Андрощук Марія,
здобувачка 4 курсу освітньої програми «Середня освіта (математика)»,
Франовський Анатолій
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри та геометрії
Науковий керівник: Сарана Олександр,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики
Житомирський державний університет імені Івана Франка

ПРО УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ДЕЯКИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ, ЗАДАНИХ РЕКУРЕНТНО

Поняття числової послідовності – одне з базових понять в напрямку математики, знайомство з яким розпочинається ще в школі (як приклад арифметичні та геометричні прогресії). Ця тема має широке коло застосувань у фізиці, інженерії, економіці та інших галузях науки. Дослідження властивостей послідовностей є важливим розділом математичного аналізу – одного з основних предметів у фаховій підготовці математиків.

Аналіз актуальних досліджень. Дослідження різних аспектів збіжності послідовностей представлено в роботах таких науковців як: Н. Гоєнко, М. Руновська, М. Михасюк, П. Слюсарчук, О Шпота та ін.

Мета статті. Мета даної роботи полягає в дослідженні збіжності послідовностей геометричного типу.

Виклад основного матеріалу. Оскільки геометрична прогресія може бути задана рекурентним відношенням: $b_k = \frac{b_{k-1}^2}{b_{k-2}}, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$, то такі послідовності назвемо послідовностями геометричного типу.

У роботі використовуються властивості зворотніх послідовностей. Зворотні послідовності в курсі математики зустрічаються досить часто, зокрема арифметична та геометрична прогресії. З теорією зворотних послідовностей можна ознайомитись в [1], [2], [3].

Будемо записувати послідовності у вигляді $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ або коротко $\{a_k\}$. Зворотна послідовність n-го порядку задається першими n членами $a_1, a_2, \dots, a_n$ і рекурентним рівнянням

$$a_k = m_1 a_{k-1} + m_2 a_{k-2} + \cdots + m_n a_{k-n} \quad (k \geq n+1), \tag{1}$$

де $m_1, m_2, \ldots, m_n$ фіксовані дійсні числа. Таким чином, зворотна послідовність характеризується тим, що кожний член її (починаючи з деякого з них) виражається через одну і ту саму кількість n попередніх йому членів. Рівняння (1) називають зворотним рівнянням n-го порядку. Набір чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається початковими умовами рівняння (1).

Найбільш відомими прикладами зворотніх послідовностей є арифметична та геометрична прогресії.

Арифметичну прогресію можна задати як зворотну послідовність наступним способом: a_1, $a_k = a_{k-1} + d$; або a_1, a_2, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}$,

Геометричну прогресію можна задати як зворотну послідовність таким способом: b_1, $b_k = b_{k-1} \cdot q$, $q \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

Дослідимо умови існування скінченної границі послідовності геометричного типу у випадку $\alpha = 1$.

Теорема 1. Нехай послідовність дійсних чисел u_k задана рекурентно: $u_1 > 0$, $u_2 > 0$,

$$u_k = \frac{u_{k-1}^m}{u_{k-2}^p}, p \neq 0$$

Тоді при виконанні однієї з наступних умов:

$$1) \begin{cases} p < \dfrac{m^2}{4}; \\ p > |m| - 1; \\ |m| < 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} m \in (0; 2]; \\ p = m - 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u_1 = u_2; \\ m = 2; \\ p = 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} p > \dfrac{m^2}{4}; \\ p \in (0; 1). \end{cases}$$

послідовність u_k є збіжною.

Доведення. Розглянемо допоміжну послідовність $a_k = \ln u_k$. Оскільки функція $y = \ln x$ є неперервною, то послідовності u_k та a_k або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Маємо: $a_k = \ln u_k = m \ln u_{k-1} - p \ln u_{k-2} = m a_{k-1} - p a_{k-2}$, тобто послідовність a_k є зворотньою.

Характеристичне рівняння послідовності a_k має вигляд: $q^2 - mq + p = 0$.

Знаходимо $D = m^2 - 4p$.

