + 6z + 10 = 0$

Розв'язок. Обчислимо

$I_4 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 & -3 \\ -2 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 27^2 \neq 0$, поверхня не вироджена.

Характеристичне рівняння запишеться у вигляді $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 81\lambda = 0$. Його корені $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 0$. $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, отже поверхня не центральна.

Задане рівняння визначає еліптичний параболоїд обертання. Запишемо його канонічне рівняння, використовуючи форму рівняння $\lambda_1 x^{12} + \lambda_2 y^{12} \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{\lambda_1\lambda_2}} z' = 0$.

В даному випадку отримаємо рівняння $9x^{12} + 9y^{12} \pm 6z' = 0$, або $x^{12} + y^{12} = \frac{2}{3}z'$.

Головні напрямки поверхні в даному випадку визначаються системою рівнянь $(5-\lambda)l - 2m + 4n = 0$, $-2l + (8-\lambda)m + 2n = 0$, $4l + 2m + (5-\lambda)n = 0 \quad (\alpha)$. Знайдемо головний напрямок, що відповідає значенню $\lambda_3 = 0$ (напрямний вектор осі обертання).

Для цього підставимо в систему (α) значення $\lambda = 0$ і отримаємо рівняння $5l - 2m + 4n = 0$, $-2l + 8m + 2n = 0$, $4l + 2m + 5n = 0$. З них знайдемо, що $l{:}\,m{:}\,n = 2{:}\,1{:}\,{-2}$.

Орт осі обертання $\vec{l}_3 = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$.

При підстановці в систему рівнянь (α) значення $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ отримаємо лише одне незалежне рівняння $2l + m - 2n = 0$, яке представляє умову перпендикулярності вектора $\vec{u} = \{l, m, n\}$ до осі обертання.

Візьмемо один з таких векторів, наприклад, $\vec{u}_1 = \{1,0,1\}$, його орт $\vec{l}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

В канонічній системі координат в якості осі $O'x'$ - вісь, що задається вектором $\vec{l}_1$. Вектор $\vec{l}_2$, що визначає вісь $O'y'$, знайдемо наступним чином : $\vec{l}_2 = [\vec{l}_3\vec{l}_1] = \left\{\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}\right\}$.

Вісь обертання знайдемо як лінію перетину діаметральних площин, що перпендикулярні відповідному вектору $\vec{l}_1$ і вектору $\vec{l}_2$, користуючись рівнянням $lF_x + mF_y + nF_z = 0$: $F_x + F_y = 0$,

$F_x - 4F_y - F_z = 0$.

Розпишемо ці рівняння: $x + z = 0$, $x - 4y - z - 2 = 0$.

Вершину параболоїда знайдемо, розв'язавши систему рівнянь $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz - 6x + 6y + 6z + 10 = 0$, $x + z = 0$, $x - 4y - z - 2 = 0$. Вершина параболоїда знаходиться в точці $O'(1, 0, -1)$.

Перетворення координат при переході від вихідної системи координат до канонічної має вигляд: $x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3}z' + 1$, $y = -\frac{4}{3\sqrt{2}}y' + \frac{z'}{3}$, $z = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3}z' + 1$.

Задача 3. Розв'язати аналогічні питання (як у прикладі 1) для поверхні, що задана рівнянням $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

Розв'язок. Знайдемо $I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -5 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -5 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $\lambda^3 - 36\lambda = 0$. Його корні $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = 0$., відповідно $I_3 = 0$, поверхня нецентральна. Задане рівняння визначає гіперболічний циліндр, тобто має лінію центрів.

Запишемо рівняння для визначення центрів $x + 2y - 5z + 1 = 0$, $2x - 2y + 2z + 2 = 0, \quad -5x + 2y + z - 5 = 0$.

Лінією центрів буде пряма $x + 2y - 5z + 1 = 0$, $2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Знайдемо координати довільного центра, поклавши $x = 0$. Тоді $y = \frac{3}{2}$ і $z = 1$.

Точка $O'\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$ буде одним із центрів цієї поверхні.

Знаходимо $a_{u'u}$, підставивши координати точки O' в ліву частину рівняння поверхні. Отримаємо $a_{u'u} = -2$.

В даному випадку рівняння поверхні прийме вигляд $6x^{12} - 6y^{12} - 2 = 0$, або $3x^{12} - 3y^{12} = 1$.

Головні напрямки поверхні визначаються системою рівнянь $(1 - \lambda)l + 2m - 5n = 0, \quad 2l + (-2 - \lambda)m + 2n = 0, \quad -5l + 2m + (1 - \lambda)n = 0$ (α).

Знайдемо головні напрямки, що відповідають значенню $\lambda_3 = 0$. Для цього підставимо в систему (α) $\lambda = 0$ і отримаємо рівняння $l + 2m - 5n = 0, \; 2l - 2m + 2n = 0, \; -5l + 2m + n = 0$.

З них знайдемо $l: m: n = 1: 2: 1$. Орт осі центрів $\vec{l}_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$.

При підстановці в систему рівнянь (α) значення $\lambda = 6$ отримаємо $-5l + 2m - 5n = 0,\ 2l - 8m + 2n = 0,\ -5l + 2m - 5n = 0.$ Звідси $l : m : n = 1 : 0 : -1$. Отже, $\vec{l}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

В канонічній системі координат візьмемо в якості осі $O'x'$ вісь, що задається вектором $\vec{l}_1$, а в якості осі $O'z'$ - вісь, що задається вектором $\vec{l}_3$. Тоді вектор $\vec{l}_2$, що визначає вісь $O'y'$, знайдемо наступним чином $\vec{l}_2 = [\vec{l}_1,\ \vec{l}_3] = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Перетворення координат при переході від вихідної системі координат до канонічної має вигляд: $x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}};\ y = \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}z' + \frac{3}{2};\ z = -\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{z'}{\sqrt{6}} + 1$

Задача 4. Визначити поверхню, що задана рівнянням $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$.

Розв'язок. Знайдемо $I_u = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Поверхня вироджена.

Знайдемо $I_3 = 0,\ I_2 = -6 \neq 0,\ I_1 = 1,\quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -2.$ Поверхня буде чи циліндром чи парою площин.

Координати центра знайдемо із системи $y + 2z - 2 = 0,\ x + y + z - 1 = 0,\ 2x + y = 0$.

Отримали пряму центрів $y + 2z - 2 = 0,\ 2x + y = 0$. Знайдемо один із центрів, поклавши $x = 0$. Тоді $O' = (0,0,1)$ буде одним із центрів такої поверхні.

Обчислимо $a_{u'u} = 0$. Отже, дана поверхня буде парою площин. Для знаходження рівнянь цих площин будемо розглядати рівняння поверхонь як рівняння другого порядку відносно yі запишемо його у вигляді $y^2 + 2y(x + z - 1) + 4x(z - 1) = 0$.

Знаходимо y: $y = (x + z - 1) \pm \sqrt{(x + z - 1)^2 - 4x(z - 1)}$ або $y = (x + z + 1) \pm (x - z + 1)$.

Отже, рівняння площин будуть мати вигляд $2x - y + 2 = 0$; $y = 2z$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Доведіть, що кожна з вказаних поверхонь є поверхнею обертання, визначте її вид, напишіть канонічне рівняння і знайдіть розташування поверхні відносно початкової системи координат:
   1) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8zx - 14x - 4y + 14z += 18 = 0$
   2) $2yz + 2zx + 2xy + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$
   3) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$
   4) $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$
   5) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1 = 0$
   6) $4xy + 4yz + 4zx + 4x + 4y + 4z + 3 = 0$
2. Визначте вид кожної поверхні, напишіть її канонічне рівняння і знайдіть канонічну систему координат:
   1) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$
   2) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$
   3) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$
   4) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$

5) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$

3. Доведіть, що вказані рівняння визначають поверхні, що розкладаються на пару площин, і знайдіть ці площини:

1) $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$

2) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - x + 2y - 3z - 6 = 0$

3) $3x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 4xy + 10xz - 4yz + 6x - 20y - 14z - 24 = 0$

4) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 6yz + 4zx + 4x - 6y + 2z - 5 = 0$

Тема 6. Пряма на площині. Рівняння на площині

При підготовці до практичного заняття підготувати наступні питання.

Порядок лінії. Пряма як лінія першого порядку. Види рівнянь прямої на площині. Кутовий коефіцієнт прямої. Точка перетину прямих. Кут між прямими. Умова паралельності і перпендикулярності прямих.

Запам'ятайте, що в першу чергу , пред тим як приступити до складання рівняння прямої, варто визначити зручну форму рівняння прямої у розглянутому випадку.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Знайти точку, симетричну точці P *(8, -9)* щодо прямої, що проходить через точки *A* (3, -4) і *B(-1,-2).*

Розв'язок. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки *A* і *B*, використовуючи рівняння $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Підставляючи замість $(x_1 y_1)$ і (x_2, y_2) координати точок *A* і *B* знайдемо $\frac{x+1}{3+1}=\frac{y+2}{-4+2}$.

Після спрощення це рівняння прийме вигляд x+2y+5=0.

Через точку P проведемо пряму, перпендикулярну прямій *AB*, використовуючи рівняння $y-y_0=k(x-x_0)$. Замість x_0 і y_0 підставимо координати точки P.

Кутовий коефіцієнт k прямої знайдемо з умови перпендикулярності проведенної прямої і прямої AB:$K_1 K_{AB}=-1$.

Кутовий коефіцієнт $k_{AB}=-\frac{1}{2}$ отже $k=2$.

Таким чином, рівняння шуканої прямої запишеться так**:**

$y+9 = 2(x-8)$ або $2x - y - 25 = 0$

Нехай точка *O*-точка перетину прямої AB з проведеною прямою PO.

Знайдемо координати точки O, вирішуючи систему рівнянь $x+2y+5=0$, $2x-y-25=0$.

Координати точки O(9,-7).

Позначимо точку, симетричну точці P щодо прямої *AB* через P'(x,y).

Точка O-середина відрізка PP'. По формулах розподілу відрізка навпіл знаходимо, що $9=\frac{8+x}{2}$, $-7=\frac{-9+y}{2}$.

Звідси $x=10, y=-5$

Задача 2. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедренного трикутника, знаючи координати вершини *C (5 ,-1)* прямого кута і рівняння гіпотенузи $2x-3y+5=0$.

Розв'язок. Даний прямокутний трикутник рівнобедренний, тому катети утворять із гіпотенузою кути рівні $\frac{\pi}{4}$.

Кутовий коефіцієнт гіпотенузи $k_1=\frac{2}{3}$.

Позначимо кутовий коефіцієнт катета через k.

По формулі $\mathrm{tg}\phi = \pm\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, де ϕ - кут, утворений прямими.

Знайдемо, що $\pm\frac{k-2/3}{1+\frac{2}{3}k} = 1$.

Звідси знайдем два кутових коефіцієнти катетів $k=5, k'=-\frac{1}{5}$.

Рівняння катетів $y+1=5(x-5)$ і $y+1=-\frac{1}{5}(x-5)$.

Задача 3. Промінь світла спрямований по прямій x-2y+5=0. Дійшовши до прямої 3x-2y+7=0, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

Розв'язок. Знайдемо точку *0* зустрічі променя з "дзеркалом". Для цього вирішимо систему рівнянь x-2y+5=0, 3x-2y+7=0. Координати точки *O(-1,2).*

Рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь, запишемо у вигляді y-2=k(x+1).

Кутовий коефіцієнт цієї прямої знайдемо, використовуючи формулу тангенса кута між двома прямими $\operatorname{tg}\phi = \pm\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, де ϕ - орієнтований кут між прямими.

Кутовий коефіцієнт падаючого променя рівний 1/2 , кутовий коефіцієнт "дзеркала" $-\frac{3}{2}$.

На підставі закону, що кут падіння дорівнює куту відбивання, одержимо співвідношення $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{k-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}k}$

Звідси $k=\frac{29}{2}$, а рівняння шуканої прямої має вид $y-2=\frac{29}{2}(x+1)$, або 29x-2y+33=0.

Задача 4. Скласти рівняння сторін трикутника AB*C,* знаючи одну з його вершин A(1,3) і рівняння двох медіан y-1=0 і x-2y+1=0.

Розв'язок. Легко перевірити, що задані медіани не проходять через точку A.

Нехай рівняння x-2y+1=0 рівняння медіани BB_1, а y-1=0 - рівняння медіани CC_1.

Позначимо координати вершин B і C - відповідно (x_1,y_1) і (x_2,y_2).

Координати точки B_1 : $x = \frac{1+x_2}{2}$, $y = \frac{3+y_2}{2}$, координати точки C_1 $x = \frac{1+x_1}{2}$, $y = \frac{3+y_1}{2}$

Точка B_1 належить медіані BB_1, тому її координати задовольняють рівнянню медіани, отже $\frac{1+x_2}{2} - (3 + y_2) + 1 = 0$.

Аналогічно,використовуючи те, що координати точки C_1 задовольняють рівнянню медіани CC_1 , знайдемо $\frac{3+y_1}{2}$-1 =0.

Крім того, медіана BB_1 проходить через точку B, тому $x_1-2y_1+1=0$, а медіана CC_1- через точку C, отже, $y_2-1=0$. Таким чином, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 - 2y_2 - 3 = 0 \\ y_2 - 1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 + 1 = 0 \\ x_1 - 2y_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему, знайдемо: $x_1=-3$, $y_1=-1$, $x_2=5$, $y_2=1$. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, знайдемо рівняння сторін трикутника.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Дано пряму $2x+3y+4=0$. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;1)$:

   1) Паралельно даній прямій

   2) Перпендикулярно до даної прямої

2. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ і одну з його вершин $A(2;-3)$. Складіть рівняння двох інших сторін цього прямокутника.
3. Знайдіть проекцію точки $P(-6; 4)$ на пряму $4x-5y+3=0$.
4. Знайдіть точку O, семетричну точці $P(-5; 13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

5. Дано вершини трикутника A(2;-2), B(3;-5), C(5;7). Складіть рівняння перпендикуляра, проведеного з вершини C, на бісектрису внутрішнього кута при вершині A.
6. На осі абсцис знайдіть таку точку P, щоб сума її відстаней до точок M(1;2) і K(3;4) була найменшою.
7. На прямій 2x-y-5=0 знайдіть таку точку P, сума відстаней якої до точок A(-7;1), B(-5;5) буде найменшою.
8. Дано пряму 2x+3y+4=0. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку M(2;1) під кутом 45° до даної прямої.
9. Точка A(-4;5) є вершиною квадрата, діагональ якого розташована на прямій 7x-y+8=0. Складіть рівняння сторін і іншої діагоналі цього квадрата.
10. Дано дві вершини A(3;-1) і B(5;7) трикутника ABC і точка N(4;-1) перетину його висот. Складіть рівняння сторін цього трикутника.
11. Складіть рівняння сторін трикутника, якщо відомо одну з його вершин B(-4;-5) і рівняння двох висот 5x+3y-4=0, 3x+8y+13=0.
12. Складіть рівняння сторін трикутника, якщо відомо одну з його вершин C(4;-1), а також рівняння висоти 2x-3y+12=0, і медіани 2x+3y=0, проведених з однієї вершини.

Тема 7. Пряма на площині. Відстань від точки до прямої. Рівняння пучка прямих

При підготовці до практичного заняття потрібно підготувати такі питання:

Нормоване рівняння прямої. Формула відстані від точки до прямої. Рівняння пучка прямих. Геометричне значення параметра пучка. Рівняння бісектриси кута. Геометричне значення лінійних нерівностей з двома

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Дві сторони квадрата лежать на прямих 5x-12y-65=0, 5x-12y+26=0.Обчислити його площу.

Розв'язок. Сторона квадрата дорівнює відстані між даними паралельними прямими. Відстані між паралельними прямими можна обчислити наступним способом. На одній із прямих, наприклад, заданої першим рівнянням, довільно вибираємо конкретну точку, наприклад, $P_0(13,0)$. Потім по формулі відстані від точки до прямої, знаходимо відстань від точки P_o до прямої, заданої другим рівнянням

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{5*3+26}{-\sqrt{25+144}}\right|=7,$$

S=49.

Задача 2. Стан рівняння прямих, паралельних прямій 3x-4y-10=0 і віддалених від неї на відстані d=5.

Розв'язок. Складаємо рівняння множини точок, що знаходяться від заданої прямої на відстані d=5.

Нехай $M(x_0, y_0)$ – довільна точка цієї множини. Використовуючи формулу відстані від точки до прямої, можна записати:

$\left|\frac{3x_0-4y_0-10}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 5$,або $\frac{3x_0-4y_0-10}{5} = \pm 5.$

Одержимо рівняння прямих 3x-4y-10=$\pm$25.

Задача 3. Через точку перетину прямих x+2y-5=0, 3x-2y+1=0 провести пряму, паралельну осі *Oy.*

Розв'язок. Рівняння прямої, яка проходить через точку

$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 3x-2y+1=0 \end{cases}$$

можна представити у вигляді x+2y-5+k(3x-2y+1)=0 або x(1+3h)+y(2-2h)+h-5=0

Якщо пряма рівнобіжна осі *0y* , то в її рівнянні коефіцієнт при у В=0 У розглянутому випадку В=2(1-h)=0.

Таким чином, h=1. шукане рівняння має вид x-1=0.

Задача 4. При якому значенні С пряма 4x-3y+c=0 належить пучку 3x+2y-9+h(2x+5y+5)=0?

Розв'язок. Запишемо рівняння пучка *у* вигляді x(3+2h)+y(2+5h)+5h-9=0. Рівняння представляють ту саму пряму, якщо коефіцієнти при x , y вільні члени пропорційні.

У розглянутому випадку повинно бути $\frac{3+2h}{4} = \frac{2+5h}{-3} = \frac{-9+5h}{c}$

Запишемо ці співвідношення у вигляді $\frac{3+2h}{4} = \frac{2+5h}{-3}$; $\frac{3+2h}{4} = \frac{-9+5h}{c}$

Після спрощення їх можна записати так; *C(* 3+2h)=4(-9+5h)

26h =-17 Звідси одержуємо *C.* =-29,

Задача 5. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими 2x-3y-5=0,6x-4y+7=0 суміжного з кутом, що містить точку С (2б-1).

Розв'язок. Якщо рівняння прямих, що задали центр пучка нормовані, то в рівнянні пучка $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + h\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = 0$ $h = \frac{b_1}{b_2}$, де b_I (I=1,2) – відхилення точки прямої пучка від прямих, що задають центр пучка.

Бісектриса кута - геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута.

Таким чином, для бісектриси кута h=± 1 в розглянутому випадку рівняння бісектрис можна записати у вигляді: $\frac{2x-3y-5}{\sqrt{13}} \pm \frac{6x-4y+7}{-\sqrt{52}} = 0$

Знак мінус беруть у випадку, коли в розглянутої пари кутів знаходиться початок координат, знак плюс – у противному випадку. Знайдемо відхилення заданої точки *C,* від сторін кута

$b_1 = \frac{2*2-3*(-1)-5}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \succ 0, b_2 = \frac{23}{-\sqrt{52}} \prec 0$

Відхилення b_1 і b_2 протилежних знаків, отже в тієї пари кутів, де знаходиться точка *C* , немає початку координат. Таким чином, рівняння шуканої бісектриси має вид $\frac{2x-3y-5}{\sqrt{13}} + \frac{6x-4y+7}{-\sqrt{52}} = 0$

Після спрощення одержимо рівняння 2x+2y+17=0.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Точка A(2; -5) є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій x-2y-7=0. Знайдіть площу цього квадрата.
2. Доведіть, що пряма 2x+y+3=0 перетинає відрізок, обмежений точками A(-5; 1) і B(3; 7).
3. Доведіть, що пряма 2x-3y+6=0 не перетинає відрізок, обмежений точками A(-2; -3) і B(1; -2).

4. Дано вершини трикутника: A(-10; -13), B(-2; 3) і C(2; 1). Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C.
5. Дано рівняння двох сторів прямокутника 3x-2y-5=0, 2x+3y+7=0 і одна з його вершин A(-2; 1). Знайдіть площу цього прямокутника.
6. Послідовні вершини чотирикутника A(-1; 6), B(1; -3), C(4;10) та D(9; 0). З'ясуйте чи є цей чотирикутник випуклим.
7. Відхилення точки M від прямих 5x-12y-13=0, 3x-4y-19=0 відповідно дорівнюють -3 та -5. Знайдіть координати точки M.
8. Складіть рівняння бісектриси кута між прямими x+2y-11=0 та
3x-6y-5=0 в якому розташована точка M(1; -4).
9. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих 3x-2y+5=0, 4x+3y-1=0 і відтинає на осі ординат відрізок b=-3. Виконайте завдання не знаходячи координат точки перетину заданих прямих.
10. Доведіть, що пряма 5x-2y-1=0 паралельна прямим 5x-2y+7=0, 5x-2y-9=0 і ділить відстань між ними навпіл.
11. Складіть рівняння бісектриси тупого кута, утвореного двома прямими x-3y+5=0, 3x-y+15=0.

Тема 8. Рівняння площини

При подготовці до практичного заняття підготувати наступні питання:

Рівняння з трьома змінними. Рівняння поверхні. Алгебраїчні і трансцедентні поверхні. Рівняння лінії в просторі. Площина як поверхня першого порядку. Види рівнянь площини. Умови рівнобіжності і перпендикулярності площин. Відстань від точки до площини. Рівняння пучка площин.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Скласти рівняння площини, якщо точка P(-1,2,3) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину.

Розв'язок. Використовуємо рівняння площини $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$.

В даному випадку точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ може служити задана точка P(-1,2,3), а нормальним вектором $\vec{n}=\{A,B,C\}$ - вектор OP=$\{-1,2,3\}$.

Рівняння площини має вид $-(x+1)+2(y-2)+3(z-3)$ або $x-2y-3z+14=0$.

Задача 2. Через точку P(-3,2,5) і вісь Oy провести площину.

Розв'язок.

Перший спосіб. Всяку площину, що проходить через точку P(-3,2,5), можна представити рівнянням $A(x+3)+B(y-2)+C(z-5)=0$.

У рівнянні площини, рівнобіжної осі *Oy коефіцієнт* при y B=0.

Таким чином, маємо: $A(x+3)+C(z-5)=0$

Шукана площина проходить через початок координат, отже вільний член її рівняння 3A-5C=0. звідси $A=\frac{5}{3}C$

Підставляючи вираз для *A* у рівняння площини, знайдемо, що $\frac{3}{5}C(x+3)+C(z-5)=0$, або 5x+3z=0.

Другий спосіб. Запишемо рівняння осі *Oy* *y* вигляді x=0, z=0

Рівняння площини, що проходить через вісь $0y$, можна записати у вигляді x+hz=0.

Площина проходить через точку P(-3,2,5), отже, -3+5h=0, звідси $h=\frac{3}{5}$ і рівняння площини приймає вигляд 5x+3z=0.

Задача 3. Площина проходить через точку *P(1,-1,3)* перпендикулярно площинам x-2y-23=0, 3x+2y-z-1=0. Скласти її рівняння.

Розв'язок. Рівняння площини, що проходить через точку P_0, запишемо у вигляді A(x-1)+B(y+1)+C(z-3)=0.

Умова перпендикулярності шуканої площини до даного приводить до рівнянь A-2B=0, 3A+2B-C=0.

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} A(x-1)+B(y+1)+C(z-3)=0 \\ A-2B=0 \\ 3A+2B-C=0 \end{cases}$$

має нетривіальне рішення тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Це і є рівняння шуканої площини.

Примітка Останнє рівняння можна отримати відразу як рівняння площини, що проходить черея точку *P(1,-1,3)* паралельно векторам $\overrightarrow{n_1} = \{1,-2,0\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{3,2,-1\}$ – перпендикулярним до заданих площин.

Задача 4. Скласти рівняння площини, що поділяє навпіл гострий двогранний кут між площинами 3x-4y-z+5=0 і 4x-3y+z+5=0.

Розв'язок. Рівняння площин, що поділяють навпіл кут між площинами Ax+By+Cz+D=0 і $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ мають вигляд –

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A+B+C}} \pm \frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\pm\sqrt{A+B+C}}$$

Знак мінус береться для тієї пари кутів, у яких знаходиться початок координат, знак плюс - у противному випадку.

Нормовані рівняння заданих площин мають вид: $\frac{3x-4y-z+5}{-\sqrt{26}} = 0$ і $\frac{4x-3y+z+5}{-\sqrt{26}} = 0$.

Їхні одиничні вектори нормалій $\overrightarrow{n_1} = \left\{-\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right\}$ і $\overrightarrow{n_2} = \left\{-\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}\right\}$ спрямовані з початку координат в сторону площин. Їх скалярний добуток $\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2} = \frac{23}{26} \succ 0$

Отже, вони утворять гострий кут, тому початок координат лежить у тупому куті.