Можливі випадки:

1) $D > 0$, тоді корені рівняння дійсні:

$$q_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4p}}{2}, q_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4p}}{2},$$

а формула загального члена має вигляд [2]:

$$a_k = C_1 \left(\frac{m - \sqrt{m^2 - 4p}}{2} \right)^{k-1} + C_2 \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - 4p}}{2} \right)^{k-1}.$$

Сталі C_1 та C_2 знаходимо з умов:

$$\begin{cases} a_1 = C_1 + C_2; \\ a_2 = C_1 \frac{m - \sqrt{m^2 - 4p}}{2} + C_2 \frac{m + \sqrt{m^2 - 4p}}{2}. \end{cases}$$

Отримаємо:

$$C_1 = \frac{ma_1 - 2a_2}{2\sqrt{m^2 - 4p}} + \frac{a_1}{2}, C_2 = \frac{2a_2 - ma_1}{2\sqrt{m^2 - 4p}} + \frac{a_1}{2}.$$

$$a_k = \left(\frac{ma_1 - 2a_2}{2\sqrt{m^2 - 4p}} + \frac{a_1}{2} \right) \left(\frac{m - \sqrt{m^2 - 4p}}{2} \right)^{k-1} + \left(\frac{2a_2 - ma_1}{2\sqrt{m^2 - 4p}} + \frac{a_1}{2} \right) \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - 4p}}{2} \right)^{k-1}$$

Послідовність a_k, а отже і послідовність u_k є збіжною, якщо

$$\begin{cases} q_1 > -1; \\ q_2 < 1; \end{cases}$$

Тобто при виконанні умов:

$$\begin{cases} m - \sqrt{m^2 - 4p} > -2 \\ m + \sqrt{m^2 - 4p} < 2 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^2 - 4p} < m + 2 \\ \sqrt{m^2 - 4p} < 2 - m \end{cases}.$$

Звідси отримуємо, що при виконанні умов: $\begin{cases} p < \frac{m^2}{4}; \\ p > |m| - 1; \\ |m| < 2. \end{cases}$

виконується $\lim\limits_{k \to \propto} a_k = 0$, звідки $\lim\limits_{k \to \propto} u_k = 1$.

Також послідовність a_k є збіжною, якщо $-1 < q_1 < q_2 = 1$. Неважко перевірити, що це досягається при виконанні умов:

$$\begin{cases} m \in (0; 2] \\ p = m - 1 \end{cases}.$$

У такому випадку $\lim\limits_{k \to \propto} a_k = \frac{2a_2 - ma_1}{2\sqrt{m^2 - 4p}} + \frac{a_1}{2} = \frac{a_2 + a_1 - ma_1}{2 - m}$,

$$\lim_{k\to\propto} u_k = e^{\frac{a_2+a_1-ma_1}{2-m}}$$

2) Нехай D=0, тобто $p = \frac{m^2}{4}, m \neq 0$. Тоді характеристичне рівняння: $q^2 - mq + \frac{m^2}{4} = 0$, тому $q_1 = q_2 = \frac{m}{2}$, а формула загального члена має вигляд [2]: $a_2 = C_1\left(\frac{m}{2}\right)^{k-1} + C_2(k-1)\left(\frac{m}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{m}{2}\right)^{k-1}(C_2k + C_3)$

Очевидно, що при $m \in (-2; 2)$ така послідовність є збіжною, причому $\lim_{k\to\propto} a_k = 0$, $\lim_{k\to\propto} u_k = 1$.

Також ця послідовність є збіжною якщо m=2, $C_2 = 0$. Легко перевірити, що це досягається при виконанні умов $p = 1,\ m = 2, u_1 = u_2$, тобто у цьому випадку u_k є стаціонарною послідовністю.

3) $D = m^2 - 4p < 0$. Тоді маємо:

$$q_1 = \frac{m - \sqrt{4p - m^2}i}{2},\ q_2 = \frac{m + \sqrt{4p - m^2}i}{2},$$

$$a_k = C_1\left(\frac{m - \sqrt{4p - m^2}i}{2}\right)^{k-1} + C_2\left(\frac{m + \sqrt{4p - m^2}i}{2}\right)^{k-1}.$$

З умов:

$$\begin{cases} a_1 = C_1 + C_2; \\ a_2 = C_1\dfrac{m - \sqrt{4p - m^2}i}{2} + C_2\dfrac{m + \sqrt{4p - m^2}i}{2}; \end{cases}$$

Знаходимо:

$$C_1 = \frac{a_1}{2} - \frac{ma_1}{2\sqrt{4p - m^2}}i + \frac{a_2}{\sqrt{4p - m^2}}i\ ;$$

$$C_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{ma_1}{2\sqrt{4p - m^2}}i - \frac{a_2}{\sqrt{4p - m^2}}i\ .$$

Послідовність a_k є збіжною при виконанні умов:

$$\begin{cases} |q_1| < 1; \\ |q_2| < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2 + \left(\sqrt{4p - m^2}\right)^2}}{2} < 1,$$

з яких отримуємо $-1 < p < 0$.