Таким чином, шукана площина представляється рівнянням $\frac{3x-4y-z+5}{-\sqrt{26}} + \frac{4x-3y+z+5}{-\sqrt{26}} = 0$, або 7x-7y+10=0

Задачі для самостійного опрацювання

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A(3; -2 -7) паралельно площині 2x-3z+5=0

2. Скасти рівняння площини, що проходить через початок кординат перпендикулярно двом площинам 2x-y+3z-1=0, x+2y+z=0.
3. Довести що три площини 7x+4y+7z+1=0, 2x-y-z-2=0, x+2y+3z-1=0 проходять через одну пряму.
4. Скласти рівняння площини, що відтинає на осі Oz відрізок c=-5 та паралельна вектору $n = \{-2; 1; 3\}$.
5. Дві грані куба лежать на площинах 2x-2y+z-1=0; 2x-2y+z+5=0. Знайти об'єм цього куба.
6. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки M(1; -2; 0) та від площини 3x-2y+6z-9=0.
7. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від двох площин: 12x-16y+15z+1=0, 2x+2y-z-1=0
8. Визначте, чи розташований початок кординат всередині гострого чи тупого кута, утвореного двома площинами x-2y+3z-5=0, 2x-y-z+3=0.
9. Складіть рівняння площини, що ділить навпіл тупий двогранний кут, утворений двома площинами: 3x-4y-z+5=0, 4x-3y+z+5=0.
10. Визначте, чи належить площина 5x-9y-2z+12=0 пучку площин α(2x-3y+z-5)+β(x-2y-z-7)=0.
11. З'ясуйте при яких значеннях l і m площина 5x+ly+4z+m=0 налещить пучку площин α(3x-7y+z-3)+β(x-9y-2z+5)=0.
12. Складіть рівняння площини, що належить пучку площин α(x-3y+7z+36)+β(2x+y-z-15)=0 та знаходиться на відстані p=3 від початку координат.

13. Складіть рівняння площин, проектуючих пряму $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ на координатні площини.

14. Складіть рівняння проекції прямої $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на площишу $2x - y + z - 1 = 0$.

Тема 9. Рівняння прямої у просторі. Пряма і площина

При вивченні теоретичного матеріалу підготувати такі питання.

Види рівняння прямої. Перехід від однієї форми рівняння прямої до іншої. Кут між прямими. Умова рівнобіжності і перпендикулярності двох прямих. Аналітичні вирази взаємного розташування прямої і площини.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Скласти канонічне рівняння прямої x-2y+3z+1=0, 2x+y-4z-8=0.

Розв'язок. Канонічне рівняння прямої має вид $\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, де M_0 (x_0 ,y_0 ,z_0)- точка прямої, а$\overrightarrow{v}=\{\ell,m,n\}$ її направляючий вектор.

Вектор $\overrightarrow{v}\,\|\,\left[\overrightarrow{n_1\,n_2}\right]$, де $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ вектори перпендакулярні до площин, що проходять через дану пряму. У розглянутому випадку $\overrightarrow{n_1}=\{1,-2,3\}$, $\overrightarrow{n_2}=\{2,1,-4\}$.

Таким чином, $\overrightarrow{v}\,\|\,\left[\overrightarrow{n_1\,n_2}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=\{5,10,5\}=5\{1,2,1\}$

Виберемо конкретну точку M_0 (x_0 ,y_0 ,z_0) на прямій.

Її координати задовільняють рівняння прямої x_0 -2y_0+3z_0+1=0, 2x_0+y_0-4z_0-8=0.

Три координати пов'язані тільки двома рівняннями, отже, одній з них можна надати конкретне значення, наприклад, Z_0=0. Дві інші координати знайти із системи рівнянь x_0-2y_0+1=0, 2x_0+y_0-8=0.

Вирішивши цю систему рівнянь, знайдемо x_0=3, y_0=2.

Канонічне рівняння розглянутої прямої можна представити у вигляді $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$.

Задача 2. Дано вершини трикутника A(-1, 20, 9), B(1, 2, -7) і C(-5, 14, -3). Скласти канонічне рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині *C*.

Розв'язок. Координати векторів $\overrightarrow{CA}=\{4{,}6{,}12\}$, $\overrightarrow{CB}=\{6,-12,-4\}$.

Орт вектора $\overrightarrow{CA}=\vec{\alpha}=\left\{\frac{4}{14},\frac{6}{14},\frac{12}{14}\right\}$, орт вектора $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b_0}=\left\{\frac{6}{14},\frac{-12}{14},\frac{-4}{14}\right\}$.

Вектор $\overrightarrow{a_0}+\overrightarrow{b_0}$ спрямовані по бісектрисі кута C. Знайдемо його координати.

Легко обчислити, що $\overrightarrow{a_0}+\overrightarrow{b_0}=\left\{\frac{5}{7},-\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right\}$.

Очевидно, що направляючим вектором бісектриси кута *C* є вектор $\vec{v}=\{5,-3{,}4\}\,\Big\|\left(\overrightarrow{a_0}+\overrightarrow{b_0}\right)$

Підставивши в рівняння $\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ замість x_0, y_0, z_0 координати точки *C*, а замість ℓ, m і n координати вектора $\vec{v}$, одержимо шукане рівняння, $\frac{x+5}{5}=\frac{y-14}{-3}=\frac{z+3}{4}$.

Задача 3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку P(3,-1,4) паралельно площині y+2x=0 і перетинає вісь *Oy*.

Розв'язок. Запишемо рівняння прямих, що проходять через точку P: $\frac{x-3}{\ell}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-4}{n}$.

З умови паралельності шуканої прямої і даної площини одержимо $2\ell + m = 0$. Умова перетинання шуканої прямої і осі *Oy,* заданої рівнянням $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$, приведе до співвідношення $4\ell - 3n = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0 \text{ або } 4\ell - 3n = 0$$

Із системи рівнянь $\begin{cases} 2\ell + m = 0 \\ 4\ell - 3m = 0 \end{cases}$ знаходимо $\ell : m : n = 3 : -6 : 4$

Шукане рівняння прямої має вид $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-4}{4}$

Задача 4. Знайти проекцію прямої на площині $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площині x-y+3z+8=0.

Розв'язок. Через задану пряму проведемо площину, перпендикулярну заданій площині. Проекцію прямої можна представити як перетинання цих площин. Для цього запишемо рівняння даної прямої у вигляді

$$\begin{cases} x/4 = (y-4)/3 \\ x/4 = (z+1)/(-2) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3x - 4y + 16 = 0 \\ 2x + 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

Площина , що проходить через задану пряму, може бути подана рівнянням 3x-4y+16+h(2x+4z+4)=0, або x(3+2h)-4y+4hz+16+4h=0.

Підберемо h- так, щоб ця площина була перпендикулярна до площини проекції. Умова перпендикулярності площин дає співвідношення 3+2h+4+12h=0, звідки h=$-\frac{1}{2}$.

Рівняння площини, яку проектує пряма, має вид x-2y-z+7=0

Рівняння проекції прямої x-2y-z+7=0, x-2y+3z+8=0.

Задача 5. З початку координат опустити перпендикуляр на пряму$\frac{x-5}{4}=\frac{z-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$. Знайти рівняння цього перпендикуляра і його довжини.

Розв'язок. Через початок координат провести площину, перпендикулярну прямій, користуючись рівнянням. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

У якості вектора $\vec{n}=\{A,B,C\}$ у даному випадку може служити направляючий вектор прямої $\vec{v}=\{4,3,-2\}$Рівняння шуканої площини має вид 4x+3y-2z=0.

Знайдемо точку O_1 перетинання заданої прямої і проведеної площини. Для цього вирішимо систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{X-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}\\ 4x+3y-2z=0\end{cases}$$

Таку систему зручніше вирішувати, якщо записати рівняння прямої у параметричному вигляді, тобто, перейти до системи рівняньx=4t+5, y=3t+2, z=-2t-1, 4x+3y-2z=0

Підставляючи вирар x, y і z через t у рівняння площини, знайдемо: 4(4t+5)+3(3t+2)-2(-2t-1)=0. Звідси t=-$\frac{28}{29}$.

Координата точки O_1 :x=$\frac{33}{29}$,y= -$\frac{26}{29}$, z=$\frac{27}{29}$.

Через дві точки *O* і *O₁* проведемо пряму, використовуючи рівняння $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Підставивши координати точок O і O_1, знайдемо рівняння перпендикуляра $\frac{x}{33}=\frac{y}{-26}=\frac{z}{27}$.

Довжину перпендикуляра знайдемо по формулі відстані між двома точками $|OO_1| = \sqrt{33^2 + 26^2 + 27^2}$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Дано вершини трикутника A(3; 6; -7), B(-5; 2; 3), C(4; -7; -2). Складіть параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.
2. Дано вершини трикутника A(2; -1; -3), B(5; 2; -7), C(-7; 11; 6). Складіть канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A.
3. Складіть канонічні рівняння прямої, що проходить через точку M(2; 3; -5) паралельно прямій $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$
4. Складіть параметричні рівняння прямих: 1) $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$
5. Дано прямі $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$; при якому значенні l вони перетинаються?
6. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку M(-1; 2; -3) перпендикулярно до вектора $\{6; -2; -3\}$ та перетинає пряму $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.
7. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку M(-4; -5; 3) та перетинає дві прямі $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}, \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.
8. При яких значеннях A і D пряма x=3+4t, y=1-4t, z=-3+t лежить в площині Ax+2y-4z+D=0?
9. Знайдіть проекцію точки P(2; -1; 3) на пряму x=3t, y=5t-7, z=2t+2.

10. Знайдіть точку Q, симетричну точці P(4; 1; 6) відносно прямої $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

11. Знайдіть точку Q, симетричну точці P(1; 3; -4) відносно площини 3x+y-2z=0.

12. На плщині 2x+3y-4z-15=0 знайдіть точку P, різниця відстаней якої до точок M(5; 2; -7) та N(7; -25; 10) була б найбільшою.

13. Точка M(x; y; z) рухається прямолінійно і рівномірно від початкового положення $M_0(15; -24; -16)$ зі швидкістю υ=12 в напрямку вектора s={-2; 2; 1}. Переконавшись, що траекторія точки M перетинає площину 3x+4y+7z-17=0, знайдіть:

1) Точку P їх перетину;

2) Час, витрачений на рух точки M від M_0 до P

3) Довжину відрізка M_0P

14. Знайдіть відстань d точки P(1; -1; -2) від прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

15. Знайдіть відстань d точки P(2; 3; -1) від прямих:

1) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$;

2) x=t+1, y=t+2, z=4t+13;

3) $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$

Тема 10. Пряма і площина

При підготовці до практичного заняття варто усвідомити наступні питання.

Точка перетинання прямої і площині. Кут між прямою і площиною. Умова рівнобіжності і перпендикулярності прямої і площині. Умова приналежності прямої площини. Спосіб перебування загального перпендикуляра перехресних прямих (рівняння і довжини).

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Точка M(x,y,z) рухається прямолінійно і рівномірно з початкового положення M_0(11, -21, 20) у напрямку вектора $\overrightarrow{\rho} = \{-1{,}2,-2\}$ із швидкістю $\vartheta = 12$. За який час вона пройде відрізок траєкторії між площинами 2x+3y+5z+31=0, 2x+3y+5z-41=0?

Розв'язок. Точка M (x,y,z) рухається по прямій x=-t+11, y=2t-21, z=-2t+20. Точки зустрічі прямої з заданими площинами визначаються відповідно системами рівнянь:

2x+3y+5z+31=0 , x=-t+11, y=2t-21, z=-2t+20

і 2x+3y+5z-41=0, x=-t+11, y=2t-21, z=-2t+20

Вирішивши ці системи рівнянь. Знайдемо точки P_1(-4,9,-10) і P_2 (8,-15,14).

Відстань $|P_1P_2| = 36$

Час $t = \frac{\rho}{\vartheta} = \frac{36}{12} = 3$

Задача 2. Скласти рівняння площини , що проходить через пряму x=2t+1, y=-3t+2, z=2t-3 і точку P(2,-2,1)

Розв'язок.

Спосіб 1. Нехай M (x,y,z) - довільна точка площини, $P_0(1,2,-3)$ конкретна точка прямої.

Вектори $\overrightarrow{P_0M} = \{x-1, y-2, z+3\}$, $\overrightarrow{P_0P} = \{-1,-4,4\}$, $\vec{v} = \{2,-3,2\}$ компланарні, отже їх змішаний добуток рівний нулю,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Спосіб 2. Рівняння площини будемо шукати у вигляді A(x-2)+B(y+2)+C(z-1)=0.

Шукана площина пройде через пряму, отже через її точку P_0(1, 2, -3), тому A(1-2)+B(2+2)+C(-3-1)=0 Крім того, площина буде рівнобіжна прямій, тому 2A-3B+2C=0.

Таким чином, одержимо систему рівнянь щодо невідомих A, B і C: A(x-2)+B(y+2)+C(z-1)=0.;A-4B+4C=0: 2A-3B+2C=0.

Ця лінійна однорідна система буде мати нетривіальне рішення тоді і тільки тоді, коли її визначник $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Задача 3. Скласти рівняння площини, що проходить череэ дві прямі $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$

Розв'язок. Задані прямі паралельні. На перший із них відома точка $P_2(1,2,-3)$

Якщо M (x,y,z) – довільна точка шуканої площини, то $(\overrightarrow{P_1M}, \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v})$ =0 звідки одержуємо $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Задача 4. Скласти рівняння загального перпендикуляра двох прямих$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$ і $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Розв'язок. На першій прямій відома точка $P_1(0,1,0)$ і направляючий вектор $\vec{v_1} = \{1,0,-1\}$, на другій – $P_2(0,0,2)$ і $\overrightarrow{v_2} = \{0,1,-1\}$.

Легко перевірити, що $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1 v_{2,}}) \neq 0$, тобто задані прямі не лежать в одній площині.

Напрямок їх загального перендикуляра$\vec{v} \parallel [\vec{v_1}\,\vec{v_2}] = \{1,1,1\}$

Через першу із заданих прямих $\vec{v}$ проведемо площину. ЇЇ можна записати у вигляді $\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, аналогічне рівняння $\begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ представляє площину, яка проходить через другу пряму паралельно вектору $\vec{v}$. Ці площини перетинаються по шуканому перпендикулярі.

Задача 5. Вирахувати найкоротшу відстань між двома прямими $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$, $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$

Розв'язок. Аналогічно попередньому прикладу можна перевірити,що задані прямі не компланарні. Якщо провести через першу з них парралельно дугий площині α, а чарез другу пряму паралельно першій - площину β, то одержимо паралельні площини, у яких лежать задані прямі.

Шукана найкоротша відстань дорівнює відстані між площинами α і β. Цю відстань можна знайти як відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини. Тому немає необхідності записувати рівняння обох площин.

Приклад можна вирішити таким способом. Через другу пряму паралельно першій проводимо площину. Її рівняння можна записати у вигляді $\begin{vmatrix} x-21 & y+5 & z-2 \\ 6 & -4 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ або 4x+3y+12z-93=0.

Знайдемо тепер відстань від точки Р (-7,-4,-3), що належить першій прямій, до проведеної площини:

$$d = \left|(4(-7) + 3(-4) + 12(-3) - 93/\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}\right| = 13$$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Складіть рівняння площини, що проходить через точку М(1; 2; -3) паралельно прямим $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.
2. Скласти рівняння площини, перпендикулярної до площини 5x-y+3z-2=0 і прямої, що перетинає її по прямій, що лежить у площині xOy**.**
3. Складіть рівняння площини, що проходить через пряму x=2t+1, y=-3t+2, z=2t-3 та точку М(2; -2; 1).
4. Доведіть що прямі

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4},$$

x=3t+7; y=2t+2, z=-2t+1

лежать в одній площині, і складіть рівняння цієї площини.

5. Знайдіть проекцію точки C(3; -4; -2) на площину, що проходить через паралельні прямі $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$.
6. Знайдіть точку Q симетричну точці P(-3; 2; 5) відносно площини, що проходить через прямі $\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ x-2y-4z+3=0. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+y+3z+7=0, \\ 5x-3y+2z+5=0. \end{cases}$
7. Складіть рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно до площини 3x+2y-z-5=0.
8. Складіть параметричні рівнння прямої, що проходить паралельно площинам 3x+12y-3z-5=0, 3x-4y+9z+7=0 і перетинає прямі $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$.
9. Знайдіть найкоротшу відстань між двома прямими в кожному з наступних випадків:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$; $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

2) $x=2t-4, y=-t+4, z=-2t-1$;

$x=4t-5, y=-3t+5, z=-5t+5$.

3) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$;

$x=6t+9, y=-2t, z=-t+2$.

Тема 11. Лінії другого порядку, їхні канонічні рівняння

При підготовці до практичного заняття потрібно засвоїти такі питання:

Визначення еліпса, гіперболи і параболи, їх рівняння, форму. Ексцентриситет, директриси лінії. Фокальна властивість лінії другого порядку ($^r/_d = e$) . Полярне рівняння лінії другого порядку.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично щодо початку координат, якщо відома точка P($2,-\frac{5}{3}$) еліпса і його ексцентриситет $e = \frac{2}{3}$.

Розв'язок. З умови задачі видно, що осі координат збігаються з осями симетрії еліпса, тому його рівняння має вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, фокуси еліпса лежать на осі абсцис, тому $a^2 \succ b^2$ і $c^2 = a^2 - b^2$, де 2C - відстань між фокусами.

Точка P лежить на еліпсі, тому її координати задовільняють рівняння еліпса. $\frac{4}{a^2} + \frac{25}{9b^2} = 1$.

Ексцентриситет $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$.

Вирішуючи систему рівнянь $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$,$c^2 = a^2 - b^2$, $\frac{4}{a^2} + \frac{25}{9b^2} = 1$ знайдемо, що $a^2 = 9, в^2 = 5$,а рівняння еліпса $^{x^2}/_9 + {}^{y^2}/_5 = 1$

Задача 2. Дано еліпс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Знайти його напівосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.

Розв'язок. Розділимо праву і ліву частину рівняння еліпса на 45: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Таким чином, напівосі а=$\sqrt{5}$ b=3.

Так як $a<b$, то фокуси еліпса розташовані на осі ординат і $c^2 = a^2 - b^2$=4, звідки с=2 Отже, фокуси еліпса $F_1(0,-2)$ і $F_2(0,2)$

Ексцентриситет $e = \frac{c}{b} = \frac{2}{3}$

Рівняння директрис$y = \pm\frac{b}{e}$, або $y = \pm\frac{9}{2}$

Задача 3. Точка Р (1,-2) лежить на гіпотенузі, фокус котрої F(-2,2), а відповідна директриса дана рівнянням 2x-y-1=0. Скласти рівняння цієї гіперболи.

Розв'язок. Відповідно до фокальної властивості лінії другого порядку $r/_d = e$ де r- фокальний радіус довільної точки лінії другого порядку, а d - відстань від цієї точки до відповідної директриси.

Нехай М(x_1 ,y)- довільна точка лінії другого порядку.

Знайдемо відстань від точки М до фокуса: $r = \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$,

Відстань від цієї точки до директриси $d = \left|\frac{2x-y-1}{\sqrt{5}}\right|$

Таким чином, $\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}}{\left|\frac{2x-y-1}{\sqrt{5}}\right|} = e \quad (\alpha)$ для будь-якої точки шуканої гіперболи.

Це співвідношення справедливо і для заданої точки *P*. Підставивши в цьому співвідношенні замість x і y координати точки Р (1,-2), знайдемо $\ell = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

Підставивши значення $\ell = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ в співвідношення (α), одержимо шукане рівняння $\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}}{\left|\frac{2x-y-1}{\sqrt{5}}\right|} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$

Після перетворень це рівняння можна привести до виду $91x^2-100xy+16y^2-136x+86y-47=0$

Задача 4. Дано вершину параболи A(-2,-1) і рівняння її директриси x+2y-1=0. Скласти рівняння цієї параболи.

Розв'язок. Знайдемо координати фокуса параболи. Для цього знайдемо рівняння прямої, що проходить через вершину перпендикулярно директрисі, використовуючи рівняння y+1=к(x+2).

Кутовий коефіцієнт $k = -\frac{1}{k_1}$, де $k = -\frac{1}{2}$ – кутовий коефіцієнт директриси.

Таким чином, k=2 , а рівняння шуканої прямої y+1=2(x+2) або 2x-y+3=0 .

Точку P перетину цієї прямої і директриси знайдемо із системи рівнянь. 2x-y+3=0, x+2y-1=0. Вирішивши цю систему, одержимо P(-1,1)

Якщо F - фокус параболи, те її вершина A-ділить відрізок PF навпіл.

Таким чином, $\frac{1+x_F}{2} = -2, \frac{1+y_F}{2} = -1$. Звідси F(-3,-3).

Для точки M(x,y) параболи її відстані до фокуса і директриси рівні, отже $\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2} = \left|\frac{x+2y-1}{\sqrt{5}}\right|$

Це і є шукане рівняння. Після перетворення його можна привести до виду $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$,

Задача 5. Лінія другого порядку задана полярним рівнянням $\rho = \frac{12}{2 - Cos\phi}$. Ззнайти рівняння цієї лінії в декартових координатах.

Розв'язок. Запишемо задане рівняння в такий спосіб $\rho = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}Cos\phi}$. Тоді Р $\frac{b^2}{a} = 6, \ell = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} < 1$ тому дане рівняння представляє еліпс.

Його рівняння в декартових координатах можна записати у вигляді $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2}^2 = 1$. Вирішивши систему рівнянь $b^2 = 6a$, $a = 2c$, $c^2 = a^2 - b^2$ знайдемо, що $a = 8$, $b^2 = 48$.

Шукане рівняння $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Дано еліпс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Знайдіть:

   1) його півосі;

   2) фокуси;

   3) ексцентриситет;

   4) рівняння директрис.

2. Точка М(2; -1) розташована на еліпсі, фокус якого F(1; 0), а відповідна директриса задана рівнянням 2х-у-10=0. Складіть рівняння цього еліпса.

3. Напрямною круглого циліндра є коло з радіусом R=8. Визначте півосі еліпла, отриманого при перетині цього циліндра площиною, нахиленою до його осі під кутом $\varphi = 30^o$.

4. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи крім того, що:

   1) її осі 2a=10 і 2b=8;

   2) відстань між фокусами 2c=10 і вісь 2b=8;

   3) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами 2c=20;

   4) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами дорівнює $12\frac{4}{5}$.

5. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, знаючи крім того, що рівняння асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ і відстань між вершинами дорівнює 48.

6. Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$. Знайдіть:

   1) півосі a та b;

   2) фокуси;

   3) ексцентриситет;

   4) рівняння асимптот;

   5) рівняння директрис.

7. Довести що добуток відстаней від будь-якої точки гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до двох її асимптот є величиною постійною та дорівнює $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

8. Доведіть, що площа паралелограма обмеженого асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і прямими, проведеними через будь-яку її

точку паралельно асимптотам, є величиною постійною та дорівнює $\frac{ab}{2}$.

9. Складіть рівняння гіперболи, якщо вдомі її ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$, фокус F(2; -3) і рівняння відповідної директриси 3x-y+3=0.
10. Точка A(-3; -5) лежить на гіперболі, іокус якої F(-2; -3), а відповідна директриса задана рівнянням x+1=0. Складіть рівняння цієї гіперболи.
11. На параболі $y^2 = 16x$ знайдіть точки, фокальний радіус яких дорівнює 13.
12. Складіть рівняння параболи, якщо дано фокус F(-7; 0) і рівняння директриси x-7=0.
13. Дано вершину параболи A(-2; -1) і рівняння її директриси x+2y-1=0. Складіть рівняння цієї параболи.
14. Встановіть, що рівняння $\rho = \frac{144}{13-\cos\theta}$ задає еліпс, та знайдіть його півосі.
15. Встановіть, що рівняння $\rho = \frac{18}{4-5\cos\theta}$ задає праву вітку гіперболи, і знайдіть її півосі.
16. На параболі $\rho = \frac{p}{1-\cos\theta}$ знайдіть точки:

   1) з найменшим полярним радіусом;

   2) з полярним радіусом, що дорівнює параметру параболи.

Тема 12. Лінії другого порядку. Дотична до лінії другого порядку. Оптичні властивості

При підготовці до заняття необхідно знати визначення і рівняння дотичної до кожної з кривих другого порядку, а також оптичні властивості ліній другого порядку.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2+4y^2=20$, перпендикулярних до прямої $2x-2y-13=0$.

Розв'язок. Рівняння дотичної до еліпса має вид $\frac{xx_0}{a}+\frac{yy_0}{в^2}=1$, де (x_0,y_0) - точка торкання. У даному випадку рівняння дотичної має вид $xx_0+4yy_0=20$.

Умова перпендикулярності дотичної і заданої прямої приводить до співвідношення $2x_0-2y_04=0$ Звідси $x_0=4y_0$.

Точка торкання належить еліпсу, тому $x^2_0+4y^2_0=20$.

Вирішивши систему рівнянь $x^2_0+4y^2_0=20$, $x_0=4y_0$ знайдемо $x_0=\pm4$, $y_0=\pm1$.

Шукані рівняння: $\pm4x\pm4y=20$ або $\pm x\pm y=5$.