Отже, при виконанні умов $\begin{cases} 4p - m^2 < 0; \\ -1 < p < 0; \end{cases}$

послідовність a_k є збіжною, причому $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Теорема доведена.

Основний випадок послідовності геометричного типу.

$u_k = \frac{\alpha \cdot u_{k-1}^m}{u_{k-2}^p}$, (при вказаних вище умовах) зводиться до випадку доведеної вище теореми.

Можливі випадки:

1) Нехай $\alpha \neq 1, m \neq p+1$, тоді розглянемо допоміжну послідовність $x_k = \beta \cdot u_k$, де $\beta = \alpha^{\frac{1}{m-1-p}}$.

Члени цієї послідовності задовольняють співвідношення:

$$x_k = \beta \cdot u_k = \beta \cdot \frac{\alpha \cdot u_{k-1}^m}{u_{k-2}^p} = \frac{\beta \cdot \alpha \cdot (\beta \cdot u_{k-1})^m \cdot \beta^p}{(\beta \cdot u_{k-2})^p \cdot \beta^m}$$

$$= \frac{x_{k-1}^m}{x_{k-2}^p} \cdot \beta^{p+1-m} \cdot \alpha = \frac{x_{k-1}^m}{x_{k-2}^p} \cdot \beta^{p+1-m} \cdot \beta^{m-1-p} = \frac{x_{k-1}^m}{x_{k-2}^p}$$

Очевидно, що послідовності u_k та x_k або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні, а умови збіжності послідовності x_k визначаються доведеною раніше теоремою.

2) Нехай $\alpha \neq 1, m = p+1$. Очевидно, що в цьому випадку таку послідовність x_k ввести не можна.

Виключимо параметр α з умов задання послідовності u_k.

Маємо: $\alpha = \frac{u_k \cdot u_{k-2}^p}{u_{k-1}^{p+1}} = \frac{u_{k+1} \cdot u_{k-1}^p}{u_k^{p+1}}$,

Звідси отримуємо: $u_{k+1} = \frac{u_k^{p+2} \cdot u_{k-2}^p}{u_{k-1}^{2p+1}}$.

Тоді допоміжна послідовність $a_k = \ln u_k$ задовольняє рекурентне рівняння третього порядку:

$$a_{k+1} = (p+2)a_k + pa_{k-2} - (2p+1)a_{k-1}.$$

Наважко встановлюється, що коренями характеристичного рівняння цієї послідовності: $q^3 - (p+2)q^2 + (2p+1)q - p = 0$, є числа: $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = p$.

Тоді формула загального члена має вигляд [2]:

$$a_k = \mathrm{C}_1 \cdot 1^{k-1} + \mathrm{C}_2(k-1) \cdot 1^{k-1} + \mathrm{C}_3 \cdot p^{k-1} = B_1 + B_2 k + B_3 p^k$$

Очевидно, що така послідовність є збіжною лише при $-1 < p \leq 1$ та за виконання певних початкових умов, що забезпечують $B_2 = 0$.

Висновки та перспективи подальших досліджень. У результаті проведеного дослідження в роботі було розглянуто умови збіжності послідовностей геометричного типу.

Необхідно зазначити, що дане дослідження є лише першим кроком у вивченні збіжності послідовностей геометричного типу. Подальші дослідження в цій галузі можуть призвести до отримання нових цікавих результатів.

Отримані результати можуть бути використані для:

- Дослідження збіжності послідовностей, заданих рекурентними рівняннями.
- Дослідження фізичних, технічних, економічних процесів що описуються рекурентними відношеннями.

Список використаних джерел та літератури

1. Баранівська А. Ф., Герус О. Ф., Осадчий М. М., Таргонський Л. П. Курс математичного аналізу. Функції однієї змінної. Житомир. – 2002.
2. Захаров Б.А. та Сарана О.А. Зворотні послідовності в олімпіадних задачах. Київ: У світі математики, т.6 (2000), № 4. С. 56-63.
3. Кукуш О.Г. та Ушаков Р.П. Про рекурентне зважування. Київ: У світі математики, 22 (2016), № 3. С. 1-13.