Задача 2. Скласти рівняння дотичних до параболи $y^2=36x$, проведених із точки A(2, 9).

Розв'язок. Рівняння дотичної до параболи $y^2=2px$ має вид $yy_0=P(x+x_0)$, для даної параболи $yy_0=18(x+x_0)$.

Дотична повинна пройти через точку A, тому координати точки A- задовольняють рівняння дотичної $9y_0=18(x+x_0)$, де $(x_0\ y_0)$, - точка торкання.

Точка торкання належить кривій, тому $y^2_0=36x_0$.

Вирішуючи систему рівнянь $y_0 = 2(2+x_0)$, $y^2{}_0 = 36x_0$ знайдемо, що $x_{01}=4$, $x_{02}=1$, $y_{01}=12$, $y_{02}=6$.

Шукані рівняння дотичних 3x-2y+12=0 і 3x-y+3=0

Задача 3. З лівого фокуса еліпса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ під тупим кутом α до осі Ох спрямований промінь світла. Відомо, що $tg\alpha=-2$. Дійшовши до еліпса, промінь від нього відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

Розв'язок. Для заданого еліпса $c^2=a^2-b^2=45-20=25$. Отже, координати фокусів $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$.

Рівняння променя, що падає y=-2(x+5).

Точку Р – зустрічі променя з еліпсом знайдемо як точку перетинання прямої y=-2(x+5) і еліпса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$.

Вирішивши систему рівнянь, знайдемо $P_1(-3,-4)$ і $P_2(-6,2)$.

За умовою задачі видно, що точка P_1 не підходить.

Відповідно до оптичної властивості еліпса відбитий промінь повинен пройти через правий фокус. Таким чином, шукана пряма пройде через точки $P_2(-6,2)$ *і* $F_2(5,0)$.

Її рівняння 2x+11y-10=0.

Задача 4. Еліпс проходить через точку А(4,-1) і стосується прямої *x+4y-10=0*. Скласти рівняння цього еліпса за умови, що його осі збігаються з осями координат.

Розв'язок. Рівняння еліпса в силу умови можна записати у вигляді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Точка А – належить еліпсу, тому $\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

Рівняння дотичної до шуканого еліпса має вид $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$ Еліпс стосується прямої *x+4y-10=0*

Тому $\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} = \frac{1}{10}$ Звідси $x_0 = \frac{a^2}{10}. y_0 = \frac{2}{5}b^2$

Координати точки торкання задовольняють рівнянню еліпса $\frac{x^2{}_0}{a^2} + \frac{y^2{}_0}{в^2} = 1$. Підставляючи замість x_0 і y_0 їх вираження через a^2, b^2 знайдемо співвідношення $\frac{a^2}{100} + \frac{4b^2}{25} = 1.$

Таким чином, a^2, b^2 задовольняють рівнянням $\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$,$\frac{a^2}{100} + \frac{4b^2}{25} = 1.$

Вирішуючи цю систему щодо a^2 ,b^2, отримаємо $a_1^2 = 20$, $a_2^2 = 80$, $b_1^2 = 5$, $b_2^2 = \frac{5}{4}$.

Рівняння шуканого еліпса $\frac{x^2}{80} + \frac{4y^2}{5} = 1$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Складіть рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, паралельних прямій 3x+2y+7=0.
2. Проведіть дотичну до еліпса $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ паралельно прямій 4x-2y+23=0 і знайдіть відстань d між ними.
3. На еліпсі $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ знайдіть точку М, найближчу до прямої 2x-3y+25=0 і обчисліть відстань d від точки М до цієї прямої.
4. З точки С(10; -8) проведено дотичні до еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$ Складіть рівняння хорди, що з’єднує точки дотику.

5. Складіть рівняння еліпса, що дотикається до двох прямих 3x-2y-20=0, x+6y-20=0, за умови, що його осі співпадають з осями координат.
6. Доведіть, що добуток відстаней від центра еліпса до точки перетину будь-якої його дотичної з фокальною віссю і до основи перпендикуляра, опущеного з точки дотику на фокальну вісь, є величиною сталою, що дорівнює квадрату більшої півосі еліпса.
7. Доведіть, що добуток відстаней від фокусів до будь-якої дотичної до еліпса дорівнює квадрату малої півосі.
8. Пряма x-y-5=0 дотикається до еліпса, фокуси якого знаходяться в точках $F_1(-3; 0)$ і $F_2(3; 0)$. Складіть рівняння цього еліпса.
9. Еліпс мала піввісь якого дорівнює 6 є проекцією кола з радіусом R=12. Знайдіть кут φ між площинами, в яких розташовані еліпс і коло.
10. На гіперболі $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ знайдіть точку M, найближчу до прямої 3x+2y+1=0 і знайдіть відстань d від точки M до цієї прямої.
11. Складіть рівняння дотичних до гіперболи $x^2-y^2=16$, проведених з точки A(-1; -7).
12. Гіпербола проходить через точку $A(\sqrt{6};3)$ і дотикається до прямої 9x+2y-15=0. Складіть рівняння цієї гіперболи за умови, що її осі співпадають з осями координат.
13. Пряма 2x-y-4=0 дотикається до гіперболи, фокуси якої знаходяться в точках $F_1(-3; 0)$ і $F_2(3; 0)$. Складіть рівняння цієї гіперболи.

14. З правого фокуса гіперболи $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ під кутом α (π<α<$\frac{3}{2}$π) до осі Ox напрямлено промінь світла. Відомо, що $\tan\alpha=2$. Дійшовши до гіперболи, промінь від неї відбився. Складіть рівняння прямої, на якій розташовано відбитий промінь.

15. Доведіть, що еліпс і гіпербола, що мають спільні фокуси, перетинаються під прямим кутом.

16. Виведіть умову, при якій пряма y=kx+b дотикається до параболи $y^2=2px$.

17. Доведіть, що дві параболи, які мають спільну вісь і спільний фокус, розташований між їх вершинами, перетинаються під прямим кутом.

18. Доведіть, що якщо дві параболи зі взаємноперпендикулярними осями перетинаються в чотирьох точках, то ці точки лежать на одному колі.

Тема 13. Поверхні другого порядку. Їхні канонічні рівняння. Перетин поверхні площиною

При підготуванні до заняття потрібно запам'ятати канонічні рівняння поверхонь другого порядку.

Зрозуміти, як можна одержати поверхні другого порядку,

Опанувати методом проекції дослідження лінії перетину поверхні площиною.

Навчитися складати рівняння канонічних і циліндричних поверхонь.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в точці ρ (3,-1,-2), а направляюча дана рівняннями $x^2 + y^2 - z^2 = 1, x - y + z = 0$

Розв'язок. Нехай M(x,y,z) – довільна точка конуса. Через цю точку пройде обов'язково прямолінійна утворююча конуса. Ця утворююча перетинає направляючу, нехай у точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Запишемо рівняння утворюючої як рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, ρ (3,-1,-2), $\frac{x-3}{x_0-3} = \frac{y+1}{y_0+1} = \frac{z+2}{z_0+2}$.

Крім того, координати точки M_0 задовольняють рівняння направляючої. Виключивши із системи рівнянь $\frac{x-3}{x_0-3} = \frac{y+1}{y_0+1} = \frac{z+2}{z_0+2}$, ${x_0}^2 + {y_0}^2 - {z_0}^2 = 1$ параметри x_0,y_0 і z_0, одержимо шукане рівняння конуса. Виключати параметри зручно наступним способом:

Запишемо рівняння утворюючої в параметричному виді $\frac{x-3}{x_0-3} = t$, $\frac{y+1}{y_0+1} = t$, $\frac{z+2}{z_0+2} = t$.

Знайдемо звідси $x_0 = 3 + \frac{x-3}{t}$, $y_0 = -1 + \frac{y+1}{t}$, $z_0 = -2 + \frac{z+2}{z}$. Підставимо ці вирази в останнє рівняння:

$$3 + \frac{x-3}{t} + 1 - \frac{y+1}{t} + \frac{z+2}{z} - 2 = 0,$$

Звідси $t = \frac{2-x+y-z}{2}$,а $x_0 = 3 + \frac{2(x-3)}{2-x+y-z}$, $y_0 = -1 + \frac{2(y+1)}{2-x+y-z}$, $z_0 = -2 + \frac{2(z+2)}{2-x+y-z}$.

Підставляючи ці вирази в третє рівняння системи, одержимо шукане рівняння конуса:

$$(3 + \frac{2(x-3)}{2-x+y-z})^2 + (-1 + \frac{2(y+1)}{2-x+y-z})^2 - (-2 + \frac{2(z+2)}{2-x+y-z})^2 = 1$$

Після перетворень рівняння конуса можна привести до виду

$3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$

Задача 2. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці S(3,0,-1), утворюючі якого торкаються еліпсоїда $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$.

Розв'язок. Рівняння всіх прямих, що проходять через точку *S*, запишемо у вигляді $x = 3 + \ell t, y = mt, z = -1 + nt$ (α).

Знайдемо точки перетинання такої прямої з еліпсоїдом $\frac{(3+\ell t)}{6} + \frac{m^2t^2}{2} + \frac{(-1+nt)}{3} = 1$

Запишемо отримане квадратне рівняння щодо t у вигляді: $t^2(\frac{\ell^2}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{n^2}{3}) + 2t(\frac{3\ell}{6} + \frac{n}{3}) + \frac{5}{6} = 0$ (β).

З усіх прямих (α) виберемо ті, що стосуються еліпсоїда. Для такий прямих рівняння (β) має квадратні корені, тобто його дискримінант дорівнює нулю $\left(\frac{3\ell}{6}-\frac{n}{3}\right)^2-\frac{5}{6}\left(\frac{\ell^2}{6}+\frac{m^2}{2}+\frac{n^2}{3}\right)=0$, або $4\ell^2-15m^2-6n^2-12\ell n=0$.

Підставимо в це рівняння $\ell=\frac{x-3}{t}$, $m=\frac{y}{t}$, $n=\frac{z+1}{t}$ з (α) і одержимо шукане рівняння $4(x-3)^2-15y^2-6(z+1)^2-12(x-3)(z+1)=0$

Задача 3. Скласти рівняння циліндра, направляюча якого дана рівняннями$x^2-y^2=z, x+y+z=0$, а утворюючі перпендикуляри до площини направляючої.

Розв'язок. Напрямок утворюючої задається вектором $\vec{v}=\{1,1,1\}$ Рівняння утворюючого циліндра запишемо у вигляді

$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z}{1}$, де $P_0(x_0,y_0,z_0)$ точка перетину утворюючої з направляючою. Її координати задовольняють рівнянням направляючої.

Таким чином, є система рівнянь $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z}{1}$, $x^2_0-y^2_0=z_0$, $x_0+y_0+z_0=0$

Виключивши параметри x_0, y_0 , і z_0**,** знайдемо рівняння циліндра. Для цього запишемо рівняння утворюючої у параметричному виді $x-x_0=t, y-y_0=t, z-z_0=t$

Звідси $x_0=x-t, y_0=y-t, z_0=z-t$

Підставимо ці вираження в останнє рівняння системи $x+y+z-3t=0$. звідки $t=\frac{x+y+z}{3}$, а $x_0=\frac{1}{3}(2x-y-z)$, $y_0=\frac{1}{3}(2y-x-z)$,$z_0=\frac{1}{3}(2z-x-y)$.

Підставляючи в третє рівняння системи вирази для x_0, y_0 , і z_0. Отримаємо шукане рівняння $\frac{(2x-y-z)^2}{9} - \frac{(2y-x-z)^2}{9} = \frac{2z-x-y}{3}$.

Після перетворень рівняння можна записати у вигляді $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$

Задача 4. Циліндр, утворюючі якого паралельні прямій $x = 2t - 3, y = -t + 7, z = -2t + 5$ описаний навколо сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ Скласти рівняння цього циліндра.

Розв'язок. Напрямок що відображає задається вектором $\vec{v} = \{2, -1, -2\}$. Досить знайти рівняння направляючого циліндра і приклад можна вирішувати аналогічно прикладу 3.

У якості направляючої можна взяти окружність, отриману перетином заданої сфери площиною, що проходить через центр сфери, що перпендикулярно утворюючій.

Щоб визначити центр сфери, представимо рівняння сфери у вигляді $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$. Таким чином, центр заданої сфери знаходиться в точці C(1,-2,-1).

Проведемо через точку C перпендикулярно вектору $\bar{v}$ площину $2(x-1) - (y+2) - 2(z+1) = 0$. Це рівняння можна записати у вигляді $2x - y - 2z - 6 = 0$. Рівняння направляючої можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0, \\ 2x - y - 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Встановити тип лінії $\begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = y \\ 3x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$ (α) і знайти її центр.

Розв'язок. Спроектуємо задану лінію на площину xOz. Рівняння циліндра , що проектує , знайдемо, виключивши із системи (α) змінну y. З рівняння площини знайдемо $y=\frac{1}{3}(3x+4z+2)$.

Підставимо в рівняння поверхні $\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=\frac{3x+4z+2}{3}$. Отримане рівняння представляє проектуючий циліндр.

Це рівняння можна представити у вигляді $3(\mathrm{x}-1)^2-2(\mathrm{z}+2)^2=-1$. Рівняння шуканої проекції лінії одержимо, якщо перетнемо циліндр , що проектує, площиною xOz:

$$\begin{cases}3(x-1)^2-2(z+2)^2=-1\\ y=0.\end{cases}$$

Очевидно, що лінія є гіперболою. Центр гіперболи можна знайти наступним способом:

Центр проекції знаходиться в точці $C(1,0,-2)$. У центрі лінії перетину X і Z ті ж.

Значення можна одержати, скориставшись тим, що центр лінії лежить у площині перетину.

З її рівняння $y=\frac{1}{3}(3x+4z+2)=\frac{3-8+2}{3}=-1$.

Координати центру лінії перетину (1,-1,-2).

Задачі для самостійного опрацювання

1. Складіть рівняння поверхні, утвореної ковзанням прямої по трьох прямих $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}, \frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}, \frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.
2. Складіть рівняння поверхні, утвореної прямої, що сковзає по прямих $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ і $\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$ залишаючись рівнобіжної площини 2x+3y-5=0.

3. Пряма x-1=y+1=z обертається навколо осі *Oz* , Найти рівняння поверхні обертання.
4. Доведіть що через пряму $\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ можна провести дві площини, дотичні до сфери $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$, і складіть їх рівняння.
5. Вісь Oz є віссю круглого конуса з вершиною в початку координат, точка M(3; -4; 7) лежить на його поверхні. Складіть рівняння цього конуса.
6. Пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ є віссю круглого конуса, вершина якого лежить на площині Oyz. Складіть рівняння цього конуса, знаючи, що точка M(1; 1; - $\frac{5}{2}$) лежить на його поверхні.
7. Складіть рівняння круглого конуса, для якого осі координат є твірними.
8. Складіть рівняння конуса з вершиною в точці S(5; 0; 0), твірні якого дотикаються до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
9. Складіть рівняння конуса з вершиною в початку координат, твірні якого дотикаються до сфери $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$.
10. Складіть рівняння циліндра, твірні якого паралельні вектору $l = \{2;\ -3; 4\}$, а напрямляюча задана рівняннями $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$.
11. Циліндр, твірні якого перпендикулярні до площини $x + y - 2z - 5 = 0$, описаний біл сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Складіть рівняння цього циліндра.

12. Складіть рівняння круглого циліндра, що проходить через точку S(2; -1; 1), якщо його віссю є пряма x=3t+1, y=-2t-2, z=t+2.

13. Складіть рівняння циліндра, описаного біля двох сфер: $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2=25$.

14. З'ясуйте, яка лінія є перетином еліпсоїда $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ площиною $2x-3y+4z-11=0$ і знайдіть її центр.

15. З'ясуйте які лінії визначаються наведеними рівняннями:

1) $\begin{cases} \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z \\ 3x-y+6z-14=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z \\ x-2y+2=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1 \\ 9x-6y+2z-28=0 \end{cases}$

16. Знайдіть, при яких значеннях m площина x+mz-1=0 перетинає двопорожнинний гіперболоїд $x^2+y^2-z^2=-1$ а) по еліпсу, б) по гіперболі.

17. Доведіть що двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ має одну спільну точку площиною 5x+2z+5=0 і знайдіть її координати.

18. Знайдіть при яких значеннях m площина $x+my-2=0$ перетинає еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$ а) по еліпсу, б) по параболі.

Тема 14. Поверхні другого порядку. Прямолінійні утворюючі. Дотична площина

При підготуванні до заняття звернути увагу на наступне.

Опанувати методом перебування прямолінійних утворюючої поверхні другого порядку.

Засвоїти визначення дотичної площини до поверхні і форму її рівняння.

Звернути увагу на той факт, що дотична площина до лінійної поверхні проходить через прямолінійні що утворяться, що проходять через точку дотику.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Довести, що еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ має одну загальну точку з площиною $2x-2y-z-10=0$, знайти її координати.

Розв'язок. Досліджуємо лінію перетину $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2y, 2x-2y-z-10=0$. Спроектуємо її на площину xOz.

Виключивши із системи змінну y, одержимо рівняння циліндра, що проектує.

З другого рівняння $2y=2x-z-10$ підставимо знайдені $2y$ в перше рівняння $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2x-z-10$.

Отримане рівняння можна представити у вигляді $(\frac{x}{3}-3)^2+(\frac{z}{2}+1)^2$. Звідси $x=9, x=-2$.

Проектуючий циліндр вироджується в пряму лінію. Координати проекції $(9,0,-2)$.

Для розглянутої точки знайдемо y, скориставшись тим, що ця точка лежить у площині перетину: $2 * 9 - 2y + 2 - 10 = 0$. Звідси $y = 5$. Таким чином, розглянута точка P має координати (9,5,-2).

Очевидно, розглянута в умові задача площина, є дотичною до поверхні в точці P.

Дійсно, дотична площина до заданої поверхні запишеться рівнянням $\frac{xx_0}{9} + \frac{zz_0}{4} = y + y_0$.

Підставимо у це рівняння координати точки дотику $(9,5,-2)$ і одержимо рівняння $2x - 2y - z - 10 = 0$, яке співпадає із заданим.

Задача 2. Скласти рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = \{2,-1,-2\}$ і дотичного еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z$.

Розв'язок. Рівняння дотичної -площини для поверхні $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ має вигляд $\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} = z + z_0$.

У даному випадку дотична площина задається рівнянням $\frac{xx_0}{3} + \frac{yy_0}{4} = z + z_0$.

Умова перпендикулярності цієї площини вектора $\vec{n}$ дає співвідношення: $\frac{x_0}{6} = \frac{y_0}{-4} = \frac{1}{2}$.

Звідси $x_0 = 3, y_0 = -2$.

z_0 знайдемо з рівняння поверхні $z_0 = \frac{1}{2}(\frac{{x_0}^2}{3} + \frac{{y_0}^2}{4})$=2.

Рівняння шуканої дотичної площини $2x - y - 2z - 4 = 0$.

Задача 3. Довести, що площина $2x - 12y - z + 16 = 0$

перетинає гіперболічний параболоїд $x^2 - 4y^2 = 2z$ по прямолінійним утворюючим. Скласти рівняння цих прямолінійних утворюючих.

Розв'язок. *Перший спосіб*. Досліджуємо лінію перетину $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 2z \\ 2x - 12y - z + 16 = 0. \end{cases}$

Для цього спроектуємо її, наприклад, на площину xOy. З рівняння площини $z = 2x - 12y + 16$.

Підставимо в рівняння поверхні $x^2 - 4y^2 = 4x - 24y + 32$. Це рівняння можна представити у вигляді $(x-2)^2 - 4(y-3)^2 = 0$. Циліндр , що проектує , розпадається на пару площин $x - 4y + 10 = 0$ і $x + 4y - 14 = 0$.

Отже, лінія перетину являє собою пару перетинаючих прямих. Рівняння цих прямих можна представити у вигляді $\begin{cases} x - 4y + 10 = 0, \\ 2x - 12y - z + 16 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 4y - 14 = 0, \\ 2x - 12y - z + 16 = 0 \end{cases}$

Другий спосіб. Для вирішення задачі досить довести, що задана площина є дотичною площиною до поверхні, і знайти точку доторку.

Рівняння дотичної площини до поверхні можна записати у вигляді $xx_0 - 4yy_0 = z + z_0$. Це рівняння і рівняння заданої площини представляють одну й туж площину, тому $\frac{x_0}{2} = \frac{-4y_0}{-12} = \frac{-1}{-1} = \frac{-z_0}{16.}$. Звідси $x_0 = 2, y_0 = 3, z_0 = -16$.

Легко можна перевірити, що отримана точка належить поверхні.

Значить дійсно задана площина є дотичною площиною заданої поверхні в точці $P(2{,}3, -16)$.

Розглянемо прямолінійні утворюючі поверхні $x^2 - 4y^2 = 27$. Для цього її рівняння представимо у вигляді $(x-2y)(x+2y) = 2z$ або $\frac{x-2y}{2} = \frac{z}{x+2y}$

Це ж рівняння можна записати так $\frac{x-2y}{z} = \frac{2}{x+2y}$

Прирівнюючи написані співвідношення відповідно до параметрів υ іϑ , одержимо дві серії прямолінійних утворюючої поверхні; $\frac{x-2y}{2} = \frac{z}{x+2y} = \upsilon$і $\frac{x-2y}{z} = \frac{2}{x+2y}$=$\vartheta$

Рівняння прямолінійних утворюючих можна записати: $\begin{cases} x-2y = 2u \\ x+2y = \frac{z}{u} \end{cases}$ і $\begin{cases} x-2y = z\vartheta \\ x+2y = \frac{2}{\vartheta} \end{cases}$ (α)

Виберемо прямолінійні утворюючі, що проходять через точку P *в*(α), Підставивши координати точки P *в*(α), знайдемо, що u=-2, $\vartheta = \frac{1}{4}$ Підставивши отримані значення *в*(α), знайдемо шукані прямолінійні утворюючі

$\begin{cases} x-2y = -4 \\ x+2y = \frac{z}{-2} \end{cases}$ і $\begin{cases} x-2y = \frac{z}{4} \\ x+2y = 8 \end{cases}$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Доведіть, що двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ має одну спільну точку з площиною 5x+2z+5=0.
2. Доведіть, що еліпсоїд $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ має одну спільну точку з площиною $4x - 3y + 12z - 54 = 0$ та знайдіть її координати.

3. Проведіть дотичні площини до еліпсоїда $4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1$ паралельно площині $x - 2y + 2z + 17 = 0$; знайдіть відстань між знайденими площинами.
4. Коефіцієнт рівномірного стиснення простору до площини Oyz дорівнює $\frac{3}{5}$. Складіть рівняння поверхні, в яку при такому стисканні перетвориться сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
5. Складіть рівняння поверхні, в яку перетворюється еліпсоїд $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ після трьох рівномірних стискань простору до координатних площин, якщо коефіцієнт стиснення до площини Oxy дорівнює $\frac{3}{4}$, до площини Oxz дорівнює $\frac{4}{5}$, а до площини Oyz дорівнює $\frac{3}{4}$.
6. Доведіть, що однопорожнинний гіперболоїд, визначений рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ може бути отриманий врезультаті обертання гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, y=0 навколо осі Oz та подальшого рівномірного стиснення простору до площини Oxz.
7. Доведіть, що площина 4x-5y-10z-20=0 перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ по прямолінійних твірних. Складіть рівняння цих прямолінійних твірних.
8. Складіть рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, паралельних площині $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.
9. Доведіть, що рівняння z=xy визначає гіперболічний параболоїд.

10. Переконавшись що точка A(-2; 0; 1) лежить на гіперболічному параболоїді $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$, визначте гострий кут, утворений його прямолінійними твірними, що проходять через точку A.

Тема 15. Загальне рівняння лінії другого порядку

При вивченні теоретичного матеріалу підготувати наступні питання:

Звернути увагу на основні положення загальної теорії лінії другого порядку.

Рівняння лінії другого порядку. Визначення лінії другого порядку п'ятьма точками. Рівняння дотичної. Центр лінії. Сполучені напрямки. Асимптоти. Головні напрямки.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Знайти асимптоти лінії $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 2y - 2 = 0$

Розв'язок. Асимптоти, лінії другого порядку можна розглядати як її самоспіввідношені діаметри. Шукати рівняння асимптот можна, користуючись рівнянням Fx+kFy=0(α)**.**

Кутові коефіцієнти прямих, що мають асимптотичні напрямки щодо лінії другого порядку, є рішеннями рівняння $a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0$ у розглянутому випадку це рівняння має вид $k^2 - 2k - 3 = 0$

Його рішення $k_1 = 3, k_2 = -1$, а Fx=3x+y+4, Fy=x-y+1. Підставивши в (α), знайдемо шукані рівняння асимптот:

6x-2y+7=0, 2x+2y+3=0.

Задача 2. Лінія другого порядку проходить через точку *P(1,1)* а її асимптоти подані рівняннями 2x+3y-5=0 і 5x+3y-8=0. Скласти рівняння цієї лінії.

Розв'язок. Запишемо рівняння лінії другого порядку у вигляді $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$

Підставимо координати точки Р і одержимо співвідношення між коефіцієнтами $a_{11} - 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} - 2a_{23} + a_{33} = 0$.

Кутові коефіцієнти асимптот $k_1 = -\frac{2}{3}$ і $k_2 = -\frac{5}{3}$ задовольняють рівнянню $a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0$

На цій підставі одержимо два співвідношення: $\frac{4}{9}a_{22} - \frac{4}{3}a_{12} + a_{11} = 0$ і $\frac{25}{9}a_{22} - \frac{10}{3}a_{12} + a_{11} = 0$

Точка перетину асимптот *C(1,1)* є центром кривої, тому координати точки *C,* задовольняють систему рівнянь

$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ і $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$.

Звідси отримаємо ще два співвідношення: $a_{11} + a_{13} = 0$ і $a_{11} + a_{22} + a_{23} = 0$

Таким чином, ми одержали систему рівнянь:

$a_{11} - 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} - 2a_{23} + a_{33} = 0$; $9a_{11} - 12a_{12} + 4a_{22} = 0$; $9a_{11} - 30a_{12} + 25a_{22} = 0$; $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0$; $a_{21} + a_{22} + a_{28} = 0$;

З другого і третього рівнянь знайдемо, що $a_{12} = \frac{7}{6}a_{22}$; $a_{11} = \frac{10}{\vec{9}}a_{22}$;

З четвертого рівняння $a_{13} = -\frac{41}{18}a_{22}$;

З п'ятого рівняння знайдемо $a_{23} = -\frac{13}{6}a_{22}$;

Із першого рівняння одержимо, що $a_{33} = \frac{4}{9}a_{22}$;

Підставивши знайдені значення в рівняння (α), знайдемо шукане рівняння кривої $10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0$.

Задача 3. Задано лінію другого порядку $2x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 3y = 0$ Визначити середину хорди, що відтиняється лінією від прямої x+3y-12=0.

Розв'язок. Розглянемо діаметр, сполучений напрямку хорди. Його рівняння можна записати у виді Fx+kFy=0.

У розглянутому випадку це рівняння виглядає так:

$2x + 2y - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}(2x + 3y - \frac{3}{2}) = 0$ або 4x+3y-3=0.

Шукану середину хорди можна знайти як точку перетину заданої хорди і знайденого сполученого їй діаметра: x+3y-12=0 і 4x+3y-3=0.

Точка перетину має координати$(-\frac{9}{4}, \frac{19}{12})$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Складіть рівняння рівностронньої гіперболи, для якої вісь Ox слугує асимптотою, а точка (1; 1) – вершиною.
2. Складіть рівняння гіперболи, що проходить через точку (1; 0), асимптотами якої є прямі x=0, y=1.
3. Обчисліть довжини сторін рівнобедреного трикутника ABC, вписаного в рівносторонню гіперболу з півосями, рівними a, знаючи, що вершина A співпадає з вершиною гіперболи і що кут при цій вершині дорівнює $\frac{2\pi}{3}$.
4. Складіть рівняння еліпса, описаного навколо рівностороннього трикутника, дві вершини якого знаходяться в точках (a; 0) і (-a; 0) і співпадають з вершинами еліпса, що належать одній осі.
5. Складіть рівняння параболи, віссю якої є пряма x+y+1=0 і яка проходить через точки (0; 0), (0; 1).

6. Складіть рівняння гіперболи, знаючи її вісь 2x-y+2=0, асимптоту y=0 і точку (1; 1).
7. Складіть рівняння гіперболи, знаючи що її асимптоти паралельні осям координат і що гіпербола проходить через точки (0; 0), (2; 1), (1; 2).
8. Через фокус параболи проводяться всі можливі хорди. На кожній з них від фокуса в напрямку більш віддаленого кінця хорди відкладається відрізок, що дорівнює різниці відрізків, на які фокус ділить хорду. Знайдіть геометричне місце кінців цих відрізків.
9. Зайдіть асимптоти гіперболи $3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$.
10. Знайдіть необхідну і достатню умову для того, щоб пряма $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0$ дотикалась перепадаючої лінії другого порядку, заданої загальним рівнянням $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$.
11. Дано дві криві другого порядку: $3x^2 + 6xy - y^2 - 18x - 10y = 0$, $9x^2 + 6xy + y^2 - 18x - 10y = 0$. Знайдіть спільний діаметр цих двох кривих і напрямок тих хорд кожній з даних кривих, з якими пов'язаний цей діаметр.
12. Навколо кривої другого порядку, що задано рівнянням $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$, описано паралелограм, одна з вершин якого розташована в точці A(3; 4). Знайдіть решту його вершин.

13. Знайдіть асимптоти гіперболи, для якої осі координат утворюють одну пару спряжених діаметрів, а прямі x-y=0 та x-4y=0 – другу пару спряжених діаметрів.

14. Доведіть, що в загальному рівнянні кривої другого порядку $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$, коефіцієнт $a_{12} = 0$ тоді і тільки тоді, коли середини хорд кривої, паралельних до однієї з осей координат, лежать на прямій паралельній іншій осі координат.

15. Доведіть, що асимптоти рівносторонньої гіперболи є бісектрисами кутів між будь-якими двома сполученими діаметрами.

16. Знайдіть необхідні й достатні умови для того, щоб дві центральні криві другого порядку

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a = 0,$

$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b = 0$

мали ті ж самі осі симетрії. Система координат – прямокутна.

Тема 16. Лінії другого порядку, задані загальним рівнянням. Спрощення рівняння

При підготовці теоретичного матеріалу звернути увагу на такі факти:

Якщо осі координат мають головні напрямки щодо лінії другого порядку, то в її рівнянні $a_{12} = 0$.

Якщо початок координат знаходиться в центрі кривої, то в рівнянні цієї кривої$a_{13} = a_{23} = 0$

Опанувати методом приведення до канонічного виду рівняння кривої. Вміти побудувати криву щодо початкової системи координат і записати перетворення координат від початкової системи координат до канонічної.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Спростити рівняння лінії $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$,

Розв'язок. Знайдемо $I_3 = -64 \neq 0$ Лінія не вироджена. Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $(1-\lambda)^2$-1=0.

Вирішуючи рівняння, знайдемо, що $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,$ отже $I_2 = 0$, Розглянуте рівняння представляє параболу. Її канонічне рівняння $\lambda_{1_2} y^{12} \pm 2\sqrt{I_3/I_2}x^1 = 0$.

Підставивши знайдені значення $\lambda_2 = 2,\ I_3 = -64$ одержимо $2y^{12} \pm 2\sqrt{-\frac{64}{2}x^1 = 0}$ або $y^{12} = 4\sqrt{2x^1}$

Знак перед членом зі змінною x' залежить від вибору напрямку нової осі O'x'.

Знайдемо розташування розглянутої параболи щодо початкової системи координат. Легко зауважити, що задане рівняння можна представити у вигляді $(x-y)^2-10x-6y+25=0$. Легко перевірити, що пряма *x-y =0* рівнобіжна діаметрам параболи.

Для цього рівняння представимо у вигляді:

$$(x-y+h)^2-10x-6y+25-h^2-2hx+2hy=0$$

Якщо пряма $x-y+h=0$ є одним із діаметрів параболи (при фіксованому h), то пряма $x(10+2h)+y(6-2h)+h^2-25=0$ представляє дотичну до параболи в точці перетину параболи з цим діаметром.

Вісь симетрії параболи виділяється серед її діаметрів тим, що вона перпендикулярна відповідній дотичній.

Будемо шукати значення параметра h з умови перпендикулярності прямих $x(10+2h)+y(6-2h)+h^2-25=0$,$x-y+h=0$, Ця умова дає $10+2h-6+2h=0$, звідси h=-1.

Таким чином, рівняння осі симетрії параболи має вид $x-y+1=0$. Дотична до параболи в її вершині представляється рівнянням $x+y-3=0$.

Координати вершини (2,1). Знайдемо точки перетину параболи з віссю *0x*. Вирішуючи систему рівнянь параболи й осі *Ox,* приходимо до рівняння $x^2-10x+25=0$, або $(x-5)^2=0$. Видно, що парабола стосується осі *0x* у точці (5,0).

Перехід від початкової системи координат до канонічної задається формулами $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')+2; y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')+1$.

Задача 2. Лінія задана рівнянням $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$. Знайти канонічну систему координат і щодо неї рівняння заданої лінії.

Розв'язок. $I_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$

Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Його корені $\lambda_1 = 6, \lambda_{12} = 1 \, I_2 = 6 > 0$

Рівняння представляє еліпс. Канонічне рівняння центральної лінії має вид $\lambda_1 x^{12} + \lambda_2 y^{12} + \frac{I_3}{I_2} = 0$. У розглянутому випадку рівняння еліпса $6x^{12} + y^{12} - 35/6 = 0$ *або* $x^{12}/(\frac{35}{36}) + y^{12}/(\frac{35}{6}) = 1$

Центр лінії (початок канонічної системи координат) знаходиться із системи рівнянь Fx=0,Fy=0. У розглянутому випадку одержимо систему 2x+2y-3=0, 2x+5y-4=0

Її рішення $O'\ (\frac{7}{6}, \frac{1}{3})$. Напрямок осі *O'x'* можна знайти із системи рівнянь$(\text{a}_{11} - \lambda)\ell + \text{a}_{12} m = 0$

$\text{a}_{112}\ell + (\text{a}_{22} - \lambda)m = 0$. Звідси кутовий коефіцієнт $k = \frac{m}{\ell} = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}$.

У розглянутому випадку $k = \frac{6-2}{2} = 2$. Кутовий коефіцієнт осі *0'y'*: $k' = -\frac{1}{2}$.

Перетворення координат при переході від початкової системи координат до канонічної мають вид $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + \frac{7}{6}$, $y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + \frac{1}{3}$ де $tg\alpha = 2$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Визначте тип кожного з наступних рівнянь; кожне з них шляхом паралельного перенесення осей координат звести до найпростішого виду; з'ясуйте, які геометричні образи вони визначають та зобразіть розташування цих образів відносно старих та нових осей координат:

   1) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

   2) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$

   3) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$

   4) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$

   5) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$

2. Кожне з наступних рівнянь зведіть до канонічного вигляду; визначте ти пкожного з них; з'ясуйте, які геометричні образи вона визначають; для кожного випадку зобразіть осі початкової системи координат, осі інших координатних систем, що вводяться під час вирішення, і геометричний образ, заданий даними рівняннями:

   1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$

   2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$

   3) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$

   4) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

   5) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

6) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

3. Знайдіть, не виконуючи перетворення, які геометричні образи визначаються наступними рівняннями:

   1) $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$

   2) $17x^2 - 18xy - 7y^2 + 34x - 18y + 7 = 0$

   3) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x + 10y = 0$

   4) $6x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 18y + 14 = 0$

   5) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

4. Для будь-якого еліптичного рівняння доведіть, що жоден з коефіцієнтів A і C не може перетворюватись в нуль і що вони є числами одного знаку.
5. Доведіть, що еліптичне рівняння другого степеня (δ>0) визначеє еліпс в тому і тільки тому випадку, коли A і Δ є числами різних знаків.
6. Доведіть, що еліптичне рівняння другого степеня (δ>0) є рівнянням уявного еліпса в тому і тільки тому випадку, коли A і Δ є числами одного знака.
7. Доведіть, що еліптичне рівняння другого степеня (δ>0) визначає вироджений еліпс (точку), в тому і тільки тому випадку, коли Δ=0.
8. Доведіть, що гіперболічне рівняння другого степеня (δ>0) визначає гіперболу в тому і тільки тому випадку, коли $\Delta \neq 0$.
9. Доведіть, що гіперболічне рівняння другого степеня (δ>0) визначає вироджену гіперболу (пару прямих, що перетинаються) в тому і тільки тому випадку, коли Δ=0.
10. Крива другого порядку задана рівнянням

$$x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 1$$

Визначте тип кривої при зміні параметра α від -∞ до +∞ і знайдіть її розташування відносно даної системи координат.

11. Доведіть, що якшо $I_1 = 0$, то $I_2 < 0$.
12. Користуючись інваріантами I_1, I_2, I_3 визначте необхідні і достатні умови, для того, щоб крива другого порядку була парою взаємно перпендикулярних прямих.
13. Доведіть, що будь-яка крива другого порядку, що проходить через чотири точки перетину двох рівносторонніх гіпербол, є рівностороння гіпербола чи пара взаємно перпендикулярних прямих.
14. Користуючись інваріантами I_1, I_2, I_3 виразіть необхідні і достатні умови того, щоб загальне рівняння кривої другого порядку визначало дійсний еліпс. Виразіть через інваріанти його площу S.

Тема 17. Поверхні другого порядку, задані загальним рівнянням

При підготовці до практичного заняття звернути увагу на запис загального рівняння поверхні другого порядку і скільки точок потрібно для завдання поверхні другого порядку.

Центр поверхні, діаметральна площина. Головні напрямки (визначення) система рівнянь для перебування головних напрямків. Звернути увагу на характер зміни коефіцієнтів рівняння поверхні другого порядку, якщо осі координат повернути так, щоб мали головні напрямки щодо розглянутої поверхні.

Запам'ятати, що якщо початок координат помістити в центр поверхні щодо такої системи координат не буде членів x і y, z в першому ступені $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$.

Дотична площина до поверхні, нормаль.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Довести, що поверхня $4x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 8x + 18z + 12 = 0$ - не лінійчата.

Розв'язок. Лінійчата поверхня - це поверхня, утворена рухом прямої. Через кожну точку такої поверхні проходить пряма.

Візьмемо на розглянутій поверхні конкретну точку, наприклад, точку $M\ (1,0,-\frac{2}{3})$. Рівняння всіх прямих, що проходять через точку M, можна записати у вигляді $x = 1 + \ell t$, $y=mt$, $z=-\frac{2}{3} + nt$.

Виберемо із цих прямих ті, що лежать на даній поверхні. Для цього розглянемо точки перетину прямих із поверхнею, вирішуючи спільно рівняння прямих у поверхні

$4(1+\ell t)^2+5m^2t^2+9(-\frac{2}{3}+nt)^2-8(1+\ell t)+18(-\frac{2}{3}+nt)+12=0.$

Це рівняння можна представити у вигляді $t^2(4\ell^2+5m^2+9n^2)+6nt=0$. Пряма належить поверхні, якщо це рівняння виконується тотожно, тобто якщо його коефіцієнти рівні нулю: h =0 $4\ell^2+5m^2+9n^2=0$. Ця система не має відмінного від нуля дійсного рішення.

Задача 2. На поверхні $3y^2+5z^2+2xy-6xz-12yz+2x+10z-3=0$ визначити точки, у яких нормалі рівнобіжні осі *Oz*.

Розв'язок. Нормаль до поверхні $\vec{n}=\left\{F_x^0,F_y^0,F_z^0\right\}$ де $F_x^0=y_0-3z_0+1$, $F_{\text{н}}^0=3y_0+x_0-6z_0$, $F_z^0=5z_0-3x_0-6y_0+5$ а $\text{P}(x_0,y_{0,}z_0)$ - точка поверхні, у якій розглядається нормаль.

Таким чином, оскільки $\vec{n}=\|\vec{k}=\{0,0,1\}$, то $\frac{y_0-3z_0+1}{0}=\frac{3y_0+x_0-6z_0}{0}=\frac{5z_0-3x_0-6y_0+5}{1}$.

Звідси одержуємо систему рівнянь $y_0-3z_0+1=0$, $3y_0+x_0-6z_0=0$.

Точка $\text{P}(x_0,y_{0,}z_0)$ належить поверхні, тому $3y^2+5z^2+2xy-6xz-12yz+2x+10z-3=0$.

Вирішуючи отриману систему рівнянь, знаходимо точки $P_1(3;-1;0)$, $P_2(0;2;1)$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Складіть рівняння параболоїда, що проходить через дві прямі x=0, z=0 і y=0, z=-2 та через дві точки (0; 1; -1) та (1; -1; 0).

2. Доведіть, що дотична площина до поверхні другого порядку перетинає поверхню по парі прямих (дійсних, уявнмх чи співпадаючих).
3. Доведіть, що будь-яка площина, що проходить через прямолінійну твірну однопорожнинного гіперболоїда чи гіперболічного параболоїда (не паралельна особливому напрямку), дотикається до поверхні.
4. Складіть рівняння дотичної площини до поверхні $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - y - 2z = 0$, що проходить через пряму 4x-5y=0, z-1=0.
5. Знайдіть дотичну площину до поверхні $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xy - 8y - 4z + 3 = 0$, параледьну площині x+2y+2=0.
6. Знайдіть дотичну площину до однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, відтинаючої на осях Ox та Oy відрізки, що відповідно дорівнюють a та b, та знайдіть прямі, по яких дана площина перетинає гіперболоїд.
7. Дано гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 2z$, та площина 2x+3y-z=0. Напишіть рівняння площини, паралельної до даної і перетинаючої параболоїд по парі прямих; знайдіть ці прямі.
8. Знайдітьпрямолінійні твірні поверхні $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0$, що проходять через точку (-1; -1; 1).

9. Дано гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$. Через його твірну $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$ і точку (1; 1; 1) проведено площину. Знайдіть другу пряму лінії перетину параболоїда з цією площиною.

10. Дано параболоїд обертання $x^2 + y^2 = 2pz$ та круглий циліндр $(x - a)^2 + z^2 = r^2$. Напишіть рівняння площини, що була б діаметральною площиною як для параболоїда, так і для циліндра.

11. Складіть рівняння площини, що перетинає однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 1$ по лінії, центр якої знаходиться в точці (6; 6; 5).

12. Доведіть, що будь-яка площина перетинає однопорожнинний гіперболоїд, гіперболічний параболоїд та конус другого порядку.

13. Доведіть, що напрямні вектори прямолінійних твірних поверхні другого порядку, що проходять через точку M, належать конусу осимптотичних напрямів і дотичної площини до поверхні в точці M.

14. За допомогою інваріантів, сформулюйте умови, необхідні й достатні для того, щоб загальне рівняння другого степеня визначало гіперболічний параболоїд, з рівними параметрами головних перерізів, знайдіть ці параметри.

15. Виразіть за допомогою інваріантів умови, необхідні й достатні для того, щоб загальне рівняння дгугого степеня визначало параболоїд обертання, знайдіть його параметр.

16. Знайдіть найбільший кут φ між твірними конуса $z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0$, а також кути α, β, γ, які утворює його вісь з осями координат.

Тема 18. Криві другого порядку. Еліпс.

Найпростішими та найбільш вивченими лініями другого порядку є еліпс, гіпербола та парабола. Ці три лінії називають конічними перерізами, оскільки їх можна отримати при перетині круглого конуса площиною. Еліпс, гіпербола та парабола були відомі ще стародавнім грекам.

Аполлоній написав трактат про конічні перерізи (близько225р.до нашої ери), в якому виклав основні властивості цих ліній як відомі до нього, так і відкриті ним самим. Конічні перерізи відіграють величезну роль у різних галузях науки. Планети рухаються навколо Сонця по орбітах, які мають форму еліпса. Параболічні дзеркала застосовують при виготовленні прожекторів тощо.

Теоретичні відомості

Означення. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок площини, що називають фокусами, є величина стала.

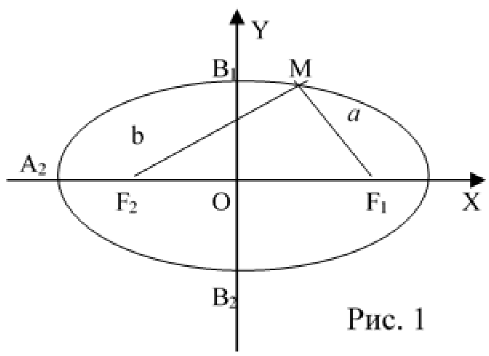


Рис. 1

Нехай $\boldsymbol{F_1}$ і $\boldsymbol{F_2}$ **–** фокуси еліпса, а M – його довільна точка. Відрізки FM_1та FM_2 будемо називати фокальними радіусами точки M еліпса. Позначимо їх суму через $2a$, тобто $F_1M + F_2M = 2a$.

Відстань між фокусами еліпса позначимо через $2c$.

З трикутника F_1F_2M. Очевидно, що $F_1F_2<F_1M+F_2M$, отже, 2c<2a, тобто c<a.

Систему декартових координат виберемо так, щоб вісь *OX* співпадала з прямою F_1F_2, вісь *OY* проходила через середину відрізка F_2F_1 перпендикулярно до осі *OX*. Тоді координатами фокусів еліпса відносно цієї системи будуть $F_1(c,0)$; $F_2(-c,0)$. Координати точки *M* позначимо через *x* ,*y*. Тоді довжини фокальних радіусів запишуться

$F_1 M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$F_2 M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Підставимо ці значення $F_1 M$ та $F_2 M$ в умову (1.1).

Дістанемо $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$

Ми отримали рівняння еліпса. Приведемо його до канонічного вигляду. Перенесемо перший радикал до правої частини рівняння і піднесемо обидві частини рівності до квадрату. Отримаємо:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Після відповідних спрощень дістанемо:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Піднесемо знову обидві частини рівності до квадрату та зробимо відповідні спрощення . Отримаємо:

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Нехай $a^2-c^2=b^2$ $(c<a)$, тоді дістанемо $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

Звідси, поділивши обидві частини рівності на $a^2\, b^2$, матимемо:

$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ (1.3)

Отримане рівняння називається канонічним рівнянням еліпса. Виходячи з рівняння еліпса , дослідимо його форму і властивості. Розв'яжемо рівняння еліпса відносно y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Звідси видно , що при $|x|>a$ значення y будуть уявними, тобто для еліпса $|x| \leq a$

Очевидно, що *OX* є віссю симетрії еліпса, оскільки кожному значенню *X* відповідає два значення *Y*, рівні за абсолютною величиною і протилежні знаком. Коли $|X|$ збільшується від 0 до a, $|Y|$ зменшується від b до 0. При x $=\pm a$, y=0 еліпс перетинає вісь *OX*. Позначимо точки перетину еліпса з віссю *OX* через $A_1(a,0)$ і $A_2(-a,0)$.

Розв'яжемо тепер рівняння еліпса відносно x:

$$X = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

Звідси ми переконуємось, що еліпс означений лише для тих значень *y*, для яких $|y| \leq b$.

Отже, вісь *OY* є друга вісь симетрії еліпса. Точка перетину двох осей симетрії є центр симетричної фігури.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2, в яких $|x|$ або $|y|$ досягають свого максимуму, називаються вершинами еліпса. Відрізок A_1A_2=2a називають великою віссю, а відрізок B_1B_2=2b – малою віссю еліпса.

Сталі величини a і b є параметри еліпса, які входять до його рівняння і характеризують форму і розміри еліпса. В окремому випадку, коли b=a, рівняння (1.3) має вигляд:

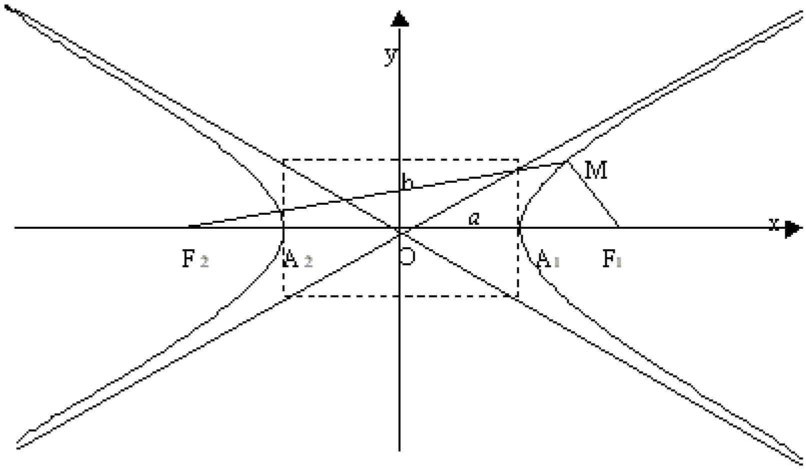
$$x^2 + y^2 = a^2$$

тобто є рівнянням кола.

Отже, коло є окремий випадок еліпса. В загальному випадку, коли $b \neq a$, еліпс має форму овала з двома взаємно перпендикулярними осями симетрії. Вся крива вміщується в прямокутник із сторонами 2a і 2b. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в його вершинах.

Тема 19. Криві другого порядку. Гіпербола.

Теоретичні відомості



Означення. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких різниця відстаней від двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є величина стала.

Фокуси гіперболи позначимо через F1 та F2, а відстань між ними через 2c. Введемо на площині прямокутну декартову систему координат так, щоб вісь OX співпадала з прямоюF_1F_2, а вісь OY проходила через середину відрізка F_1F_2.

Отже координатами фокусів будуть $F_1(c;o), F_2(-c;o)$. Нехай $M(x;y)$ – довільна біжуча точка гіперболи. Відрізки F_1M та F_2M називаються фокальними радіусами точки M. Тоді згідно означення гіперболи $F_2M - F_1M = 2a$.

Ця рівність має місце для точок, при яких x>0.

Навпаки, для точок, для яких x<0, тобто які ближче до лівого фокуса, рівність набере вигляду:

$$F_2M - F_1M = -2a$$

З трикутника F_1F_2M видно, що $F_1F_2>/F_1M-F_2M/$, тобто для гіперболи 2c>2a; c>a.

Довжини фокальних радіусів запишуться:

$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;

$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

а їх різниця

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$ (1.4)

Це і є рівняння гіперболи. Зведемо його до більш зручного – канонічного виду. Перенесемо другий радикал у праву частину рівняння і піднесемо обидві частини рівності до квадрату. Дістанемо:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

або

$$(x-a)^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Піднісши отриману рівність знову до квадрату та спростивши , отримаємо:

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$

Покладемо $c^2 - a^2 = b^2 \quad (a < c)$

Тоді $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$

Звідси остаточно:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1.5)

Легко переконатися, що із ще одного можливого

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

також слідує рівняння (1.5).

Виходячи з рівняння (1.5), дослідимо форму гіперболи та вкажемо деякі її властивості.

Розв'яжемо отримане рівняння відносно у:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Звідси видно, що гіпербола означена лише при $|x| \geq a$. Отже, $-\infty < x \leq a; a \leq x < +\infty$.

Розв'язавши рівняння (1.5) відносно x:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2},$$

ми переконуємося в тому, що гіпербола означена для всіх значень у.

Гіпербола має два взаємно перпендикулярні осі симетрії: вісь OX і вісь OY.

Вісь перетинає гіперболу в двох симетричних точках A_1 (a,0) і A_2(-a,0) . Ці точки називаються вершинами гіперболи.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається дійсною віссю гіперболи. Вісь OY називають "уявною віссю" оскільки вона не перетинає гіперболу. Слова "уявна вісь" ми беремо в лапки, бо b є число дійсне. Параметри а і b характеризують форму гіперболи.

Якщо $x = \pm a$, то $y = 0$. Коли $|x|$ збільшується то й $|y|$ необмежено збільшується.

Всередині смуги, обмеженої двома прямими $x = \pm a$, немає жодної точки гіперболи. Гіпербола складається з двох окремих нескінченних віток, симетричних відносно осі OY. Кожна з цих віток перетинає вісь OX у вершинах гіперболи.

Тема 20. Криві другого порядку. Асимптоти гіперболи.

Теоретичні відомості

Означення. Асимптотою кривої називається пряма, яка має ту властивість, що точка, яка віддаляється по цій кривій в нескінченність, необмежено наближається до прямої.

Теорема. Гіпербола має дві асимптоти коли гіпербола задана рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то рівняння асимптот гіперболи є $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$

Доведення. Досліджуючи рівняння гіперболи

$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$,

ми бачимо, що, відкинувши під радикалом a^2, для великих значень $|x|$ ми матимемо незначну відносну похибку. Ми отримаємо рівняння

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2} \text{або } y = \pm\frac{b}{a}x,$$

тобто рівняння двох прямих:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

Покажемо, що ці дві прямі є асимптотами гіперболи.

Оскільки гіпербола симетрично розміщена відносно осей координат, то будемо розглядати лише одну її чверть, а саме ту, для якої x>0, y>0.

Нехай $M(x, y)$ -довільна точка гіперболи, $M_1(x, y_1)$-точка прямої $y = \frac{b}{a}x$, яка має ту саму абсцису, що й точка M гіперболи.

Отже:

$$MM_1 = y_1 - y = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} > 0$$

Тоді:

$$\lim_{x\to\infty}(y_1 - y) = ab\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = 0$$

Отже, вітка гіперболи, яка лежить у першій координатній чверті, простягаючись в нескінченність, необмежено наближається до прямої $y = \frac{b}{a}x$.

В силу властивостей симетрії робимо висновок, що пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптота обох віток гіперболи. Аналогічне має місце для прямої $y = -\frac{b}{a}x$.

Теорему доведено.

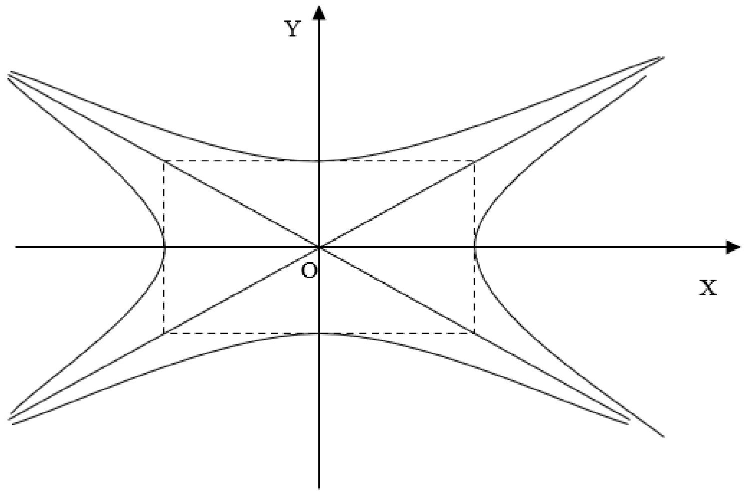
З'ясуємо геометричну суть параметра b гіперболи. Якщо побудувати прямокутник із сторонами 2a і 2b, симетричний відносно координатного базису, то дві його сторони дотикаются до віток гіперболи в їх вершинах, а діагоналі прямокутника якщо їх продовжити є асимптоти гіперболи.

Розглянемо тепер рівняння виду:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ або $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Воно виражає гіперболу, для якої *OY* є дійсна вісь, а *OX* уявна. Це рівняння також називається канонічним рівнянням гіперболи, яка розміщена всередині цих вертикальних кутів, в яких проходить вісь *OY* (Рис.3)

Рис .3



Тема 21. Криві другого порядку. Парабола.

Теоретичні відомості

Означення. Параболою називається геометричне місце точок площини, відстань яких від фіксованої точки площини, що називається фокусом, дорівнює відстані від фіксованої прямої, яка називається директрисою.

Нехай фокусом параболи є точка F, а пряма l – директрисою. За вісь *OX* приймемо пряму, яка проходить через точку F перпендикулярно до l, а за вісь *OY* пряму, що ділить пополам відрізок осі *OX* між директрисою і фокусом.

Позначимо відстань фокуса від директриси через P. Тоді координати фокуса $F(\frac{P}{2};0)$. Нехай M(x;y) — довільна біжуча точка параболи. Її відстань від директриси позначимо через d. За означенням FM=d.

Але $FM = \sqrt{(x-\frac{P}{2})^2 + y^2}$; $d = x + \frac{P}{2}$

Отже, $\sqrt{(x-\frac{P}{2})^2 + y^2} = x + \frac{P}{2}$

Це і є рівняння параболи.

Піднесемо обидві його частини до квадрата

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

Спростивши його, дістанемо $y^2=2px$. (1.6)

Це канонічне рівняння параболи. Оскільки величина p додатня, то x>0.

Отже, всі точки параболи лежать праворуч від осі OY. Оскільки кожному значенню x відповідають два рівні за абсолютною величиною, але протилежні за знаком значення y, то крива розташована симетрично відносно осі OX. При збільшенні x абсолютна величина $|y| = \sqrt{2px}$ необмежено зростає, і крива має вигляд, зображений на рис.4.

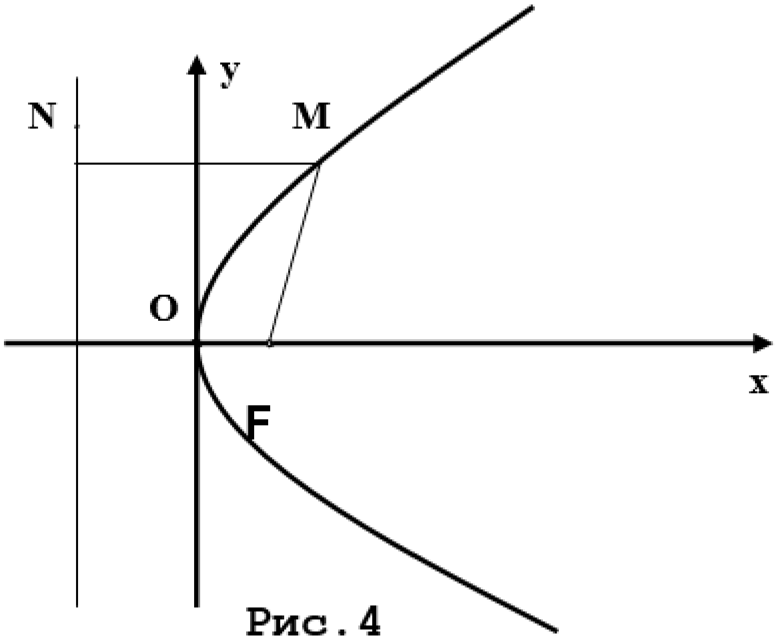


Рис. 4

Парабола має одну вісь симетрії та одну вершину в точці O. Вісь симетрії параболи називається фокальною віссю.

Тема 22. Фокальні властивості ліній другого порядку.

Теоретичні відомості

Означення. Ексцентриситетом еліпса називається відношення відстані між його фокусами до довжини його більшої осі:

$$\mathrm{e} = \frac{2\mathrm{c}}{2\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$$

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення відстаней до довжини її дійсної осі:

$$\mathrm{e} = \frac{2\mathrm{c}}{2\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$$

Будемо вважати, що для параболи ексцентриситет $e=1$.

Теорема. Фокальні радіуси точок кривих другого порядку можуть бути раціонально виражені через їхні абсциси.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок еліпса. Нехай r_1 і r_2 – фокальні радіуси його довільної точки $M(x, y)$ (див. рис. 5).

Маємо за означенням $r_1+r_2=2a$ і, крім того,

$r_1{}^2=(x+c)^2+y^2$ і $r_2{}^2=(x-c)^2$.

Звідси, $r_1{}^2-r_2{}^2=4cx$ і тому

$$r_1 - r_2 = \frac{r_1{}^2 - r_2{}^2}{r_1 + r_2} = \frac{4cx}{2a} = 2cx$$

Звідси отримуємо систему рівнянь $r_1+r_2=2a;$ $r_1–r_2=2ex$ розв'язками якої є $r_1=a+ex$ та $r_2=a-ex$.

Оскільки для тих точок гіперболи, для яких $X>0$ - $r_1=-(ex+a)$, $r_2=-(ex-a)$ для тих точок гіперболи, для яких $X<0$ (див.рис.6).

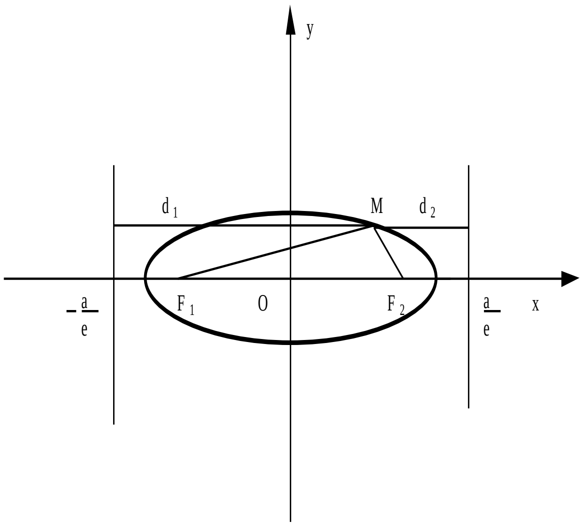


Рис. 5

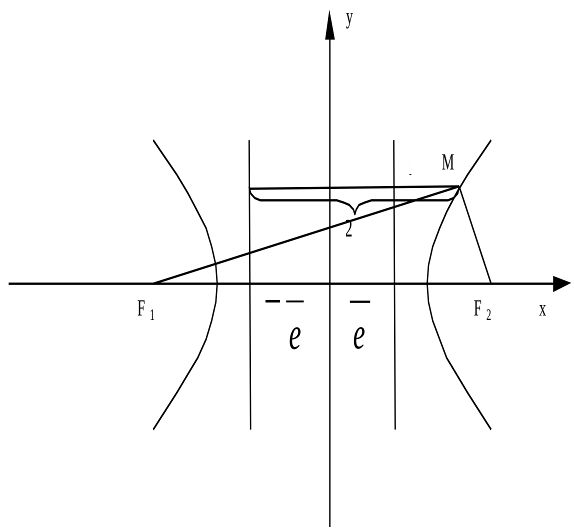


Рис. 6

Знайдемо тепер фокальний радіус довільної точки *M(x,y)* параболи. За означенням $r=MF=MN$, де MN – відстань від точки M до директриси. (див.рис.4). Але $MN=x+\frac{P}{2}$і тому $r=x+\frac{P}{2}$.

Означення. Директрисами еліпса (або гіперболи) називаються дві прямі, що перпендикулярні до фокальної осі цих кривих і симетрично розташовані відносно центру еліпса (або гіперболи) на відстані $\frac{a}{e}$ від нього.

Парабола має одну директрису, означення якої наведено раніше. Рівняння директрис еліпса і гіперболи $x=\pm\frac{a}{e}$, рівняння директриси параболи $x=-\frac{P}{2}$.

Покажемо наступну властивість директрис еліпса і гіперболи: відношення відстаней будь-якої точки еліпса чи гіперболи до фокуса і відношення директриси є величина стала, що дорівнює e.

Дійсно, візьмемо довільну точку *M(x, y)* еліпса чи гіперболи. Позначимо через d_1 і d_2 відстані цієї точки до відповідних директрис, а через r_1 і r_2 – фокальні радіуси точки *M(x, y)*.

Тоді, для правого фокуса і правої директриси еліпса маємо $r_2=a-ex$; $d_2=\frac{a}{e}-x$, звідки

$$\frac{r_2}{d_2}=\frac{a-ex}{\frac{a}{e}-x}=\frac{a-ex}{a-ex}e=e.$$

Для лівого фокуса і лівої директриси еліпса доведення аналогічне. Те ж саме можна показати і для гіперболи.

Зауважимо, що для параболи згідно з означенням маємо $\frac{r}{d}=1$ і тому таку ж властивість має і парабола.

Тема 23. Полярне рівняння кривої другого порядку.

Теоретичні відомості

Візьмемо за полярну вісь фокальну вісь кривої, а за полюс — лівий фокус F еліпса або правий фокус гіперболи, або фокус параболи.

Позначимо через ρ полярний радіус довільної точки M лінії, а через ϕ - її полярний кут. Проведемо через фокус хорду, перпендикулярну до полярної осі, і позначимо її довжину через 2р.

Точка P, верхній кінець хорди, має полярні координати: $\rho = p$ і $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Число *P* називається полярним параметром лінії. Для кожної точки *M* лінії має місце співвідношення:

$$\frac{r}{d} = e.$$

Зокрема для точки P маємо: $\frac{r'}{d'} = \frac{p}{d'} = e$.

Позначимо через A точку перетину полярної осі з директрисою, а через B і C – основи перпендикулярів, опущених з точки M на полярну вісь та на директрису. (Рис.7).

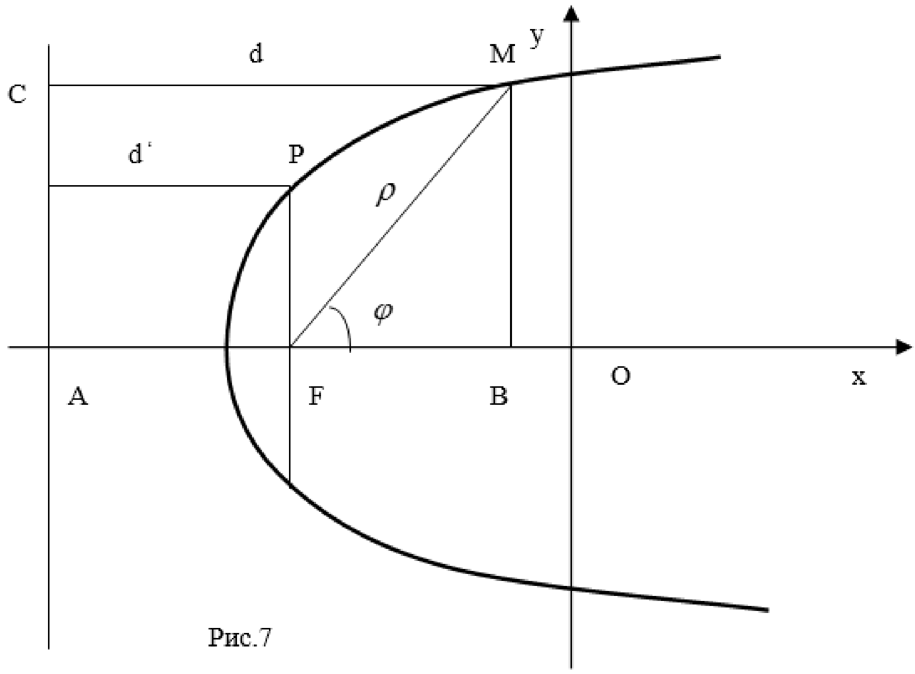


Рис.7

Таким чином маємо:

$d = CM = AB = AF + FB = d' + FB.$ Але $FB = \rho \cos \phi$; $d' = \frac{p}{l}$,

тому $d = \frac{p}{l} + \rho \cos \phi.$ Крім того $r = p.$

Тому $\frac{r}{d} = \frac{\rho}{1 - e \cos \phi}.$

Це і є полярне рівняння лінії другого порядку.

При *e <1*—це буде рівняння еліпса, при e>1—рівняння однієї вітки гіперболи, а при *e=1* — рівняння параболи.

Визначимо полярний параметр p через параметри канонічних рівнянь кривих. Для цього підставимо декартові координати точки Р в канонічне рівня-ння лінії.

Для еліпса маємо:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

звідси

$$p^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2}$$

Але для еліпса a^2-c^2=b^2 .

Отже , $p=\frac{b^2}{a}$.

Для гіперболи:

$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1,$

звідси

$$p^2 = b^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) = \frac{b^2(c^2 - a^2)}{a^2}$$

Для гіперболи c^2-a^2=b^2 . Тому $p=\frac{b^2}{a}$ так само як і для еліпса.

Для параболи Р дорівнює відстані фокуса параболи від директриси, тобто параметру *p* канонічного рівняння параболи $y^2=2px$.

Тема 24. Діаметри ліній другого порядку.

Теоретичні відомості

Нехай задана лінія другого порядку, наприклад еліпс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Знайдемо координати точок перетину еліпса з заданою прямою:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (1.7)$$

Нехай $\vec{u}=\{l,m\}$ є орт напрямного вектора прямої , а $P_0(x_o, y_o)$ — її фіксована точка.

Ми знаємо, що t дорівнює відстані між точкою P_0 і довільною її точкою P. Підставляючи формули (1.7) в рівняння еліпса, дістанемо квадратне рівняння:

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0 l}{a^2}+\frac{y_0 m}{b^2}\right)t+\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1 \quad (1.8)$$

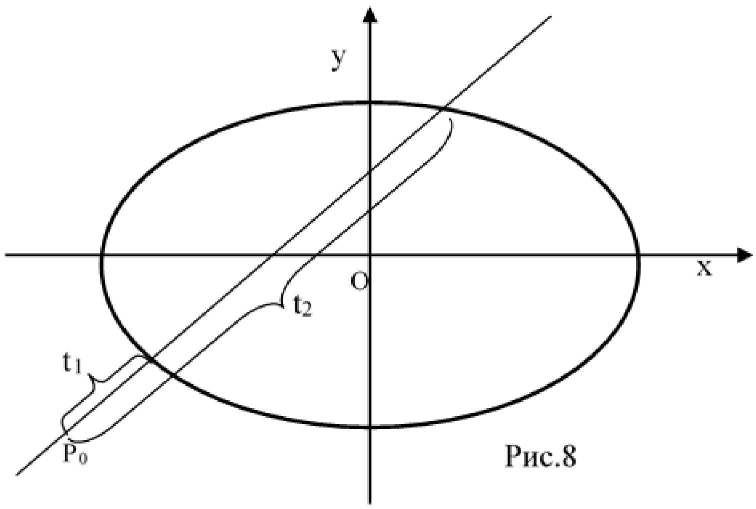


Рис.8

Розв'язавши його відносно t і підставивши знайдені значення t в рівняння (1.7), дістанемо шукані координати точок перетину прямої з еліпсом.

Коли задана гіпербола або парабола, то задача розв'язується аналогічно.

У випадку гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ми дістанемо квадратне рівняння

$$\left(\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) t^2 + 2\left(\frac{x_0 l}{a^2} - \frac{y_0 m}{b^2}\right) t + \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \quad (1.9)$$

І, накінець, у випадку параболи $y^2=2px$, матимемо

$(y_0+mt)^2=2p(x_0+lt)$

або

$m^2t^2+2(y_0m-pl)t+y_0^2-2px_0=0$ (1.10)

Таким чином , в усіх трьох випадках задача про перетин ліній другого порядку з прямою зводиться до квадратного рівняння . Отже , довільна пряма перетинає лінію другого порядку в двох точках , дійсних або уявних , комплексно-спряжених .

Означення. Хордою кривої другого порядку називається відрізок прямої, обмежений точками її перетину з кривою.

Теорема. Геометричне місце середин паралельних хорд лінії 2-го порядку є пряма. (Рис.9)

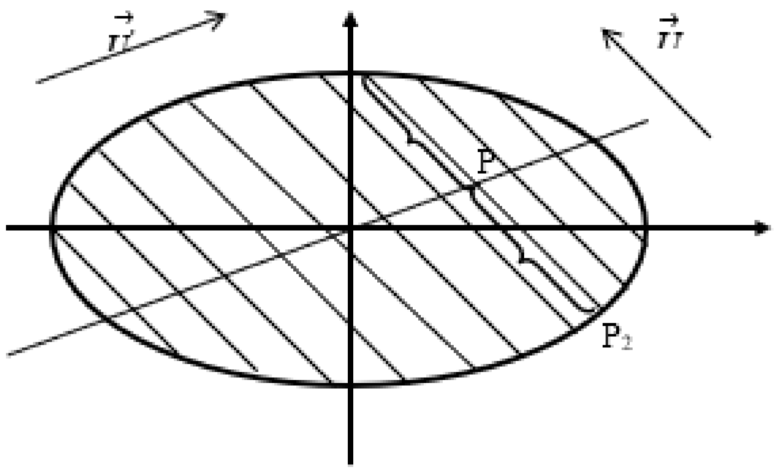


Рис. 9

Нехай точка $P_0(x_0,y_0)$ є серединою однієї з паралельних хорд напряму $\vec{u} = \{l, m\}$. Запишемо рівняння прямої, від якої крива відтинає цю хорду, в параметричному вигляді:

$x = x_0 l + lt, y = y_0 + mt$

Припустимо, що задана крива — еліпс. Підставимо вирази (1.11) в рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Дістанемо квадратне рівняння (1.8).

Розв'язки цього рівняння за абсолютною величиною дорівнюють відстані точки P_0 від точок перетину прямої з еліпсом.

Але точка P_0 є серединою хорди, яку еліпс відтинає від прямої. Отже, $|t_1| = |t_2|$. Оскільки t_1 і t_2 мають протилежні знаки, то $t_1=-t_2$, або $t_1+t_2=0$. Застосовуючи теорему Вієта до квадратного рівняння (1.8), дістанемо

$$\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} = 0$$

Точка $P_0(x_0, y_0)$ є довільною точкою шуканого геометричного місця. Отже, x_0 і y_0 є змінними в рівнянні цієї лінії, а тому індекс 0 ми шукаємо.

Рівняння $\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} = 0$ (1.12)

є лінійним, тобто геометричне місце середин хорд, паралельних вектору $\vec{u} = \{l, m\}$, є пряма.

Коли досліджувана крива, що очевидно рівняння геометричного місця середин хорд буде шукатись з рівняння (1.9), і матиме вигляд:

$\frac{lx}{a^2} - \frac{my}{b^2} = 0$ (1.13)

Для випадку параболи доведення буде цілком аналогічне. Координати кінців паралельних хорд задовільнять рівняння (1.10), а координати середин паралельних хорд — рівняння

$my\text{-}pl=0$ (1.14)

Теорему доведено.

Означення. Діаметром лінії другого порядку, спряженим з напрямом вектора $\vec{u}\{l,m\}$, називається пряма, яка проходить через середини хорд, паралельних вектору $\vec{u}$

Рівняння (1.12), (1.13), (1.14) є рівняння діаметрів еліпса, гіперболи і параболи, спряжених з напрямом вектора $\vec{u}$.

З рівнянь (1.12), (1.13) видно, що всі діаметри еліпса і гіперболи проходять через їх центри, які при нашому виборі координатного базису містяться в початку координат.

З рівняння (1.14) видно, що всі діаметри параболи паралельні. Отже, центр параболи є нескінченно віддалена точка.

Кутові коефіцієнти діаметрів еліпса і гіперболи, спряжених з напрямом вектора $\vec{u}$, визначемо з рівнянь (1.12) і (1.13):

$k' = -\frac{b^2l}{a^2m} = -\frac{b^2}{a^2k}$ - кутовий коефіцієнт діаметра еліпса.

$k' = \frac{b^2l}{a^2m} = \frac{b^2}{a^2k}$-- кутовий коефіцієнт діаметра гіперболи.

(k-нульовий коефіцієнт спряжених з діаметром паралельних хорд).

Останні формули перепишемо у вигляді:

$kk' = -\frac{b^2}{a^2}$ (для еліпса) (1.15)

$kk' = \frac{b^2}{a^2}$ (для гіперболи) (1.16) ці формули цілком симетричні відносно нульових коефіцієнтів діаметра і спряжених з ним хорд еліпса і гіперболи.

Це свідчить про те, що геометричне місце середин паралельних хорд з нульовим коефіцієнтом k' є діаметр з нульовим коефіцієнтом k.

Означення. Два діаметри еліпса (або гіперболи) називаються спряженими, коли перший поділяє пополам хорди, паралельні другому, і, навпаки, другий поділяє пополам хорди, паралельні першому.

Нехай $u^{\vec{\imath}''}$ $(h' = \frac{m'}{l'})$ орт напрямного вектора діаметра спряженого з напрямом вектора $\vec{u}$. Напрями векторів $\vec{u}$ і $\vec{u}'$ називають спряженими напрямами ліній другого порядку.

З рівнянь (1.12) і (1.13) видно, що напрями осей симетрії є спряжені напрями еліпса і гіперболи. Дійсно, для орта $\vec{\imath}$ осі OX $l = 1,\ m = 0$.

Підставляючи ці значення l і m в рівняння (1.12) і (1.13) дістанемо $x = 0$, тобто рівняння осі OY.

Навпаки , коли підставимо в рівняння (1.12) і (1.13) координати орта $\vec{\jmath}$ осі OY: $l = 0,\ m = 1$, то матимемо $y=0$, тобто рівняння осі OX. Таким чином, осі симетрії є спряженими діаметрами еліпса і гіперболи.

Всі діаметри параболи паралельні.

Для параболи, підставляючи в рівняння (1.14) $l = 0,\ m = 1$, отримаємо, що діаметр, спряжений з хордами, паралельними осі OY є віссю OX.

Приклади розв’язування практичних задач

Задача 1. Скласти рівняння двох взаємно спряжених діаметрів еліпса $x^2 + 4y^2 = 1$, один з яких утворює з віссю OX кут $\frac{\pi}{4}$.

Розв’язок. Очевидно рівняння одного діаметра еліпса має вигляд $y = x$. Оскільки кутові коефіцієнти спряжених діаметрів пов’язані між собою $k \cdot k' = -\frac{b^2}{a^2}$, то з врахуванням рівностей $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, матимемо $k \cdot k' = -\frac{1}{4}$, тобто $k' = -\frac{1}{4}$ і тому рівняння другого діаметра має вигляд: $y = -\frac{1}{4}x$.

Тема 25. Дотичні до ліній другого порядку.

Теоретичні відомості

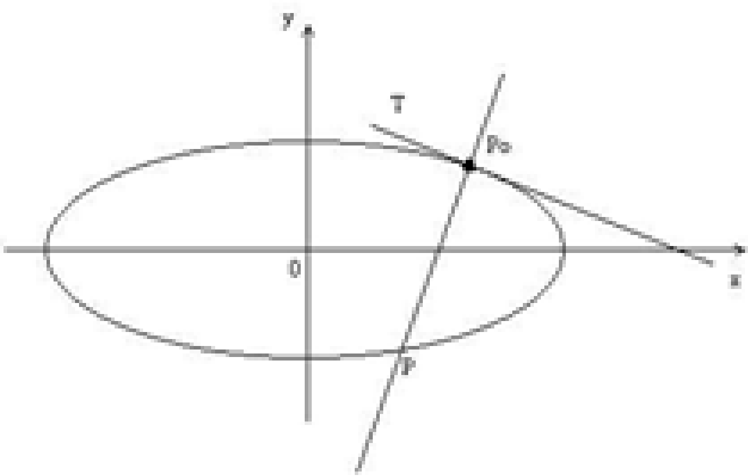
Означення. Дотичною в точці $P_0(x_0, y_0)$ до кривої називається граничне положення січної P_0P, коли точка P, рухаючись по кривій, необмежено наближається до точки P_0. При цьому точка P_0 називається точкою дотику прямої й кривої.

Знайдемо рівняння дотичної до еліпса в точці $P_0(x_0, y_0)$. Нехай $P(x, y)$ – довільна точка еліпса. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки P_0 і P.

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt \qquad (1.17),$$

де $\vec{u} = \{l, m\}$ – орт напрямного вектора січної P_0P, а $|t|$ – відстань від точки P_0 до P. підставляючи (1.17) в канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ та врахувавши, що точка P_0 належить еліпсу , тобто $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, отримаємо

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2}\right)t = 0.$$



Розв'язку $t_1 = 0$ цього рівняння відповідає точка P_0, а інший розв'язок t_2 за абсолютною величиною дорівнює відстані від точки P_0 до точки P. Якщо $P \to P_0$, то $t_2 \to 0$, а січна P_0P прямує до граничного положення, тобто до дотичної до еліпса P_0T у точці P_0.

Таким чином, у границі $t_1 = t_2 = 0$, що можливо лише тоді, коли $\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} = 0$ (1.18).

Оскільки $l = \frac{x - x_0}{t}$, а $m = \frac{y - y_0}{t}$, то (1.18) запишеться у вигляді: $\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$, або $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$.

Врахувавши, що $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, отримаємо рівняння дотичної до еліпса

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad (1.19)$$

Аналогічно виводиться рівняння дотичної до гіперболи. У канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ підставимо (1.17).

Враховуючи, що точка P_0 належить гіперболі, тобто $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, отримаємо рівняння $(\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2})t^2 + 2(\frac{x_0 l}{a^2} - \frac{y_0 m}{b^2})t = 0$.

Аналогічно попереднім міркуванням вимагаємо, щоб обидва розв'язання цього рівняння були $t_1 = t_2 = 0$, що дає $\frac{x_0 l}{a^2} - \frac{y_0 m}{b^2} = 0$, або $\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} - \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$.

Остаточно маємо рівняння дотичної до гіперболи

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad (1.20)$$

Знайдемо рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$. Підставляючи в рівняння параболи вирази (1.17), отримаємо рівняння $m^2t^2 + 2t(y_0m - pl) = 0$.

У випадку дотичної обидва корені цього рівняння дорівнюють нулю, що можливо лише при $y_0m - pl = 0$.

Врахувавши, що $l = \frac{x-x_0}{t}$ та $m = \frac{y-y_0}{t}$, маємо $y_0(y - y_0) - p(x - x_0) = 0$, або $y_0y - y_0^2 - px + px_0 = 0$.

З врахуванням $y_0^2 = 2px_0$ отримуємо рівняння дотичної до параболи

$$yy_0 = p(x + x_0) \tag{1.21}$$

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, які паралельні прямій $3x + 2y - 1 = 0$.

Розв'язок. Нехай $P_0(x_0, y_0)$ – точка дотику прямої, яка паралельна вказаній вже прямій.

Оскільки вектор $\vec{u} = \{2; -3\}$, очевидно, паралельний прямій $3x + 2y - 1 = 0$, то з рівняння (1.18) слідує, що $\frac{2x_0}{10} - \frac{6y_0}{5} = 0$. Крім того, точка P_0 лежить на еліпсі й тому $\frac{x_0^2}{10} + \frac{2y_0^2}{5} = 1$.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо два розв'язки: $x_0 = 3$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = -3$, $y_0 = -\frac{1}{2}$.

Записавши рівняння прямих, що проходять через ці дві точки паралельно вектору $\vec{u}$, отримаємо рівняння дотичних $3x + 2y - 10$ і $3x + 2y + 10 = 0$.

Тема 26. Оптичні властивості ліній другого порядку.

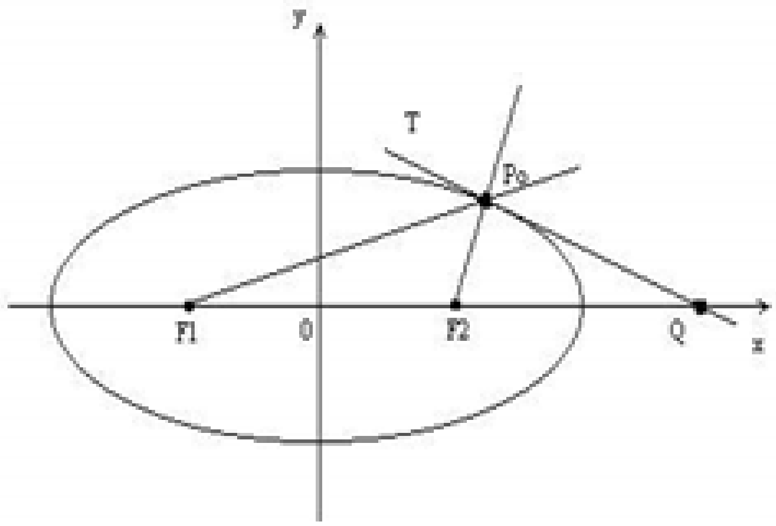
Теоретичні відомості

Покажемо геометричні властивості дотичних і нормалей ліній другого порядку, які називаються оптичними властивостями цих ліній.

Ця назва зумовлена тим, що для побудови оптичних приладів використовують дзеркала, що мають форму поверхонь обертання ліній другого порядку навколо осі.

Теорема. Дотичні до еліпса і гіперболи утворюють рівні кути з фокальними радіусами, проведеними в точку дотику.

Доведення. Нехай L – дотична до еліпса в точці $P_0(x_0, y_0)$, і $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ – її рівняння (Рис. 11).



Проведемо фокальні радіуси r_1 і r_2 точки P_0. Покажемо, що для трикутника $F_1P_0F_2$ дотична є бісектрисою зовнішнього кута при вершині P_0 цього трикутника.

Позначимо точку перетину дотичної з віссю ОХ через $Q(x', 0)$. Підставляючи координати точки Q в рівняння дотичної, знайдемо $x' = \frac{a_0^2}{x_0}$.

Оскільки для еліпса $|x_0| < a$, то $|x'| > a$, тобто дотична P_0Q проходить всередині зовнішнього кута трикутника $F_1P_0F_2$.

З цього трикутника маємо $\frac{F_1P_0}{P_0F_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{a+ex_0}{a-ex_0}, \frac{F_1Q}{F_2Q} = \frac{\frac{a^2}{x_0}+e}{\frac{a^2}{x_0}-e} = \frac{a+ex_0}{a-ex_0}$.

Звідси $\frac{F_1Q}{F_2Q} = \frac{F_1P_0}{P_0F_2}$, що доводить теорему для еліпса.

Для гіперболи теорема доводиться аналогічно, але в цьому випадку дотична P_0Q є бісектрисою внутрішнього кута при вершині трикутника $F_1P_0F_2$ (див. рис. 12).

Дійсно, точка перетину дотичної з віссю OX також має координати $Q(\frac{a^2}{x_0}, 0)$. Для гіперболи $|x_0| > a$, і тому $|x'| < a$, тобто дотична P_0Q проходить

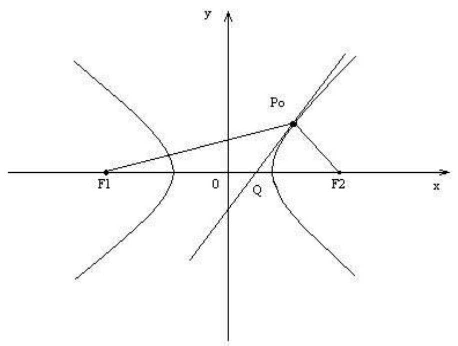


Рис. 12

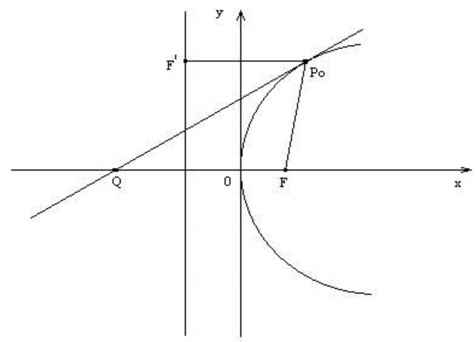


Рис. 13

всередині внутрішнього кута трикутника. Візьмемо точку P_0 на правій вітці гіперболи.

З рис. 12 маємо $\frac{F_1P_0}{P_0F_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{ex_0+a}{ex_0-a}$, $\frac{F_1Q}{F_2Q} = \frac{e+\frac{a^2}{x_0}}{e-\frac{a^2}{x_0}} = \frac{ex_0+a}{ex_0-a}$ і тому $\frac{F_1Q}{F_2Q} = \frac{F_1P_0}{P_0F_2}$.

Аналогічні висновки можна зробити і для лівої вітки гіперболи.

Теорема. Дотична до параболи утворює рівні кути з фокальним радіусом і діаметром , проведеним через точку дотику .

Доведення. Покажемо, що дотична $y_0 y = P(x + x_0)$ до параболи в точці $P_0(x_0, y_0)$ утворює рівні кути з фокальним радіусом $r = x_0 + \frac{p}{2}$ і діаметром P_0F', що проходить через точку P_0 (див. рис. 13).

Підставляючи рівняння дотичної в рівняння параболи, знайдемо точку $Q(-x_0, 0)$ перетину цієї дотичної з віссю OX.

Покажемо, що трикутник FP_0Q рівнобедрений. Легко бачити, що $FQ = x_0 + \frac{p}{2}$ і $FP_0 = r = x_0 + \frac{p}{2}$ і, таким чином, $FQ = FP_0$.

Тому $\angle P_0QF = \angle FP_0Q$. Але $\angle P_0QF = \angle QP_0F'$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних і тому $\angle FP_0Q = \angle QP_0F'$, що й потрібно було довести.

З доведених вище двох теорем випливають оптичні властивості цих кривих.

Якщо джерело світла помістити в один із фокусів дзеркала, то після відбиття його промені зберуться в другому фокусі.

Якщо ж джерело світла помістити у фокусі гіперболічного дзеркала, то після відбиття його промені будуть мати такий напрямок, ніби вони виходять з іншого фокуса.

Нарешті, коли джерело світа помістити у фокусі параболічного дзеркала, то після відбиття всі промені стануть паралельними, оскільки кут падіння дорівнює куту відбиття. На цій властивості параболи грунтується побудова параболічних дзеркал, прожекторів, дзеркальних телескопів тощо.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Із фокуса параболи $y^2 = 12px$ під гострим кутом α до осі *OX* направлено промінь світла . Відомо , що $tg\alpha = \frac{3}{4}$. Дійшовши до параболи , промінь від неї відбився . Скласти рівняння прямої , на якій лежить відбитий промінь.

Розв'язок. Запишемо спочатку рівняння променя, який виходить із фокуса параболи. Оскільки $2p = 12$, то і координати фокуса параболи – $F(3/0)$.

Тоді рівняння променя $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 3)$, і щоб знайти точку на параболі, де промінь відбивається, розв'яжемо систему двох рівнянь: $y^2 = 12px$, $y = \frac{3}{4}(x - 3)$.

Звідси $y = \frac{3}{4}(\frac{y^2}{12} - 3)$, або $y^2 - 16y - 36 = 0$. Корені цього рівняння $y_1 = 18$, $y_2 = -2$.

За умовою задачі нам потрібен додатній корінь-ордината точки відбиття променя від параболи, і тому рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь, має вигляд : *y=18*.

Тема 27. Загальне рівняння лінії другого порядку.

Теоретичні відомості

Загальне рівняння лінії другого порядку запишемо у вигляді: $\mathrm{a}_{11}\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{a}_{12}\mathrm{xy} + \mathrm{a}_{22}\mathrm{y}^2 + 2\mathrm{a}_{13}\mathrm{x} + 2\mathrm{a}_{23}\mathrm{y} + \mathrm{a}_{33} = 0$ (1.22),

де $a_{ij} \in R$ коефіцієнти , які одночасно не дорівнюють нулеві.

Коли задано п'ять точок площини таких, що будь-які три з них не лежать на одній прямій, то ці точки цілком визначають лінію другого порядку**.**

Доведення. Загальне рівняння лінії другого порядку має шість коефіцієнтів, з яких незалежних є лише п'ять.

Дійсно, поділивши обидві частини рівняння на один з коефіцієнтів, ми дістанемо п'ять незалежних коефіцієнтів.

Підставляючи в рівняння (1.22) по черзі координати всіх п'яти заданих точок, ми матимемо систему п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими відношеннями коефіцієнтів. Розв'язавши цю систему ми зможемо записати рівняння лінії.

Теорему доведено.

Зауваження. Для визначення деяких окремих ліній другого порядку потрібно менша кількість точок, ніж 5. Наприклад, коло визначається трьома точками, а парабола чотирма.

Теорема. Пряма перетинає лінію другого порядку в двох точках**.**

Доведення. Запишемо рівняння прямої в параметричній формі:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (1.23).$$

Щоб визначити координати точок перетину прямої з лінією другого порядку, розв'яжемо систему рівнянь (1.22) і (1.23).

Тоді дістанемо квадратне рівняння відносно t:

$$a_{11}(x_0+lt)^2+2a_{12}(x_0+lt)(y_0+mt)+a_{22}(y_0+mt)^2+2a_{13}(x_0+lt)+2a_{23}(y_0+mt)+a_{33}=0.$$

Перетворивши його, отримаємо: $Lt^2+2Mt+N=0$ (1.24),

де $L=a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2$,

$$M=a_{11}x_0l+a_{12}x_0m+a_{12}y_0l+a_{22}y_0m+a_{13}l+a_{23}m=$$

$$=l(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}),$$

$$N=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{13}y_0+a_{33}.$$

Ввівши позначення

$$F_x^0=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}$$

$$F_y^0=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}$$

$$2F^0=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33},$$

отримаємо:

$$L=a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2,$$

$$M=lF_x^0+mF_y^0,$$

$$N=2F^0.$$

Зауважимо, що F_x^0 і F_y^0 є значення половин частинних похідних від лівої частини рівнянь (1.22), в які замість *x, y* підставлені координати точки P_0, а через $2F^0$ позначено результат підставлення координат цієї точки в ліву частину рівнянь (1.22).

Розв'язавши рівняння (1.24), знайдемо два значення параметра t, які відповідають точкам P_1 і P_2 перетину прямої з лінією другого порядку. Теорему доведено.

Дослідимо рівняння (1.24), яке ми дістали при розгляді перетину лінії другого порядку з прямою. Залежно від дискримінанту цього рівняння його розв'язки можуть бути дійсними і різними, дійсними і рівними і уявними комплексно-спряженими.

Відповідно до цього пряма (1.23) перетинає лінію другого порядку в двох точках, дотикається до неї або не має з нею спільних точок (рис. 14).

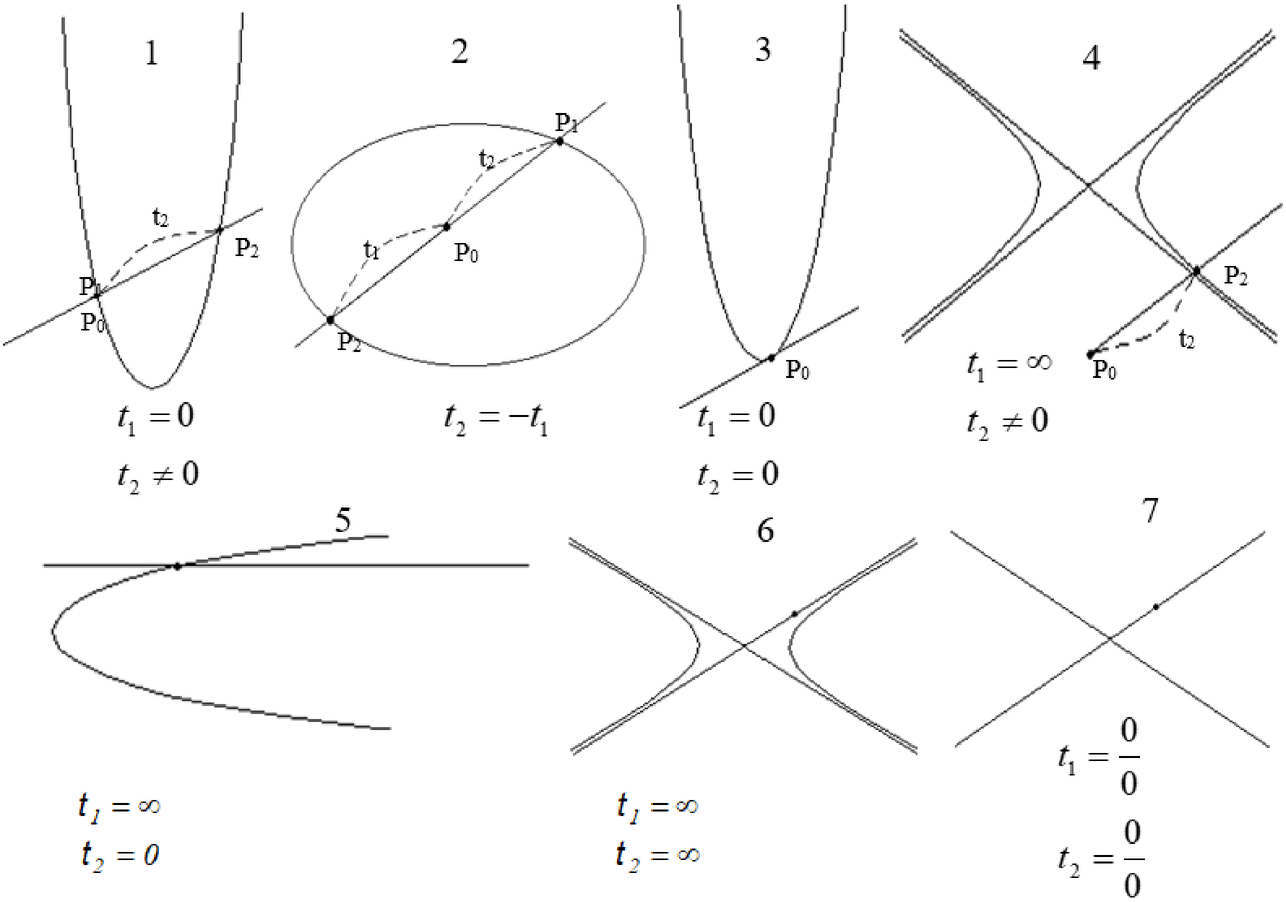


Рис. 14

Для дослідження всеможливих розміщень прямої відносно лінії другого порядку, залежно від положення точки P_0 на площині дослідного рівняння (1.24) у випадку, коли воно неповне.

1). Якщо $N = 0,\ L \neq 0,\ M \neq 0$, то рівняння $Lt^2 + 2Mt = 0$ має розв'язки: $t_1 = 0$ і $t_2 = -\frac{2M}{L}$. Отже , точка P_0 є одна з двох точок P_1 і P_2 перетину прямої (2) з лінією другого порядку (рис. 14.1).

2). Якщо $M = 0,\ L \neq 0,\ N \neq 0$, то рівняння $Lt^2 + N = 0$ має два розв'язки, рівні за абсолютною величиною, але з протилежними знаками: $t = \pm\sqrt{\frac{-N}{L}}$.

Отже, коли ці розв'язки дійсні, то точка P_0 є середина хорди P_1P_2, яку лінія другого порядку відтинає від прямої (рис. 14.2).

3). Якщо $M = N = 0,\ L \neq 0$, то рівняння $Lt^2 = 0$ має два рівні розв'язки: $t_1 = t_2 = 0$.

Отже, пряма дотикається до лінії другого порядку , причому P_0 є точкою дотику (рис. 14.3).

4). Якщо $L = 0,\ M \neq 0,\ N \neq 0$, то рівняння $2Mt + N = 0$ має розв'язок $t = -\frac{N}{2M}$. Але за змістом задачі потрібно розглядати рівняння $2Mt + N = 0$ як граничний випадок рівняння $Lt^2 + 2Mt + N = 0$ при умові , що $L \to 0$.

Розглянемо, як при цьому змінюються його розв'язки:

$t_1 = \frac{-M-\sqrt{M^2-LN}}{L}$ і $t_2 = \frac{-M+\sqrt{M^2-LN}}{L}$.

$$\lim_{L\to 0} t_1 = \lim_{L\to 0} \frac{-M - \sqrt{M^2 - LN}}{L} = \infty,$$

$$\lim_{L\to 0} t_2 = \lim_{L\to 0} \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{L} = \lim_{L\to 0} \frac{M^2 - (M^2 - LN)}{(-M - \sqrt{M^2 - LN})} = -\frac{N}{2M}$$

Отже, пряма перетинає лінію другого порядку в одній точці P_2 на скінченій відстані і в одній нескінченно віддаленій точці P_1 (рис. 14.4).

5). Якщо $L = N = 0$ і $M \neq 0$, то рівняння $Mt = 0$ має розв'язки: $t_1 = \infty,\ t_2 = 0$.

Цей випадок принципово не відрізняється від попереднього. Лише точка P_2 перетину прямої з лінією другого порядку, яка лежить на скінченій відстані, є точка P_0 (рис. 14.5).

6). Якщо $L = M = 0$ і $N \neq 0$, $t_1 = \infty,\ t_2 = \lim\limits_{M \to 0}(-\frac{N}{2M}) = \infty$, тобто обидві точки перетину прямої з лінією другого порядку нескінченно віддалені. Але кожна пряма має лише одну нескінченно віддалену точку. Отже, в цьому випадку пряма дотикається до кривої в нескінченно віддаленій точці (рис. 14.6).

7). Якщо $L = M = N = 0$, то рівняння (1.24) перетворюється в тотожність. Це можливо лише тоді, коли рівняння другого порядку (1.22) виражає пару прямих, а пряма (1.23) суміщається з однією з них (рис. 14.7).

Тема 28. Центр лінії другого порядку.

Теоретичні відомості

Означення. Центром лінії другого порядку називається центр її симетрії, тобто точка, в якій всі хорди, що через неї проходять, поділяються пополам.

Нехай лінія другого порядку задана рівнянням

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

і точка $P_0(x_0\ ,y_0\ )$ не лежить на цій лінії.

Будемо шукати рівняння хорди , яка в точці P_0 ділиться пополам у вигляді:

$x=x_0+lt,\ \ y=y_0+mt,$

де $l=cos\alpha$, $m=sin\alpha$, α - кут нахилу хорди до осі ОХ.

Розв'язуючи спільно рівняння хорди і кривої, прийдемо до рівняння

$$Lt^2+2Mt+N=0 \qquad (1.25)$$

в якому $M=lF_x\ ^0+mF_y\ ^0=0$ оскільки розв'язки повинні бути рівні за абсолютною величиною і протилежні за знаком, так як точка P_0 є центр лінії другого порядку і в якій хорди діляться пополам.

Умова (1.25) справджується при довільних l і m тоді і тільки тоді, коли

$$F_x\ ^0=0\ ;\ F_y\ ^0=0 \qquad (1.26)$$

Система рівнянь (1.26), яку задовільняють координати центра лінії другого порядку, в розгорнутому вигляді записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0 \end{cases} \qquad (1.27)$$

Дослідимо отриману систему. Складемо основну і розширену матриці системи:

$M_0=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ⬚ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ⬚ \end{pmatrix}$.

Визначники матриць позначимо через

$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Дослідимо розв'язки системи залежно від рангів матриць M_0 і M.

1). Якщо ранги обох матриць M_0 і M дорівнюють 2, то $\delta \neq 0$. Система має один і лише один розв'язок. Отже, лінія другого порядку має один центр. Координати центра можна визначити з рівнянь (1.27) за формулами Крамера.

2) Якщо ранг M_0 дорівнює 1, а ранг M дорівнює 2, то $a_{11} a_{22} - a_{12}{}^2 =0$, але $\delta \neq 0$ або $\delta_2 \neq 0$, або $\delta_1\delta_2 \neq 0$.

Система суперечна. Лінія другого порядку не має центра на нескінченній відстані. Центр лінії є нескінченно віддалена точка площини.

*3).*Ранги матриць M_0 і M дорівнюють 1. $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$

$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$. Система (1.27) неозначена і містить лише одне незалежне рівняння. Геометричне місце центрів є пряма.

Таким чином, всі лінії другого порядку розділили на три категорії:

1). Центральні лінії, тобто лінії, які мають центр симетрії. Аналогічно вони характеризуються умовою :

$a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 \neq 0$.

До цих ліній, очевидно, належать еліпс і гіпербола.

2). Нецентральні лінії, тобто лінії, які не мають центра симетрії. Аналітично вони характеризуються системою умов:

$a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$, але $\delta_1 \neq 0$ або $\delta_2 = 0$, або $\delta_1\delta_2 \neq 0$.

Про такі лінії можна сказати, що вони мають центр в нескінченості. Очевидно, що парабола є нецентральною лінією.

3). Лінії другого порядку з прямою центрів. Аналітично вони характеризуються системою умов: $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta = 0$ або $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$.

Лінію центрів має пара паралельних прямих. Пряма центрів паралельна цим двом прямим і проходить на однаковій відстані від кожної з них.

Тема 29. Спряжені діаметри лінії другого порядку.

Теоретичні відомості

Теорема. Геометричне місце середин паралельних хорд лінії другого порядку є пряма.

Доведення. Нехай задано лінію другого порядку

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

і пучок прямих , паралельних заданому вектору $\vec{u}(l,m)$.

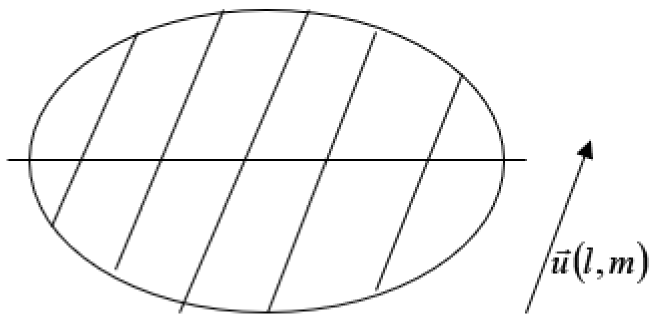


Рис.15

Позначимо через $P_0(x_0,y_0)$ середину хорди, що відтинає крива від однієї з цих прямих. Для координат P_0 маємо $lF_x^0+mF_y^0=0$.

Ця умова, очевидно, справджується для координат середин всіх паралельних хорд заданого напрямку і лише для середин хорд цього напрямку.

Тому рівність $lF_x+mF_y=0$ при фіксованих l та m і довільних x,y потрібно розглядати як рівняння шуканого геометричного місця точок.

Перепишемо це рівняння у такому вигляді: $l(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+m(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})=0$.

Звідси заключаємо, що геометричне місце середин хорд є пряма.

Означення. Геометричне місце середин хорд лінії другого порядку, паралельних вектору $\vec{u}$, називається діаметром лінії, спряженим з напрямом вектора $\vec{u}$, або діаметром, спряженим з хордами, паралельними вектору $\vec{u}$.

Легко бачити, що всі діаметри лінії другого порядку проходять через її центр.

Дійсно, координати центру лінії задовільняють рівняння:

$F_x = 0, F_y = 0,$

а тому і рівняння $lF_x+mF_y=0$, яке при довільних l і m є рівнянням пучка діаметрів лінії другого порядку.

Кожному діаметру в рівнянні пучка відповідає значення параметра $k = \frac{l}{m} = tg\alpha$, рівне кутовому коефіцієнту спряжених з ним паралельних хорд.

Запишемо рівняння діаметра, спряженого з напрямом хорд, що мають кутовий коефіцієнт k, в розгорнутому вигляді:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0 \qquad (1.28)$$

і визначимо кутовий коефіцієнт k цього діаметра: $k' = -\frac{a_{11}+ka_{21}}{a_{12}+ka_{23}}$(1.29)

Звільнившись від знаменника, дістанемо співвідношення між кутовими коефіцієнтами k і k' ситеми паралельних хорд і спряженого з ним діаметра:

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0 \qquad (1.30)$$

Для цього співвідношення характерно те, що воно симетричне відносно k і k'.

Два діаметри, що задовольняють умові (1.30), тобто мають напрямки $\vec{u}(l, m)$ та $u^{\vec{l}''}$ називають спряженими діаметрами, а їх напрями – спряженими напрямами.

Якщо лінія нецентральна, то $a_{11}a_{22} - a^2{}_{12} = 0$.

Отже , $a_{12} = \pm\sqrt{a_{11}a_{22}}$.

Підставляючи знайдене значення a_{12} в співвідношення (1.30), дістанемо:

$$k' = -\frac{a_{11} + \sqrt{a_{11}a_{22}}k}{\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{22}k} = -\frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}}.$$

Звідси видно, що кутовий коефіцієнт діаметра нецентральної кривої не залежить від напряму спряжених з ним хорд, отже, є величиною сталою, тому всі діаметри нецентральної кривої паралельні.

Тема 30. Асимптотичні напрями лінії другого порядку.

Теоретичні відомості

Нехай лінію другого порядку задано рівнянням

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

і вектор $\vec{u}(l, m)$; $k = \frac{m}{l}$.

Означення. Напрям вектора $\vec{u}$ називається асимптотичним напрямом лінії другого порядку, якщо кожна пряма, паралельна вектору $\vec{u}$, зустрічає лінію в нескінченності.

Раніше ми показали, що прямі, які мають асимптотичний напрям відносно лінії другого порядку, характеризуються умовою

$$L = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

Звідси, поділивши обидві частини співвідношення на l^2, дістанемо квадратне рівняння

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

з якого визначимо кутовий коефіцієнт k прямих асимптотичного напряму:

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a^2{}_{12} - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}$$

Звідси видно, що лінії другого порядку мають два асимптотичні напрями, які або дійсні і різні, або суміщаються, або уявні. Критерієм служить знак дискримінанту старших членів рівняння лінії

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a^2{}_{12}$$

Залежно від знаку дискримінанта δ лінії другого порядку можна розподілити на три типи:

1) Лінії еліптичного типу, для яких δ >0 (підкореневий вираз від'ємний).

Ці лінії не мають дійсних асимптотичних напрямів.

2). Лінії гіперболічного типу, для яких $\delta < 0$.

Ці лінії мають два дійсні і різні асимптотичні напрями, тобто через кожну точку площини проходять дві прямі, які зустрічають нашу лінію в нескінченності.

3). Лінії параболічного типу, для яких $\delta = 0$.

$({a_{12}}^2 = a_{11}a_{22})$. Звідси видно, що лінії параболічного типу є нецентральні криві. Ці лінії мають два дійсні асимптотичні напрями, які суміщаються, тобто по суті один дійсний асимптотичний напрям.

Кутовий коефіцієнт прямих асимптотичного напряму нецентральних ліній дорівнює:

$$k = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = -\frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}}$$

тобто асимптотичний напрямок нецентральних ліній є напрям їх діаметрів.

Оскільки прямі, які дотикаються до лінії другого порядку в нескінченно віддаленій точці, є асимптотами, то очевидно для асимптот коефіцієнти L і M в рівнянні $Lt^2+2Mt+N=0$ дорівнюють нулю.

Крім того асимптоти проходять через центр лінії, тобто є її діаметрами.

Отже, рівняння асимптот може бути записане у виді:

Fx+kFy=0

Теорема. Асимптотами лінії другого порядку є самоспряжені діаметри.

Доведення. Покажемо, що напрямлений вектор асимптоти спряжений самий з собою відносно лінії другого порядку. Справді, коли в умову спряженості $a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0$ покласти $k = k'$, то дістанемо

$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0.$

Теорему доведено.

Тема 31. Головні напрямки лінії другого порядку.

Теоретичні відомості

Означення. Головними напрямами лінії другого порядку називаються два взаємно спряжені відносно лінії і взаємно перпендикулярні напрями.

Нехай $\vec{u}(l,m)$ та $\vec{u}'(l',m')$ – вектори, що визначають головні напрями лінії другого порядку.

Щоб визначити нульові коефіцієнти $k=\frac{m}{l}$ і $k'=\frac{m'}{l'}$ головних напрямів лінії, скористаємося умовою їх спряженості:

$a_{11}+a_{12}(k+k')+a_{22}kk'=0$

і умовою перпендикулярності: $kk'=-1$

Виключаючи k' з цих двох умов, дістанемо квадратне рівняння:

$a_{12}k^2+(a_{11}-a_{22})k-a_{12}=0,$ (1.31)

з якого і визначаємо нульові коофіцієнти головних напрямів.

Теорема. Головні напрями лінії другого порядку завжди дійсні.

Доведення. Розв'язуємо рівняння (1.31):

$$k=\frac{-(a_{11}-a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2a_{12}}$$

P_1

Дискримінант цього квадратного рівняння:

$$(a_{11}-a_{22})^2+4{a_{12}}^2\geq 0$$

Теорему доведено.

Коли $(a_{11}-a_{22})^2+4{a_{12}}^2=0$, то $a_{11}=a_{22}$ і $a_{22}=0$, тобто лінія другого порядку є коло.

Через кожну точку площини можна провести дві взаємно перпендикулярні прямі, які мають головні напрями відносно заданої лінії другого порядку.

Взаємно перпендикулярні і взаємно спряжені діаметри лінії другого порядку називаються головними діаметрами лінії.

Головні напрями мають також дотичні до лінії другого порядку, проведені в кінцях діаметра.

Справді, кожна з них паралельна одному з головних діаметрів, тобто має головний напрям. Ці дотичні називаються головними дотичними лінії другого порядку.

Тема 32. Характеристичне рівняння лінії другого порядку.

Теоретичні відомості

Покажемо ще один спосіб визначення головних напрямів лінії другого порядку.

Нехай $lF_x+mF_y=0$ є рівняння головного діаметра, тобто діаметра, перпендикулярного до спряжених з ним хорд:

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m}{l}=\frac{a_{21}l+a_{22}m}{m}=\lambda$$

З умови коленіарності цих двох векторів визначимо головні напрями лінії:

$a_{11}l+a_{12}m=\lambda l;\qquad a_{21}l+a_{22}m=\lambda m,$ або

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)l+a_{12}m=0\\ a_{21}l+(a_{22}-\lambda)m=0\end{cases}$$

Система однорідних рівнянь має відмінний від нуля розв'язок тоді, коли визначник системи дорівнює нулю.

Отже:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad (1.32)$$

Рівняння (1.32) називається характеристичним рівняння лінії другого порядку.

Розв'язавши його знаходимо $k=\frac{m}{l}=\frac{\lambda-a_{11}}{a_{12}}$ або $k=\frac{m}{l}=\frac{a_{12}}{\lambda-a_{22}}$.

Теорема. Розв'язки характеристичного рівняння завжди дійсні.

Доведення. Розв'язуючи квадратне рівняння (1.32) знайдемо

$\lambda=\frac{a_{11}+a_{22}\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2+4{a_{12}}^2}}{2}$ або $\lambda=\frac{1}{2}\left(a_{11}+a_{22}\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4{a_{12}}^2}\right)$; $(a_{11}-a_{22})^2+4{a_{12}}^2\geq 0.$

Отже, розв’зки рівняння (1.32) завжди дійсні, що й зрозуміло оскільки напрями лінії другого порядку завжди дійсні.

Тема 33. Інваріантне рівняння І -го порядку.

Теоретичні відомості

1. Перетворення рівняння ліній другого порядку при паралельному перенесенні координатного базису.

Теорема. При паралельному перенесенні координатного базису коефіцієнти отриманих членів рівняння не змінюються.

Доведення.

Нехай задане рівняння лінії другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

Запишемо формули паралельного перенесення:

$$\begin{matrix} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{matrix} \qquad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), дістанемо:

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{23}(y' + y_0)^2 + 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} = 0$$

або після спрощення:

$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}' = 0$, де

$$a_{13}' = F_x{}^0 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$$
$$a_{23}' = F_y{}^0 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$$
$$a_{33}' = 2F^0 = a_{11}x_0{}^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0{}^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}$$

(3')

Отже, коефіцієнти при старших членах рівняння залишаються незмінними. Теорему доведено.

Теорема. При перенесенні початку координатного базису в центр лінії другого порядку коефіцієнти при членах першого порядку в рівнянні лінії дорівнюватимуть нулю.

Доведення.

Координати центра лінії задовільняють рівняння $F_x=0$ і $F_y=0$.

Отже, з позначень (3') безпосередньо слідує спаведливість теореми.

Теорема. При паралельному перенесенні координатного базису вільний член перетвореного рівняння лінії другого порядку дорівнює результату підставлення координат нового початку в ліву частину заданого рівняння лінії.

Доведення.

Твердження теореми безпосередньо випливає з рівності (3').

2. Перетворення рівняння лінії другого порядку при повороті координатного базису

Нехай задане рівнняння лінії другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1).$$

Запишемо формули повороту координатного базису:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned} \qquad (4).$$

Підставивши (4) в (1), матимемо:

$$a_{11}(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + a_{22}(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 + 2a_{13}(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha) + 2a_{23}(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) + a_{33} = 0$$

Після спрощення дістанемо рівняння лінії в нових змінних:

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + 2a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}y' + a_{33}' = 0$$

(5)

Очевидно, що $a_{33}' = a_{33}$.

Теорема. Якщо координатний базис повернути так, щоб його осі співпали з головними напрямками лінії другого порядку, то коефіцієнти при добутку змінних в рівнянні лінії перетворюється в нуль.

Доведення. Обчислимо коефіцієнт a_{12}'рівняння (5):

$a_{12}' = -a_{11} \cos\alpha \sin\alpha + a_{12} \cos^2\alpha - a_{12} \sin^2\alpha +$
$a_{22} \sin\alpha \cos\alpha = \cos^2\alpha \left(-a_{11} tg\alpha + a_{12} - a_{12} tg^2\alpha + a_{22} tg\alpha\right) =$
$-\cos^2\alpha \, [a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12}]$,

де k −нульовий коефіцієнт осі OX' (або OY') відносно базису XOY.

За умовою теореми осі OX' і OY' мають головні напрямки відносно заданої лінії другого порядку. Отже, їх нулеві коефіцієнти задовільняють рівняння

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{12})k - a_{12} = 0$$

що й доводить теорему.

3 . Інваріантні перетворення лінії другого порядку.

Означення. Функції від коефіцієнтів рівнянь ліній на поверхні, які не змінюються при будь-яких перетвореннях декартової прямокутної системи координат називаються інва-ріантами загального рівняння лінії або поверхні.

При паралельному перенесенні координатних осей коефіцієнти при членах другого порядку не змінюються, тобто є інваріантами паралельного перенесення. Інваріантом повороту осей є вільний член.

Доведемо дві основні теореми.

Теорема 1. Сума коефіцієнтів при квадратах змінних в рівнянні лінії другого порядку і дискримінант старших членів цього рівняння не змінюються при довільних ортогональ-них перетвореннях координат.

Доведення. Розглянемо поворот координатних осей. Формули повороту лінійні і оно-рідні. Отже, при перетворенні рівняння члени другого порядку переходять тільки в чле-ни другого порядку. Це дає можливість виділити з рівняння сукупність членів другого порядку і дослідити окремо характер зміни утвореної ними квадратичної форми

$2f = a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2$,$2f' = a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2$

яка після повороту координатних осей переходить у форму:

Складемо пучок квадратичних форм, що залежить від довільного параметра λ:

$$2f(\lambda) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - \lambda(x^2 + y^2)$$

Після повороту координатного базису цей пучок перейде в пучок $2f'(\lambda) = a_{11}'x^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 - \lambda(x'^2 + y'^2)$

Дійсно, форма $2f$ перейде в форму $2f'$, а форма $x^2 + y^2$, яка виражає квадрат віддалі точки площини від початку координат перейде в форму $x'^2 + y'^2$. Але внас-лідок того, що при повороті осей положення початку координат не змінюється,

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Зведемо подібні члени у виразі пучка квадратичних форм:

$$2f(\lambda) = (a_{11} - \lambda)x^2 + 2a_{12}xy + (a_{22} - \lambda)y^2$$

та запишемо дискримінант довільної форми пучка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Дискримінант перетвореної квадратичної форми:

$$2f'(\lambda) = (a_{11}' - \lambda)x'^2 + 2a_{12}'x'y' + (a_{22}' - \lambda)y'^2$$

буде такий:

$$\begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' - \lambda \end{vmatrix} \quad (6')$$

На підставі відомої теореми алгебри, дискримінант перетвореної квадратичної форми дорівнює добутку дискримінанта заданої квадратичної форми на квадрат визначника перетворення координат. Отже, маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}^2$$

Але $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$

Тому $\begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$

Будемо розглядати такі значення λ, які перетворюють визначник (6), а, отже, і (6') в нуль, тобто будемо мати справу з характеристичними рівняннями.

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (7)$$

$$\lambda^2 - (a_{11}' + a_{22}')\lambda + (a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2) = 0 \quad (7')$$

З самого утворення цих рівнянь за допомогою пучка квадратичних форм, очевидно, що вони мають однакові розв´язки, тобто коефіцієнти рівнянь (7) і (7') пропорційні і, навіть, рівні:

$$a_{11} + a_{22} = a_{11}' + a_{22}'; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2$$

Таким чином, інваріантність суми коефіцієнтів при квадратах змінних в рівнянні кри-вої та дискримінанта старших членів цього рівняння доведена для випадку повороту координатних осей. Але при паралельному перенесенні коефіцієнти при членах другого порядку не змінюються, отже, не змінюються і будь-які функції від них.

Теорему доведено.

Теорема 2. Дискримінант рівняння лінії другого порядку не змінюється при довільних ортогональних перетвореннях координат.

Доведення. Нехай задано рівняння лінії другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Використавши підстановку

$$x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$$

запишемо його в однорідних координатах:

$$a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}{x_3}^2 = 0$$

Дискримінант рівняння, або те ж саме, що й дискримінант квадратичної форми, що становить ліву частину цього рівняння позначимо через

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{vmatrix}$$

Застосовуючи теорему про перетворення дискримінантів до квадратичних форм (2F) і (2F'), дістанемо:

$\Delta' = \Delta D^2$.

Але

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$$

Отже, $\Delta' = \Delta$, тобто Δ - інваріант відносно загального перетворення координат.

Введемо позначення:

$I_1 = a_{11} + a_{22}$; $I_2 = \delta = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2$; $I_3 = \Delta$.

І аналогічно:

$I_1{}' = a_{11}{}' + a_{22}{}'$; $I_2 = \delta = a_{11}{}'a_{22}{}' - a_{12}{}'^2$; $I_3 = \Delta'$.

Далі будемо використовувати ці три основні інваріанти лінії другого порядку відносно загального перетворення координат.

$I_1 = I_1{}'$; $I_2 = I_2{}'$; $I_3 = I_3{}'$

Користуючись цими позначеннями, характеристичне рівняння (7) можна записати в такому вигляді

$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0.$

Тема 34. Класифікація ліній другого порядку.

Теоретичні відомості

1. Дослідження загального рівняння лінії другого порядку.

Теорема. Якщо координатний базис повернути так, щоб його осі мали головні напрями відносно лінії другого порядку, то коефіцієнти при квадратах змінних в рівнянні лінії дорівнювали нуль розв'язкам характерестичного рівняння.

Доведення. Нехай лінія другого порядку задана загальним рівнянням:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

Повернемо координатний базис так, щоб його осі мали головні напрями відносно лінії.

Позначимо їх через OX' і OY'

Нехай $a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0$ є перетворення рівняння лінії.

Так як координатні осі мають головні напрями відносно лінії, то $a_{12} = 0$.

Отже, з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda & 0 \\ 0 & a_{22}' - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

дістанемо $(a_{11}' - \lambda)(a_{22}' - \lambda) = 0$, звідки $a_{11}' = \lambda_1$, $a_{22}' = \lambda_2$, що й треба було довести.

Таким чином, рівняння лінії другого порядку, віднесеної до головних напрямків матиме вигляд:

$$a_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + 2a_{13}'x + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0 \quad (2)$$

Запишемо також характеристичне рівняння лінії

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

та розглянемо такі випадки:

I. Обидва розв′язки λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння відмінні від нуля. Це можливо тоді і тільки тоді, коли $I_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, тобто, коли лінія центральна.

При $I_2 = 0$ це буде лінія еліптичного типу, яка не має дійсних асимптотичних напрямків, а при I_2>0 - лінія гіперболічного типу, що має два дійсні і різні асимптотичні напрями.

Паралельним перенесенням координатного базису перемістимо початок координат в центр лінії. Внаслідок цього в її рівнянні зникнуть члени першого степення відносно змінних і залишаться лише три члени:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a''_{33} = 0$$

Вільний член визначимо з умови:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 a''_{33}$$

звідки $a''_{33} = \frac{I_3}{I_2}$

Отже, остаточно спрощене рівняння лінії матиме вигляд:

$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$ (2′)

При цьому можуть бути такі випадки:

а) $I_3 \neq 0$, тобто лінія невироджена:

1) $\lambda_1 \cdot \lambda_2$>0 $(I_3 > 0)$ - еліпс (дійсний або уявний залежно від знака I_3);

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $(I_2 < 0)$ - гіпербола

b) $I_3 = 0$ Лінія другого порядку вироджуётья в пару прямих. Ліва частина рівняння (2′) розкладаёться на множники: $\left(\sqrt{\lambda_1}x'' - \sqrt{-\lambda_2}y''\right)$ $\left(\sqrt{\lambda_1}x'' + \sqrt{-\lambda_2}y''\right) = 0$

що дає можливість написати окремо рівняння кожної з прямих:

$\sqrt{\lambda_1}x'' - \sqrt{-\lambda_2}y'' = 0$ і $\sqrt{\lambda_1}x'' + \sqrt{-\lambda_2}y'' = 0$.

При $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = I_2 > 0$ прямі будуть уявні, а при $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = I_2 < 0$ вони будуть дійсні.

II. Один з коренів характеристичного рівняння, наприклад λ_1, дорівнює нулю. Це можливо лише тоді, коли $I_2 = 0$, тобто, коли лінія (1) параболічного типу.

В цьому випадку вона має лише один дійсний асимптотичний напрям, який суміщається з одним з її головних напрямів.

Рівняння лінії (1), віднесеної до головних напрямів, буде таким:

$$\lambda_2 y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33} = 0 \qquad (3)$$

Обчислимо дискримінант цього рівняння:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13}' \\ 0 & \lambda_2 & a_{23}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{vmatrix} = -a_{13}'^2\lambda_2 \quad (4)$$

і розглянемо два випадки

а) $I_3 \neq 0$. Лінія невироджена.

Відомо, що лінія параболічного типу є нецентральна, адже для неї система рівнянь $F_x = 0$, $F_y = 0$ несумісна. Справді, якби вона була сумісною, то в досліджуваному випадку вона повинна мати вигляд:

$$\begin{cases} a_{13}' = 0 \\ \lambda_2 y' + a_{23}' = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Але з (4) видно, що коли $I_3 \neq 0$, то $a_{13}' \neq 0$. Отже, маємо суперечність, тобто вона несумісна.

Щоб дістати канонічне рівняння лінії, перенесемо початок координат в точку на самій лінії, яку ми визначимо системою рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_2 {y_0'}^2 + 2a_{13}'x_0' + 2a_{23}'y_0' + a_{33} = 0 \\ \lambda_2 {y_0}^2 + a_{23}' = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Тоді в рівнянні лінії зникне член $(2F_0 = 0)$ і коефіцієнт a_{23}'', бо $Fy^0 = \lambda_2 y_0'' + a_{23}'' = 0$.

Залишається лише два члени:

$$\lambda_2 y''^2 + 2a_{13}''x'' = 0$$

a_{13}'' визначимо з умови

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13}'' \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_{13}'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_{13}''^2 \lambda_2$$

звідси $\quad a_{13}'' = \pm\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2}}$

Таким чином, канонічне рівняння лінії має вигляд:

$$\lambda_2 y''^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2}}x'' = 0 \quad (7)$$

Вибір знаку перед радикалом залежить від орієнтації осі $O''X''$, бо коли змінити напрям осі $O''X''$ на протилежний, то й знак перед радикалом зміниться на протилежний.

Лінія визначена рівнянням (7), є парабола. $\lambda_2 y' + a_{23}' = 0$ є рівняння осі параболи, а точка, визначена системою рівнянь (6), є її вершиною.

b) $I_3 = 0$. тоді з (4) дістанемо $a_{13}' = 0$. Отже рівняння (3) матиме вигляд:

$$\lambda_2 y'^2 + 2a_{23}' y' + a_{33} = 0,$$

тобто його ліву частину можна буде розкласти на множники:

$$\left(\sqrt{\lambda_2} y' + \frac{a_{23}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + a_{33} - \frac{a_{23}'^2}{\lambda_2} = 0$$

або

$$\left(\sqrt{\lambda_2} y' + \frac{a_{23}'}{\sqrt{\lambda_2}} - \sqrt{\frac{a_{23}'^2}{\lambda_2} - a_{33}}\right)\left(\sqrt{\lambda_2} y' + \frac{a_{23}'}{\sqrt{\lambda_2}} + \sqrt{\frac{a_{23}'^2}{\lambda_2} - a_{33}}\right) = 0$$

Отже, лінія, виражена рівнянням (1), в цьому випадку розкладається на пару паралельних прямих:

$$\sqrt{\lambda_2} y' + \frac{a_{23}'}{\sqrt{\lambda_2}} - \sqrt{\frac{a_{23}'^2}{\lambda_2} - a_{33}} = 0$$

$$\sqrt{\lambda_2} y' + \frac{a_{23}'}{\sqrt{\lambda_2}} + \sqrt{\frac{a_{23}'^2}{\lambda_2} - a_{33}} = 0$$

Ці прямі можуть бути дійсними або уявними.

На підставі вищепроведеного дослідження загального рівняння лінії другого порядку можна показати їх класифікацію. Складемо таку таблицю:

I. $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ --лінія невироджена:

1) $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0$ -- еліпс (дійсний або уявний);

2) $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 < 0$ –гіпербола;

3) $I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$ –парабола;

II. $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ $-$лінія другого порядку

вироджена в пару прямих;

1) $I_2 = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 > 0$ (еліптичний тип) -- пара комплексно спряжених прямих;

2) $I_2 = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 < 0$ (гіперболічний тип) --пара дійсних прямих , що перетинаються;

3) $I_2 = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2 = 0$ (параболічний тип) -- пара паралельних прямих (дійсних або уявних).

Крім цих ліній, жодних ліній другого порядку не існує.

Тема 35. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного виду.

Теоретичні відомості

1.Спрощення рівнянь центральних ліній другого порядку за допомогою інваріантів.

Відомо, що до центральних ліній відносяться еліпс, гіпербола і пара прямих, які перетинаються. Центр лінії в останьому випадку є точка перетину прямих.

Якщо початок координат перенести в центр лінії, не змінюючи при цьому напрям осей, то в рівнянні лінії зникнуть члени першого порядку відносно змінних.

Далі, повертаючи координатний базис так, щоб його осі сумістилися з головними діаметрами, тобто осями симетрії, ми позбавимось в рівнянні члена з добутком змінних, тобто рівняння стане канонічним.

Проте канонічне рівняння лінії можна дістати обмеженням його коефіцієнтів за допомогою інваріантів. Справді, канонічне рівняння центральної лінії другого порядку має три члени:

$$a_{11}'x'^2 + a_{22}'y'^2 + a_{33}' = 0$$

(або два -- у випадку пари прямих).

З характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

можна визначити $a_{11}{}'$ і $a_{22}{}'$, які являються його розв'язками, а вільний член можна обчислити за формулою $a_{33}{}' = \frac{I_3}{I_2}$.

Таким чином, рівняння центральної лінії матиме вигляд

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$$

Коли $I_3 \neq 0$, тобто коли лінія другого порядку не вироджена, легко визначити її параметри a і b. Дістанемо:

$$a = \sqrt{\left|\frac{I_3}{I_2 \lambda_1}\right|}, \qquad b = \sqrt{\left|\frac{I_3}{I_2 \lambda_2}\right|}.$$

Отже, ми маємо форму і розв'язок лінії.

Для визначення положення лінії визначаємо координати центра і складаємо рівняння осей симетрії. Для гіперболи потрібно ще скласти рівняння її асимптот.

2. Спрощення рівняння параболи за допомогою інваріантів.

Якщо при обчисленні I_3 і I_2 виявиться, що задана крива являється параболою, то для зведення її рівняння до канонічного виду потрібно перенести початок координат у вершину параболи, не змінюючи напряму осей координат. При цьому в рівнянні параболи зникне вільний член.

Далі, повернувши координатні осі так, щоб вісь О′Х′ співпадала з віссю параболи, а вісь О′У′ була дотичною до неї у вершині, ми позбудемось добутку змінних, змінну x'^2 та y', тобто ми дістанемо канонічне рівняння параболи.

Проте, канонічне рівняння параболи можна дістати відразу, обчислюючи його коефіцієнти за допомогою інваріантів.

Дійсно, з характеристичного рівняння

$\lambda^2 - I_1\lambda = 0 \qquad (I_2 = 0)$

ми дістанемо:

$a_{11} = \lambda_1 = 0, \quad a'_{22} = \lambda_2$

За формулою $a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2}}$ знайдемо коофіцієнт при x'. Отже, можемо записати канонічне рівняння параболи:

$$\boldsymbol{\lambda_2 y'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2}x'} = 0,}$$

з якого визначимо параметр $p = \sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2}}$.

3. Спрощення рівняння параболи шляхом виділення повного квадрата.

Відомо, що лінія другого порядку відноситься до параболічного типу, якщо:

$I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$

звідки

$a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}.$

Підставляючи a_{12} в загальне рівняння параболи , дістанемо:

$(\sqrt{a_{11}}x + \sqrt{a_{22}}y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$

Отже, група старших членів утворює повний квадрат, що й дає спрощення рівняння.

4. Визначення пари прямих, заданих рівнянням другого порядку.

Якщо при дослідженні загального рівняння лінії другого порядку виявилось, що вона являє собою пару прямих, то таке рівняння недоцільно зводити до канонічного виду. Найпростіше застосувати метод виділення квадратів.

5. Визначення виду лінії другого порядку методом виділення квадратів.

Метод виділення квадратів базується на законі інерції квадратичних форм, який полягає в тому, що кількість виділених з рівняння квадратів і їх знаки не залежать від вибору координатного базису, до якого віднесена лінія, і характеризують вид самої лінії.

Приклад 1. Задано рівняння лінії

$$x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0,$$

з якого виділяємо квадрати:

$$(x - 2y - 2)^2 - 3y^2 - 6y - 6 = 0,$$

$$(x - 2y - 2)^2 - 3(y + 1)^2 = 3,$$

тобто лінія є гіперболою.

Приклад 2. Задано рівняння лінії

$$x^2 - 2xy + 4y^2 + 2x - 2y - 5 = 0,$$

з якого виділяємо квадрати:

$$(x - y + 1)^2 + 3y^2 = 6.$$

Отже, лінія є еліпсом.

<u>Приклад 3.</u> Задано рівняння лінії

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y = 0,$$

з якого виділяємо квадрат:

$$(x + 2y - 3)^2 + 4y - 9 = 0.$$

Лінія є параболою.

Приклади розв'язування практичних задач

Задача 1. Визначити вид лінії другого порядку, заданої рівнянням

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

і накреслити її.

Розв'язок. Обчислимо I_3:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 & 0 \\ -5 & -4 & 0 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = -81.$$

$I_3 \neq 0$. Отже, лінія не вироджена.

Обчислимо I_2:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

$I_2 > 0$. Досліджувана лінія - еліпс.

Складемо характеристичне рівняння лінії:

$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 9.$

Знаходимо вільний член

$$a_{33}' = \frac{I_3}{I_2} = -9$$

Запишемо канонічне рівняння еліпса:

$$x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0,$$

або

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

Звідси параметри еліпса: $a = 3$; $b = 1$.

Залишається визначити положення еліпса на площині і накреслити його.

Знайдемо координати еліпса, тобто початок координат нової системи

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5x + 4y - 9 = 0 \\ 4x + 5y - 9 = 0 \end{cases}$$

звідки $x = 1, y = 1$

Кутовий коофіцієнт k_1 нової осі $O'X'$ знайдемо за формулою:

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{1-5}{4} = -1 \quad \text{і} \qquad k_2 = -\frac{1}{k_1} = 1$$

Рівняння нової осі $O'X'$ буде:

$$y - 1 = -(x - 1),$$

або:

$$x - y = 0$$

Побудувавши на рисунку нові координатні осі і взявши на них відрізки $a = 3, b = 1$, матимемо вершини еліпса.

Задача 2. Визначити вид лінії другого порядку, заданої рівнянням

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

і накреслити її.

Розв'язок. Обчислимо I_3:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ 0 & 3 & -15 \end{vmatrix} = -3(-45+18) = 81$$

$I_3 \neq 0$ — лінія не вироджена.

Обчислимо $I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9.$

$I_2 < 0$ — крива є гіперболою.

Складаємо характеристичне рівняння:

$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0, \lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1.$

Знаходимо вільний член:

$a'_{33} = -\frac{81}{9} = -9.$

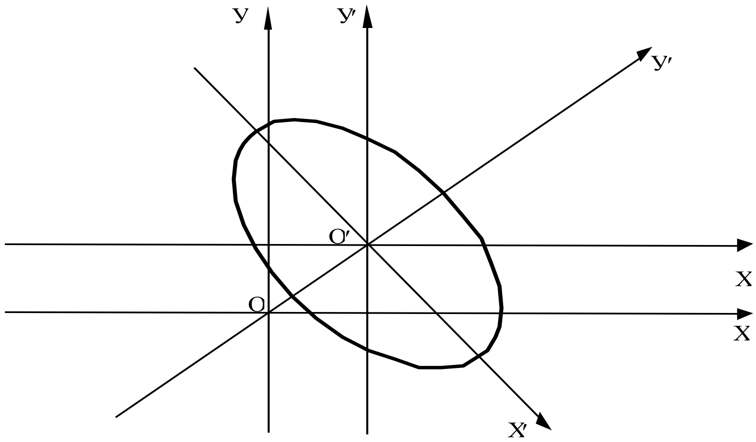
Запишемо канонічне рівняння гіперболи:

$9x'^2 - y'^2 = 9$, або $\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{9} = 1.$

Отже, $a = 1, b = 3.$

Знаходимо координати центра гіперболи:

$\begin{cases} y - 2 = 0, \\ 3x + 8y - 13 = 0. \end{cases} \quad x = -1, y = 2.$



Кутові коефіцієнти осей симетрії будуть:

$k_1 = \frac{9}{3} = 3$ — кутовий коефіцієнт фокальної осі.

$k_2 = -\frac{1}{3}$ — кутовий коефіцієнт уявної осі.

Рівняння осі О′Х′:

$y - 2 = 3(x + 1); \quad 3x - y + 5 = 0.$

Рівняння осі О′У′:

$y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 1);\ x + 3y - 5 = 0.$

Складемо рівняння асимптот гіперболи, кутові коефіцієнти асимптот визначимо з рівняння:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

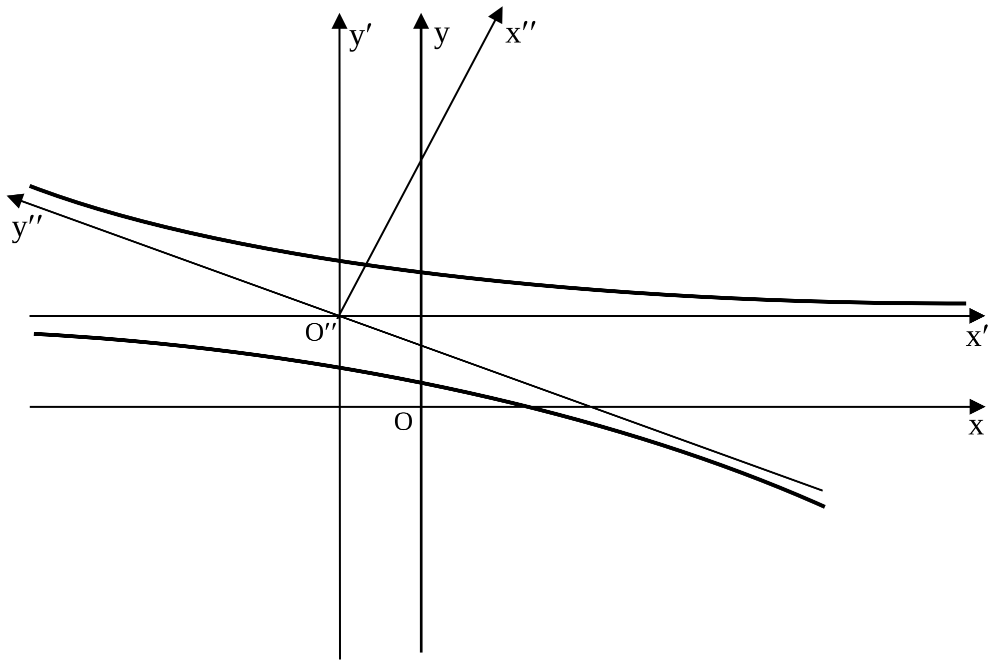
$6k + 8k^2 = 0;\ k_1 = 0;\ k_2 = -\frac{3}{4}$

Отже , рівняння асимптот будуть:

$y = 2;$

$3x + +4y - -5 = 0.$

можемо накреслити нашу гіперболу.



Задача 3. Визначити вид лінії другого порядку, заданої рівнянням $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$, і накреслити її.

Розв'язок. Обчислимо I_3 :

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Рівняння виражає параболу $(x + y)^2 = 8x - 4$.

Легко бачити , що точка перетину прямих

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 8x - 4 = 0 \end{cases}$$

задовольняє рівнянню параболи, тобто лежить на ній. Пряма $x+y=0$ є, очевидно, одним із діаметрів параболи, тому що її коефіцієнт $k' = -1$ дорівнює кутовому коефіцієнту діаметрів параболи $k' = -\frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}} = -1.$

Пряма *8x-4=0* перетинає параболу в двох точках, що співпадають, тобто дотикається до неї в точці перетину її з діаметром *x+y=0.* Отже, дотична спряжена з діаметром відносно параболи.

Але, щоб звести рівняння параболи до канонічного виду, потрібно віднести її до головного діаметра і головної дотичної, які між собою перпендикулярні.

Запишемо рівняння параболи у вигляді

$$(x+y+h)^2 = 2hx + 2hy + 8x + h^2 - 4\ ,$$

де h визначимо з умови перпендикулярності прямих:

$$x+y+h=0,$$

$$2(h+4)x + 2hy + h^2 - 4 = 0.$$

Якщо ці прямі взаємно перпендикулярні ($k \cdot k' = -1$), то $\frac{h+4}{h} = -1$, звідки $h = -2$. Отже, рівняння параболи можемо записати так :

$$(x+y-2)^2 = 4(x-y),$$

причому $x+y-2=0$ є рівнянням головного діаметра , а рівняння $x-y=0$ — рівняння головної дотичної.

Приймемо головний діаметр параболи за вісь О′Х′, а головну дотичну за вісь О′У′.

Отже , $\frac{x+y-2}{\sqrt{2}} = y'$, а $\frac{x-y}{\pm\sqrt{2}} = x'$,

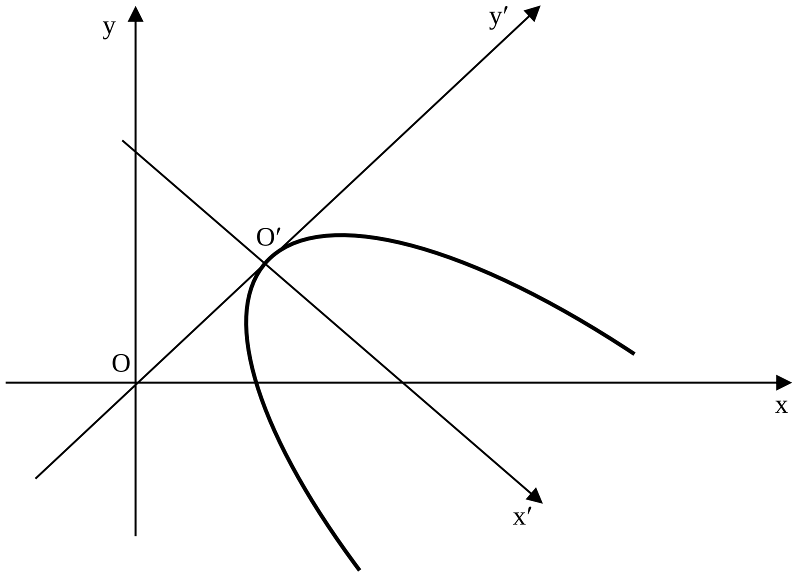
звідки $x+y-2 = y'\sqrt{2}$; $x-y = \pm x'\sqrt{2}$.

Отримуємо канонічне рівняння параболи

$$(y'^2\sqrt{2})^2 = 4(\sqrt{2}x') \qquad \text{або остаточно}$$

$$y'^2 = 2\sqrt{2}x'.$$

Щоб накреслити параболу, побудуємо її вісь симетрії (головний діаметр) і головну дотичну.



Задача 4. Визначити вид лінії другого порядку , заданої рівнянням $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$, і накреслити її .

Розв'язок. Обчислимо I_3:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & \frac{3}{2} & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

I_3=0 — лінія другого порядку вироджується в пару прямих.

Обчислимо I_2:

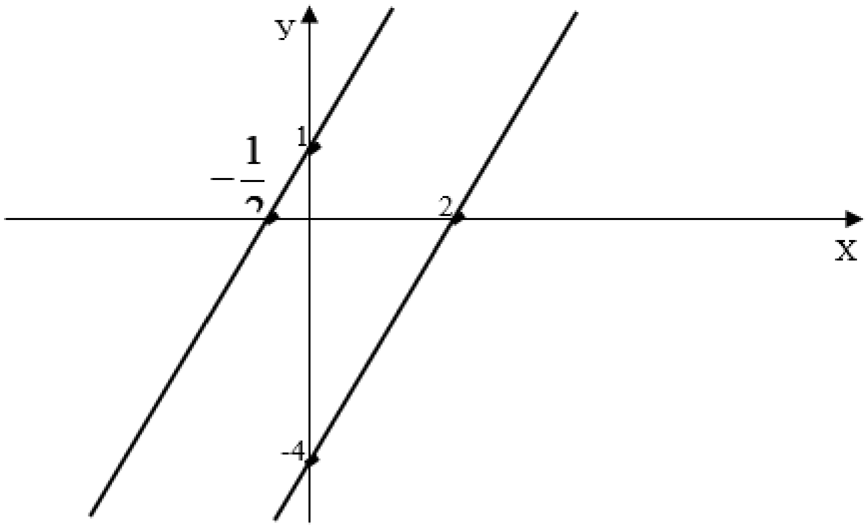
$$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

I_2=0 — прямі паралельні.

Виділимо в рівнянні лінії повний квадрат:

$$(2x - y - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{25}{4} = 0.$$

Звідси отримуємо два лінійні множники: $2x - y + 1 = 0$ і $2x - y - 4 = 0$. Тепер можна накреслити ці прямі.



Задача 5. Визначити вид лінії другого порядку , заданої рівнянням $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$, і накреслити її.

Розв'язок. Обчислимо I_3:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 15 & -11 \\ -4 & -11 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

I_3=0 — лінія вироджується в пару прямих.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 15 \end{vmatrix} = -4.$$

Висновок. Прямі дійсні і перетинаються. Рівняння лінії перетворимо так:

$$(2x + 4y - 2)^2 - y^2 - 6y - 9 = 0,$$

звідси

$$(2x + 4y - 2)^2 - (y + 3)^2 = 0.$$

Розклавши рівняння на множники, отримуємо пару прямих:

$$2x + 3y - 5 = 0,$$

$$2x + 5y + 1 = 0,$$

які можна легко накреслити.

Рекомендована література

1. Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М. Аналітична геометрія.-К.: Вища школа, 1973. – 327с.
2. Гуран Ігор, Гутік Олег, Лисецька Олександра, Мокрицький Тарас. Диференціальна геометрія: теорія кривих і поверхонь. Львів, 2021. 326 с.
3. Постова, С. А., & Франовський, А. Ц. (2024). Розв'язування задач з топології та диференціальної геометрії: методичні рекомендації для здобувачів закладів вищої освіти спеціальності 014 «Середня освіта» предметної спеціальності 014.04 «Середня освіта (Математика)» (ОК" Диференціальна геометрія і топологія").
4. Пришляк О. Диференціальна геометрія. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014.
5. Франовський А. Ц., Карплюк С. О. Диференціальна геометрія : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. Житомир : Видво ЖДУ ім. І. Франка, 2013. 188 с.
6. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995. 304 с.
7. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. К: Вища школа, 1973.
8. Валєєв К.Г.,Джаладова І.А., Лютий О.І. та ін. Вища математика: Навч.- метод. посібник для самост. вивч. дисц. - К.:КНЕУ, 2002.
9. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія. Навчальний посібник – Суми.: ВТД Університетська книга, 2004. – 296 с.
10. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія у просторі. – Ніжин.: НДПУ, 2002.

11. Яковець В.П., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія на площині. – Ніжин.: НДПУ, 2001.
12. Білоусова В.П. та ін. Аналітична геометрія. – К.: Вища школа, 1973.
13. Завгородній О.І., Обихвіст Щ.В., Сіняєва О.В. Функції кількох змінних.– Харків.: ХНТУСГ, 2013.– 41. С.
14. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013.-4-те вид. – 648 с: іл.
15. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.:КНЕУ, 2001.-Ч.І. – 546 с.
16. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1. – К.: Техніка, 2013р.
17. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.
18. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. – Рівне : НУВГП, 2020. – 205 с.
19. Стороженко І. П. Вища математика: Навчальний посібник в 2 частинах . Частина 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія/І.П, Стороженко. – Харків, 2019. 80 с. Іл. 48.
20. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Методичний посібник для студентів радіофізичного факультету напрям підготовки «Радіотехніка» / С.В.Єфіменко – К.: КНУ, 2011 – 56 с.

Навчальне видання

ФРАНОВСЬКИЙ Анатолій Цезарович
ПОСТОВА Світлана Анатоліївна
АНДРОЩУК Марія Вікторівна

Лінійна алгебра та аналітична геометрія в прикладах та задачах

Навчально-методичний посібник для здобувачів вищої освіти спеціальності 014 «Середня освіта» предметної спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»

Надруковано з оригінал-макета авторів

Підписано до друку __.__.__. Формат 60х90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк різографічний.
Ум. друк. арк. 5,6. Обл. вид. арк. 5. Наклад 300. Зам. 825.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка
м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.
електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua