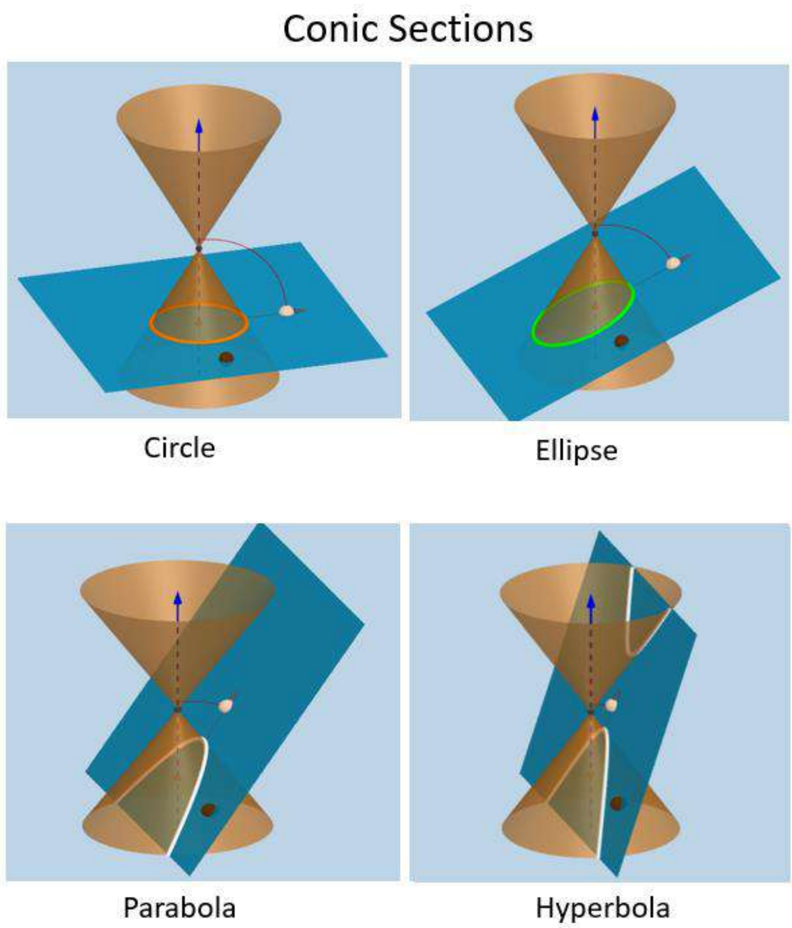
Житомирський державний університет
імені Івана Франка

Іван Ленчук

КОНІЧНІ ПЕРЕРІЗИ

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи
здобувачів вищої освіти



Житомир 2024

УДК 514.14
ББК 22.151я7

Рекомендовано до друку Вченою радою
Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 17 від 27 вересня 2024 р.)

Рецензенти:
• Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка
Василь Михайленко
• Доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри методики навчання математики УДУ імені М. П. Драгоманова
Олександр Школьний
• Доктор педагогічних наук, професор кафедри комп'ютерних наук Державного університету «Житомирська політехніка»
Катерина Колос

Іван Ленчук

Конічні перерізи: Навчально-методичний посібник для самостійної роботи здобувачів вищої освіти

Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. – 73 с., 52 рис.

Навчально-методичний посібник уміщує теоретичні відомості за обраною темою, стислу інформацію стосовно підходів до розв'язування базових задач, систему вправ для самостійного розв'язання та добірку задач для практичних занять із таких підтем: «Коло», «Еліпс», «Гіпербола», «Парабола», «Полярні рівняння конічних перерізів». У збірнику містяться варіанти до позааудиторної модульної контрольної роботи із указаної тематики.

Для студентів фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів, для викладачів аналітичної геометрії

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Якщо міркувати категоріями геометрії, навколишнє середовище, яке оточує нас, уявляє собою криві поверхні простих і складних форм. Хорошим прикладом цієї тези може бути шкарлупа курячого яйця, яка має форму еліпсоїда обертання. Геометрична досконалість природнього продукту, не дивлячись на незначну товщину стінок, надає їй чималу міцність. Тулуб птаха, його крило теж мають досконало відпрацьовані природою поверхні. Схожі поверхні в комплексі мають неперевершені аеродинамічні та інші характеристики.

Корпуси різних літальних апаратів, підводних і надводних плавзасобів, автомобілів, оболонки споруд на землі та під землею і т. ін., також є комплексами відсіків поверхонь, що за законами утворення є досить складними.

У вивченні аналітичної геометрії в першу чергу доводиться працювати з конусами і так званими конічними перерізами («коніками»). З конусами обертання студенти знайомі зі школи, а до перерізів у теорії і практиці геометрії відносять еліпс (як частинний випадок – коло), гіперболу і параболу.

Еліпси мають широке використання в фізиці, астрономії та інженерії. Наприклад, орбіти планет нашої сонячної системи є дуже близькими до еліпсів, де однією із фокусних точок буде спільний барицентр планети і Сонця. Те саме є справедливим і для супутників, що обертаються довкола планет, і для інших систем, що складаються з двох астрономічних тіл. Форми планет і зірок часто добре описуються за допомогою еліпсоїдів.

Термін «Еліпс» походить від грецького слова **ἔλλειψις** – нестача, пропуск, випадіння (мається на увазі «неповнота» або «дефектність» еліпса порівняно з «повним» колом чи кругом).

Гіпербола зустрічається у багатьох випадках застосування. Це – крива, якою описується траєкторія тіні кінчика вказівника сонячного годинника; форма незамкненої (відкритої) орбіти, що відрізняється від замкненої еліптичної орбіти, по якій буде рухатися космічний апарат, котрий перевищив другу космічну швидкість у зоні дії гравітації найближчого астрономічного тіла. В радіо навігації, – коли можна визначити різницю у відстані між двома точками, але не значення самої відстані та ін.

Термін «Гіпербола» походить від грецького слова **ὑπερβολή**, що означає «кидати над» або «надмірний». Гіперболу відкрив математик Менехм при дослідженні задачі на подвоєння куба. Термін «гіпербола» було започатковане Аполлонієм Пергським.

Форму **параболи** приймає струмінь води, по параболі летить м'яч або камінь, це – траєкторія руху матеріальної точки. У свідомості давньогрецьких і сучасних архітекторів парабола стала уособленням закономірності, доцільності, краси. Ми можемо зустріти її у стародавніх спорудах, конструкціях сучасних будівель, мостів, пам'ятників. Парабола часто-густо використовується спільно із принципами «золотого перетину» та симетрії. Таким прикладом може служити картина Рафаеля «Заручення Марії» (див. §11, «Парабола», задача 1).

В основі побудови супутникових антен лежить принцип перетину параболи, що обертається навколо своєї осі симетрії (параболоїд обертання).

Термін «Парабола» походить від грецького **παραβολή**. Закони природи, які керують невичерпною у своєму різноманітті картиною явищ, теж виявляють форми цієї кривої. Природа в різних своїх творіннях, здавалося б, далеких один від одного, може використовувати одні й ті ж принципи. І людина – у своїх творіннях: живопису, скульптурі, архітектурі, … . Покладеними в основу принципами краси при цьому є пропорції і симетрія – те, що містить парабола.

§1. Трохи історії

Аполлоній Пергський

Аполлоній Пергський (≈ 260-170 р. р. до н. е.) – останній з трьох великих математиків епохи еллінізму. Молодим він приїхав до Александрії і вивчав математику в послідовників Евкліда в Мусейоні. Потім жив і працював у другому центрі грецької культури – місті Перга.

Аполлоній – автор багатьох математичних праць, найвизначнішою з яких є «Коніка» («Конусні»). Із восьми книг цього твору збереглися сім. «Коніка» присвячена конічним перерізам, або кривим другого порядку. Їх вивчали і до Аполлонія. Є свідчення, що учень Евдокса Кнідського – Менехм (бл. 360 до н. е.) – відкрив еліпс, гіперболу і параболу («тріада Менехма»), вивчив їх властивості і застосував до розв'язання задачі подвоєння куба (делоської задачі).

Конічні перерізи вивчали Евклід, Архімед та інші вчені. Один з біографів Архімеда навіть звинувачував Аполлонія в плагіаті, хоча аналіз «Коніки» свідчить, що для цього немає підстав. Попередники Аполлонія розглядали конічні перерізи за умови перпендикулярності площини перетину до твірної конуса. Якщо конус прямокутний, утворювалася парабола, гострокутний — еліпс, а якщо тупокутний – вітки гіперболи. Аполлоній розглядає загальний випадок утворення конічних перерізів при перетині довільного кругового двопорожнинного конуса площиною під будь-яким кутом. Учений дістає еліпс, параболу або гіперболу залежно від того, перетинає площина всі твірні тільки однієї порожнини конуса, паралельна вона одній твірній чи перетинає обидві порожнини. Аполлоній увів назви параболи, гіперболи й еліпса. Для кожної із цих кривих Аполлоній відкриває і доводить основні її властивості. Зокрема, в першій книзі «Коніки» за основу класифікації кривих прийнято, по суті, властивості їх алгебраїчних рівнянь, які Аполлоній записував в словесно-геометричній формі і називав симптомами кривої. Із сучасного погляду можна сказати, що Аполлоній досліджував властивості конічних перерізів відносно прямокутної системи координат, у якій одна вісь збігалася з головним діаметром кривої (в еліпса – це була велика вісь), а друга – проходила через вершину кривої. При цьому вчений досліджував саме ті властивості, які залишаються незмінними (інваріантними) при допустимих перетвореннях. Ця ідея стала зрозумілою лише в XIX ст., коли німецький математик Ф. Клейн (1849-1925) у своїй знаменитій Ерлангенській програмі запропонував розглядати кожну геометрію (синтетичну, аналітичну, проективну, афінну, топологію і т. ін.) як теорію, що вивчає геометричні властивості фігур, інваріантних відносно певної спеціальної групи перетворень площини або простору. Зокрема, евклідова геометрія – це наука, яка вивчає інваріанти метричної групи перетворень.

У семи книгах «Коніки» подано формулювання і доведення 387 теорем, в яких детально розглянуто найголовніші властивості кривих другого порядку. Немає жодної можливості передати все багатство змісту «Коніки». Досить сказати, що навіть сучасні університетські курси аналітичної геометрії не охоплюють всіх властивостей конічних перерізів, відкритих і доведених Аполлонієм. При відсутності аналітичного методу дослідження, виконане вченим, вимагало велетенської роботи.

Праця Аполлонія – класичний приклад створення математичних теорій з логіки розвитку самої науки. Справді, в математичному природознавстві конічні перерізи тривалий час не знаходили застосування (хіба що крім параболічних дзеркал). Криві другого порядку привернули увагу вчених у XVI ст., коли невтомний шукач розгадок таємниць природи Й. Кеплер (1571-1630) поборов тисячолітню традицію і дійшов висновку, що планети обертаються навколо Сонця не по колах, як у це вірили всі від піфагорійців до Коперника, а по еліпсах. Отже, ідея Аполлонія відродилася лише в XVII ст.

Багато визначних математиків присвятили свої дослідження різним питанням теорії конічних перерізів. Сьогодні ж властивості еліпса, параболи, гіперболи широко застосовуються в техніці, прикладній геометрії, при дослідженні законів природи. Теоретичний фундамент цих застосувань створив учений, який навіть не уявляв їх величезного обсягу. Це теж не випадково. Відкинувши безліч другорядних властивостей, учений дістав у чистому вигляді певні просторові форми та кількісні відношення, які характеризували вже не окреме явище, а цілий клас подібних за певними числовими характеристиками явищ. Як кожна правильно побудована наукова теорія, «Коніка» діждалася свого часу, щоб допомогти людині глибше проникнути в таємниці закономірностей природи і використовувати їх у своїй практичній діяльності.

Різні автори називають ще інші праці Аполлонія з математики, астрономії, оптики, але жодна з них до нас не дійшла, хоча відомо, які проблеми розв'язував у них учений. У «Загальному трактаті» він вивчав загальні, недоводжувані поняття геометрії – аксіоми, постулати та їх відношення до реальної дійсності. Аполлоній обчислював також значення числа π і дістав таке його наближення: $\pi \approx \frac{62832}{20000} \approx 3{,}1416.$

Він запропонував аналогічну розробленій Архімедом позиційну систему числення за тетрадами (степенями міріад, тобто 10 000). Окремі праці вчений присвятив невпорядкованим ірраціональностям і запалювальним дзеркалам, які надто цікавили Архімеда.

У двотомній книжці Аполлонія «Про дотики» було вміщено його знамениту задачу: «Дано три фігури, кожна з яких може бути точкою, прямою або колом. Побудувати коло, яке проходило б через дані точки (або точку) і дотикалося до даних кіл або прямих». Розв'язання задачі самим Аполлонієм до нас не дійшло. Пропоновані задачі на побудову – п'ять з десяти можливих окремих варіантів задачі Аполлонія. Легко побачити, що кожний варіант має кілька окремих випадків, залежно від розміщення даних фігур на площині (*Вікіпедія*).

§2. Полярна система координат. Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки. Приклади

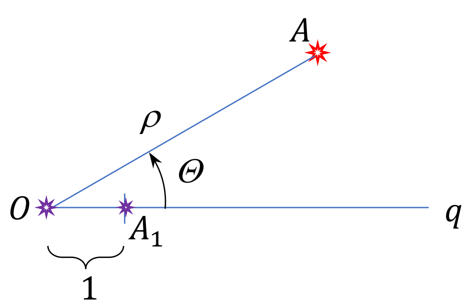


Рис. 1

Афінна система координат (прямокутна – як її частинний випадок) дає зручний, однак не єдиний спосіб установлення розташування точок площини за допомогою упорядкованих пар чисел. Якщо вказано правило, за яким можна встановлювати розташування точок площини з допомогою елементів із R^2, то говорять, що на площині задано систему координат. У математичних науках має широке застосування система ***полярних координат*** на площині.

Проводимо із довільної точки O на площині промінь q (рис. 1) і задаємо на ньому одиничний відрізок та деякий напрям відрахування від променя q кутів Θ. Тоді кожній точці A площини можна поставити у відповідність два числа ρ і Θ, де ρ буде *відстанню* від точки O до точки A, а Θ – *кутом*, що утворює промінь q із відрізком $\rho = OA$.

Числа ρ і Θ називаються *полярними координатами* точки A; точку O – *полюсом* полярної системи координат (ПСК), а пряму q – *полярною віссю*, пишуть $A(\rho, \Theta)$. Якщо $A \equiv O$, то $\rho = 0$, а Θ – невизначений. Таким чином, ми отримуємо всі точки площини, якщо ρ буде змінюватися на півсегменті від 0 до $+\infty$, а Θ – на півсегменті, де $0 \leq \Theta < 2\pi$. Зрозуміло, що упорядкованій парі чисел (ρ, Θ) відповідатиме єдина точка площини.

Подібно тому, як у випадку прямокутної декартової системи координат (ПДСК), тепер уже можна вести мову про рівняння кривої в полярних координатах. А саме, рівняння виду $\varphi(\rho, \Theta) = 0$ називають *рівнянням кривої* в полярних координатах, якщо: полярні координати кожної точки кривої йому задовольняють; і навпаки, будь-яка пара чисел (ρ, Θ), що задовольняють цьому рівнянню, представляють собою полярні координати однієї із точок кривої.

Існує в геометрії поняття ***узагальненої системи полярних координат***. Така система теж задається на орієнтованій площині полярною віссю q і одиничним відрізком на цій осі. Однак пряма OA $(A \neq O)$ розглядається як вісь, додатній напрям якої визначається ортом $\vec{e}$. Полярний радіус $\overrightarrow{OA} = \rho \cdot \vec{e}$. Отже, ρ може приймати і від'ємні значення, а кут Θ буде орієнтованим кутом між векторами $\overrightarrow{OA_1}$ і $\vec{e}$. Коли вектори $\overrightarrow{OA_1}$ і $\vec{e}$ однаково напрямлені, то узагальнені полярні координати точки A зливаються із звичайними полярними координатами цієї ж точки. Якщо ж на осі OA вибрано додатній напрям $(\overrightarrow{e'} = -\vec{e})$, точка $A(\rho, \Theta)$ одержить нові координати: $\rho' = -\rho$, $\Theta' = \pi + \Theta$. Таким чином, в узагальненій системі координат дві пари чисел (ρ, Θ) і $(-\rho, \Theta + \pi)$ визначають на площині одну й ту саму точку A.

Приклад 1. Записати рівняння кола в полярних координатах.

Нехай полюс ПСК (точка O) лежить на колі, полярна вісь q уміщує діаметр OA_0, а радіус кола рівний R; тут $\rho = OA$, $\angle A_0OA = \Theta$ (рис. 2). У прямокутному трикутнику A_0OA матимемо $OA = 2R \cdot \cos\Theta$, тому $\boldsymbol{\rho = 2R \cdot \cos\Theta}$.

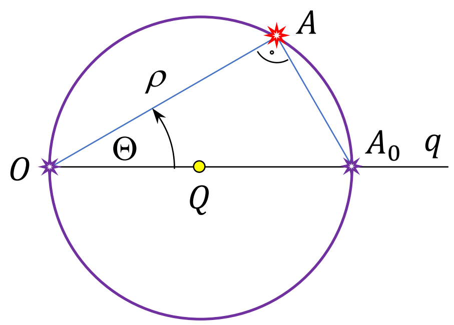


Рис. 2

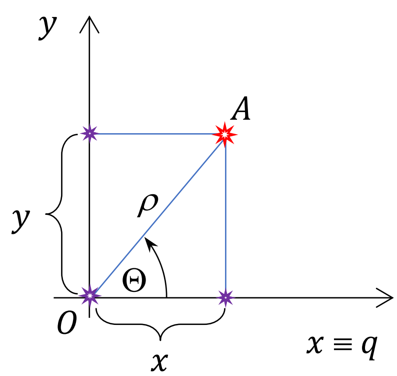


Рис. 3

Отже, рівняння кола в ПСК записано.

Щоб установити зв'язок між полярними та декартовими координатами, приймаємо за початок ПДСК xOy точку O ПСК, а її полярну вісь q – за додатну піввісь абсцис. Нехай також додатна піввісь ординат Oy утворює з віссю Ox кут $+\frac{\pi}{2}$ (рис. 3). Тоді отримаємо: $\{\boldsymbol{x = \rho \cdot \cos\Theta}\ , \boldsymbol{y = \rho \cdot \sin\Theta}\}$ (1).

Навпаки, піднесемо до квадрату рівняння (1) і додамо. Матимемо наступне:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cdot (\cos^2\Theta + \sin^2\Theta) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \boldsymbol{\sin\Theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\Theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \end{matrix} \right\} \text{(2).}$$

За формулами (1) можна перейти від ПСК до ПДСК, а завдяки формулам (2) – від ПДСК до ПСК.

Приклад 2. Перейти від рівняння кола в ПСК до рівняння у ПДСК.

Скористаємося формулами (2). Отже, підставимо в рівняння $\rho = 2R \cdot \cos\Theta$ значення ρ і $\cos\Theta$: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2R \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2Rx$. Виділимо в цьому останньому виразі повний квадрат: $x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 - R^2 = 0$. Остаточно матимемо: $\boldsymbol{(x - R)^2 + y^2 = R^2}$ (3).

Якщо уявити рисунок 2 таким, у якого полярна вісь є віссю Ox, а вісь Oy проходить через точку O перпендикулярно осі Ox, то коло, зображене на ньому, буде описане знайденим рівнянням (3).

Приклад 3. Перейти від загального рівняння прямої до її ж рівняння в полярних координатах.

Пригадаємо як перейти від загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ (*) до нормального рівняння цієї ж прямої: $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$ (**).

Отже, розташування прямої у ПДСК вважається цілком визначеним, якщо задано відрізок $\boldsymbol{p}$ відстані від початку координат до прямої, а також кут $\boldsymbol{\alpha}$ нахилу відрізка p до осі Ox (рис. 4).

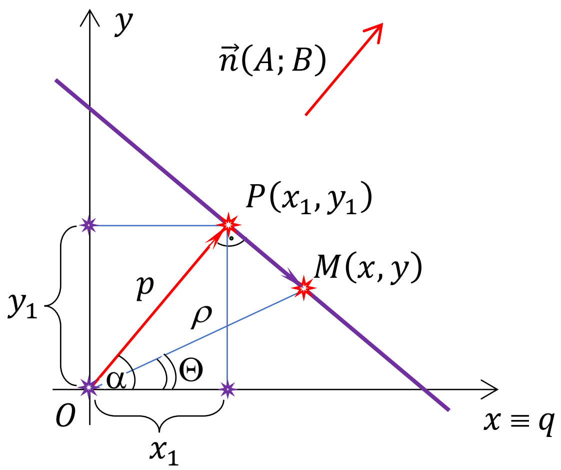


Рис. 4

У такому випадку здійснити перехід від першого рівняння до другого надто просто: 1) позначаємо координати точки – основи перпендикуляра, опущеного з початку координат на дану пряму, через (x_1, y_1), де $x_1 = p \cdot \cos\alpha, y_1 = p \cdot \sin\alpha$, що очевидно; координати вектора $\overrightarrow{OP}$ будуть такими ж; 2) обираємо деяку біжучу точку прямої $M(x;\ y)$; напевне, що вектор $\overrightarrow{PM}$ матиме координати $(x - x_1;\ y - y_1)$; 3) оскільки вектори $\overrightarrow{OP}$ і $\overrightarrow{PM}$ взаємно перпендикулярні, їх скалярний добуток рівний нулю; 4) виконавши скалярне множення векторів $\overrightarrow{OP}$ і $\overrightarrow{PM}$ та здійснивши формально відповідні прості перетворення, матимемо нормальне рівняння прямої у вигляді (**).

Тепер від нормального рівняння (**) до рівняння прямої в ПСК перейдемо за формулами (1), шляхом заміни x та y їх значеннями. Маємо такий результат: $\rho \cdot \cos\Theta\cos\alpha + \rho \cdot \sin\Theta\sin\alpha - p = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot (\cos\Theta\cos\alpha + \sin\Theta\sin\alpha) = p$. Або по іншому: $\boldsymbol{\rho \cdot \cos(\alpha - \Theta) = p}$. Це й буде рівнянням прямої в полярних координатах.

§3. Що таке «конічний переріз»? Характеристична властивість та ексцентриситет конічного перерізу

Конічний переріз (по іншому, **перетин**) – це плоска крива, яку отримують шляхом перетину площини, що називається *січною площиною*, із поверхнею подвійного конуса (конус з двома симетричними частинами, порожнинами). Для спрощення опису будемо вважати, що це правильний круговий конус. Однак це не обов'язково, адже поняття є актуальним для будь-якого двопорожнинного конуса, що припускає утворення кола при перетині площиною.

Площини, що проходять через вершину конуса будуть перетинати конус у точці, по прямій (дотикання площини до поверхні конуса) або по парі прямих, які перетинаються. Такі випадки називають **виродженими**, які не складають жодного інтересу і тому, зазвичай, цей випадок не розглядають в якості конічних перерізів. Якщо явно не передбачено щось інше, то під «конічним перерізом» слід розуміти **невироджені** варіанти перетинів.

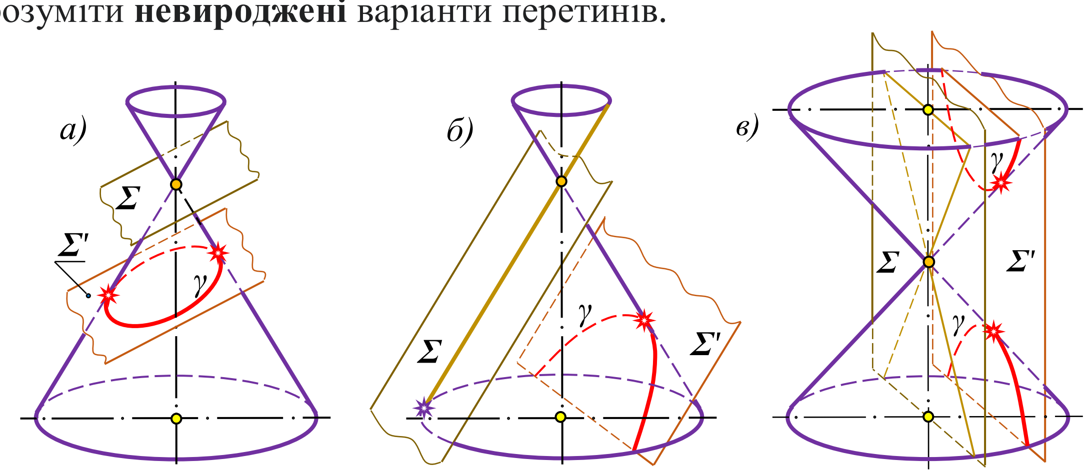


Рис. 5

Розглядають виключно три види конічних перерізів (рис. 5), *еліпс*, *гіпербола* і *парабола*. *Коло* є частинним випадком еліпса, хоча історично його розглядали як четвертий особливий тип перерізу (наприклад, це властиво дослідженням давньогрецького математика Аполлонія). Коло і еліпс виникають, коли перетин площини і конуса утворює замкнену криву (рис. 5, *а*). Коло утворюється, коли січна площина є паралельною площині основного кола, що є напрямною при утворенні конуса. Для прямого кругового конуса це означає, що січна площина також є перпендикулярна осі обертання твірної при утворенні конуса. Якщо січна площина є паралельною лише до однієї з твірних, що утворюють конус, тоді конічний переріз необмежений і не є замкненим й називається *параболою* (рис. 5, *б*). Цікавим є ще один варіант перетину – *гіпербола*. В даному випадку січна площина перетне *обидві* порожнини конуса, що паралельна до двох твірних, утворюючи окремо дві гілки необмеженої кривої (див. рис. 5, *в*; січна площина, зокрема, може бути також похилою до площини основи, але ж паралельною двом твірним).

Конічні перерізи володіють багатьма чудовими властивостями. Вихідною, найбільш важливою, спільною для кожного перерізу є так звана характеристична властивість. У чому вона полягає?

Теорема.

Усякий конічний переріз, крім кола, представляє собою геометричне місце точок площини, відношення відстаней яких від деякої точки F і деякої прямої d постійне.

Точка ***F*** називається **фокусом**, а пряма ***d*** – **директрисою** конічного перерізу.

Доведення.

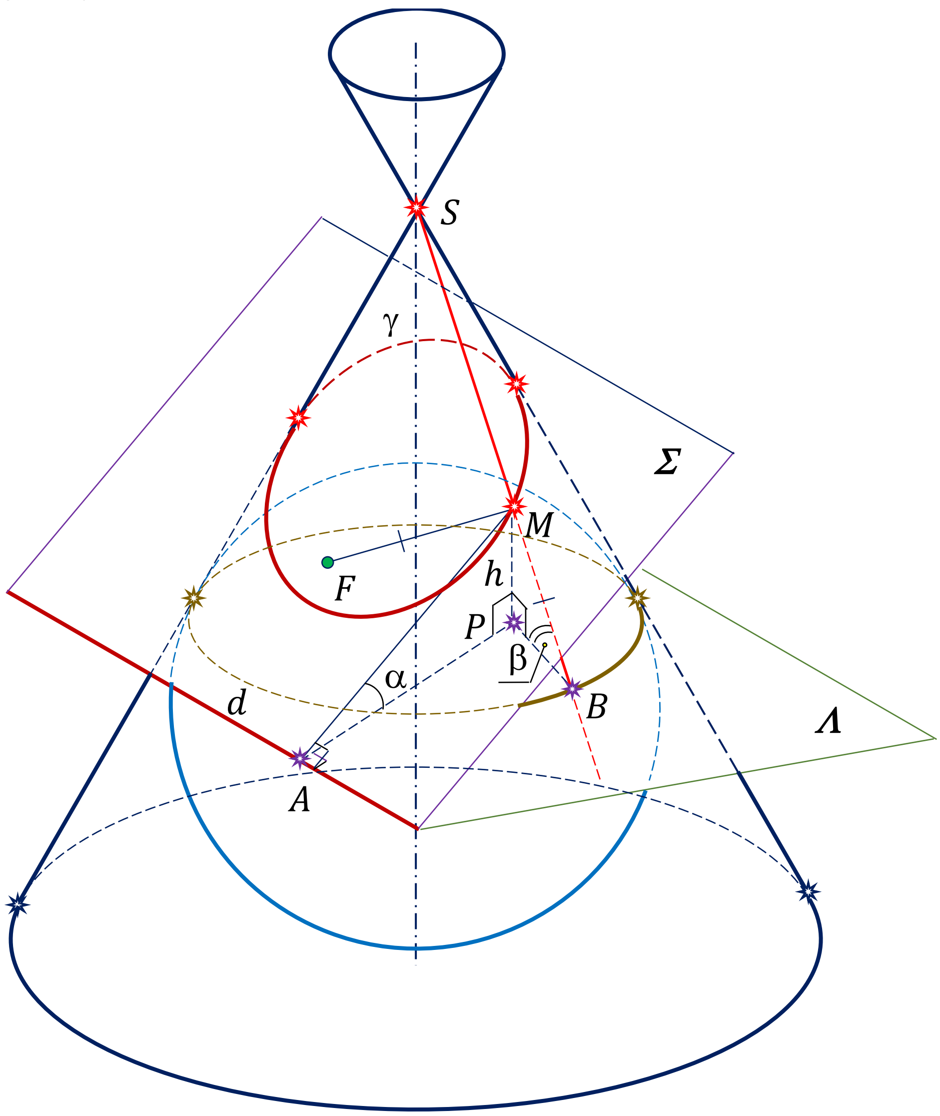


Рис. 6

Нехай γ – крива лінія, по якій січна площина Σ перетинає поверхню конуса (рис. 6). Упишемо в конус сферу, яка дотикається до площини Σ в деякій точці F. Нехай також Λ є площиною, в якій лежить коло дотикання сфери і конуса. Візьмемо на кривій γ довільну точку M і проведемо через цю точку твірну на поверхні конуса. Позначимо точку перетину твірної з площиною Λ (отже, і з кривою дотикання сфери і конуса) через B. Опустимо, нарешті, перпендикуляри на площину Λ та на пряму d перетину площин Λ і Σ. Нехай це будуть відповідно точки P і A ($P \in \Sigma$, $A \in \Lambda$). Стверджуємо, що крива γ по відношенню до точки F і прямої d має сформульовану в умові теореми властивість.

Дійсно, $FM = BM$ як дотичні, проведені до сфери із зовнішньої точки M. Якщо через h позначити відстань від точки M до площини Λ, то у прямокутному трикутнику AMP $AM = \frac{h}{\sin\alpha}$, а у прямокутному трикутнику BMP $BM = \frac{h}{\sin\beta}$, де α – кут між площинами Σ і Λ, а β є кутом між твірною конуса SM і площиною Λ. Звідси випливає, що $\frac{FM}{AM} = \frac{BM}{AM} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, тобто відношення $\varepsilon = \frac{FM}{AM}$ не залежить від вибору точки M на конічному перерізі (α і β – сталі). Теорему доведено.

У залежності від того, яке відношення $\boldsymbol{\varepsilon}$ відстаней від довільної точки M конічного перерізу до фокуса F і до директриси d, крива називається ***еліпсом*** ($\boldsymbol{\varepsilon} < 1$), ***параболою*** ($\boldsymbol{\varepsilon} = 1$) і ***гіперболою*** ($\boldsymbol{\varepsilon} > 1$). Число $\boldsymbol{\varepsilon}$ при цьому називається ***ексцентриситетом*** конічного перерізу.

У випадку еліпса ($\varepsilon < 1$, рис. 7, *a*) і параболи ($\varepsilon = 1$, рис. 7, *b*) усі точки M конічного перерізу розташовуються з одного боку від директриси d, а саме з того боку, де розташовується його фокус F. Дійсно, для всякої точки M, розташованої з іншого боку від директриси, $\frac{FM}{AM} > \frac{MK}{MA} \geq 1$.

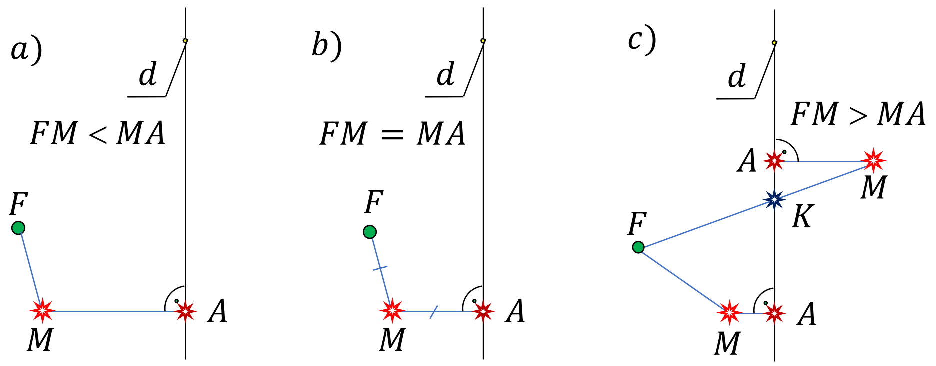


Рис. 7

Із гіперболою інша ситуація ($\varepsilon > 1$, рис. 7, *c*). Тут, очевидно, є точки, котрі розташовуються з обох боків директриси d. Тому гіпербола складається з двох гілок, які розділяються директрисою. Із трьох конічних перерізів лише гіпербола розпадається на дві гілки.

Отже, з даного параграфа ми дізналися, що собою представляє конічний переріз, довели його характеристичну властивість і з’ясували, що є спільного в існуючих перерізів й чим вони відрізняються. Очевидно також, що однією із визначальних характеристик перерізу конуса площиною є його ексцентриситет.

§4. Рівняння конічних перерізів у полярній системі координат

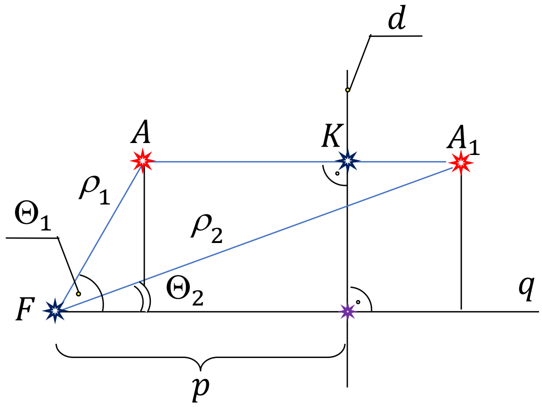


Рис. 8

Нехай (рис. 8) F – фокус конічного перерізу і, водночас, полюс полярної системи координат (ρ, Θ). Полярну вісь q зумисне розташуємо так, щоб вона була перпендикулярною до директриси і перетинала її. Позначимо відстань від фокуса до директриси через p (**параметр** конічного перерізу). Відстань довільної точки A до фокуса, як уже відомо, дорівнює ρ, а відстань від точки $A(A_1)$ до директриси AK рівна $p-\rho\cdot\cos\Theta$ або ж $\rho\cdot\cos\Theta-p$, залежно від того, як розташовуються точки $A(A_1)$ – з одного боку від директриси чи з різних боків.

Отже, у випадку *еліпса* чи *параболи* (точки конічного перерізу розміщені в тій півплощині відносно директриси, якій належить фокус F – лише для точки A) матимемо наступне вираження ексцентриситету: $\varepsilon=\frac{\rho}{p-\rho\cdot\cos\Theta}$; якщо ж конічним перерізом буде *гіпербола* (тобто для точок A і A_1), отримаємо: $\pm\varepsilon=\frac{\rho}{p-\rho\cdot\cos\Theta}$. Або по іншому: $\rho=\varepsilon\cdot(p-\rho\cdot\cos\Theta)$ (*) і $\rho=\pm\varepsilon\cdot(p-\rho\cdot\cos\Theta)$ (**). В останньому випадку (для гіперболи) знак «+» відповідає одній із гілок перерізу, а знак «–» – іншій гілці. Розв’язавши рівняння (*) і (**) відносно ρ, матимемо рівняння кожного з перерізів у полярних координатах:

$$\rho=\frac{\varepsilon\cdot p}{1+\varepsilon\cdot\cos\Theta}\ (\text{е, п; } \varepsilon\leq 1);\quad \rho=\frac{\pm\varepsilon\cdot p}{1\pm\varepsilon\cdot\cos\Theta}\ (\text{г; } \varepsilon>1).$$

§5. Канонічні рівняння конічних перерізів у прямокутній декартовій системі координат

Напевно, що тепер, вивівши рівняння конічних перерізів у полярній системі координат, а також знаючи формули переходу від ПСК до ПДСК, ми можемо не докладаючи особливих зусиль отримати канонічні рівняння конічних перерізів у прямокутних координатах.

У дослідженні вихідними варто взяти вже виведені формули (*) і (**), адже вони надто схожі. Піднісши кожну з них до квадрату, одержимо вираз, котрий буде істинним для будь-якого конічного перерізу: $\rho^2=\varepsilon^2\cdot(p-\rho\cdot\cos\Theta)^2$. Звідси, враховуючи формули зв’язку (1) із п. 2 між полярними і декартовими координатами, одержимо: $x^2+y^2=\varepsilon^2\cdot(p-x)^2\Rightarrow x^2+y^2=\varepsilon^2p^2-2\varepsilon^2px+$ $+\varepsilon^2x^2\Rightarrow(1-\varepsilon^2)x^2+2\varepsilon^2px+y^2-\varepsilon^2p^2=0$ (***).

Напевно, що рівняння (***) можна помітно спростити, якщо відповідним чином скористатися перетворенням площинного паралельного перенесення.

Розглянемо спочатку випадок *еліпса* і *гіперболи*, адже саме для цих перерізів $\varepsilon\neq 1$. Отже, рівняння (***) перепишемо шляхом виділення повного квадрату:

$$(1-\varepsilon^2)\left(x^2+2\cdot\frac{\varepsilon^2p}{1-\varepsilon^2}x+\left(\frac{\varepsilon^2p}{1-\varepsilon^2}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon^2p}{1-\varepsilon^2}\right)^2\right)+y^2-\varepsilon^2p^2=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow (1-\varepsilon^2)\left(x+\frac{\varepsilon^2 p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^4 p^2}{1-\varepsilon^2} + y^2 - \varepsilon^2 p^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-\varepsilon^2)\left(x+\frac{\varepsilon^2 p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2 - \frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2} = 0.$

Тепер слід виконати паралельне перенесення вздовж осі Ox, ввівши нові координати за формулами $x' = x + \frac{\varepsilon^2 p}{1-\varepsilon^2}$, $y' = y$, що відповідатиме перенесенню початку координат O в точку $\left(-\frac{\varepsilon^2 p}{1-\varepsilon^2}; 0\right)$. Рівняння розглядуваного конічного перерізу матиме вид: $(1-\varepsilon^2){x'}^2 + {y'}^2 - \frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2} = 0$. Поділимо ліву і праву частини цього рівняння на $\frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2}$ і введемо такі заміни: $\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = a^2$, $\frac{\varepsilon^2 p^2}{|1-\varepsilon^2|} = b^2$. Отримаємо 1) для *еліпса*: $\boldsymbol{\frac{{x'}^2}{a^2} + \frac{{y'}^2}{b^2} = 1}$ (1); 2) для *гіперболи*: $\boldsymbol{\frac{{x'}^2}{a^2} - \frac{{y'}^2}{b^2} = 1}$ (2).

У випадку *параболи* ($\varepsilon = 1$) рівняння (***) матиме вид: $2px + y^2 - p^2 = 0$ або $y^2 - 2p \cdot \left(-x + \frac{p}{2}\right) = 0$. Введемо нові координати з метою перенесення вздовж осі Ox: $x' = -x + \frac{p}{2}$, $y' = y$. У підсумку матимемо: $\boldsymbol{{y'}^2 - 2py' = 0}$ (3). Одержані в такому вигляді рівняння конічних перерізів $(1), (2)$ і (3), що достеменно відомо, називаються *канонічними* (найпростішими).

Приклад 4. Скласти рівняння конічного перерізу з фокусом у точці $F(x_0; y_0)$, директрисою $Ax + By + C = 0$ і ексцентриситетом ε.

Відстань від довільної точки $M(x, y)$, яка виконує роль біжучої точки конічного перерізу, до його фокуса $F(x_0; y_0)$, а також відстань від цієї ж точки до заданої директриси доречно шукати за формулами $MF = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $\rho(M, d) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ відповідно.

Оскільки відношення цих відстаней дорівнює ексцентриситету конічного перерізу, буде справедливою наступна рівність: $\frac{\sqrt{A^2+B^2} \cdot \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{|Ax+By+C|} = \varepsilon$. Або дещо по іншому: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{\varepsilon^2}{A^2+B^2} \cdot (Ax + By + C)^2$.

Схему розв’язання задачі можна перевірити числовим прикладом.

Приклад 4′ (розв’язати самостійно). Точка $M(2; -1)$ належить еліпсу, фокус якого $F(1; 0)$, а відповідна директриса задається рівнянням $2x - y - 10 = 0$. Записати рівняння еліпса.

Відповідь: $17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0$.

§6. Дослідження форми конічних перерізів

Еліпс. Відомо, що канонічне рівняння еліпса має вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1). Якщо точка (x, y) належить еліпсу, то симетричні їй точки відносно координатних осей $(-x, y)$, $(x, -y)$ і відносно початку координат $(-x, -y)$ також належать еліпсу, оскільки координати цих точок задовольняють його рівнянню. Тому для еліпса, який описується канонічним рівнянням, ***осі координат*** являються ***осями*** його ***симетрії***, а ***початок координат*** – ***центром симетрії*** (рис. 9).

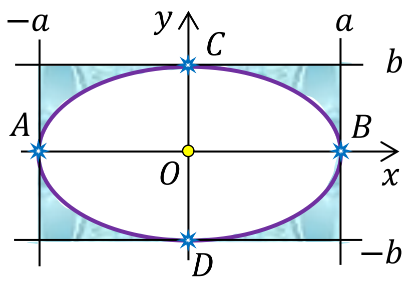


Рис. 9

Точки перетину еліпса з осями симетрії називаються ***вершинами***, а центр симетрії – ***центром*** еліпса. Отже, в еліпса чотири вершини: A, B, C і D.

Усі точки еліпса розміщуються всередині прямокутника $|x| \le a$, $|y| \le b$, що утворюється дотичними до еліпса в його вершинах. Це випливає із канонічного рівняння еліпса, оскільки сума двох додатних чисел рівна одиниці тоді й лише тоді, коли кожне з цих чисел менше (рівне) одиниці.

Щоб уявити форму еліпса γ, достатньо його розглянути в межах одного координатного кута (наприклад, кута BOC, див. рис. 9), де $x \ge 0$ і $y \ge 0$, після чого скористатися властивістю симетрії кривої відносно координатних осей і центра. Так, для будь-якої точки M, яка належить еліпсу і куту BOC, $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. При зростанні $x \ge 0$ від 0 до a матимемо, що ордината y точки M спадає від b до 0.

Вище ми констатували, що коло є частинним випадком еліпса ($a = b = r$). Однак, окрім того, еліпс можна отримати із кола, якщо піддати коло площинному афінному перетворенню – рівномірному стиску до координатної осі Ox. Такий стиск описується елементарними формулами: $x' = x$; $y' = \lambda y$. Якщо напрямок стиску перпендикулярний осі Ox, то отримаємо стиск до прямої.

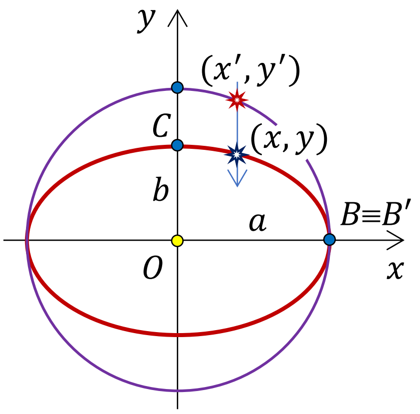


Рис. 10

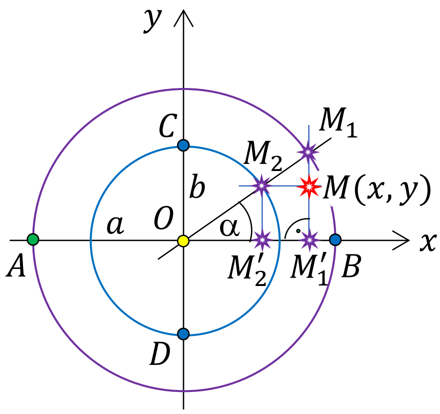


Рис. 11

У ПДСК xOy задане коло описується рівнянням: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ (рис. 10). Скористаємося формулами стиску ($x' = x$; $y' = \lambda y$). Нехай коефіцієнт стиску $\lambda = \frac{a}{b}$, де b є малою віссю еліпса. Очевидно, що так коло перейде в деяку криву, координати якої мали б задовольняти рівнянню: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{a^2}{b^2} \cdot y^2}{a^2} = 1$. Звідси остаточно отримаємо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Отже, дана крива є еліпсом із півосями a і b.

Коло й еліпс ще називають афінно-еквівалентними фігурами: говорять, що ***еліпс*** є *афінним образом* ***кола***.

Важливо, що з'ясований факт дозволяє надто просто вивести *параметричні рівняння еліпса*, побудувати конструктивним методом достатньо велике число його точок, які опісля акуратно з'єднують лекальною кривою. Іншими словами, можна швидко циркулем і лінійкою побудувати еліпс із заданими півосями.

Найперше, з центром O в початку ПДСК xOy проведемо два концентричні кола радіусами a та b (рис. 11). Через точку O проведемо також під будь-яким кутом до осі Ox промінь і зафіксуємо його точки перетину M_1 і M_2 відповідно з більшим і меншим колами. Далі, через точку M_1 більшого кола ведемо пряму паралельно малій осі еліпса CD, а через точку M_2 меншого кола – паралельно великій осі еліпса AB. Фіксуємо точку M перетину проведених прямих. Нарешті, із прямокутних трикутників OM_1M_1' і OM_2M_2' помічаємо, що абсциса точки M $x = a \cdot \cos\alpha$ (1), а її ордината $y = b \cdot \sin\alpha$ (2). Формули (1) і (2) можна подати єдиним виразом. Отже, ділимо спочатку ліву і праву частини формул відповідно на a та b, так отримані результати підносимо до квадрату й почлено їх додаємо. Так, отримаємо канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3).

Цим доводимо той факт, що рівняння (1) і (2) є істино параметричними рівняннями даного конічного перерізу, де в якості параметра слугує кут α, який змінюється в межах: $0 \le \alpha < 2\pi$.

Скориставшись симетріями еліпса, до кожної точки M можна добудувати ще трійку симетричних їй точок.

Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи має вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (4).

Аналогічно (як для еліпса) встановлюємо, що ***координатні осі*** гіперболи являються ***осями*** її ***симетрії***, а ***початок координат*** – ***центром симетрії***. Мається на увазі, що якщо деяка точка $M(x, y)$ належить гіперболі, то симетричні їй точки відносно координатних осей $(-x, y)$, $(x, -y)$ і відносно початку координат $(-x, -y)$ також належать гіперболі, оскільки координати цих точок задовольняють її рівнянню (рис. 12).

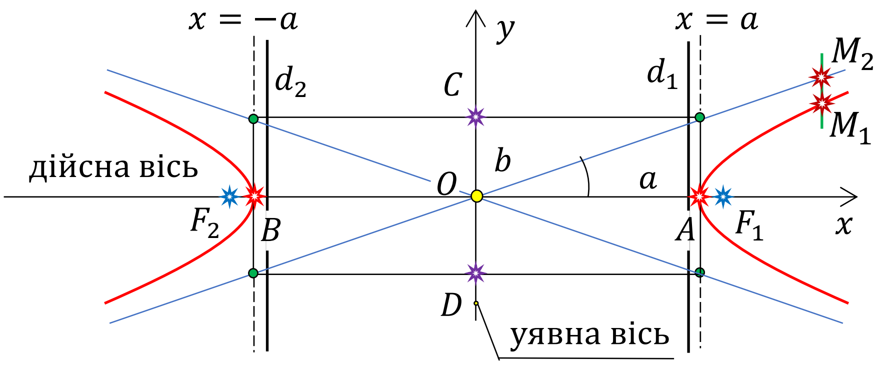


Рис. 12

Оскільки в канонічному рівнянні гіперболи різниця двох додатних чисел дорівнює одиниці, то зменшуване більше від'ємника на одиницю. Отже, у зменшуваного чисельник більший знаменника, тобто $|x| \ge a$. Це у свою чергу означає, що у ПДСК у межах полоси $x = a$ і $x = -a$ точок конічного перерізу не може бути, тобто гіпербола розпадається на дві гілки. Одна з гілок розміщується в півплощині $x \ge a$, а інша – $x \le -a$. Точки перетину кривої з віссю абсцис називаються її ***вершинами***. Тож у гіперболи дві вершини: $A(a; 0)$ і $B(-a; 0)$.

Для з'ясування більш конкретного місця розташування гілок гіперболи, знайдемо точки перетину прямої $l: x = l_1 t$ $(5), y = l_2 t$ (6) із заданою кривою (4). Пряма l задається параметричними рівняннями й вона проходить через початок координат. Підставимо в рівняння (4) значення x і y з рівнянь (5) і (6). Отримаємо наступне: $\frac{l_1^2 t^2}{a^2} - \frac{l_2^2 t^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{l_1^2}{a^2} - \frac{l_2^2}{b^2}\right) \cdot t^2 = 1$. Тут, що очевидно, можливі три різні випадки: **1**). Якщо $\left(\frac{l_1^2}{a^2} - \frac{l_2^2}{b^2}\right) > 0$, то $t_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{l_1^2 b^2 - l_2^2 a^2}}$. Отже, дана пряма l перетинає конічний переріз у двох точках: $K_1(l_1 t_1; l_2 t_1)$ і $K_2(l_1 t_2; l_2 t_2)$. **2**). Якщо $\left(\frac{l_1^2}{a^2} - \frac{l_2^2}{b^2}\right) < 0$, то пряма l не перетинає кривої (4). **3**). Нарешті, коли $\left(\frac{l_1^2}{a^2} - \frac{l_2^2}{b^2}\right) = 0$, то $\frac{l_1}{a} = \pm \frac{l_2}{b}$ або $\frac{l_2}{l_1} = \pm \frac{b}{a} = k$. У рівняннях (5) і (6) числа l_1 і l_2 є координатами напрямного вектора прямої l. Відомо, що у ПДСК таке відношення представляє собою кутовий коефіцієнт прямої. Таким чином, ми маємо дві прямі m_1 і m_2 з кутовими коефіцієнтами $+\frac{b}{a} = k_1$ і $-\frac{b}{a} = k_2$ відповідно.

Прямі m_1 і m_2, рівняння яких у формальному запису мають вид: $y = \frac{b}{a} x$ і $y = -\frac{b}{a} x$, називають ***асимптотами гіперболи***.

Важливо дослідити як взаємно розташовуються асимптоти і гілки гіперболи на графіку розглядуваного конічного перерізу (див. рис. 12).

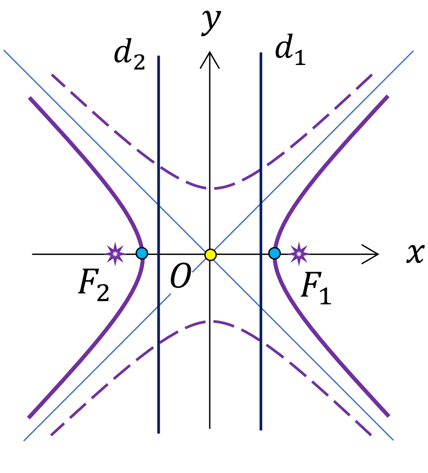
У першому квадранті проведемо деяку пряму, що паралельна осі Oy. Нехай ця пряма перетинає гіперболу в точці $M_1(x, y_1)$, а асимптоту кривої – в точці $M_2(x, y_2)$, де $x > 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0$. Маючи рівняння гіперболи (4) і асимптоти $y = \frac{b}{a} x$, отримаємо таке: $\left(y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{x^2}\right) \Rightarrow y_2 > y_1$! Звідси, у свою чергу, випливає, що гілки гіперболи лежать у внутрішніх областях вертикальних кутів, утворених асимптотами, які вміщують вершини кривої. Знайдемо різницю $y_2 - y_1$. Отже, маємо: $y_2 - y_1 = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\left(\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) \cdot \left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$.

Із отриманого результату неважко помітити, що за умов необмеженого зростання абсциси $x > 0$ точок $M_1(x, y_1)$ і $M_2(x, y_2)$, різниця їх ординат $y_2 - y_1$ монотонно спадає і прямує до нуля, тобто точка M_1 гіперболи необмежено наближається до точки M_2, яка лежить на асимптоті. Важливо розуміти, що ця різниця ординат точок в жодному разі не буде рівна 0.

Якщо в рівнянні конічного перерізу (4) $a = b$, то така гіпербола називається рівнобічною.

Коли рівняння гіперболи має вид: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, то такий конічний переріз буде спряженим до даної гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Вершини і фокуси спряженої гіперболи належатимуть осі Oy (вісь Oy буде фокальною віссю), а директриси розташуються паралельно осі Ox.

Рисунком 13 демонструється рівнобічна і спряжена гіперболи.



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Рис. 13

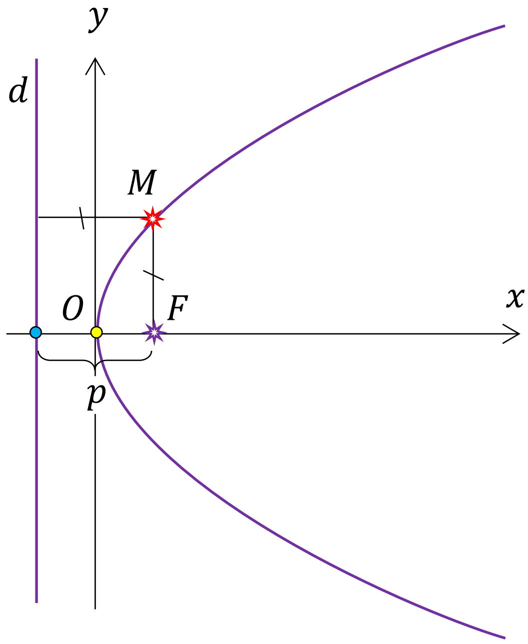


Рис. 14

Парабола. Канонічне рівняння параболи має вид: $y^2 - 2px = 0$ (7), де p – параметр конічного перерізу (рис. 14). Часто рівняння параболи записують по іншому, а саме: $y^2 = 2px$.

Якщо деяка точка (x, y) належить параболі, то $(x, -y)$ теж належатиме цій кривій. Саме тому вісь Ox є віссю симетрії цього конічного перерізу.

Точка перетину параболи з віссю Ox називається її ***вершиною***. Очевидно, що вершина кривої має координати (0; 0).

Якщо x необмежено зростає, то й y теж необмежено зростає.

Завершуючи розгляд питання «Дослідження форми конічних перерізів», не зашкодить чітко пам'ятати означення канонічного (найпростішого) кожного із розглядуваних конічних перерізів.

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней кожної з яких до точок F_1 і F_2, які називають фокусами еліпса, рівна довжині відрізка PQ ($F_1F_2 < PQ$).

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, абсолютне значення відстаней кожної з яких до точок F_1 і F_2, які називають фокусами гіперболи, дорівнює довжині відрізка PQ ($F_1F_2 > PQ$).

Параболою називається геометричне місце точок площини, відстань кожної з яких до точки F, яка називається фокусом параболи, рівна її відстані до прямої d – директриси кривої. Число $\rho(F, d) = p$ називається параметром параболи.

Канонічними означеннями конічних перерізів і їх рівняннями нам ще не один раз доведеться користуватися нижче.

§7. Дотична до конічного перерізу

Дотичною до кривої в точці A називається, як відомо із математичного аналізу, граничне положення січної AB, коли точка B по кривій необмежено наближається до точки A (рис. 15).

Нехай $y = f(x)$ – рівняння деякої кривої γ. Виведемо рівняння дотичної до даної кривої в точці $A(x_0, y_0)$. Нехай також точка $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ є близькою точкою до точки A на цій же кривій.

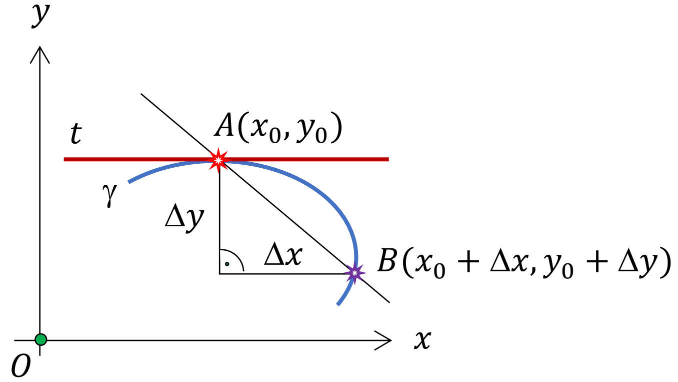


Рис. 15

Рівняння січної AB можна записати у такому вигляді: $y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$, де $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – кутовий коефіцієнт січної. Рівняння дотичної $y - y_0 = k(x - x_0)$, де k виконує роль кутового коефіцієнта дотичної в точці A, який потрібно знайти. Якщо B прямує до A (по кривій γ), то Δx прямує до нуля, що очевидно, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$.

Із диференціального числення відомо, що записана границя представляє собою похідну від ординати y по абсцисі x, яку взято в точці $A(x_0, y_0)$, тобто $k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} =$
$= f'(x_0)$.

Випадок **еліпса (гіперболи)**.

1. Записуємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Диференціюємо його: $\frac{1}{a^2} 2xdx + \frac{1}{b^2} 2ydy = 0$.
3. Із останнього виразу отримуємо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{xb^2}{ya^2}$.
4. Кутовий коефіцієнт дотичної в точці $A(x_0, y_0)$ $k = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$.
5. Підставляємо k у рівняння дотичної $y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0)$.
6. Множимо ліву і праву частини цього рівняння на $\frac{y_0}{b^2}$.
7. У результаті отримаємо: $\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2}$.

Оскільки точка $A(x_0, y_0)$ належить конічному перерізу, зліва в останньому виразі маємо одиницю. Через що рівняння дотичної до еліпса в точці $A(x_0, y_0)$ матиме вид: $\boldsymbol{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$.

Аналогічно виводимо рівняння дотичної до гіперболи в її точці $A(x_0, y_0)$: $\boldsymbol{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$.

Пропонуємо студентам самостійно вивести рівняння дотичної до гіперболи.

Випадок **параболи**.

1. Записуємо рівняння параболи: $y^2 = 2px$.
2. Диференціюємо його: $2ydy = 2pdx$.

3. Із останнього виразу отримуємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$.

4. Кутовий коефіцієнт дотичної в точці $A(x_0, y_0)$ $k = \frac{p}{y_0}$.

5. Підставляємо k у рівняння дотичної $y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$.

6. Множимо останній вираз на y_0: $yy_0 - y_0^2 = px - px_0$.

Оскільки точка $A(x_0, y_0)$ належить параболі, то $y_0^2 = 2px_0$. Виконавши заміну в останньому виразі та прості алгебричні операції, отримаємо рівняння дотичної до параболи в точці $A(x_0, y_0)$: $\boldsymbol{yy_0 = p(x + x_0)}$.

Теорія даного питання передбачає **доведення** вельми важливого факту про те, що дотична до конічного перерізу має з таким перерізом лише одну спільну точку, яку називають **точкою дотику** (дотикання). Розглянемо це на прикладі еліпса.

Нехай задано рівняння кривої та рівняння дотичної до неї в точці $A(x_0, y_0)$: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Із другого рівняння виразимо x і підставимо в перше. Отже, $x = \frac{\left(1 - \frac{yy_0}{b^2}\right) \cdot a^2}{x_0}$ і $\frac{\left(1 - \frac{yy_0}{b^2}\right)^2 \cdot (a^2)^2}{x_0^2 a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2}{x_0^2} \cdot \left(1 - \frac{yy_0}{b^2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2}{x_0^2} - 2\frac{yy_0a^2}{b^2x_0^2} + \frac{y^2y_0^2a^2}{b^4x_0^2} = 1$ або дещо по іншому: $y^2 \frac{a^2}{b^2x_0^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) - 2y\frac{y_0a^2}{b^2x_0^2} + \frac{a^2}{x_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = 0$. Можна легко помітити, що $\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 1$, а $\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \frac{y_0^2}{b^2}$. Тому в подальших перетвореннях отримаємо: $y^2 \frac{a^2}{b^2x_0^2} - 2y\frac{y_0a^2}{b^2x_0^2} + \frac{a^2}{x_0^2} \cdot \frac{y_0^2}{b^2} = 0$. Винесемо $\frac{a^2}{b^2x_0^2}$ за дужки і отримаємо наступне: $\frac{a^2}{b^2x_0^2}(y^2 - 2yy_0 + y_0^2) = 0$. Оскільки $\frac{a^2}{b^2x_0^2} \neq 0$, то $y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = 0$. Звідси $(y - y_0)^2 = 0$. Останнє рівняння має два корені, які зливаються: $y = y_0$.

Аналогічно, виключивши y із системи даних рівнянь, одержимо $x = x_0$. Отже, еліпс з дотичною має лише одну спільну точку – точку дотику $A(x_0, y_0)$.

Так само доводяться схожі твердження для гіперболи і параболи.

Приклад 5. Знайти рівняння дотичної до еліпса, котра розташовується паралельно прямій $y = kx$.

Будь-яка пряма, що паралельна прямій $y = kx$, матиме рівняння: $y = kx + l$, де k є кутовим коефіцієнтом обох прямих, а l – початковою ординатою лише шуканої прямої.

Знаходимо точку перетину прямої $y = kx + l$ з еліпсом, який описується рівнянням: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Отже, матимемо таке: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+l)^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2x^2 + 2klx + l^2}{b^2} = 1$ або трохи по іншому: $b^2x^2 + k^2a^2x^2 + 2kla^2x + l^2a^2 - a^2b^2 = 0$. Приведемо це квадратне рівняння до компактного виду: $(b^2 + k^2a^2)x^2 + 2kla^2x + (l^2a^2 - a^2b^2) = 0$.

Дотична, що вище доведено, має лише одну спільну точку з еліпсом. Отже, дане квадратне рівняння матиме один розв’язок. Тому дискримінант квадратного рівняння дорівнює нулю, тобто: $k^2a^4l^2 - (b^2 + k^2a^2)(l^2a^2 - a^2b^2) = 0$. Звідси знаходимо значення l, для яких пряма $y = kx + l$ буде шуканою дотичною.

Напевне, що останнє квадратне рівняння матиме два розв'язки, тобто існує дві дотичні до еліпса, що паралельні прямій $y = kx$.

§8. Фокальні властивості конічних перерізів

Нам уже достеменно відомо, що будь-який із конічних перерізів (крім кола) представляє собою геометричне місце точок площини, відношення відстаней яких від даної точки F (фокуса) і даної прямої d (директриси) є величина стала. Отже, всякий конічний переріз має фокус і директрису. Покажемо, що еліпс і гіпербола мають ***два фокуси*** і ***дві директриси***.

8.1. **Число фокусів і директрис у конічних перерізів**.

Нехай конічним перерізом є **еліпс** (рис. 16). У канонічному розташуванні директриса еліпса d_1 паралельна осі Oy, а фокус F_1 лежить на осі Ox. При виведенні рівнянь конічних перерізів у ПСК ми за полюс системи приймали фокус, а полярну вісь розташовували перпендикулярно до директриси. Переходячи від ПСК до ПДСК полюс F приймали за початок координат O, а полярну вісь – за додатну піввісь осі Ox. Оскільки еліпс у такому розташуванні симетричний відносно осі Oy, то в нього обов'язково є фокус F_2 і директриса d_2, симетричні відносно осі Oy фокусу F_1 та директрисі d_1 відповідно.

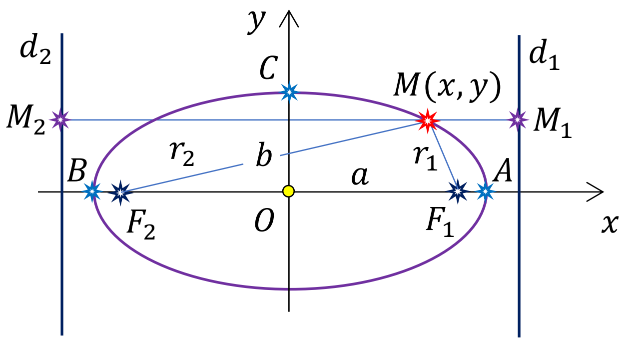


Рис. 16

Міркуючи аналогічно, встановлюємо факт існування ***двох фокусів*** і ***двох директрис*** в іншого центрального перерізу конуса площиною – **гіперболи**.

Пропонуємо студентам даний факт обґрунтувати самостійно.

8.2. **Відстань від початку координат до фокусів конічних перерізів**.

Зауважимо, що шукану відстань виражатимемо через півосі a та b конічних перерізів (рис. 16).

а) **Еліпс** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Нехай фокуси еліпса задаються координати $F_1(c, 0)$ і $F_2(-c, 0)$.

Обираємо дві довільні точки кривої. В нашій ситуації доречно взяти вершини еліпса $A(a, 0)$ і $C(0, b)$. Тоді, з одного боку, $F_1A + F_2A = AB = 2a$, а з іншого, $\left(F_1C = F_2C = \sqrt{c^2 + b^2}\right) \Rightarrow F_1C + F_2C = 2\sqrt{c^2 + b^2}$. Отже, як результат, матимемо: $\boldsymbol{c^2 = a^2 - b^2}$.

б) **Гіпербола** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Зараз краще обрати точку N у першому квадранті на кривій так, щоб вона мала координати (c, y) (рис. 17). За означенням гіперболи, як геометричного місця точок, отримаємо наступне: $|F_2N - F_1N| = AB = 2a$, де $\left(F_1N = r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ F_2N = r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)$ (**1**). Із канонічного рівняння кривої знаходимо $y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$ (**2**). Підставивши вираз (2) у формули (1) та врахувавши, що абсциса точки N рівна c $(x_N = c)$, і виконавши прості формальні перетворення, матимемо наступне: $F_2N = \sqrt{4c^2 + \frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2)}$, $F_1N = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2)}$. Отже, $F_2N - F_1N = \sqrt{4c^2 + \frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2)} - \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(c^2 - a^2)}$.

Якщо тепер долучити до розгляду вершину $A(a,\ 0)$ гіперболи, для котрої справедлива рівність $F_2A - F_1A = AB = 2a$, і прирівняти отримані результати, то одержимо: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.

Студентам рекомендуємо перевірити даний факт самостійно.

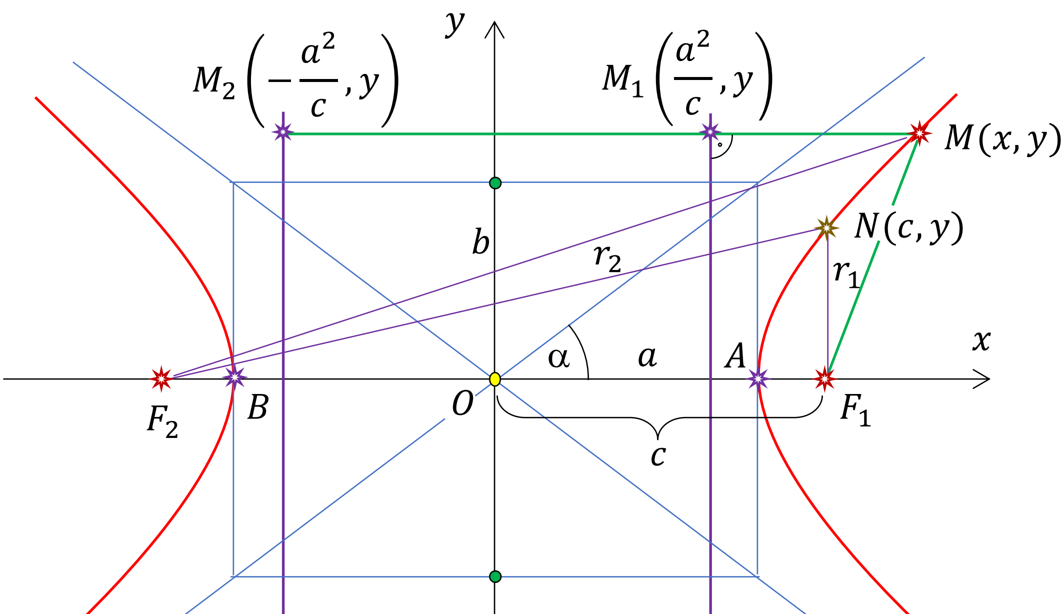


Рис. 17

8.3. Сума (різниця) відстаней від точок конічних перерізів до фокусів.

Покажемо, що **сума** відстаней довільної точки $M(x, y)$ **еліпса** від фокусів є постійною. Справді, для деякої точки M, узятої на еліпсу (див. рис. 16), $\frac{F_1M}{MM_1} = \varepsilon$ і $\frac{F_2M}{MM_2} = \varepsilon$. Звідси матимемо $F_1M + F_2M = \varepsilon(MM_1 + MM_2) = \varepsilon \cdot M_1M_2 = const$.

Аналогічно доводимо, що **різниця** відстаней від фокусів **гіперболи** до будь-якої точки $M(x, y)$ кривої є також постійною величиною (рис. 17).

Оскільки в **параболи**, як відомо, вісь симетрії єдина, ексцентриситет кривої рівний одиниці $(\varepsilon = 1)$, а всі точки конічного перерізу лежать з одного боку від директриси, тому в неї в наявності є лише один фокус і одна директриса, а відстань від кожної точки кривої до фокуса дорівнює відстані від цієї ж точки до директриси (див. рис. 14).

8.4. **Ексцентриситет конічних перерізів**.

Йдучи від ПСК до ПДСК (див. §5, с.13), при виведенні канонічних рівнянь еліпса та гіперболи, ми скористалися доречною заміною: $\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = a^2, \frac{\varepsilon^2 p^2}{|1-\varepsilon^2|} = b^2$. Поділимо другу рівність на першу, дякуючи чому відповідно отримаємо:

а) **еліпс** ($\varepsilon < 1$): $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}\,(a^2 - b^2 = c^2)$;

б) **гіпербола** ($\varepsilon > 1$): $\frac{b^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}\,(a^2 + b^2 = c^2)$.

Отже, для центральних конічних перерізів ексцентриситет обраховується через їх параметри в канонічних рівняннях за однією і тією ж формулою: $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$.

Нагадуємо, що ексцентриситет параболи рівний одиниці ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}$) .

8.5. **Рівняння директрис конічних перерізів**.

Виходимо із *характеристичної властивості конічних перерізів*. Відомо, що всякий конічний переріз, крім кола, представляє собою геометричне місце точок площини, відношення відстаней яких від деякої точки F (фокуса) і деякої прямої d (директриси) постійне (див. §3).

Еліпс. Отже (рис. 16), $(r_1 = \varepsilon \cdot MM_1;\ r_2 = \varepsilon \cdot MM_2) \Rightarrow r_1 + r_2 = \varepsilon \cdot (MM_1 + MM_2) = \varepsilon \cdot M_1M_2 \Rightarrow M_1M_2 = \frac{r_1+r_2}{\varepsilon} = \frac{2a}{\varepsilon}$. Проте $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$. Тому $M_1M_2 = \frac{2a^2}{c}$. Таким чином, точки M_1 і M_2 мають відповідно координати $M_1\left(\frac{a^2}{c}, y\right)$ і $M_2\left(-\frac{a^2}{c}, y\right)$. Й остаточно рівняння директрис ***еліпса*** матимуть вид: $x_1 = \frac{a^2}{c}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right);\ x_2 = -\frac{a^2}{c}\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)$.

Гіпербола. Міркування аналогічні, тому достатньо подати (рис. 17) лише суто формальні викладки. $(r_1 = \varepsilon \cdot MM_1;\ r_2 = \varepsilon \cdot MM_2) \Rightarrow r_2 - r_1 = \varepsilon \cdot (MM_2 - MM_1) = \varepsilon \cdot M_1M_2 \Rightarrow M_1M_2 = \frac{r_2-r_1}{\varepsilon} = \frac{2a}{\varepsilon} \Rightarrow M_1M_2 = \frac{2a^2}{c}$. Отже, матимемо: $M_1\left(\frac{a^2}{c}, y\right)$ і $M_2\left(-\frac{a^2}{c}, y\right)$. І для ***гіперболи*** маємо: $x_1 = \frac{a^2}{c}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right);\ x_2 = -\frac{a^2}{c}\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)$.

8.6. **Рівняння фокальних радіусів конічних перерізів**.

Рівняння варто виводити лише для центральних конічних перерізів – еліпса та гіперболи, оскільки для параболи $MF = \rho\,(M, d)$, де M – точка на кривій.

Еліпс. Доречно скористатися *характеристичною властивістю* і *рівняннями директрис* конічних перерізів: $r_1 = \varepsilon \cdot MM_1$, де $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $MM_1 = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2} = \frac{a^2}{c} - x$. Отже, $\boldsymbol{r_1} = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{c} - x\right) = a - \frac{c}{a}x = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{\varepsilon x}$. Аналогічно констатуємо: $\boldsymbol{r_2} = \varepsilon \cdot MM_2 = \frac{c}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{c} + x\right)^2} = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{c} + x\right) = a + \frac{c}{a}x = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon x}$.

Гіпербола. Із канонічного рівняння гіперболи (чим ми вже користувалися, див. п. 8.2 і рис. 17) маємо $y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$. Рівняння фокального радіусу для точки M, що належить правій (лівій) гілці гіперболи, має вже відомий нам вигляд: $F_1M = r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ і $F_2N = r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Якщо підставити в останні рівності значення y^2 за умови, що $b^2 = c^2 - a^2$, і виконати вельми прості алгебричні перетворення, то отримаємо такий результат: $F_1M = r_1 = \left|\frac{c}{a}x - a\right|$ і $F_2M = r_2 = \left|\frac{c}{a}x + a\right|$. Із канонічного рівняння гіперболи вочевидь випливає, що $|x| \geq a$ та, оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$, то $F_1M = r_1 = \varepsilon x - a$, а $F_2M = r_2 = \varepsilon x + a$. Це для правої гілки (при $x > 0$), а для лівої гілки (при $x < 0$) матимемо дещо інший результат: $F_1M = r_1 = -\frac{c}{a}x + a = -\varepsilon x + a$, $F_2M = r_2 = -\frac{c}{a}x + a = \varepsilon x - a$.

Звідси ж також випливає, що для обох гілок гіперболи справедлива рівність: $F_2M - F_1M = 2a$.

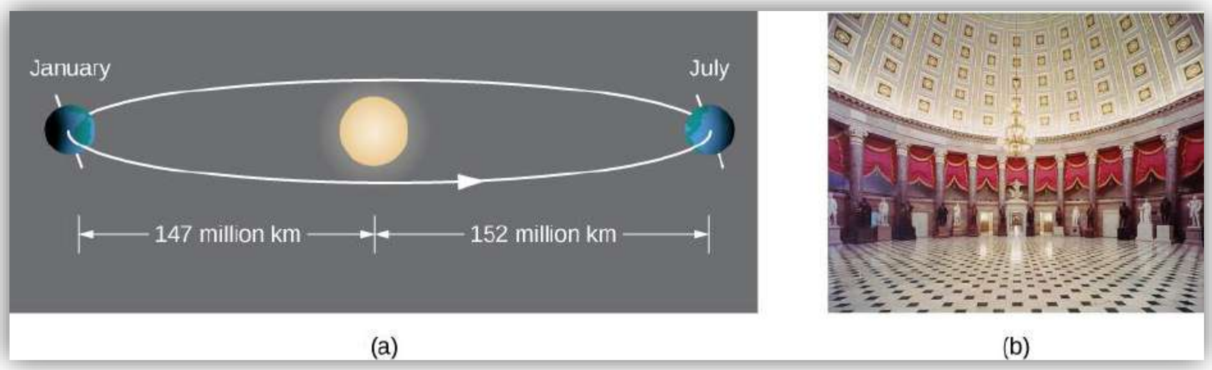
Парабола. Канонічне рівняння параболи має вид: $y^2 = 2px$, де p – відстань від фокуса до директриси (параметр параболи). Вершина параболи знаходиться в початку координат, а віссю симетрії є вісь Ox.

Координати фокуса $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$. Рівняння директриси параболи: $x = -\frac{p}{2}$.

Фокальний радіус точки $M(x, y)$ параболи $r = x + \frac{p}{2}$.

§9. Оптичні властивості конічних перерізів

Згідно з першим законом Кеплера про рух планет, орбіта планети навколо Сонця являє собою еліпс з Сонцем в одному з фокусів (вогнищ, мал. 1, *а*). Оскільки орбіта Землі є еліпсом, відстань від Сонця змінюється протягом року. Поширеною помилкою є те, що Земля ближче до Сонця влітку. Насправді влітку для північної півкулі Земля знаходиться далі від Сонця, ніж взимку. Різниця в сезоні обумовлена нахилом осі Землі в орбітальній площині. Комети, які обертаються навколо Сонця, такі як комета Галлея, також мають еліптичні орбіти, як і супутники, що обертаються навколо планет і супутників, що обертаються навколо Землі (на чому ми вже зупинялися).



***А** – Орбіта Землі навколо Сонця – це еліпс із Сонцем у одному фокусі*
***В** – Статуарний зал в Капітолії США – це шепітна галерея з еліптичним перерізом*

Еліпси мають цікаві світло-відбиваючі властивості: *світловий промінь, що виходить від одного фокусу, проходить через інший фокус після дзеркального відображення в еліпсі* (рис. 18).

Цікаво, що те ж саме відбувається зі звуковою хвилею. Національний скульптурний зал у Капітолії США (у Вашингтоні), округ Колумбія, є відомою кімнатою в еліптичній формі (мал. 1, *b*). Цей зал служив місцем зустрічі Палати представників США майже п'ятдесят років. Розташування двох фокусів цієї наполовину еліптичної кімнати чітко позначено відмітками на підлозі, і навіть якщо кімната переповнена відвідувачами, коли двоє людей стоять на цих плямах і розмовляють один з одним, вони можуть чути один одного набагато чіткіше, ніж чути когось, хто стоїть поруч. Легенда свідчить, що Д. Квінсі Адамс (6-й президент США) мав свій стіл, розташований на одному з фокусів і зміг підслуховувати всіх інших у Будинку, сидячи за столом. Хоча факт історично й цікавий, навряд чи це може бути правдою, адже оригінальна стеля видає стільки відгомонів, що всю кімнату довелося обвішати килимами, щоб гасити шум. Стеля була відбудована в 1902 році, і лише тоді з'явився відомий зараз ефект шепоту.

Ще одна відома жителям США шепітна галерея, що є місцем багатьох шлюбних пропозицій, знаходиться на Центральному вокзалі в Нью-Йорку.

Гіпербола також має вельми цікаві світло-відбиваючі властивості. *Промінь, спрямований до одного фокусу гіперболи, відбивається гіперболічним дзеркалом до іншого фокуса* (рис. 19).

Така властивість гіперболи має важливі застосування. Застосовується в радіопеленгації (оскільки різниця сигналів від двох веж постійна уздовж гіпербол), і в конструкції дзеркал всередині телескопів (для відображення світла, що надходить від гіперболічного дзеркала до окуляра). Ще один цікавий факт про гіперболи полягає в тому, що комета, яка входить в Сонячну систему, якщо швидкість досить велика, щоб уникнути гравітаційного потягу Сонця, то шлях, яким рухається комета, проходячи через Сонячну систему, є гіперболічним.

У **параболи** не менш цікава світло-відбиваюча властивість. *Промінь світла, який виходить із фокуса кривої, після дзеркального відбиття від її будь-якої точки, паралельний осі параболи* (рис. 20).

Параболічними дзеркалами користуються, головним чином, з метою фокусування лазерних променів. Лазерна оптика відіграє вирішальну роль у фокусуванні, передачі, відображенні та зміні/модифікації лазерних променів у досягненні конкретних завдань. Вони ретельно розроблені й інтегровані для контролю властивостей лазерного променя, забезпечуючи точне та ефективне використання лазерної технології в різних програмах й у різних сферах, наприклад лазерне різання, зварювання лазером, лазерне маркування та гравірування, лазерна обробка матеріалів, лікування лазером, лазерне сканування, волоконна оптика, лазерна спектроскопія, захист і безпека, а також біомедична візуалізація і військові технології.

Таким чином, давайте на прикладі **еліпса** обґрунтуємо оптичну властивість однієї із центральних кривих.

Якщо $A(x_0, y_0)$ – деяка точка еліпса, то відрізки F_2A і AF_1 (див. рис. 18) мали б утворювати із дотичною в точці A до кривої рівні кути. Для доведення цієї властивості достатньо показати, що відношення відстаней фокуса від дотичної і від точки дотику A не залежить від того, який фокус узято F_2 чи F_1.

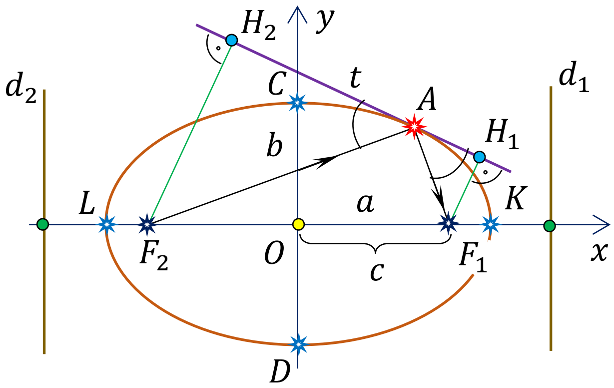


Рис. 18

Скористаємося відомими формулами відстані між двома точками і відстані від точки до прямої, якою є дотична в точці A.

Нагадуємо, що рівняння дотичної в точці A до еліпса таке: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$. Відстань від точки $M(x_1, y_1)$ до точки $N(x_2, y_2)$ шукають за формулою $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, а відстань від точки до прямої, яка в нашому випадку є дотичною – за формулою $\rho(P, t) = \frac{|Ax_0 + B_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де P є будь-якою точкою-фокусом, а t – дотичною до еліпса. Відомо також, що точки F_1 і F_2 мають відповідно конкретні координати: $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Залишилося скористатися поданими формулами і виконати нескладні алгебричні перетворення.

${AF_1}^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2$, де $y_0^2 = b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2}$. Це прямо випливає із канонічного рівняння еліпса, оскільки точка $A(x_0, y_0)$ належить розглядуваному конічному перерізу. Отже, виконуємо алгебричні операції: ${AF_1}^2 = x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2} = x_0^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2cx_0 + (b^2 + c^2)$. Або, з урахуванням того факту, що $c^2 = a^2 - b^2$, маємо: ${AF_1}^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 - 2cx_0 + a^2 = \left(\frac{cx_0 - a^2}{a}\right)^2 \Rightarrow AF_1 = \left|\frac{cx_0 - a^2}{a}\right|$.

Тепер шукаємо відстань від точки F_1 до дотичної еліпса в точці $A(x_0, y_0)$, що зображується відрізком F_1H_1. $F_1H_1 = \frac{\left|\frac{x_0 c}{a^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{b^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = k \cdot \left|\frac{x_0 c - a^2}{a^2}\right|$, $k = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$ – нормуючий множник. Тепер поділимо $F_1H_1 = k \cdot \left|\frac{x_0 c - a^2}{a^2}\right|$ на $AF_1 = \left|\frac{cx_0 - a^2}{a}\right|$, тобто знайдемо синус кута H_1AF_1: $\sin \angle H_1AF_1 = \frac{k}{a}$.

Далі, працюючи із трикутником H_2AF_2, обійдемося без коментарів. $AF_2^2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2 = x_0^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2} = x_0^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx_0 + c^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2cx_0 + a^2 - b^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2cx_0 + a^2 = \left(\frac{c}{a}x_0 + a\right)^2$. Таким чином,

$AF_2 = \left|\frac{cx_0+a^2}{a}\right|$. $F_2H_2 = \frac{\left|\frac{-cx_0}{a^2}+\frac{y_0\cdot 0}{b^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}} = k\cdot\left|\frac{cx_0+a^2}{a^2}\right|$, де $k = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}$. У результаті отримаємо: $\sin\angle H_2AF_2 = \frac{F_2H_2}{AF_2} = \frac{k}{a}$. Висновок: $\angle H_1AF_1 = \angle H_2AF_2$. Тобто кут падіння променя в точку $A(x_0;\ y_0)$ еліпса дорівнює куту його відбивання.

Дзеркальний еліпс **концентрує** відбиті промені світла в одну точку (фокус), якщо джерело світла (енергії) розміщується в іншому фокусі.

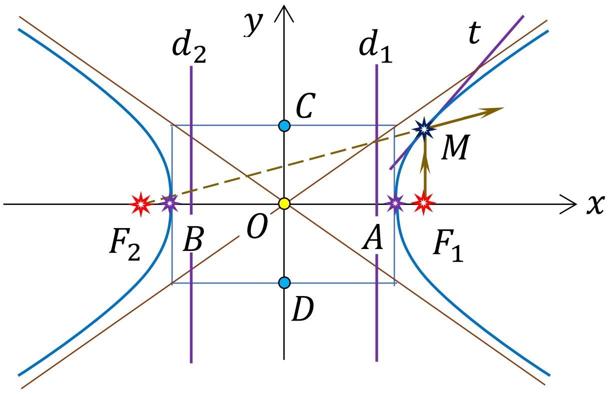


Рис. 19

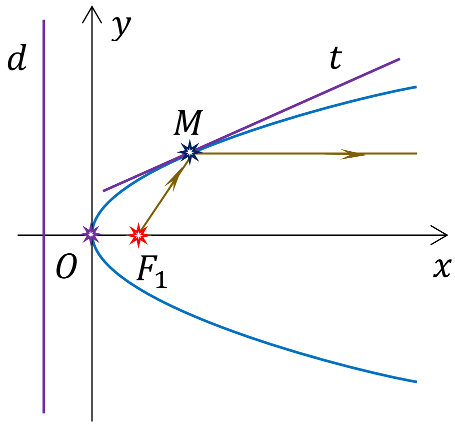


Рис. 20

Аналогічну оптичну властивість має також і **гіпербола**. А саме, промені світла, що виходять із одного фокуса гіперболи, після дзеркального відбиття від кривої здаються такими, нібито вони виходять з іншого фокуса. Це означає, що гіперболічні дзеркала **розсіюють** промені світла (рис 19).

На відміну від центральних конічних перерізів, **парабола** промені світла, які виходять з її фокуса після відбиття від кривої, розташовує паралельно до осі кривої – у вигляді **пучка** паралельних прямих (рис. 20).

Пропонуємо студентам **самостійно** обґрунтувати останні два твердження.

§10. **Діаметри конічних перерізів**

Діаметром еліпса (**гіперболи**) називається будь-яка пряма, яка проходить через центр центрального конічного перерізу. **Діаметром параболи** називається всяка пряма, що паралельна осі кривої, а також сама вісь.

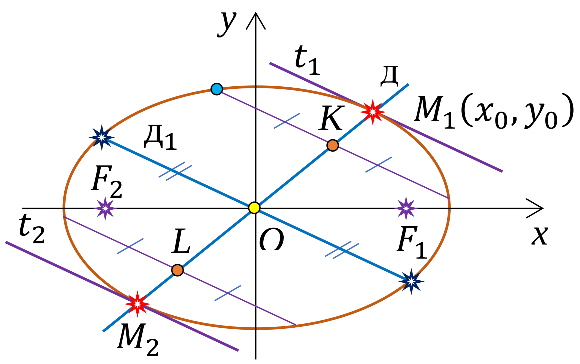


Рис. 21

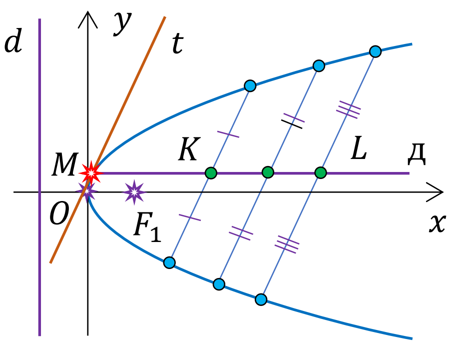


Рис. 23

Усяка пряма перетинає конічний переріз не більше як у двох точках (це ми довели на прикладі гіперболи, див. §6). Якщо точок перетину дві, то відрізок прямої з кінцями в цих точках, називається **хордою**. Має місце така властивість конічних перерізів: *Середини паралельних хорд конічного перерізу лежатимуть на його діаметрі*.

Ця властивість очевидна, якщо хорди перпендикулярні до осей симетрії кривої. В цьому випадку середини хорд справді лежать на такій осі (перевірте, будь ласка, цей факт самостійно).

Розглянемо загальний випадок, коли паралельні хорди не перпендикулярні до осей конічних перерізів (рис. 21, 22; див. нижче).

Таким чином, сімейство (пучок) паралельних прямих, що **не** паралельні осям координат (тобто осям симетрії кривої, див. рисунки), можна описати одним рівнянням: $y = kx + b$ (1), де $k = const \neq 0$. Рівняння центральних кривих (еліпса і гіперболи) теж доречно в цій ситуації об'єднати єдиним записом: $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$, де $\alpha = \frac{1}{a^2}$, а $\beta = \pm\frac{1}{b^2}$ (2) для даних конічних перерізів відповідно. Кінці хорд належать як прямій (1), так і кривій (2), тобто задовольняють систему рівнянь. Розв'язуючи її, отримаємо таке: $\beta k^2x^2 + 2\beta kbx + \beta b^2 + \alpha x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \Rightarrow (\alpha + \beta k^2)x^2 + 2\beta kbx + \beta b^2 - 1 = 0$. За властивостями коренів квадратного рівняння (згідно із теоремою Франсуа Вієта), сума його коренів рівна другому коефіцієнту із протилежним знаком, що ділиться на коефіцієнт при x у квадраті.

Отже, маємо: $x_1 + x_2 = -\frac{2\beta kb}{\alpha+\beta\cdot k^2}$. Звідси просто знаходимо абсцису середини хорди (точки $K, L, \ldots$): $x_C = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{\beta kb}{\alpha+\beta\cdot k^2}$. Ординату y_C знайдемо підставивши x_C у рівняння хорди $y_C = k\left(-\frac{\beta kb}{\alpha+\beta\cdot k^2}\right) + b = \frac{-\beta k^2b+\alpha b+\beta k^2b}{\alpha+\beta\cdot k^2} = \frac{\alpha b}{\alpha+\beta\cdot k^2}$. Виразимо, нарешті, y_C через x_C. $\frac{y_C}{x_C} = -\frac{\alpha}{\beta k}$. Або запишемо цей результат дещо по іншому: $\boldsymbol{y_C = -\frac{\alpha}{\beta k}\cdot x_C}$.

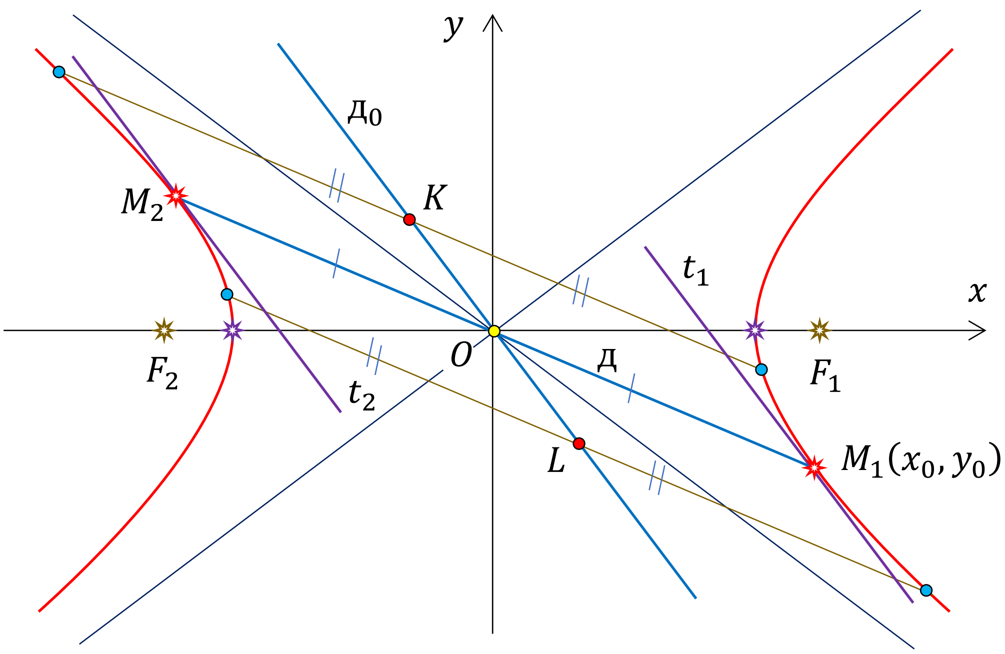


Рис. 22

Легко помітити, що точка (x_C, y_C) задовольняє рівнянню прямої $y = kx$, тобто ця точка лежить на прямій, яка проходить через початок координат – центр еліпса (гіперболи) і кутовий коефіцієнт якої $\boldsymbol{k'} = -\frac{\alpha}{\beta \boldsymbol{k}}$. Очевидно, що $\boldsymbol{k} = -\frac{\alpha}{\beta \boldsymbol{k'}}$.

Діаметр $y = k'x$ називається ***спряженим*** по відношенню до діаметра $y = kx$, котрий паралельний хордам $y = kx + b$. Немає сумнівів, що спряженість діаметрів взаємна, оскільки кутовий коефіцієнт діаметра, який спряжений до $y = k'x$, $k = -\frac{\alpha}{\beta k'}$.

Властивість **еліпса** і **гіперболи** стосовно їх діаметрів, доведено.

Тепер розглянемо випадок **параболи** (рис. 23).

Координати кінців хорд задовольняють системі рівнянь $y^2 - 2px = 0$ (1), $y = kx + b$ (2). Виключаємо x із рівняння (1) $x = \frac{y^2}{2p}$ і підставляємо в рівняння (2) $y = k \cdot \frac{y^2}{2p} + b \Rightarrow ky^2 - 2py + 2pb = 0$ або $y^2 - \frac{2p}{k}y + 2\frac{pb}{k} = 0$. Це рівняння для відшукання ординати кінців хорд. Звідси за теоремою Вієта отримаємо таке: $y_1 + y_2 = 2\frac{p}{k}$. Тому $y_C = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k} = const$. Із останнього робимо висновок, що середини хорд лежать на прямій, що паралельна координатній осі Ox.

Приклад 6. Довести, що коли діаметр перетинає конічний переріз, дотичні в точках його перетину паралельні спряженому діаметру.

Дійсно, нехай діаметр «д» (див. рис. 21, 23) перетинає центральний конічний переріз в точці $M_1(x_0, y_0)$; діаметр описується рівнянням $y = kx$, а рівняння еліпса (гіперболи) має вид: $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$. Відомо також рівняння дотичної до такого конічного перерізу: $\alpha x x_0 + \beta y y_0 - 1 = 0$. Останнє рівняння потрібно подати дещо в іншому представленні: $y = -\frac{\alpha x_0}{\beta y_0}x + 1$. Отже, кутовий коефіцієнт дотичної $k' = -\frac{\alpha x_0}{\beta y_0}$. Оскільки точка $M_1(x_0, y_0)$ належить діаметру, то $y_0 = kx_0$. Тому матимемо $k' = -\frac{\alpha x_0}{\beta k x_0} = -\frac{\alpha}{\beta k}$, що і потрібно було довести.

Доведіть самостійно аналогічне твердження для параболи.

Зауваження. У випадку **кола** будь-який діаметр, що **спряжений** заданому діаметру, перпендикулярний до нього. Цей факт випливає із теореми евклідової геометрії: «Середини паралельних хорд усякого кола лежать на діаметрі, котрий перпендикулярний хордам».

§11. Практична частина навчально-методичного посібника

Розглянемо елементарні властивості конічних перерізів у задачах на коло, еліпс, гіперболу і параболу, перерахувавши на початку основні факти стосовно кожної із указаних кривих.

1. **Коло**. Колом називається геометричне місце точок, рівновіддалених від однієї і тієї ж точки, що називається центром, на величину його радіуса.

Стисла інформація про коло. Якщо позначити координати центра кола через a і b, а його радіус через r, то канонічне рівняння кола матиме вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (1). У випадку, коли центр кола розташований у початку координат ($a = b = 0$), отримаємо більш просте рівняння: $x^2 + y^2 = r^2$ (2).

Загальне рівняння другого степеню $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ буде колом тоді і лише тоді, коли коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні між собою і, окрім того, коефіцієнт при xy рівний нулю ($A = B, C = 0$).

Якщо через x_0 і y_0 позначити координати будь-якої точки кола, то дотична до кола в цій точці матиме рівняння: $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$ або $xx_1 + yy_1 = r^2$ у залежності від того, яким рівнянням описується коло: першим, із указаних вище, чи більш простим – другим.

Задача 1. Скласти рівняння кола, яке проходить через три задані точки: A(0; 2), B(1; 2) і C(2; –2).

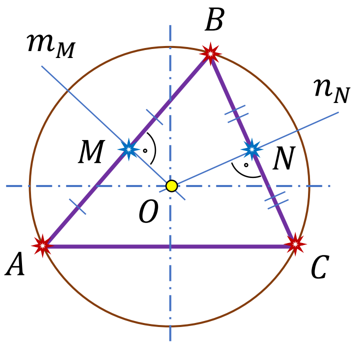


Рис. 24

Розв'язання.

Можна вирізнити два способи на шляху до результату в цій задачі: суто геометричний, що більш привабливо, та алгебричний з елементами геометрії.

Спосіб 1. Координати центру кола шукаємо як точку перетину двох серединних перпендикулярів сторін трикутника ABC. Нехай ними будуть, наприклад, сторони AB і BC. Радіус кола дорівнюватиме відстані від його центра O до будь-якої із вершин даного трикутника (рис. 24).

Нагадуємо читачеві (студенту чи школяру), що *правильно* та ще й *наочно* виконаний рисунок допомагає в якісному розв'язанні будь-якої геометричної задачі у просторі та на площині.

Отже, покроковий алгоритм пошуку результату, згідно з умовою задачі, передбачає: 1). Поділ сторін AB і BC трикутника ABC навпіл, тобто встановлення координат точок M і N за координатами точок A, B і C: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2}$, $y_M = = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3}{2}$; $x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3}{2}$, $y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = -\frac{1}{2}$. 2). Встановлення координат векторів $\overrightarrow{AB}(1; -1)$ і $\overrightarrow{BC}(1; -3)$. 3). Проведення через точки M і N прямих m_M і n_N, перпендикулярних до сторін AB і BC; (рівняння прямої, яка проходить через точку із заданим вектором нормалі, таке: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$); отже, маємо пряму m_M: $1\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0$ і пряму n_N: $1\left(x - \frac{3}{2}\right) - 3\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0$. Спрощення отриманих рівнянь дає результат: $x - y + 1 = 0$ і $x - 3y - 3 = 0$. 4). Розв'язанням системи двох останніх рівнянь одержимо координати центра кола: $x_O = -3, y_O = -2$. 5). Радіус кола шукаємо за формулою відстані між двома точками O і A: $r = OA = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Таким чином, рівняння кола має вид: $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Спосіб 2. Рівняння шуканого кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ уміщує три параметри a, b і r, які потрібно знайти. Розкриємо в рівнянні дужки і перенесемо всі його члени в ліву частину; тоді рівняння матиме вид: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Оскільки точки A, B, C належать колу, то їх координати задовольняють рівнянню кола. Виконавши підстановку, отримаємо систему трьох рівнянь із трьома невідомими параметрами a, b і r. Розв'язання системи призведе до вже знайденого вище результату.

Пропонуємо студентам проробити описані дійства самостійно.

Задача 2. Знайти центр і радіус кола, що задається рівнянням у загальному вигляді: $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

Розв'язання.

Дане рівняння представляє собою коло, оскільки відсутній доданок із добутком координат і коефіцієнти при квадратах координат рівні між собою. Приводимо дане рівняння до канонічного виду виділенням повних квадратів: $(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) + 21 = (x^2 - 2 \cdot 4x + 16) - 16 + (y^2 + 2 \cdot 3y + 9) - 9 +$ $+ 21 = 0$. Згортаємо тричлени в дужках: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$.

Задачу розв'язано, адже параметри кола знайдено: $a = 4, b = -3, r = 2$.

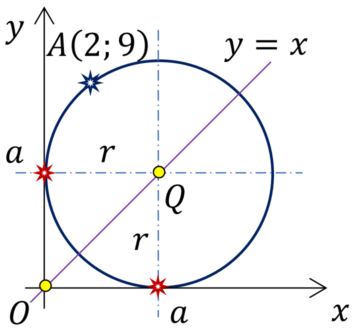


Рис. 25

Задача 3. Деяке коло дотикається до обох координатних осей та проходить через точку $A(2;\ 9)$. Знайти його рівняння.

Якщо коло дотикається до осей Ox і Oy (рис. 25), то центр цього кола належить прямій $y = x$, кутовий коефіцієнт якої $k = 1$. Більше того, координати центра кола (a, b) рівні радіусу r. Однак коло вміщує задану точку $A(2, 9)$, тому її координати задовольняють рівнянню $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$.

Отже, $(2-a)^2 + (9-b)^2 = a^2 \Rightarrow a_1 = 17, a_2 = 5$. У результаті отримаємо два розв'язки: $(x-17)^2 + (y-17)^2 = 17^2$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Звертаємо увагу студентів на факт прив'язки в останній задачі до системи координат. Візуалізація рисунка інколи допомагає у відшуканні оптимального ходу міркувань. Хоч у деяких задачах робити якісні рисунки не обов'язково (див., наприклад, задачу 1).

Задача 4. Скласти рівняння дотичної, проведеної з точки $A(7;\ 1)$ до кола $x^2 + y^2 = 25$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної до заданого кола, з центром у початку координат $O(0;\ 0)$, що вміщує дану точку $A(7;\ 1)$, має вид: $7x_0 + 1y_0 = 25$. Точка M, з координатами (x_0, y_0), є точкою дотикання шуканої прямої до кола. Координати точки M задовольняють як рівнянню кола, так і рівнянню дотичної. Тому, щоб знайти x_0 і y_0, потрібно розв'язати систему двох рівнянь: $x_0^2 + y_0^2 = 25$ і $7x_0 + 1y_0 = 25$. Як результат, отримаємо: $x_{0_1} = 4$; $x_{0_2} = 3$, а $y_{0_1} = -3$; $y_{0_2} = 4$.

Отже, маємо два розв'язки: $4x - 3y = 25$ і $3x + 4y = 25$.

Тепер пропонуємо до розгляду дещо складнішу задачу з колом.

Задача 5. Написати рівняння кола, яке проходить через точку $M(1;\ 1)$ та має дотикання із двома прямими l_1: $7x + y - 3 = 0$ і l_2: $x + 7y - 3 = 0$.

Розв'язання.

Привертаємо увагу студентів до того факту, що в цій задачі варто досить чітко, акуратно побудувати рисунок, якай матиме вельми важливе значення в якісних покрокових міркуваннях суб'єкта навчання.

Таким чином, будуємо рисунок 26.

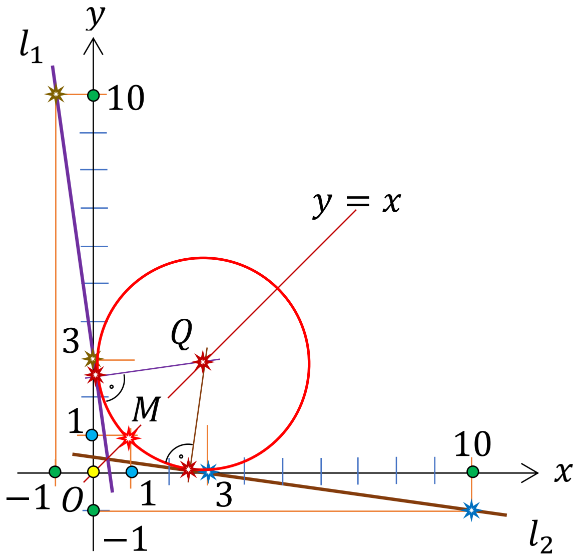


Рис. 26

У ПДСК зображаємо по черзі задані прямі l_1 і l_2, кожну за двома її точками (l_1: $x_1 = 0, y_1 = 3$; $y_2 = 10$, $x_2 = -1$; l_2: $y_1 = 0$, $x_1 = 3$; $x_2 = 10, y_2 = -1$). Далі потрібно розрахувати місце розташування центра шуканого кола. Очевидно, що точка Q належить бісектрисі кута між прямими l_1 і l_2. Бісектриса кута представляє собою геометричне місце точок, що рівновіддалені від цих прямих. Обираємо біжучу точку кола з координатами (x, y) і шукаємо відстань від неї до кожної із прямих, а потім прирівнюємо їх: $\frac{|7x+y-3|}{\sqrt{50}} = \frac{|x+7y-3|}{\sqrt{50}} \Rightarrow y = x$. При цьому нам потрібна та із двох можливих бісектрис у чверть площині прямих l_1 і l_2, якій належить точка $M(1; 1)$. Підставимо координати даної точки в рівняння прямих й побачимо, що підмодульні вирази більші нуля, тому модулі просто опускаємо. Слід також констатувати, що точка M лежить на прямій $y = x$. Тепер ми у змозі знайти координати точки Q, яку (як і точку M) вміщує ця бісектриса, адже координати точки $Q(a, a)$.

Отже, $\rho(Q, l_1) = \rho(Q, l_2) = r = \frac{7a+a-3}{\sqrt{50}} = \frac{a+7a-3}{\sqrt{50}} \Rightarrow 8a - 3 = \sqrt{50}r$ (1). З іншого боку, врахувавши, що радіус кола можна знайти як відстань від точки $Q(a; a)$ до точки $M(1; 1)$, маємо: $(1-a)^2 + (1-a)^2 = r^2 \Leftrightarrow 2(1-a)^2 = r^2$ (2). Наважко побачити, що система рівнянь (1) і (2) дає результат: $a_1 = \frac{13}{18}, a_2 = \frac{7}{2}$. У свою чергу, $r_1^2 = \frac{25}{162}$, а $r_2^2 = \frac{25}{2}$.

Таким чином, отримуємо такі два розв'язки: $\left(x - \frac{13}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{18}\right)^2 = \frac{25}{162}$, $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$. На рисунку зображено лише одне коло.

Задача 6. Відомо, що пряма $4x - 3y - 38 = 0$ дотикається до кола $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$. Знайти точку їх дотикання.

Розв'язання.

Спосіб 1. Координати точки дотику можна знайти, розв'язуючи систему рівнянь заданих прямої і кола. Пропонуємо студентам проробити таку операцію самостійно і знайти результат задачі цим способом.

Спосіб 2. Проте можна знайти координати точки дотикання й інакше, якщо скористатися загальним рівнянням дотичної до заданого кола, яке має вигляд: $(x-1)(x_0-1)+(y+3)(y_0+3)=25$. Оскільки це рівняння і дане рівняння $4x-3y-38=0$ зображують одну і ту саму пряму, то їхні коефіцієнти мають бути пропорційними. Перепишемо рівняння дотичної дещо в іншому вигляді $(x_0-1)x+(y_0+3)y=15+x_0-3y_0$. Тобто маємо: $\frac{(x_0-1)}{4}=\frac{(y_0+3)}{-3}=\frac{x_0-3y_0+15}{-38}$. Розв'язавши останні два рівняння в системі, отримаємо точку дотику *M*(5; –6).

Задача 7. Знайти довжину дотичної, проведеної із точки *M*(2; 6) до кола, що задане рівнянням $(x+3)^2+(y-2)^2=25$.

Розв'язання.

Спосіб 1. Зауважимо, що розв'язати задачу можна «в лоб», тобто спочатку знайти точку дотику (див., приміром, задачу 4), а потім, за формулою відстані між двома точками, завершити операцію, що ми й пропонуємо реалізувати самостійно.

Спосіб 2. Значно простіше знайти спочатку відстань від точки *M*(2; 6) до центра кола, координати якого *O*(–3; 2) відомі: $MO=\sqrt{39}$. Відомо також радіус кола ($r=5$), котрий розташовується перпендикулярно до дотичної. Якщо точку дотику, наприклад, позначити через *N*, то за теоремою Піфагора легко знаходимо $MN=4$.

Спосіб 3. В геометрії існує поняття степеню точки відносно кола.

Як потрібно розуміти це поняття?

Нехай задано коло **Г** і точку *M*. Проведемо через *M* довільну січну, яка перетинає коло в точках *A* і *B*. Розглянемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$. Згідно з відповідним твердженням евклідової геометрії, ця величина не залежить від вибору січної (січна може, зокрема, вироджуватися в дотичну). Скалярний добуток векторів $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$ називається ***степенем точки M*** **відносно кола Г** і позначається через C_O^M або C_Γ^M (*O* – центр кола **Г**, рис. 27).

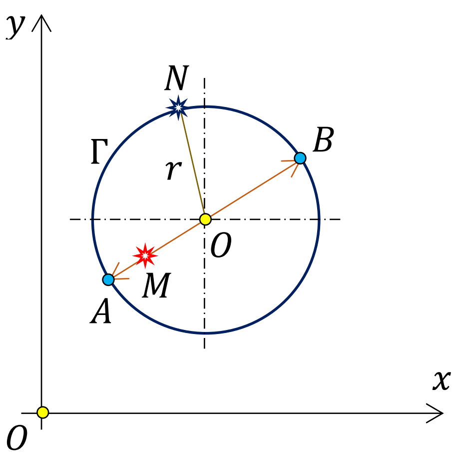


Рис. 27

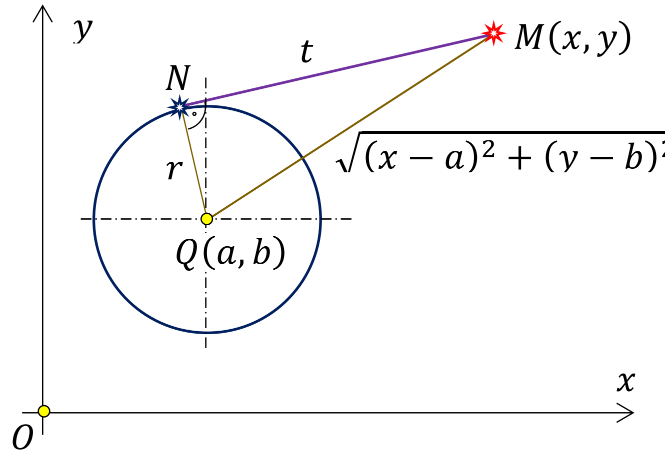


Рис. 28

Якщо точка *M* лежить поза колом, то очевидно $C_O^M > 0$ (вектори однаково напрямлені); якщо *M* – внутрішня точка кола, то $C_O^M < 0$ (вектори протилежно напрямлені), а коли $M \in$ **Г**, то $C_O^M = 0$ (один з векторів є нуль-вектором).

Легко бачити, що завжди $C_O^M = MO^2 - r^2$. Справді, нехай точка M лежить усередині кола (рис. 27; решту випадків розгляньте самостійно). Тоді з рисунка видно, що $C_O^M = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB = -(r - MO)(r + MO) = MO^2 - r^2$. Зауважимо, до того ж, коли точка M лежить поза колом, то її степінь відносно кола дорівнює також квадратові відповідної дотичної, адже в цій ситуації дві точки перетину кола і прямої зливаються.

Продовжуємо розв'язання задачі.

Коли перенесемо всі члени даного рівняння кола $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$ у ліву частину, то така частина $t^2 = MN^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2 - 25$ дасть квадрат довжини дотичної, проведеної з точки $M(2; 6)$ до даного кола (рис. 28) або, що інакше, дасть степінь точки M відносно кола. Отже, $t = MN = 4$.

Задача 8. Записати рівняння кола, яке дотикається до двох паралельних прямих $2x + y - 5 = 0$ і $2x + y + 15 = 0$, причому до однієї з них у точці $A(2; 1)$.

Розв'язання.

Спосіб 1. Точка $A(2; 1)$ належить першій із даних прямих. Знайдемо діаметр кола, для чого скористаємося формулою відстані від точки A до другої прямої: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 15|}{\sqrt{4+1}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$. Використавши координати точки A, яку вміщує перша пряма, складемо рівняння цієї прямої як дотичної до шуканого кола з центром у точці $C(a, b)$: $(2-a)^2 + (1-b)^2 = 20$ (1, рис. 29).

Ще одне рівняння з невідомими a та b отримаємо в пошуку відстані від точки C до першої прямої: $-2\sqrt{5} = \frac{2a+b-5}{\sqrt{5}}$ (2). Оскільки точка C розташовується з одного боку від прямої разом із початком координат, то відстань $AC < 0$.

Отримали систему двох рівнянь (1) і (2), розв'язавши яку знайдемо $a = -2$ і $b = -1$. Отже, рівняння кола має вид: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$.

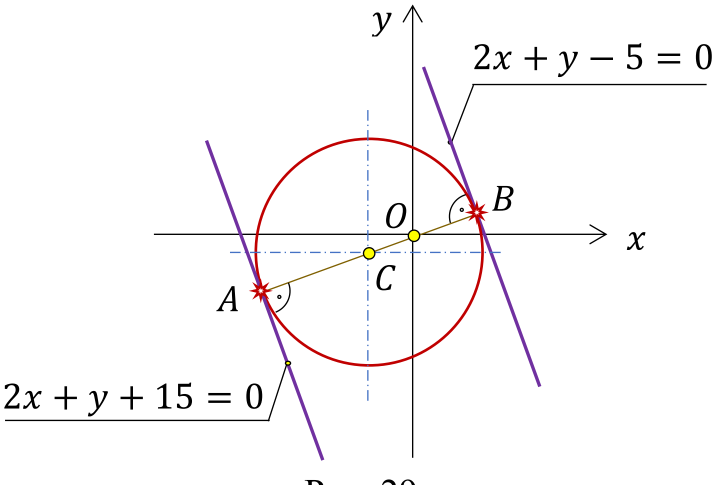


Рис. 29

Спосіб 2. Рекомендуємо студентам розв'язати задачу, записавши рівняння перпендикуляра AB до даних прямих, проведеного, наприклад, через початок координат (див. рис. 29).

Задача 9. Дано коло $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ і точку $C(5; 4)$. Скласти рівняння кола, що має центр у точці C і дотикається до даного кола.

Розв'язання.

Приведемо рівняння даного кола до канонічного виду $(x^2 - 2 \cdot 2y + 4) - 4 + (y^2 - 0) - 5 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 - 9 = 0$. Маємо коло з радіусом $r_1 = 3$ і центром у точці $Q(2; 0)$.

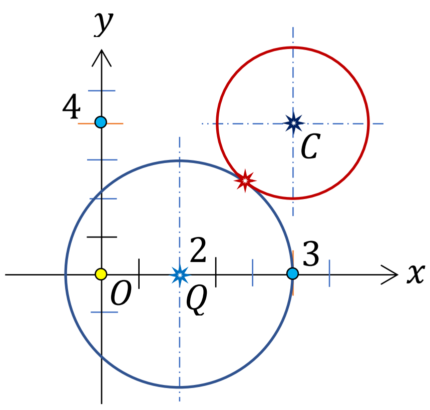


Рис. 30

Щоб з'ясувати (формально, хоча це можна також зробити рисунком, рис. 30) як розташована точка C відносно даного кола, варто знайти відстань між центрами кола заданого (C) і кола шуканого (Q): $CQ = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = 5$. Відстань від точки C до центра кола більша його радіуса, тому C розташована зовні кола.

Оскільки кола мають дотикатися зовнішнім чином, то сума їхніх радіусів рівна відстані між центрами. Отже, $r_2 = 2$ – радіус шуканого кола. Остаточно матимемо рівняння: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Задача 10. Із центром у початку координат, радіусом $r = 12$ описано коло. Провести до нього дотичну так, щоб відрізок цієї дотичної від точки дотикання до перетину з додатною піввіссю абсцис (Ox) мав довжину $l = 35$.

Рівняння даного кола відоме: $x^2 + y^2 = 144$. На рисунку 31 добре видно, що розташування точки A на абсцисі ПДСК можна знайти, якщо скористатися теоремою Піфагора у прямокутному трикутнику OMA ($OA = 37$). Точка A матиме координати (37; 0). Далі працюємо за схемою задачі 4.

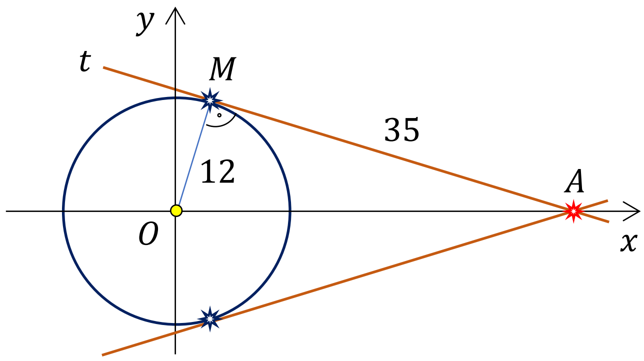


Рис. 31

Рівняння дотичної t в системі координат xOy має вид: $xx_0 + yy_0 = r^2$. Точка $M(x_0, y_0)$ належить колу і дотичній. Проте точка A – лежить на дотичній, тобто її координати задовольняють рівнянню дотичної. Маємо систему двох рівнянь із двома невідомими (x_0, y_0): $x_0^2 + y_0^2 = 144$ (1) і $37x_0 + 0 \cdot y_0 = 144$ (2). Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо координати точки дотику дотичної до кола: $x_0 = \frac{144}{37}$, а $y_0 = \pm \frac{420}{37}$.

Отже, дотична до кола визначена двома точками: $A(37; 0)$ і $M\left(\frac{144}{37}; \pm\frac{420}{37}\right)$. Тепер можемо записати рівняння шуканої дотичної, як такої, що проходить через дві знайдені точки: $\frac{x-37}{\frac{144}{37}} = \frac{y}{\frac{420}{37}}$. Звідси маємо: $12x \pm 35y = 444$.

Задача 11. Знайти центр подібності таких двох кіл:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0.$$

Розв'язання.

Центром подібності двох кіл називається точка, що має таку властивість: на кожній прямій, яка вміщує цю точку, відрізки від неї до точок перетину з обома колами пропорційні радіусам даних кіл. Усяка пара кіл має два центри подібності: вони ділять відрізок між центрами кіл внутрішнім і зовнішнім чином у відношенні, рівному відношенню радіусів (рис. 32). Зокрема, $\frac{SO_2}{SO_1} = \frac{r_2}{r_1}$.

Приведемо рівняння кіл до канонічного виду.

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + y^2 + 2y + 1 - 1 + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4;$$

$$x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + y^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-0)^2 - 1 = 0.$$

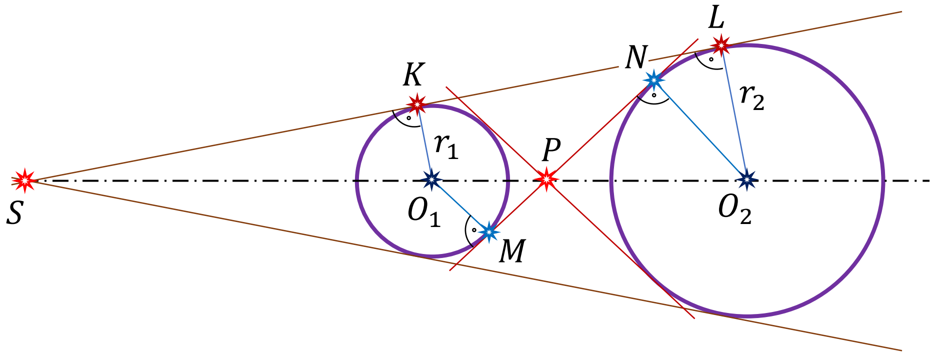


Рис. 32

Таким чином, у ПДСК (на рисунку не показана) більше коло має центр у точці $O_2(3; -1)$ і радіус $r_2 = 2$, а менше – в $O_1(-2; 0)$ і $r_1 = 1$.

Позначимо координати точки S (чи P) через x та y і запишемо квадрати відстаней від цієї ж точки до центрів кіл O_2 і O_1: $SO_2^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$, $SO_1^2 = (x+2)^2 + y^2$. Складемо їх відношення: $\frac{SO_2^2}{SO_1^2} = \frac{(x-3)^2+(y+1)^2}{(x+2)^2+y^2} = \frac{r_1^2}{r_1^2} = 4$ (1). Тепер запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки O_2 і O_1 й уміщує точку S: $\frac{x+2}{5} = \frac{y}{-1} \Rightarrow x + 5y + 2 = 0$ (2).

Розв'язавши систему рівнянь (1) і (2), отримаємо шукані координати точок S і P: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{3}$, $x_1 = -7$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Отже, $S(-7; 1)$, а $P\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Обґрунтуйте, чому в цій задачі йде мова про подібність фігур. Чи можете Ви пояснити спосіб побудови дотичних до двох зображених на рисунку кіл конструктивно (циркулем та лінійкою)?

Задачі для самостійного розв'язання

№ 1. Написати рівняння кола, яке проходить через точки (3; 0) і (–1; 2), якщо його центр лежить на прямій $x - y + 2 = 0$.

Відповідь: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

№ 2. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника, вершини якого мають координати: (7; 7), (0; 8), (–2; 4).

Відповідь: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

№ 3. Як розташовуються точки $A(-3; 0), B(5; 0), C(4; 2), D(2; 7), E(-4; 6), F(-4; 6), G(-2; 3)$ відносно кола $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$?

Відповідь: Точки C, E і F лежать на колі; точки A і G лежать всередині кола; точки B і D лежать зовні кола (шукайте відстань від центра кола до точки й порівнюйте з радіусом).

№ **4**. Записати рівняння кола, знаючи, що воно дотикається осі Ox в початку координат і перетинає вісь Oy в точці $A(0;4)$.

Відповідь: $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Оскільки коло перетинає вісь абсцис у точці (0; 0), то діаметр його лежатиме на осі ординат.

№ **5**. Привести до канонічного виду рівняння кола: $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$.

Відповідь: $x^2 + (y+3)^2 = 16$.

№ **6**. Написати рівняння кола, яке дотикається осі Ox і відтинає на осі Oy хорду довжиною 10 одиниць.

Відповідь: $(x-5)^2 + \left(y \pm 5\sqrt{2}\right)^2 = 50$. Якщо коло дотикається осі Ox, то абсциса центру рівна абсцисі точки дотику, а ордината – радіусу кола.

№ **7**. Як розташовані прямі 1) $x - 2y + 5 = 0$, 2) $5x - 12y + 26 = 0$, $3x - 4y + 30 = 0$, 4) $x + y - 17 = 0$ відносно кола $x^2 + y^2 = 36$?

Відповідь: Прямі 1) і 2) перетинають коло; пряма 3) дотикається до кола і 4) проходить поза колом (порівнюйте відстань від центра кола до прямої з його радіусом).

№ **8**. Задано коло $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Через точку $A\left(2;\, -\frac{1}{2}\right)$ слід провести таку хорду, яка ділилася б у цій точці навпіл.

Відповідь: $4x - 2y - 9 = 0$.

№ **9**. Задано коло: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Записати рівняння дотичної, що проведена в точці (5; 5).

Відповідь: $4x + 3y - 35 = 0$.

№ **10**. Написати рівняння дотичних, проведених із початку координат до кола: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$. Спробуйте знайти два способи розв'язання задачі, зокрема, з використанням прямої $y = kx$.

Відповідь: $y = 0$, $20x - 21y = 0$.

№ **11**. Знайти кут, під яким видно коло $x^2 + y^2 = 16$ із точки (8; 0).

Відповідь: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

№ **12**. Написати рівняння лінії центрів двох кіл: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ та $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

Відповідь: $5x + 2y - 7 = 0$.

№ **13**. Написати рівняння спільної хорди двох кіл: $x^2 + y^2 = 10$ та $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$.

Відповідь: $x + y - 4 = 0$.

№ **14**. Через точку $M(2;1)$ провести коло, що має радіус, рівний одиниці та дотикається до кола $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$.

Відповідь: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, $(x-2{,}8)^2 + (y-0{,}4)^2 = 1$. Точка M лежить поза даним колом, тому ці два кола можуть дотикатися лише зовнішнім чином.

№ **15**. Знайдіть кут перетину двох кіл: $x^2 + y^2 = 16$, $(x-5)^2 + y^2 = 9$.

Відповідь: φ = $\frac{\pi}{2}$. Кутом, під яким перетинаються кола, називається кут між дотичними в одній із точок їх перетину.

№ **16**. Знайти геометричне місце точок, із яких дане коло $x^2 + y^2 = r^2$ видно під прямим кутом.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 2r^2$.

№ **17**. Через точку *M*(2; 3) провести коло, ортогональне до кола $x^2 + y^2 = 1$, і яке має радіус $r = 3$.

Відповідь: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9, \left(x - \frac{41}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{13}\right)^2 = 9$.

№ **18**. Скласти рівняння спільних дотичних двох кіл: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ і $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Відповідь: Зовнішні дотичні: $y - 2 = 0$ і $4x - 3x - 10 = 0$; внутрішні дотичні: $x - 1 = 0$ і $3x + 4y - 5 = 0$.

№ **19**. Обчислити довжину дотичних, що проведені до кола $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$ із точок $M(0; -1), N(1; -1), P(2; 0)$ і $Q(0; 0)$.

Відповідь: $t_M = 3$; $t_N = 0$ (точка лежить на колі), $t_P = i\sqrt{6}$ (точка *P* лежить усередині кола), $t_Q = \sqrt{10}$.

2. **Еліпс**. Означення еліпса дається вище (див. § 6).

Стисла інформація про еліпс. Велика (фокальна) вісь еліпса *AB* = 2*a*, мала *CD* = 2*b*, відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$, канонічне рівняння еліпса має вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $c^2 = a^2 - b^2$. Осі симетрії кривої зливаються з осями ПДСК, а центр – із центром симетрії. Точки *A*, *B*, *C* і *D* називаються **вершинами** еліпса.

Ексцентриситетом (ε) еліпса називається відношення відстані (2*c*) між його фокусами до великої осі (2*a*), тобто $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Очевидно, що $\varepsilon < 1$.

Відстань від будь-якої точки еліпса $M(x, y)$ до фокусів називається його **фокальним радіусом**: $r_1 = a - \varepsilon x, r_2 = a + \varepsilon x \Rightarrow r_1 + r_2 = 2a$.

Директрисами еліпса називаються дві прямі, паралельні малій осі та віддалені від неї на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$. Рівняння директрис: $x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$ і $x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{a^2}{c}$.

Відношення відстані (r_1 або r_2) довільної точки еліпса до фокуса до відстані тієї ж точки до відповідної директриси (d_1 або d_2) дорівнює ексцентриситету ε: $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ і $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ (**характеристична властивість**).

Еліпс має зі всякою прямою дві спільні точки (дійсні, уявні або такі, що зливаються). Якщо пряма має з еліпсом дві спільні точки, які зіллялися, то така пряма називається **дотичною** до еліпса. Рівняння дотичної: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, де (x_0, y_0) – точка дотику (дотикання).

Зі всякої точки поза еліпсом можна провести до кривої дві дотичні. Якщо ж точка належить еліпсу – лише одну.

Задача 1. На еліпсі, один із фокусів якого має координати (3; 0), узято точку *M*(4; 2,4). Знайти відстань від цієї точки до відповідної директриси, якщо центр еліпса зливається з початком координат.

Розв'язання.

Нехай фокус F_1 має координати (3; 0), які задаються в умові задачі. Отже, ставиться вимога знайти відстань ρ від точки M(4; 2,4) до директриси d_1 (рис. 33).

Найперше, шукаємо фокальний радіус r_1, тобто відстань від фокуса F_1 до точки M: $F_1M = r_1 = \sqrt{\left(x_M - x_{F_1}\right)^2 + \left(y_M - y_{F_1}\right)^2} = 2{,}6$. Аналогічно, взявши до уваги фокус $F_2(-3;\ 0)$, знаходимо $F_2M = r_2 = 7{,}4$. Отже, $r_1 + r_2 = 2a = 10$, звідки матимемо $a = 5$.

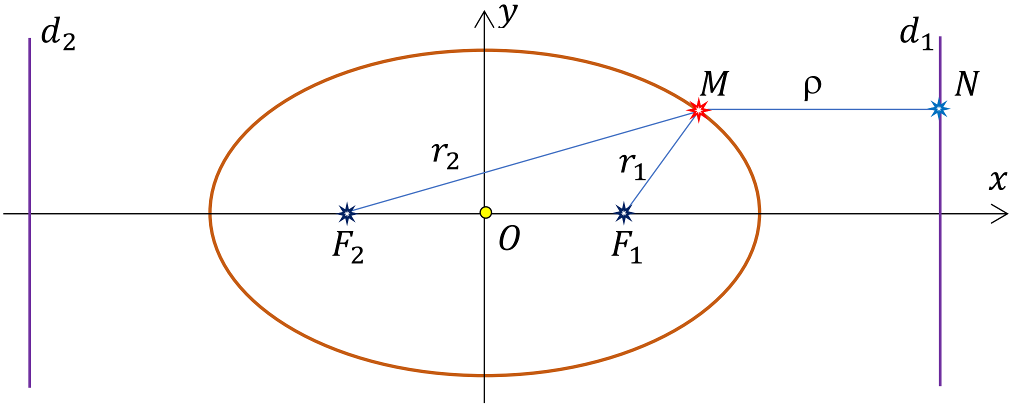


Рис. 33

Другим кроком шукаємо ексцентриситет еліпса: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$, адже $c = 3$, що відомо з умови.

Нарешті, скориставшись характеристичною властивістю конічного перерізу, отримуємо відповідь: $\frac{F_1M}{MN} = \varepsilon \Rightarrow \rho = MN = 4\frac{1}{3}$.

Задача 2. Дано еліпс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Знайти довжину його діаметра, який має напрям уздовж бісектриси координатного кута.

Розв'язання.

Діаметром еліпса, як відомо, називається всяка пряма, яка проходить через центр кривої. Коли мова йде про довжину діаметра, мається на увазі відрізок, що обмежений еліпсом, тобто розміщений між точками перетину еліпса із прямою (хорда, яка вміщує центр кривої).

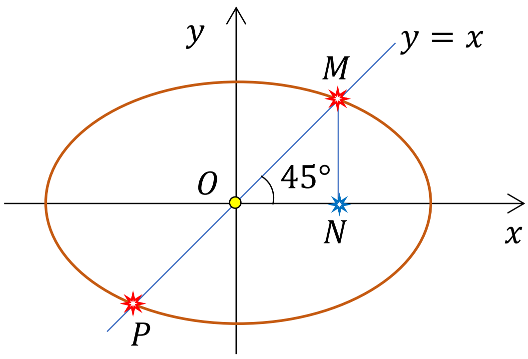


Рис. 34

Бісектриса координатного кута має рівняння $y = x$ (рис. 34). Розв'язавши це рівняння разом з рівнянням еліпса (в системі), отримаємо абсцису точки $N\left(\pm\frac{12}{5}\right)$.

Із прямокутного трикутника OMN просто знаходимо $OM = \frac{ON}{\cos 45°} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$. Через що діаметр еліпса $MP = \frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Задача 3. Дано еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Через точку (1; 1) провести хорду, котра ділиться цією точкою навпіл.

Розв'язання.

Перепишемо рівняння еліпса дещо в іншому вигляді: $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$, де $\alpha = \frac{1}{9}$, а $\beta = \frac{1}{4}$. Тоді через центр еліпса і точку (1; 1) проведемо його діаметр $y = x$, адже він є бісектрисою координатного кута xOy (тут $k = 1$). Відомо (див. § 10), що діаметр ділить хорди спряженого напрямку навпіл і кутовий коефіцієнт таких хорд $k' = -\frac{\alpha}{\beta k} = -\frac{4}{9}$. Тому рівняння шуканої хорди матиме вид: $y = -\frac{4}{9}x + l$, а координати точки (1; 1) задовольняють цьому рівнянню. Отже, підставивши, маємо $l = \frac{13}{9}$. Остаточно рівняння хорди матиме такий вид: $4x + 9y - 13 = 0$.

Зауважимо, що кутовий коефіцієнт хорди $\big(y - 1 = k(x - 1)\big)$, яка проходить через точку (1; 1), потрібно вибрати так, щоб при сумісному розв'язуванні рівнянь хорди і еліпса (якщо піти цим шляхом) половина суми коренів отриманого квадратного рівняння була рівна відповідній координаті цієї точки $\left(\frac{x_1+x_2}{2} = 1 \text{ чи } \frac{y_1+y_2}{2} = 1\right)$, залежно від того, яку із координат виключатимемо.

Задача 4. Скласти рівняння дотичних, які потрібно провести з точки $A(-6;$ $3)$ до еліпса: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Розв'язання.

Варто скористатися рівнянням дотичної до еліпса $\frac{xx_0}{15} + \frac{yy_0}{9} = 1$ і відшукати координати точки дотикання (x_0, y_0), виходячи із двох умов: по-перше, дотична вміщує точку $A(-6; 3)$, тому координати цієї точки задовольняють рівняння дотичної $\frac{-6x_0}{15} + \frac{3y_0}{9} = 1$ (1) і, по-друге, точка A належить даному еліпсу, й вона єдина (див. § 7), тому є істинною рівність: $\frac{x_0^2}{15} + \frac{y_0^2}{9} = 1$ (2). Розв'язавши систему рівнянь (1) і (2) відносно x_0 і y_0, матимемо: ${x_0}_1 = 0$, ${y_0}_1 = 3$; ${x_0}_2 = -\frac{60}{17}$, ${y_0}_2 = -\frac{21}{17}$. Отже, отримаємо такі рівняння дотичних: $y = 3$ і $12x + 7y + 51 = 0$.

Можна ще й іншим способом розв'язати дану задачу. Слід узяти рівняння будь-якої прямої, що проходить через дану точку $\big(y - 3 = k(x + 6)\big)$, і підібрати кутовий коефіцієнт так, щоб при сумісному розв'язуванні рівняння цієї прямої та рівняння еліпса отримати рівні корені (див. приклад 5).

Задача 5. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, які паралельні прямій $2x - y + 17 = 0$.

Розв'язання.

Одразу зауважимо, що рисунок 35 до цієї задачі виконано в оригінальних розмірах із обраною автором одиницею довжини.

Якщо прямі задано рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ та, до того ж, вони паралельні, то координати їхніх напрямних векторів $\overrightarrow{a_1}(-B_1, A_1)$ і $\overrightarrow{a_2}(-B_2, A_2)$ пропорційні, тобто $\frac{B_2}{B_1} = \frac{A_2}{A_1}$.

У нашому конкретно випадку дана пряма (d) має рівняння $2x - y + 17 = 0$, напрямним у якої є вектор $\overrightarrow{a_1}(1; 2)$, а шукані дотичні можуть бути представлені рівнянням у такому вигляді: $\frac{x_1}{30}x + \frac{y_1}{24}y - 1 = 0$, з відповідним напрямним вектором $\overrightarrow{a_2}\left(-\frac{y_1}{24}; \frac{x_1}{30}\right)$. Урахувавши факт, що вектори $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$ колінеарні, маємо пропорційність їхніх координат $1{:}\frac{x_1}{30} = 2{:}\frac{y_1}{24}$. Виконавши нескладні алгебричні перетворення, вочевидь отримуємо $y_1 = -\frac{2}{5}x_1$ (рис. 35).

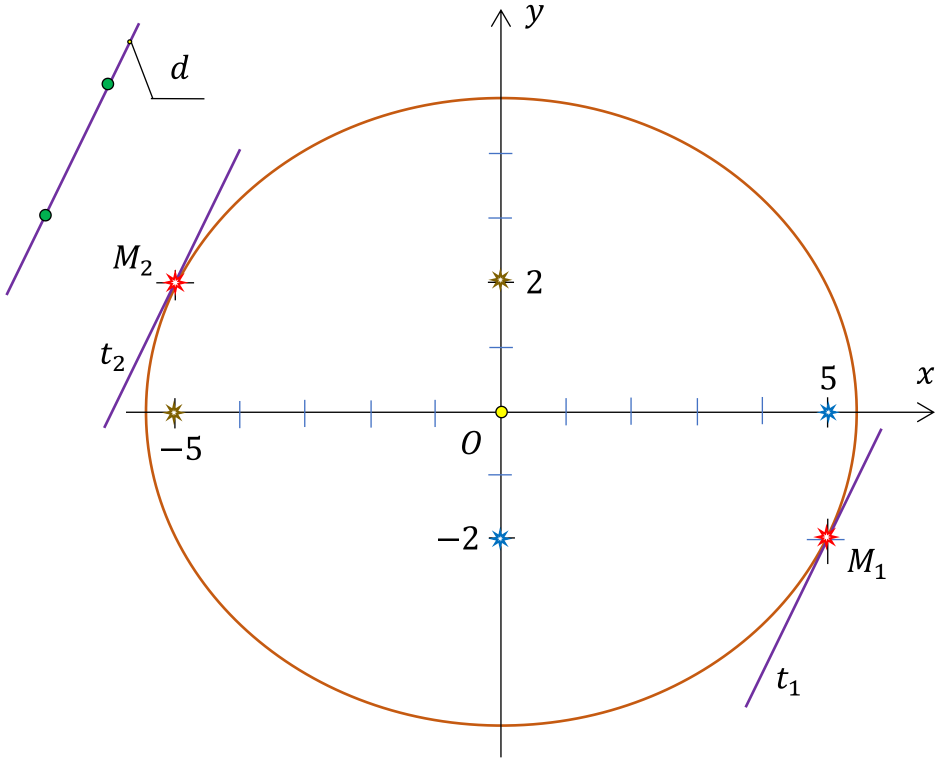


Рис. 35

Тепер, підставивши отримане значення y_1 у рівняння дотичної до еліпса, знайдемо x_1, а саме: $x_1 = \pm 5$.

Наступним кроком, скориставшись рівнянням еліпса, яке задається умовою задачі, матимемо: $y_1 = \pm 2$.

Отже, рівняння дотичних t_1 і t_2 відповідно в точках M_1 і M_2 еліпса, будуть мати такий вигляд: $2x - y \pm 12 = 0$ (два розв'язки).

Задача 6. Відомо, що пряма $4x - 5y - 40 = 0$ дотикається до еліпса $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$. Знайти точку їхнього дотикання.

Розв'язання.

Рівняння дотичної до еліпса вже задано $4x - 5y - 40 = 0$. З іншого боку, всяку дотичну до еліпса, рівняння якого теж задано, можна записати у вигляді: $16xx_0 + 25yy_0 - 800 = 0$.

Оскільки ці два рівняння описують одну й ту саму пряму лінію, коефіцієнти їхні пропорційні. Таким чином, $\frac{16x_1}{4} = -\frac{25y_1}{5} = \frac{800}{40}$. Розв'язавши ці два рівняння, знаходимо точки дотикання: $x = 5; y = -4$.

Пропонуємо студентам розв'язати дану задачу іншим методом – шукаючи, шляхом розв'язання системи двох рівнянь, точки перетину прямої з еліпсом, не забуваючи при цьому дискримінант квадратного рівняння прирівняти до нуля.

Задача 7. Сторони ромба рівні 5, а висота 4,8. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого зливаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, якщо осі координат уміщують його діагоналі.

Розв'язання.

Канонічне рівняння еліпса, як відомо, має вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 36).

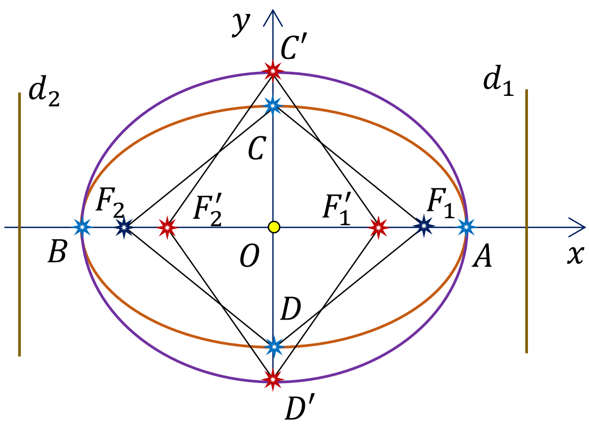


Рис. 36

Згідно до умови, $CF_2 = C'F_2' = 5$. Із прямокутного трикутника $C'OF_2'$ прямо випливає, що $(C'F_2')^2 = (OF_2')^2 + (OC')^2$, але $OF_2' = c$, а $OC' = b$, й саме тому $C'F_2' = a$. Таким чином, матимемо: $b^2 + c^2 = 25$ (1).

Щоб записати ще одне рівняння з невідомими b і c, знайдемо площу ромба. Так, $S = C'F_2' \cdot h = 5 \cdot 4{,}8 = 24$ кв. од. Площа прямокутного трикутника $C'OF_2'$ складає чверть від площі ромба, а це означає, що $S_{\Delta C'OF_2'} = 6$ кв. од. З іншого боку, $S_{\Delta C'OF_2'} = \frac{1}{2} OF_2' \cdot OC' = \frac{1}{2} c \cdot b$. Прирівнявши праві частини двох останніх рівностей, дістанемо: $c \cdot b = 12$ (2).

Розв'язавши сукупно систему рівнянь (1) і (2), отримаємо наступне: $c = \frac{12}{b}$, $b^2 + \frac{144}{b^2} = 25 \Rightarrow b^4 - 25b^2 + 144 = 0 \Rightarrow (b_1^2 = 16, b_2^2 = 9) \Rightarrow b_1 = 4;\ b_2 = 3$.

Відповідно значенням b_1 і b_2, знаходимо: $c_1 = 3, c_2 = 4$. У свою чергу, із відомої нам рівності $a^2 = b^2 + c^2$, матимемо: $a_1 = a_2 = 5$.

Отже, як результат, отримали два еліпси: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ і $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 8. На еліпсі $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ знайти точки, відстань яких від лівого фокуса більше відстані від правого фокуса у три рази.

Розв'язання.

Фокальні радіус-вектори точки *M* еліпса (див. рис. 33) пов'язанні з абсцисою цієї точки рівняннями: $r_1 = a - \varepsilon x$ – правий радіус , $r_2 = a + \varepsilon x$ – лівий радіус.

Оскільки за умовою $r_2 = 3r_1$, то підставивши значення r_1 і r_2 у цю рівність, маємо $x = \frac{a^2}{2c}$ (*). Тут $a = 6$, $b = \sqrt{11}$, а $c^2 = a^2 - b^2 = 25$. Тобто $c = 5$, $x = 3{,}6$.

Ординати точок знайдемо шляхом підстановки абсциси в рівняння еліпса. Отже, одержимо: $y = \pm\frac{4\sqrt{11}}{5}$. Одержали дві точки: $M_1\left(\frac{18}{5}; \frac{4\sqrt{11}}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{18}{5}; \frac{4\sqrt{11}}{5}\right)$.

Задача 9. Записати рівняння тієї дотичної до еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, відношення відстаней якої від двох фокусів дорівнює 9.

Розв'язання.

У даного еліпса $a = 5$, а $b = 3$. Тому $c^2 = a^2 - b^2 = 16$, тобто $c = 4$. Однак відношення відстаней F_2X до F_1X рівне 9 (X – шукана точка на еліпсі). Очевидно, що в цій ситуації умові задачі може задовольняти лише дві точки еліпса: $X \equiv A$ і $X \equiv B$, оскільки $\frac{F_2A}{F_1A} = \frac{F_1B}{F_2B} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{9}{1} = 9$ (див., наприклад, рис. 36). Отже, маємо такі рівняння дотичних: $x \pm 5 = 0$.

Задача 10. Велика вісь еліпса рівна 12, а його директрисами слугують прямі $x = \pm 12$. Знайти рівняння еліпса. Чому дорівнює ексцентриситет еліпса?

Розв'язання.

Зрозуміло, що для складання рівняння еліпса потрібно знайти його півосі a та b. За умовою $2a = 12$, звідки $a = 6$. Піввісь b шукаємо з умови $b^2 = a^2 - c^2$, а c знаходимо із рівняння директриси $x = \pm\frac{a^2}{c} = 12 \Rightarrow c = \pm 3$. Отже, $b^2 = 27$, а рівняння еліпса запишемо у вигляді: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

Нарешті, ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

Задача 11. Вивести умову, при якій пряма $Ax + By + C = 0$ дотикається до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння дотичної до еліпса у вигляді $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$. Оскільки пряма з умови і щойно описана пряма зливаються, то їх коефіцієнти при x та y пропорційні: $\frac{Aa^2}{x_0} = \frac{Bb^2}{y_0} = -C$. Розв'яжемо систему цих двох рівнянь відносно x_0 та y_0: $x_0 = -\frac{Aa^2}{C}$, $y_0 = -\frac{Bb^2}{C}$. Однак точка (x_0, y_0) належить еліпсу як точка дотикання, тому потрібно підставимо отримані координати в рівняння еліпса: $\frac{A^2a^4}{C^2a^2} + \frac{B^2b^4}{C^2b^2} = 1$. Звідси отримаємо: $\boldsymbol{A^2a^2 + B^2b^2 = C^2}$. Отже, цими операціями й логічними міркуваннями з'ясовано умову дотикання прямої до еліпса.

Задача 12. Еліпс дотикається осі Oy в точці (0; 3) і перетинає вісь Ox у двох точках (3; 0) і (7; 0). Яке рівняння еліпса, якщо його осі розташовані паралельно координатним осям?

Розв'язання.

Якщо осі шуканого еліпса паралельні координатним осям і еліпс дотикається (рис. 37) осі Oy, то цей дотик стосується крайньої лівої його точки, тобто вершини. Крім того, еліпс перетинає вісь Ox у двох точках (3; 0) і (7; 0).

Дані умови означають, по перше, що мала вісь еліпса перетинає вісь Ox у точці (5; 0), тобто $a = 5$ і, по друге, центр еліпса має координати (5; 3).

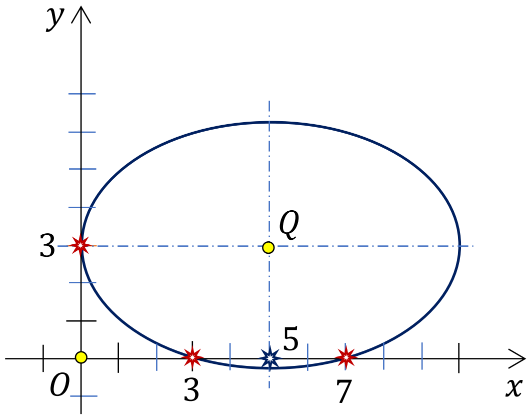


Рис. 37

Залишається з'ясувати, яка мала вісь еліпса в одиницях довжини. Для вирішення цього питання, варто скористатися канонічним рівнянням еліпса, яке в даному випадку має вид: $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$. Звідси знаходимо, що $b^2 = \frac{75}{7}$. Таким чином, остаточно рівняння еліпса матиме вид: $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{\frac{75}{7}} = 1$.

Задачі для самостійного розв'язання

№ 1. Записати канонічне рівняння еліпса, знаючи, що:

1) півосі його відповідно рівні 4 і 2;

2) відстань між фокусами рівна 6, а велика піввісь рівна 5;

3) велика піввісь рівна 10, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$;

4) мала піввісь рівна 3 і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) сума півосей рівна 8, а відстань між фокусами теж дорівнює 8.

Відповідь: 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 4) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; 5) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

№ 2. Дано рівняння еліпса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вирахувати довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса.

Відповідь: $2a = 25$; $2b = 10$; $\varepsilon = \frac{12}{13}$; $F_1(12; 0)$, $F_2(-12; 0)$.

№ 3. Відстань одного із фокусів еліпса до кінців його великої осі рівні 7 і 1 відповідно. Записати рівняння цього еліпса.

Відповідь: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Указівка. Задані відстані можуть виражатися через параметри еліпса відомим чином: $a + c$ та $a - c$.

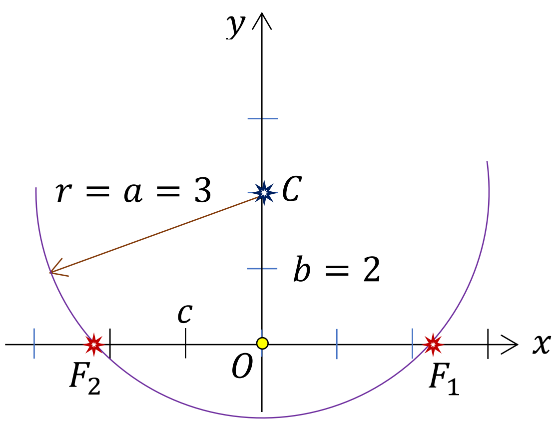


Рис. 38

№ 4. Дано еліпс своїм рівнянням: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Побудувати його фокуси не обчислюючи їхніх координат.

Відповідь: $c^2 = a^2 - b^2$ (рис. 38).

№ 5. Побудувати еліпс, користуючись його означенням.

Відповідь: Підсобними матеріалами слугують: 2 цвяхи у фокусах; нитка, котра має довжину $2a$.

№ 6. Прямі $x = \pm 8$ служать директрисами еліпса, мала вісь якого рівна 8. Записати рівняння цього еліпса.

Відповідь: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$.

№ 7. Знайти ексцентриситет еліпса, знаючи, що:

1) малу вісь його видно із фокуса під прямим кутом;

2) відстань між фокусами рівна відстані між вершинами малої і великої осі;

3) відстань між директрисами в чотири рази більша відстані між фокусами.

Відповідь: 1) $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{5}$; 3) $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

№ 8. Еліпс проходить через точки $M(\sqrt{3};\ -2)$ і $N(-2\sqrt{3};\ 1)$. Скласти рівняння еліпса, якщо його осі є осями координат.

Відповідь: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$. Знаходимо параметри еліпса a^2 і b^2 із тих умов, що координати даних точок задовольняють його рівнянню.

№ 9. Знайти розташування точок $A(6;\ -3)$, $B(-2;5)$, $C(3;\ -6)$, $D(\sqrt{50};0)$, $E(-4;2\sqrt{6})$, $F(1;\ \sqrt{26})$ відносно еліпса $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Відповідь: Точки A і E належать еліпсу; B і F – усередині еліпса; C і D – зовні еліпса.

№ 10. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша відстані від її його лівого фокуса.

Відповідь: $M_1\left(-\frac{15}{2};\ \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{15}{2};\ -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

№ 11. У еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ уписано правильний трикутник, одна з вершин якого зливається із правою вершиною великої осі. Знайти координати двох інших вершин трикутника.

Відповідь: $A(6;0), B\left(\frac{6}{7}, \frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$, $C\left(\frac{6}{7}, -\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$. Сторона трикутника дорівнює подвоєній ординаті вершини B.

№ 11. Провести до еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ дотичні, які перпендикулярні до прямої $13x + 12y - 115 = 0$.

Відповідь: $12x - 13y \pm 169 = 0$.

№ 12. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2 + 8y^2 = 45$, відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

Відповідь: Чотири дотичні задовольняють умову задачі: $\pm 3x \pm 4y + 15 = 0$.

№ 13. Довести, що дотичні до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, які проведені в кінцях одного і того ж діаметра, паралельні між собою; і навпаки, якщо дві дотичні до еліпса паралельні, то точки дотику належать одному і тому ж діаметру.

Указівка: Потрібно прийняти до уваги, що кінці одного і того ж діаметра еліпса розташовуються симетрично відносно початку координат, тобто їх відповідні координати рівні за абсолютною величиною, але протилежні за знаком (див. також § 10).

№ 14. Знайти рівняння сторін квадрата, описаного навколо заданого еліпса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

Відповідь: $x-y\pm 3=0$ і $x+y\pm 3=0$. Вершини будь-якого описаного навколо еліпса ромба (зокрема, квадрата) мають лежати на осях еліпса.

№ 15. Еліпс дотикається двох прямих $x+y=5$ і $x-4y=10$. Знайти рівняння цього еліпса за умови, його осі зливаються з осями координат.

Відповідь: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. Дивитися задачу 11.

3. **Гіпербола**. Означення гіперболи дається в тексті вище (див. § 6).

Стисла інформація про гіперболу. Велика (фокальна) вісь гіперболи AB = = $2a$, мала (уявна) вісь CD = $2b$, відстань між фокусами $F_1F_2=2c$, канонічне рівняння еліпса має такий вид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де $c^2=a^2+b^2$. Осі симетрії кривої зливаються з осями ПДСК, а центр – із центром симетрії. Точки A і B перетину фокальної осі з гіперболою називаються її **вершинами**.

Ексцентриситетом (ε) гіперболи називається відношення відстані ($2c$) між його фокусами до великої осі ($2a$), тобто $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Очевидно, що $\varepsilon>1$.

Гіпербола має **дві гілки**, що прямують до нескінченості.

Для точок правої гілки (рис. 12, 19) фокальні радіус-вектори обчислюються за формулами: $r_1=\varepsilon x-a, r_2=\varepsilon x+a$ і $r_2-r_1=2a$. Для лівої гілки матимемо: $r_1=-\varepsilon x+a, r_2=-\varepsilon x-a$ і $r_1-r_2=2a$.

Директриси гіперболи d_1 і d_2 віддалені від центра кривої на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$ та мають відповідно рівняння $x=\frac{a}{\varepsilon}=\frac{a^2}{c}$ і $x=-\frac{a}{\varepsilon}=-\frac{a^2}{c}$.

Відношення відстані будь-якої точки гіперболи від фокуса до відстані від тієї ж точки до директриси дорівнює ексцентриситету кривої (характеристична властивість): $\frac{r_1}{\rho(M,d_1)}=\frac{r_2}{\rho(M,d_2)}=\varepsilon$. Асимптоти гіперболи мають такі рівняння: $y=\frac{b}{a}x; y=-\frac{b}{a}x$.

Якщо точка, рухаючись по гіперболі, необмежено віддаляється, то відстань її від однієї з асимптот прямує до нуля.

Асимптоти вміщують діагоналі прямокутника, центр якого зливається з центром гіперболи, а сторони рівні й паралельні осям кривої.

Пряма лінія має з гіперболою загалом дві спільні точки (дійсні, уявні чи такі, що зливаються), координати яких отримаємо, розв’язавши разом рівняння кривої та рівняння прямої. Коли ж пряма паралельна одній із асимптот, гіпербола має із прямою лише одну спільну точку. Кожна з асимптот зливається з граничним розташуванням однієї з дотичних до гіперболи, коли точка дотику необмежено віддаляється вздовж гіперболи.

Дотична до гіперболи має рівняння: $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Із кожної точки площини можна провести дві дотичні до гіперболи; якщо точку взято на гіперболі, то обидві дотичні зливаються в одну; точки, з яких можна провести дві дійсні й різні дотичні, складають ***зовнішню*** область кривої; точки, з яких можна провести тільки уявні дотичні, утворюють ***внутрішню*** область кривої. В межах полоси $x = a$ і $x = -a$ точок конічного перерізу не може бути (для гіперболи: $|x| \leq a$).

Задача 1. Записати рівняння гіперболи, знаючи фокуси $F_1(10; 0), F_2(-10; 0)$ і одну із точок гіперболи $M\left(12; 3\sqrt{5}\right)$.

Розв'язання.

За умови, коли осі гіперболи зливаються з координатними осями, як у нашому випадку, щоб записати канонічне рівняння даного конічного перерізу досить обчислити півосі a та b.

Отже, рівняння гіперболи можна записати так: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (1). До того ж відомо, що фокальна відстань від центра еліпса до фокуса (через півосі) описується рівнянням: $c^2 = a^2 + b^2$ (2). В умові задано точку на кривій, яка задовольняє рівнянню (1), і відомо фокальну відстань (c = 10).

Розв'язавши систему двох рівнянь із двома невідомими a та b, отримаємо: $a^2 = 64$ і $b^2 = 36$. Тому рівняння гіперболи має вид: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Задача 2. На правій гілці гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, відстань якої від асимптоти з від'ємним кутовим коефіцієнтом була б у два рази більшою, ніж відстань її від асимптоти з додатним кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання.

Оскільки $a^2 = 25$, $a = 5$; $b^2 = 9$, b = 3, маючи рівняння асимптот кривої, рівняння асимптоти з від'ємним кутовим коефіцієнтом подаємо у виді $y = -\frac{3}{5}x$, або $3x + 5y = 0$, а з додатним кутовим коефіцієнтом – $y = \frac{3}{5}x \Leftrightarrow 3x - 5y = 0$.

Виберемо на правій гілці гіперболи точку M з координатами (x, y). Відстань m_1 цієї точки від асимптоти $3x + 5y = 0$ запишемо за формулою відстані від точки до прямої $m_1 = \frac{|3x+5y|}{\sqrt{34}}$. Відстань m_2 цієї ж точки від асимптоти $3x - 5y = 0$ матиме вид $m_2 = \frac{|3x-5y|}{\sqrt{34}}$. За умовою $m_1 = 2m_2$, тобто $\frac{|3x+5y|}{\sqrt{34}} = 2\frac{|3x-5y|}{\sqrt{34}}$.

Звідси отримаємо або $\frac{3x+5y}{\sqrt{34}} = 2 \cdot \frac{3x-5y}{\sqrt{34}}$ (1), або $\frac{3x+5y}{\sqrt{34}} = -2 \cdot \frac{3x-5y}{\sqrt{34}}$ (2). З (1) випливає, що $x = \frac{5}{9}y$; з (2) випливає, що $x = 5y$.

Так одержані співвідношення $x = 5y$ і $x = \frac{5}{9}y$ є залежностями між абсцисою і ординатою шуканої точки M. Підставимо спочатку $x = 5y$ в рівняння даної гіперболи. З умови задачі $\frac{25y^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ маємо $y_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $y_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$; у нас $x = 5y$, тобто $x_1 = \frac{15\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{15\sqrt{2}}{4}$.

Однак за умовою точка лежить на правій гілці гіперболи, тому $x_2 = -\frac{15\sqrt{2}}{4}$ має бути відкинутим. Ордината на правій гілці гіперболи може бути додатною і від'ємною. Проте з рівності $x = 5y$ випливає, що y повинен мати такий самий знак як x, адже абсциса x додатна. Отже, $y_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ відкидаємо, а остаточно матимемо: $x_1 = \frac{15\sqrt{2}}{4}$, $y_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Самостійно переконайтеся, що залежність $x = \frac{5}{9}y$ призводить до уявних значень y. Таким чином, на гіперболі є лише одна точка $M(\frac{15\sqrt{2}}{4},\ \frac{3\sqrt{2}}{4})$, яка цілком задовольняє умову задачі.

Задача 3. На гіперболі $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ узято точку, абсциса якої рівна 10, а ордината додатна. Обчислити фокальні радіус-вектори цієї точки і кут між ними.

Розв'язання.

Ординату точки M, яка має абсцису 10, шукаємо шляхом підстановки в рівняння гіперболи: $x_M = 6\sqrt{2}$, а точка M матиме координати $(10; 6\sqrt{2})$.

Із рівняння гіперболи легко знаходимо, що $a = 5$, $b = 2\sqrt{6}$. Тому, маючи на увазі, що $c^2 = a^2 + b^2$, отримаємо $c = 7$, а фокуси гіперболи отримають такі координати $F_1(7; 0)$, $F_2(-7; 0)$.

Фокальні радіуси обчислюємо за формулами відстані між двома точками F_1 і M, F_2 і M: $F_1M = 9$, а $F_2M = 19$.

Неважко також записати рівняння прямих F_1M і F_2M, знайти їхні кутові коефіцієнти k_1 та k_2 й за відомою формулою $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$ обчислити кут між фокальними радіусами точки M.

Таким чином, $F_1M: y = 2\sqrt{2}x - 14\sqrt{2}$; $F_2M: y = \frac{6\sqrt{2}x + 42\sqrt{2}}{17}$, де $k_1 = 2\sqrt{2}$, а $k_2 = \frac{6\sqrt{2}}{17}$. Остаточно отримаємо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{28\sqrt{2}}{41} \cong 0{,}9658 \Rightarrow \alpha \cong 43°$.

Задача 4. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, для якої:

1) фокальні радіус-вектори перпендикулярні один іншому;

2) відстань від лівого фокусу вдвоє більша, ніж відстань від правого.

Розв'язання.

Зауважимо спочатку наступне: якщо фокальні радіус-вектори деякої точки гіперболи взаємно перпендикулярні один іншому, то очевидно, що вони разом із відрізком осі, який лежить між фокусами, утворюють прямокутний трикутник і фокальні радіуси пов'язані співвідношенням: $r_1^2 + r_2^2 = 4c^2$ (1).

Оскільки з рівняння гіперболи маємо $a = 4$, $b = 3$, а $c^2 = a^2 + b^2$, то $c = 5$.

Нехай шукана точка M на кривій має координати (x_0, y_0). Наприклад, для лівої гілки гіперболи $r_1 = -\varepsilon x_0 + a = -\frac{4}{5}x_0 + 4$, а $r_2 = -\varepsilon x_0 - a = -\frac{5}{4}x_0 - 4$. В останніх записах, що помітно, фігурує лише абсциса точки M. Тому зараз вельми доречно скористатися рівністю (1).

Підставивши значення r_1 і r_2 у рівність і виконавши нескладні формальні перетворення виразу, отримаємо: $25x_0^2 = 544 \Rightarrow x_0 = \pm\frac{4}{5}\sqrt{34}$.

Останнім кроком підставляємо значення x_0 в дане рівняння гіперболи і, в результаті, одержимо: $y_0 = \pm 1{,}8$.

Отже, точка M має координати $x_0 = \pm \frac{4}{5}\sqrt{34}$, $y_0 = \pm 1{,}8$ – чотири точки.

Щоб знайти на гіперболі точку, відстань якої від лівого фокуса вдвічі більша відстані від правого фокуса, варто діяти вже відомим нам способом. А саме, взяти на конічному перерізі точку N, наприклад із координатами (x_1, y_1). Далі, скориставшись формулами відстані між двома точками, подати формально ці відстані: $F_1N = \sqrt{(x_1 - 5)^2 + y_1^2}$, $F_2N = \sqrt{(x_1 + 5)^2 + y_1^2}$.

Відтак, порівнюємо записані відстані в заданому умовою співвідношенні: $F_2N = 2F_1N$. По іншому $\sqrt{(x_1 + 5)^2 + y_1^2} = 2\sqrt{(x_1 - 5)^2 + y_1^2}$ (2). Із рівняння кривої знайдемо $y_1^2 = \frac{9x_1^2}{16} - 9$. Тепер підставимо це значення y_1^2 у вираз (2) і піднесемо до квадрату. Виконавши нескладні перетворення, отримаємо таке: $x_{1_1} = 9{,}6$; $x_{1_2} \cong 1{,}07$.

Підставивши значення $x_{1_1} = 9{,}6$ у рівняння гіперболи, шукаємо числовий вираз для $y_{1_1} = \pm \frac{3}{4}\sqrt{76{,}16}$. Проробивши аналогічні операції із $x_{1_2} \cong 1{,}07$, дістанемо, що $\frac{y_{1_2}^2}{9} = -\frac{14{,}855}{16}$, а це останнє, очевидно, неможливо.

Отже, точка N має координати $\left(9{,}6;\ \pm \frac{3}{4}\sqrt{76{,}16}\right)$ – два розв’язки для правої гілки гіперболи.

Задача 5. Довести, що добуток відстаней будь-якої точки гіперболи до двох її асимптот є величина стала.

Розв’язання.

Візьмемо довільну точку $M(x_0, y_0)$ на гіперболі та знайдемо відстань від неї до асимптот a_1 і a_2, які описуються рівняннями $y = \frac{b}{a}x$ та $y = -\frac{b}{a}x$ (рис. 39).

Таким чином, $MK = \frac{\left|\frac{b}{a}x_0 - y_0\right|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}}$, а $ML = \frac{\left|\frac{b}{a}x_0 + y_0\right|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}}$.

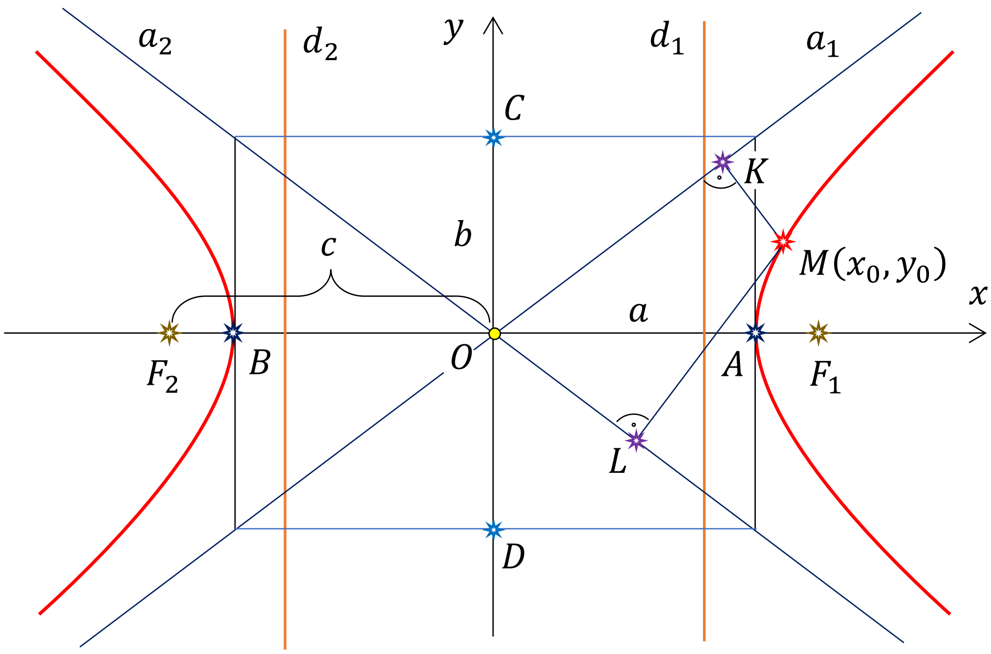


Рис. 39

Шукаємо їх добуток: $MK \cdot ML = \frac{\left|\frac{b}{a}x_0 - y_0\right|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}} \cdot \frac{\left|\frac{b}{a}x_0 + y_0\right|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}} = \frac{\left|b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right|}{b^2+a^2}$. Але ж точка M належить також гіперболі. Отже, з рівняння гіперболи $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ отримаємо, що $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. Окрім того, $b^2 + a^2 = c^2$. Тому остаточно матимемо таке: $MK \cdot ML = \frac{a^2b^2}{c^2} = const.$

Ця властивість однозначно характеризує гіперболу, тобто, гіперболу можна розглядати як геометричне місце точок площини, добуток відстаней яких від двох прямих є величина постійна, і ці прямі слугують асимптотами гіперболи.

Додамо, що прямі, про які йде мова, мають обов'язково перетинатися.

Задача 6. Дано гіперболу $9x^2 - 16y^2 = 576$. Записати рівняння такого діаметра кривої, довжина якого дорівнює 20.

Розв'язання.

Нехай $K(x_1;\ y_1)$ є точкою гіперболи і кінцем діаметра, координати якої слід знайти. Тоді $9x_1^2 - 16y_1^2 = 576$ (1). Проте відстань від точки $O(0;\ 0)$ до точки $K(x_1;\ y_1)$, оскільки $OK = 10$, виразиться формулою $x_1^2 + y_1^2 = 100$ (2). Звідси $x_1^2 = 100 - y_1^2$. Підставивши в рівняння (1) $100 - y_1^2$, матимемо такий результат: $9(100 - y_1^2) - 16y_1^2 = 576$. Звідки $25y_1^2 = 324$ і $y_1 = \pm\frac{18}{5}$, а $x_1 = \pm\frac{8}{5}\sqrt{34}$.

Складемо рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $\left(+\frac{8}{5}\sqrt{34};\ +\frac{18}{5}\right)$: $\frac{x}{\frac{8}{5}\sqrt{34}} = \frac{y}{\frac{18}{5}} \Rightarrow 9x - 4\sqrt{34}y = 0$. Якщо узяти симетричну їй точку відносно осі Ox $\left(-\frac{8}{5}\sqrt{34};\ +\frac{18}{5}\right)$, то дістанемо: $\frac{x}{-\frac{8}{5}\sqrt{34}} = \frac{y}{\frac{18}{5}} \Rightarrow 9x + 4\sqrt{34}y = 0$.

Залишилося перевірити відстань від будь-якої із уже розглянутих точок до початку координат. Таким чином, $OK = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\sqrt{34}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2} \cong \sqrt{100} = 10$.

Отже, розвязком задачі є два діаметри даної гіперболи: $9x \pm 4\sqrt{34}y = 0$.

Задача 7. На гіперболі $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9}$ =1 знайти точки, дотичні в яких нахилені до осі абсцис під кутом $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

Вираз для кутового коефіцієнту будь-якої дотичної до гіперболи, описаної канонічним рівнянням, має вид $k = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, де (x_0, y_0) є точкою дотику, що прямо випливає з рівняння дотичної до даної кривої $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. У нашому випадку маємо: $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} = \frac{9x_0}{8y_0}$ (1).

Окрім того, точка (x_0, y_0) належить гіперболі, тому маємо ще одне рівняння з невідомими x_0 і y_0: $\frac{x_0^2}{8} - \frac{y_0^2}{9}$ =1 (2).

Розв'язавши разом рівняння (1) і (2), отримаємо дві точки, що легко уявити, адже в гіперболи дві гілки: $\left(\frac{8\sqrt{5}}{5};\ \frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$ і $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5};\ -\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$. Знайдені точки, до речі, є симетричними відносно початку координат. Отже, одна з точок належить лівій гілці, а інша – правій.

Задача 8. Записати умову, за якої пряма $Ax + By + C = 0$ дотикається до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання. (Див. задачу 11 у темі «Еліпс»): $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

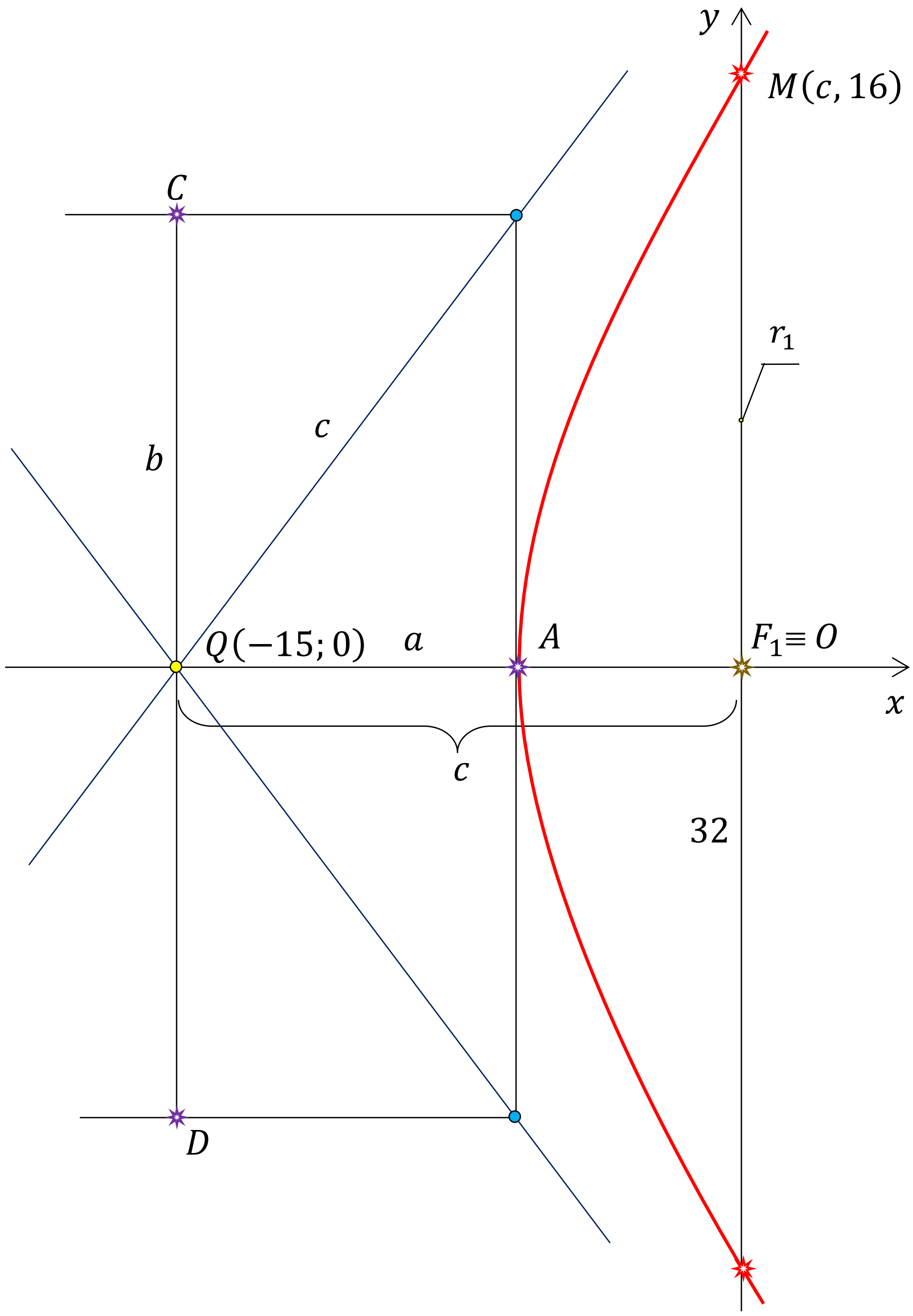


Рис. 40

Задача 9. Центр гіперболи перенесено в точку (–15; 0), а один із фокусів зливається з початком координат. Записати рівняння гіперболи, якщо, окрім того, відомо, що вона відтинає від осі ординат хорду, довжина якої дорівнює 32 од. м. (див. рис. 40).

Розв'язання.

Якщо початок ПДСК розташований у фокусі гіперболи, наприклад у точці F_1, а центр кривої зсунутий на 15 од. м. вліво, то її фокусна відстань $c = 15$.

Окрім того, з умови задачі відомо, що на осі ординат Oy права гілка конічного перерізу відтинає хорду довжиною 32 од. м. Отже, із формули фокального радіусу точки M, яка має координати (c; 16), можна виразити одну з півосей гіперболи через іншу: $r_1 = 16 = \frac{c}{a}x - a = \frac{c^2}{a} - a$ (адже $x = c$ для точки M(c; 16)). Звідси отримуємо $\frac{c^2-a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = 16 \Rightarrow b^2 = 16a$ (1), де $c^2 = a^2 + b^2$ (2).

Урахувавши, що $c = 15$, із записів (1) і (2) знайдемо $a = 9$, а $b = 12$.

Таким чином, рівняння гіперболи має вид: $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$.

Зауважимо, рисунок 40 зроблено в масштабі 1:2.

Задача 10. Знаючи рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$ та рівняння однієї із її дотичних $5x - 6y - 8 = 0$, скласти рівняння цієї кривої.

Розв'язання. З умови бачимо, що початком координат O(0; 0) зливається із центром гіперболи. Тому невідомими є лише параметри кривої a і b. Їх можна надто просто знайти, скориставшись, по перше, заданим кутовим коефіцієнтом асимптот $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ (1) і, по друге, умовою дотикання гіперболи й даної прямої (див. задачу 8): $25a^2 - 36b^2 = 64$ (2).

Із (1) маємо: $a = 2b$. Підставивши це значення у (2), одержимо: $64b^2 = 64$. Отже, $b^2 = 1$, а $a^2 = 4$. Тому рівняння гіперболи матиме вид: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Задача 11. Дано рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку A(4; 6).

Розв'язання. З умови помічаємо, що $a^2 = b^2 = 8$. Можна, скориставшись відомою рівністю $c^2 = a^2 + b^2$, знайти фокуси гіперболи. Так, $c = 4$, $F_1(4; 0)$ і $F_2(-4; 0)$. У цих точках розміщуються фокуси шуканого еліпса.

Позначимо велику та малу півосі еліпса через a_0 і b_0. Відстань між фокусами еліпса та ж сама, що і між фокусами гіперболи. Тому половину цієї відстані позначимо також через c. Проте для еліпса $c^2 = a_0^2 - b_0^2$, тобто маємо таке співвідношення: $a_0^2 - b_0^2 = 16$ (1).

Для відшукання a_0 і b_0 скористаємося фактом, що точка A(4; 6) належить еліпсу. Мається на увазі, що координати точки задовольняють рівняння кривої: $\frac{16}{a_0^2} + \frac{36}{b_0^2} = 1$ (2).

Отримали систему двох рівнянь з двома невідомими a_0 і b_0, розв'язавши яку, матимемо, що $a_0^2 = 64$ і $b_0^2 = 48$, тобто $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$, що й буде шуканим рівнянням еліпса.

Задача 12. Прямі $x = \pm 4$ служать директрисами гіперболи, ексцентриситет якої дорівнює 1,5. Знайти на гіперболі точки, фокальні радіуси яких, проведені із правого фокуса, рівні 9.

Розв'язання.

Рівняння гіперболи, як завжди, будемо шукати в такому виді: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Пригадаємо рівняння директрис гіперболи: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, тобто $\frac{a}{\varepsilon} = 4$. Звідси маємо $a = 4 \cdot 1{,}5 = 6$. Відомо, що $\varepsilon = \frac{c}{a}$, а тому $c = \varepsilon \cdot a = 6 \cdot 1{,}5 = 9$.

Піввісь b знайдемо із співвідношення $c^2 = a^2 + b^2$. Так, $b^2 = c^2 - a^2 = 81 - 36 = 45$. Отже, $b = 3\sqrt{5}$.

Таким чином, рівняння гіперболи має вид: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$ (1).

Припустимо, що точки, які підлягають відшуканню, лежать на правій гілці гіперболи. Тоді їх фокальні радіуси вираховуються за формулою $r_1 = \varepsilon x - a$. Звідси матимемо абсцису точок $x = \frac{r_1 + a}{\varepsilon} = \frac{9+6}{1{,}5} = 10$. Ординати таких точок знайдемо з рівняння гіперболи (1): $y^2 = 45 \cdot \left(\frac{x^2}{36} - 1\right) = 45 \cdot \left(\frac{100}{36} - 1\right) = 80$.

Напевно, що $y = \pm 4\sqrt{5}$. Отже, на правій гілці гіперболи отримаємо дві точки, котрі розташовуються симетрично відносно осі абсцис: $P_1\left(10; 4\sqrt{5}\right)$ і $P_2\left(10; -4\sqrt{5}\right)$.

Оскільки за умовою фокусна відстань до точок кривої дорівнює 9, то шукані точки не можуть лежати на лівій гілці гіперболи, адже в цьому випадку фокальні радіуси, проведені із правого фокуса кривої, мають бути більші 15, тобто $r \geq 15$ $(r \geq c + a)$.

Задача 13. Записати рівняння гіперболи, якщо відстань між вершинами кривої дорівнює 8, а фокуси мають координати (–3; 3) і (7; 3).

Розв'язання.

Очевидно, що фокуси конічного перерізу лежать на прямій $y = 3$ (ординати фокусів рівні 3).

Таким чином, центр гіперболи лежить не в початку координат, але її осі паралельні координатним осям (пряма $y = 3$ паралельна осі Ox).

У цьому випадку рівняння гіперболи слід шукати у такому вигляді: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, де $(x_0;\ y_0)$ – координати центра кривої.

Безсумнівно, що координати центра $(x_0;\ y_0)$ лежатимуть на прямій $y = 3$ і ділитимуть відстань між фокусами (та вершинами) навпіл. Тому $x_0 = \frac{-3+7}{2} = 2$, а $y_0 = \frac{3+3}{2} = 3$. Отже, центр кривої Q має координати (2; 3).

Далі, згідно до умови, $2a = 8$ $a = 4$, а відстань між фокусами F_1 і F_2 (за формулами відстані між двома точками) $2c = 10$, тому $c = 5$. Скориставшись знову відомим співвідношенням $c^2 = a^2 + b^2$, знайдемо, що $b = 3$.

Тепер можна записати рівняння гіперболи. Остаточно отримаємо наступне рівняння: $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

Задача 14. До гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ провести таку дотичну, яка знаходилася б на однаковій відстані від центра кривої та від її правого фокуса.

Розв'язання.

Оскільки рівняння гіперболи задається в канонічному вигляді, потрібно скористатися відомим нам виразом дотичної до нього: $\frac{xx_0}{9} - \frac{yy_0}{16} = 1$, де $(x_0;\ y_0)$ – єдина точка дотикання, яка належить як гіперболі, так і дотичній.

Знайдемо відстані окремо від початку координат і від правого фокуса, потім прирівняємо їх. Така схема дій.

Дивлячись на рівняння даної кривої, легко помітити, що $a = 3$, $b = 4$, а c знаходимо із рівності $c^2 = a^2 + b^2$. Отже, $c = 5$. Точка O має координати (0; 0), а правий фокус F_1 – (5; 0).

За відомою формулою відстані від точки до прямої, отримаємо такі вирази: $\left(\rho(O,t) = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{9^2}+\frac{y_0^2}{16^2}}} \text{ і } \rho(F_1,t) = \frac{\left|\frac{5}{9}x_0-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{9^2}+\frac{y_0^2}{16^2}}}\right) \Rightarrow x_0 = \frac{18}{5}$. Підставляємо значення x_0 в задане рівняння кривої й отримуємо: $y_0 = \pm\frac{4}{5}\sqrt{11}$. Уже з цього виразу робимо важливий висновок, що задача має два розв'язки (дві дотичні).

Останню операцію виконуємо шляхом підстановки значень x_0 і y_0 в записане вище рівняння дотичної до кривої. Так, дістанемо: $8x \pm \sqrt{11}y - 20 = 0$.

Задача 15. Правий фокус гіперболи лежить у точці $F_1(2;2)$, а відповідна йому директриса d_1 має рівняння $x - \frac{1}{5} = 0$. Записати рівняння гіперболи, якщо точка $M\left(3\frac{2}{3};6\right)$ лежить на даній кривій.

Розв'язання.

Оскільки директриса паралельна осі Oy $(x = \frac{1}{5})$, то осі гіперболи паралельні координатним осям. Тому рівняння гіперболи матиме відомий нам вигляд (центр кривої зміщений відносно координатних осей): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (*).

Фокуси гіперболи лежать на прямій $y = 2$, звідки випливає, що ордината центра кривої $y_0 = 2$. Але ж центр гіперболи зсунутий у точку $Q(x_0;\ y_0)$, тому рівняння правої директриси приймає вид: $x = \frac{a^2}{c} + x_0$ (рис. 41).

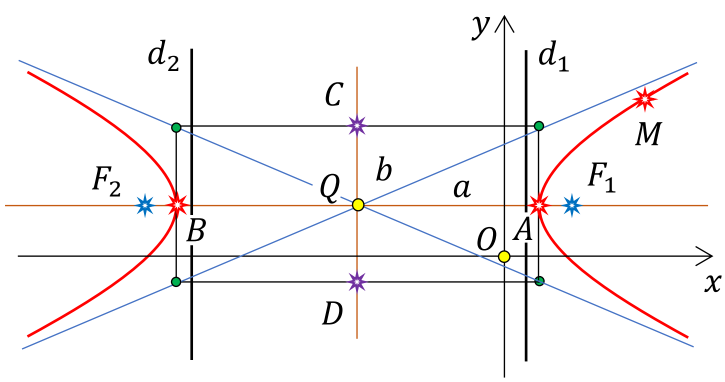


Рис. 41

Однак $x = \frac{1}{5}$, тому матимемо таке рівняння: $\frac{a^2}{c} + x_0 = \frac{1}{5}$ (1).

Далі, із характеристичної властивості гіперболи знайдемо її ексцентриситет $\varepsilon = \frac{r_1}{\rho(M, d_1)}$. Тут $r_1 = F_1M = \sqrt{\left(3\frac{2}{3} - 2\right)^2 + (6-2)^2} = \frac{13}{3}$. Тепер потрібно знайти відстань (ρ) від точки M до директриси d_1, яка описується рівнянням $x - \frac{1}{5} = 0$. Отже, $\rho(M,\ d_1) = 3\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = 3\frac{7}{15}$. Таким чином, $\varepsilon = \frac{13}{3} : \frac{52}{15} = \frac{5}{4}$.

З іншого боку, маємо ще одне рівняння для ексцентриситету $\frac{c}{a} = \frac{5}{4}$. Звідси знаходимо, що $c = \frac{5}{4}a$. Підставивши цей результат у рівність (1) $\frac{a^2}{\frac{5}{4}a} + x_0 = \frac{1}{5}$, одержимо $x_0 = -\frac{4}{5}a + \frac{1}{5}$ (2). Із відомого нам співвідношення $b^2 = c^2 - a^2$ матимемо вираз для $b^2 = \frac{9}{16}a^2$ (3).

Тепер пригадуємо, що точка $M\left(3\frac{2}{3}; 6\right)$ належить гіперболі, а ці координати задовольняють її рівнянню. Підставивши координати точки M у записане вище рівняння кривої, а також узявши до уваги, що $y_0 = 2$, а x_0 і b^2 беремо з рівнянь (2) і (3), отримаємо рівняння лише з одним невідомим a.

Розв'язавши його, одержимо такий результат: $a_{1,2} = \frac{208 \pm 100}{27}$. Звідси маємо, що $a_1 = 4$, $a_2 = 11\frac{11}{27}$.

Якщо $a_1 = 4$, то із (2) знаходимо $x_0 = -3$, а із (3) – $b = 3$.

Підставивши знайдені значення a, b, x_0 і y_0 у вихідне рівняння (*), матимемо рівняння гіперболи: $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

Для $a_2 = 11\frac{11}{27}$, знайдемо спочатку $x_0 = -\frac{241}{27}$, потім $b^2 = \left(\frac{77}{9}\right)^2$ і, нарешті, отримаємо таке рівняння гіперболи: $\frac{\left(x+\frac{241}{27}\right)^2}{\left(\frac{308}{27}\right)^2} - \frac{(y-2)^2}{\left(\frac{77}{9}\right)^2} = 1$.

Задачі для самостійного розв'язання

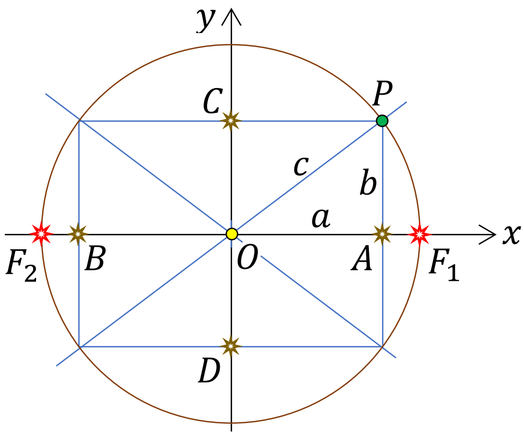


Рис. 42

№ 1. Записати рівняння гіперболи, осі якої зливаються з осями координат, знаючи, що: 1) відстань між вершинами рівна 8, а між фокусами – 10; 2) дійсна піввісь рівна 5, а вершини ділять відстань між центром і фокусами навпіл; 3) дійсна вісь рівна 6 і гіпербола проходить через точку (9; –4); 4) крива проходить через точки (– 5; 2) і $(2\sqrt{5};\ \sqrt{2})$.

Відповідь: 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$; 4) $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$.

№ 2. Побудувати асимптоти і фокуси гіперболи $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Відповідь: Відстань від початку координат до кожного із фокусів кривої (c) є гіпотенузою прямокутного трикутника, катети якого рівні a і b (рис. 42).

№ 3. Дано гіперболу $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Потрібно: 1) обчислити координати фокусів; 2) обчислити ексцентриситет; 3) написати рівняння асимптот і директрис; 4) написати рівняння спряженої гіперболи і обчислити її ексцентриситет; 5) знайти кут нахилу асимптот гіперболи до координатних осей.

Відповідь: 1) $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$, 2) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 3) $y = \pm\frac{4}{3}x$, $x = \pm\frac{9}{5}$; 4) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$; 5) $\tan\angle AOP = \frac{5}{7} \cong 0{,}7143 \Rightarrow \angle AOP \cong 35°2'$.

№ 4. Обчислити півосі гіперболи, знаючи, що: 1) відстань між фокусами рівна 8, а між директрисами – 6; 2) директриси дано рівняннями $x = \pm 3\sqrt{2}$ і кут між асимптотами – прямий; 3) асимптоти задано рівняннями $y = \pm 2x$ і фокуси знаходяться на відстані 5 одиниць від центра; 4) асимптоти задано рівняннями $y = \pm\frac{5}{3}x$ і гіпербола проходить через точку (6; 9).

Відповідь: 1) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$; 2) $a = b = 6$; 3) $a = \sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{5}$; 4) $a = \frac{3\sqrt{19}}{5}$, $b = \sqrt{19}$.

№ 5. Знаючи рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{1}{2}x$ і одну з її точок $M(12; 3\sqrt{3})$, скласти рівняння гіперболи.

Відповідь: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

№ 6. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої: 1) ексцентриситет $\varepsilon = 2$; 2) відстань між фокусами вдвоє більша відстані між директрисами. Розглянути два випадки.

Відповідь: 1) 120°; 2) 90°.

№ 7. Обчислити ексцентриситет гіперболи за умови, що: 1) кут між її асимптотами рівний 60°; 2) кут між її асимптотами рівний 90°; 3) дійсну вісь гіперболи видно із фокуса спряженої гіперболи під кутом у 60°.

Відповідь: 1) $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\varepsilon = \sqrt{2}$; 3) $\varepsilon = \sqrt{3}$.

№ 8. Знайти точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ із такими прямими: 1) $x - 5y = 0$; 2) $2x + y - 18 = 0$; 3) $x - y + 5 = 0$; 4) $\sqrt{10}x - 5y + 15 = 0$.

Відповідь: 1) (10; 2) і (10; –2); 2) пряма дотикається до гіперболи в точці (10; –2); 3) дійсні точки перетину відсутні; 4) $\left(-\frac{15\sqrt{10}}{4}; -\frac{9}{2}\right)$, іншої точки перетину немає, пряма паралельна одній із асимптот.

№ 9. Дано рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти гіперболу, фокуси якої зливаються із фокусами даної гіперболи, якщо вона вміщує точку M(5; –3).

Відповідь: $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$.

№ 10. На гіперболі $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ знайти точку, яка була б у три рази ближче від однієї асимптоти, ніж від іншої.

Відповідь: $\left(\pm \frac{14\sqrt{3}}{3}; \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ – чотири точки.

№ 11. Ексцентриситет гіперболи рівний 1,5, а фокальний радіус її точки *M*, проведений із деякого фокуса, рівний 12. Обчислити відстань від точки *M* до односторонньої з цим фокусом директриси.

Відповідь: $\rho(M, d) = 8$.

№ 12. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо кут між її асимптотами дорівнює 120° і відстань між фокусами рівна $8\sqrt{3}$.

Відповідь: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{36} = 1$.

№ 13. Побудувати гіперболу, посилаючись до її означення.

Указівка: ***Гіпербола*** представляє собою геометричне місце вершин трикутників, які мають спільну основу ($2c$) і постійну різницю двох інших сторін.

№ 14. Довести, що відрізки, які відтинають директриси на асимптотах (якщо рахувати від центра гіперболи), дорівнюють дійсній півосі. Користуючись цією властивістю, побудувати директриси.

Відповідь: *DE* і *GH* є шуканими директрисами гіперболи (рис. 43).

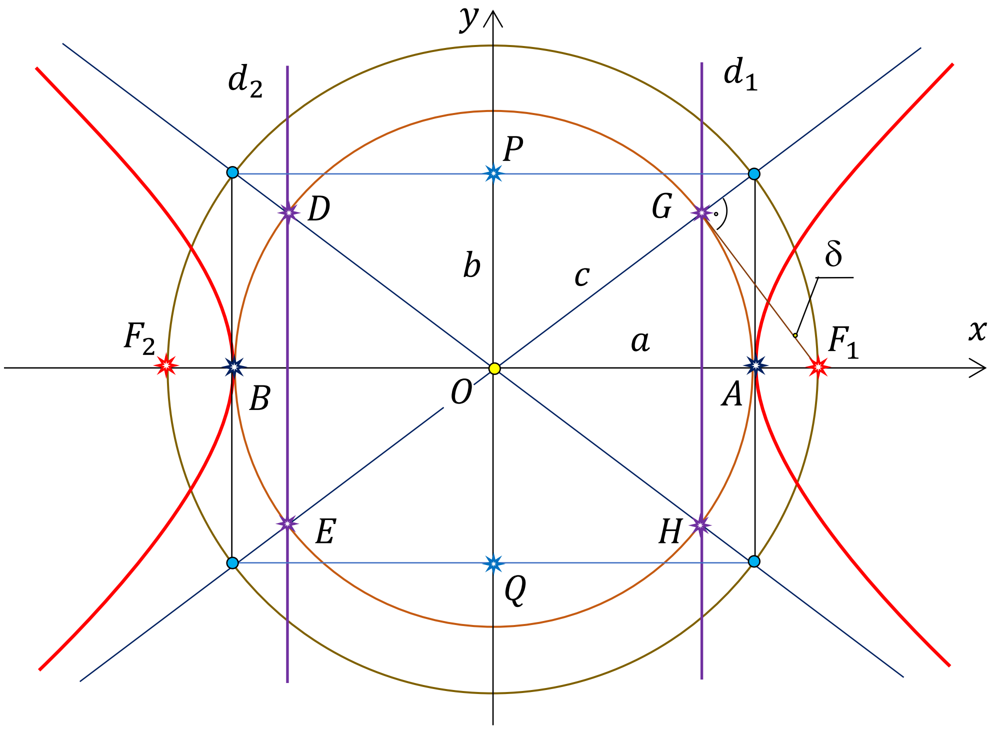


Рис. 43

№ 15. Довести, що директриса гіперболи вміщує основу перпендикуляра, опущеного із відповідного фокуса на асимптоту гіперболи.

Відповідь: $\delta = b$ (рис. 43).

№ 16. Записати рівняння гіперболи, осі симетрії якої зливаються з осями координат, якщо задано точку перетину *P*(3,2; 2,4) однієї із асимптот з однією із директрис цієї гіперболи.

Відповідь: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ або $\frac{y^2}{4} - \frac{9x^2}{256} = 1$.

4. **Парабола**. Означення параболи дається в тексті вище (див. § 6).

Стисла інформація про параболу. Канонічне рівняння параболи найліпше записати в такому вигляді: $y^2 = 2px$. При цьому вісь Ox у ПДСК розміщена перпендикулярно до її директриси (d), уміщує фокус F і проходить через вершину параболи, а вісь Oy, якій теж належить точка $O(0;0)$, перпендикулярна осі Ox. Тут p є відстанню від фокуса до директриси і називається *параметром* кривої. В параболи лише одна вісь симетрії – Ox.

Координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Рівняння директриси кривої має вид: $x = -\frac{p}{2}$. Фокальний радіус точки $M(x; y)$ параболи описується рівнянням: $r = x + \frac{p}{2}$, а ексцентриситет $\varepsilon = 1$.

Якщо віссю симетрії параболи служить вісь ординат Oy, то рівняння кривої матиме вид: $x^2 = 2py$, а рівнянням директриси буде $y = -\frac{p}{2}$.

Рівняння параболи з віссю симетрії, що паралельна координатній осі Ox, матиме вид: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, а осі Oy – інший: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, де $(x_0;\ y_0)$ – координати вершини параболи (див. рис. 14).

Дотична до параболи $y^2 = 2px$ у точці $(x_1;\ y_1)$ кривої записується таким рівнянням: $yy_1 = p(x + x_1)$, де $(x_1;\ y_1)$ – точка дотику.

Задача 1. Побудувати параболу, користуючись її означенням.

Розв'язання.

В означенні параболи сказано: ***Параболою*** називається геометричне місце точок, рівновіддалених від даних точки F (фокуса) і прямої d (директриси) цієї кривої (рис. 44).

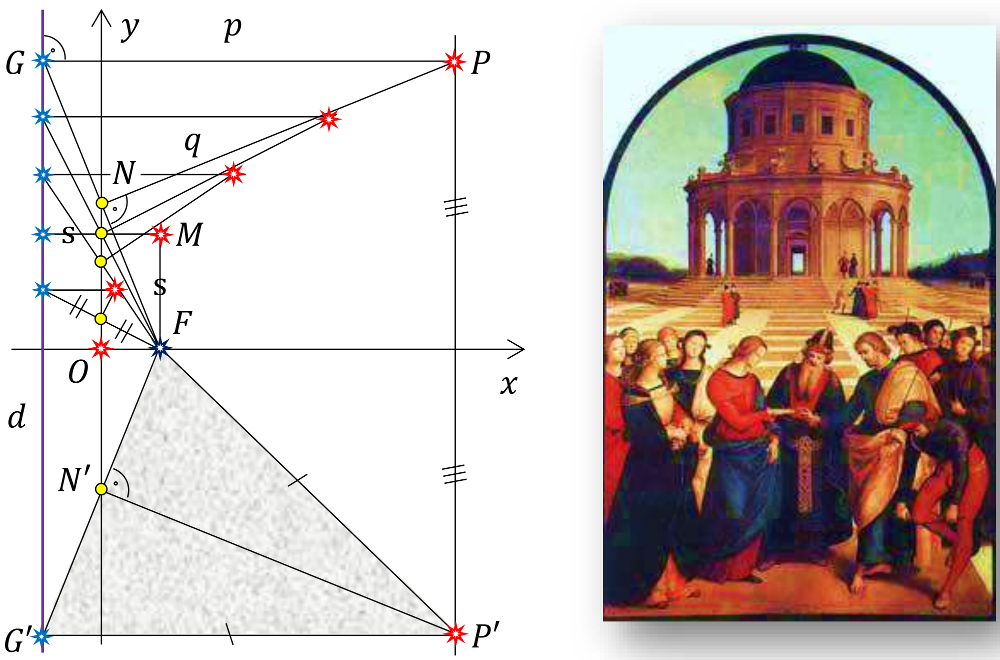


Рис. 44

Отже, щоб за означенням побудувати точку P, яка належить параболі, варто виконати такий ланцюжок зображувальних операцій: 1) вибрати будь-яку точку G на директрисі d; 2) з'єднати точку G із точкою F; 3) провести через точку G промінь p, перпендикулярно до директриси; 4) розділити точкою N відрізок GF навпіл і в точці N провести до цього відрізка (GF) серединний перпендикуляр q; 5) зафіксувати точку перетину променя p та перпендикуляра q.

Діючи так, отримаємо точку P, яка належить шуканій параболі.

Кількаразове повторення цієї операції призведе до відшукання достатнього числа точок, які, врешті, можна з'єднати лекальною кривою.

На рисунку 43 точки N', P' і G' відповідно симетричні точкам N, P і G відносно координатної осі Ox. Доведенням того факту, що точка $P(P')$ істино належить параболі, слугує рівнобедрений трикутник $FG'P'$, адже в нього бічні ребра FP' і $G'P'$ рівні (за побудовою).

Задача 2. Дано параболу $y^2 = 4x$ і дотичну до неї $x + 3y + 9 = 0$. Знайти точку їхнього дотикання.

Розв'язання.

Шукаємо координати точки дотикання з умови пропорційності коефіцієнтів у рівнянні даної прямої $x + 3y + 9 = 0$ й у рівнянні дотичної до даної параболи: $yy_0 = 2(x + x_0)$ або $2x - y_0y + 2x_0 = 0$. У такій пропорційності $\frac{1}{2} = -\frac{3}{y_0} = \frac{9}{2x_0}$. Звідси, розв'язавши систему двох рівнянь, матимемо: $y_0 = -6$, $x_0 = 9$.

Таким чином, точка дотикання має координати (9; – 6).

Задача 3. Знайти найкоротшу відстань від прямої $4x + 3y + 46 = 0$ до параболи $y^2 = 64x$.

Розв'язання.

Якщо пряма не перетинає параболу (чи перетинає), найкоротшою відстанню між ними буде відстань між дотичною до кривої, яка паралельна даній прямій.

Отже, спочатку варто розв'язати систему двох даних в умові задачі рівнянь і переконатися, що задача має сенс: чи не є вона вже дотичною до параболи?

Із рівняння параболи виражаємо x і підставляємо в рівняння прямої. Маємо: $y^2 + 48y + 736 = 0 \Rightarrow y = -24 \pm \sqrt{576 - 736}$. Вочевидь дискримінант менший нуля, а тому пряма не перетинає параболу.

Таким чином, потрібно провести дотичну до параболи, яка паралельна вже заданій умовою прямій. Параметр параболи $p = 32$.

Рівняння дотичної: $yy_0 = 32(x + x_0)$ або $32x - y_0y + 32x_0 = 0$. Записуємо відношення коефіцієнтів при x і y в рівняннях даної прямої і дотичної: $\frac{4}{32} = -\frac{3}{y_0}$ (у паралельних прямих вони пропорційні). Звідси маємо $y_0 = -24$. Щоб знайти абсцису точки дотикання x_0, підставляємо значення y_0 в дане рівняння параболи $y^2 = 64x$. Матимемо таке: $576 = 64 \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = 9$.

Записуємо рівняння прямої, дотичної до параболи: $4x + 3y + 36 = 0$.

Обираємо будь-яку точку, що належить цій прямій, нехай, приміром, $y = 0$, тоді $x = -9$. Шукаємо відстань від точки $M(-9; 0)$ до прямої $4x + 3y + 46 = 0$: $\rho = \frac{|-4\cdot 9 + 3\cdot 0 + 46|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2$.

Найкоротша відстань між даними прямою і параболою дорівнює 2.

Задача 4. На параболі $y^2 = 12x$ узято три точки, ординати яких $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$. Обчислити відношення площ двох трикутників: трикутника з вершинами у вказаних точках і трикутника, утвореного дотичними в цих точках.

Розв'язання.

Першим кроком потрібно знайти абсциси вказаних точок параболи: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$ та $x_3 = \frac{3}{4}$. Потім, урахувавши параметр, слід записати рівняння дотичних до кривої в точках $K(3; 6)$, $L(\frac{1}{3}, 2)$ і $M(\frac{3}{4}, 3)$ та знайти координати точок перетину дотичних.

Таким чином, t_K: $x - y + 3 = 0$; t_L: $3x - y + 1 = 0$ і t_M: $4x - 2y + 3 = 0$.

Нехай дотичні висікають у власному перетині відповідно точки P, Q і R. Тоді, розв'язавши попарно три системи рівнянь, що записані вище, отримаємо: $P(1; 4)$, $Q\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$, $R\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Залишилося обчислити площі трикутників KLM і PQR та порівняти їх між собою, тобто знайти їхнє відношення.

Слушно скористаємося формулою площі трикутника через координати його вершин для кожного із трикутників окремо: $S = \frac{|(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)|}{2}$.

Отже, $S_{\Delta KLM} = \frac{1}{2}$ кв. од.; $S_{\Delta PQR} = \frac{1}{4}$ кв. од., а $S_{\Delta KLM}{:}S_{\Delta PQR} = 2 : 1$. Останнє означає, що площа вписаного у криву трикутника вдвоє більша площі описаного трикутника.

Задача 5. Вивести рівняння сторін трикутника, вписаного в параболу $y^2 = 8x$, знаючи, що одна з його вершин розміщується у вершині параболи, а точка перетину висот зливається з фокусом кривої.

Розв'язання.

Оскільки параметр параболи рівний 4, а це є не що інше як відстань від фокуса до директриси, то фокус має координати (2; 0). Окрім того, очевидно, що шуканий трикутник рівнобедрений (PO = QO), адже висоти, які проведені з вершин – точок P і Q, перпендикулярні до протилежних сторін трикутника та ще й уміщують фокус F параболи (рис. 45).

Якщо позначити координати точки P (x_1, y_1), то їй симетрична відносно осі Ox точка Q матиме координати x_1 і $-y_1$, а вектори $\overrightarrow{QM}$ і $\overrightarrow{PO}$ ($\overrightarrow{PN}$ і $\overrightarrow{QO}$), будуть взаємно перпендикулярними, тому їх векторний добуток дорівнюватиме нулю. Це по перше. По друге, точка P (як і точка Q) належать параболі. Виходячи із цих двох умов, ми знайдемо координати точок P і Q.

Отже, запишемо координати однієї пари векторів, приміром: $\overrightarrow{PF}(x_1 - 2;\ y_1)$ і $\overrightarrow{QO}(x_1;\ -y_1)$. $\overrightarrow{PF} \perp \overrightarrow{QO}$, тому матимемо, що $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{QO} = 0$, а це означатиме, що $x_1 \cdot (x_1 - 2) - y_1^2 = 0$ (1). До того ж, $y_1^2 = 8x_1$ (2). Із даних двох рівностей знаходимо: $x_1 - 10 = 0$.

Таким чином, рівняння сторони PQ має вид $x = 10$. Окрім того, $y_1 = \pm 4\sqrt{5}$. Тепер зовсім неважко записати рівняння двох інших сторін трикутника OPQ: $2x - y\sqrt{5} = 0$ і $2x + y\sqrt{5} = 0$.

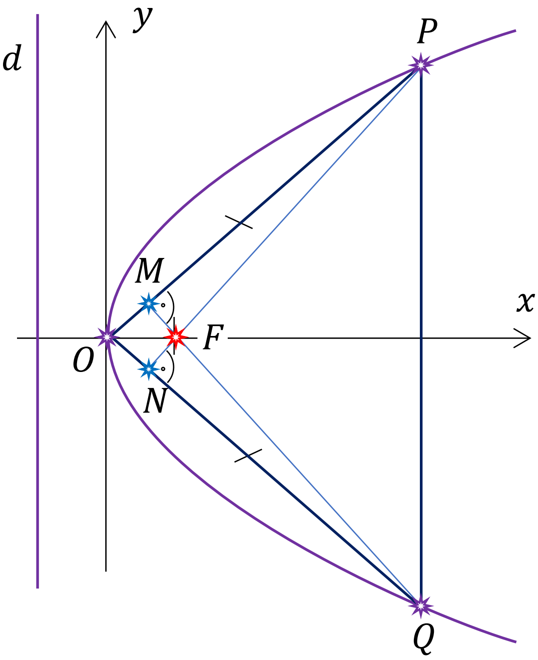


Рис. 45

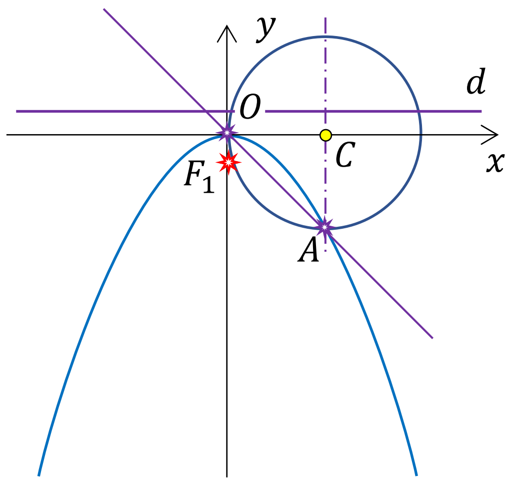


Рис. 46

Задача 6. Записати рівняння параболи і її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 - 4x = 0$ та симетрична відносно осі Oy.

Розв'язання.

Розв'язавши разом рівняння заданих в умові задачі прямої і кола, якими вони описуються, знайдемо точки їх перетину. Із даної системи двох рівнянь одержимо: $x_1 = 0, y_1 = 0\ \ x_2 = 2, y_2 = -2$.

Таким чином, точками перетину є $O(0; 0)$ і $A(2; –2)$ (рис. 46).

Оскільки парабола проходить через точку $O(0; 0)$ і симетрична відносно осі Oy, то в цій точці розташовується вершина параболи. Тому рівняння параболи матиме такий вид: $x^2 = 2px$.

З іншого боку, оскільки парабола вміщує точку $A(2; –2)$, то координати цієї точки задовольняють рівнянню кривої, тобто $2^2 = 2p \cdot (-2)$. Звідки $p = -1$.

Отже, рівняння параболи матиме вид: $x^2 = -2y$, а рівняння директриси буде таким: $y = -\frac{p}{2}$. Підставивши значення p в останнє рівняння, отримаємо $y = \frac{1}{2}$ або $2y - 1 = 0$. Це й є рівняння директриси.

Задача 7. Струмінь води, що ллється із фонтану, досягає найбільшої висоти 4 м на відстані 0,5 м від вертикалі, яка проходить через точку O, з якої виходить струмінь. Знайти висоту струменю над горизонталлю Ox на відстані 0,75 м від початку – точки O.

Розв'язання.

Струмінь води фонтану має форму параболи, вершина якого знаходиться в точці $A(0{,}5; 4)$. Вісь симетрії параболи паралельна осі Oy, тому рівняння кривої має вид: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. Підставивши значення x_0 і y_0, отримаємо таке: $(x - 0{,}5)^2 = 2p(y - 4)$.

Тепер шукаємо параметр параболи p.

Щоб установити значення p, ми можемо в останнє рівняння замість біжучих координат (x і y) підставити координати точки $O(0;\,0)$ (оскільки струмінь води виходить із точки O). Отже, $(0-0{,}5)^2 = 2p(0-4) \Rightarrow p = -\frac{0{,}25}{8}$.

Таким чином, рівняння параболи (після простих перетворень) матиме такий вид: $(x-0{,}5)^2 = -\frac{0{,}25}{4}(y-4)$ або $y = 16(x-x^2)$ (*).

Щоб знайти максимальну висоту струменю (ординату найвищої точки), яку матиме струмінь з абсцисою 0,75, скористаємося рівнянням параболи (*), тобто $y = 16(0{,}75 - 0{,}75^2) = 3$.

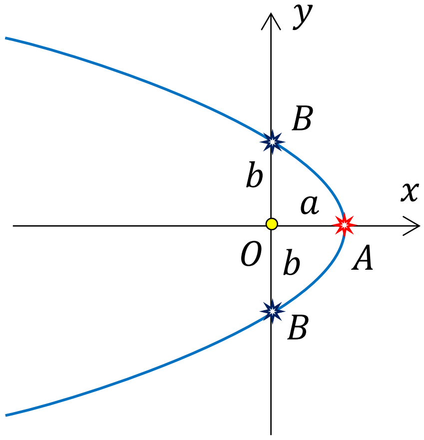


Рис. 47

Задача 8. Записати рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox і такої, котра відтинає на цій осі відрізок $+\,a$, а на осі ординат Oy – відрізок $\pm\, b$.

Розв'язання.

Оскільки вісь параболи зливається з віссю Ox, а вершина розташована в точці $A(+\,a;\,0)$, то рівняння параболи приймає вид: $y^2 = 2p(x-a)$, що очевидно (рис. 47).

Для встановлення параметра p, використаємо той факт, що парабола вміщує точку B, котра має координати $(0;\pm b)$. Отже, $b^2 = 2p\cdot(-a) \Rightarrow p = -\frac{b^2}{2a}$.

Підставивши вираз для p у рівняння параболи і виконавши певні алгебричні спрощення, остаточно отримаємо: $\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Задача 9. Арка мосту має форму параболи. Знайти параметр цієї параболи, знаючи, що прольот арки дорівнює 24 м, а його висота 6 м.

Розв'язання.

Шлях до результату тут надто простий, але у прикладному сенсі вартісний належної уваги (рис. 48).

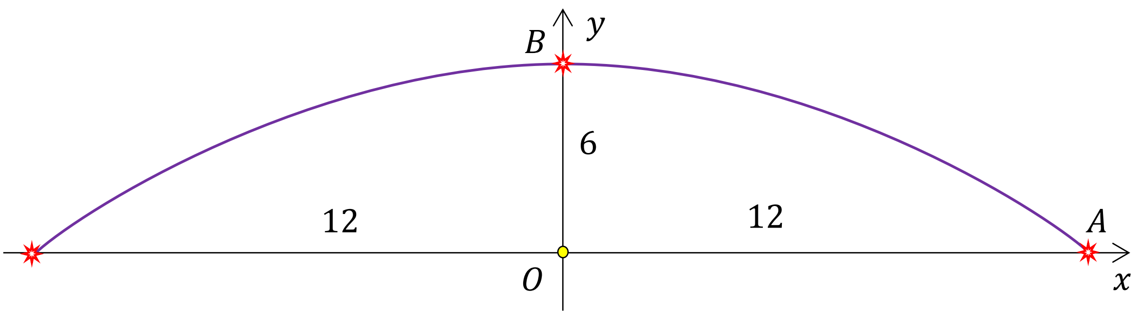


Рис. 48

Оскільки арка моста має параболічну форму, варто, найперше, записати рівняння параболи, яка симетрична відносно осі Oy і має від'ємний напрямок її гілки: $x_1^2 = -2p(y_1 + y_0)$.

Далі, точка $A(x_1;\ y_1)$ на параболі має в числовому виразені координати 12 і 0, а точка $B(x_0;\ y_0)$ – 0 і 6. Кожна з цих точок задовольняє рівнянню параболи, отже, $144 = -2p(0+6) \Rightarrow p = -12$.

Задача 10. Через точку $A(2;\,1)$ провести таку хорду параболи $y^2 = 4x$, котра ділилася б у цій точці навпіл.

Розв'язання.

У параграфі 10, де було розглянуто діаметри конічних перерізів, доведено, що середини хорд параболи лежать на прямій, яка паралельна координатній осі Ox, а середина хорди $y_C = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{p}{k} = const$, де k – кутовий коефіцієнт хорди. У нашому випадку $y_C = 1$, а $p = 2$ (за умовою), тому легко знаходимо кутовий коефіцієнт хорди, а саме: $1 = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 2$.

Скориставшись рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $y - y_0 = k(x - x_0)$, урахувавши дані умови задачі, маємо: $y - 1 = 2(x - 2)$. Або, спростивши, отримаємо: $2x - y - 3 = 0$.

Задача 11. Обчислити параметр параболи $y^2 = 2px$, якщо відомо, що пряма $x - 2y + 5 = 0$ є дотичною до параболи.

Розв'язання.

Доречно застосувати прийом, яким ми вже користувалися неодноразово.

Запишемо рівняння дотичної до параболи в такому вигляді: $px - y_0 y + px_0 = 0$. Рівняння з умови задачі й дане рівняння уособлюють одну і ту саму пряму лінію, тому коефіцієнти з рівнянь пропорційні: $\frac{p}{1} = \frac{y_0}{2} = \frac{px_0}{5}$. Розв'язуючи ці два рівняння, отримаємо: $x_0 = 5$, $y_0 = 2p$. Точка $(x_0;\ y_0)$ належить параболі.

Отже, $(2p)^2 = 2p \cdot 5$. Звідси матимемо: $p = \frac{5}{2}$.

Задача 12. Обчислити довжину сторони правильного трикутника, котрий уписано в параболу $y^2 = 2px$.

Розв'язання.

Очевидно, що трикутник OPQ розташовується симетрично відносно осі Ox, одна з його вершин зливається з вершиною параболи $O(0;\,0)$, протилежна їй сторона перпендикулярна до осі абсцис (осі параболи), а точки P і Q симетричні.

Можна, дивлячись на рисунок 45, уявити трикутник OPQ правильним. Тоді сторона OP буде нахиленою до Ox під кутом 30°, а кутовий коефіцієнт k цієї прямої рівний $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(k = \operatorname{tg} 30°)$.

Запишемо рівняння прямої OP, яка проходить через точку O і має вказаний кутовий коефіцієнт: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Але ж точка $P(x;\ y)$ належить також параболі, а тому координати цієї точки задовольняють рівнянню кривої, тобто $\frac{3}{9}x^2 = 2px$. Звідки $(x \neq 0)$ $x = 6p$.

Отже, $y^2 = 12p \Rightarrow y = 2\sqrt{3}p$, а точка P має координати $(6p;\,2\sqrt{3}p)$.

Тепер неважко знайти довжину сторони рівностороннього трикутника, що вписаний у параболу: $OP = PQ = QO = \sqrt{12p^2 + 36p^2} = 4\sqrt{3}p$.

Задача 13. Довести, що будь-яка дотична до параболи $y^2 = 2px$ відтинає на від'ємній частині осі Ox відрізок, який дорівнює абсцисі точки дотикання, а на осі Oy – відрізок, рівний половині ординати точки дотикання.

Розв'язання.

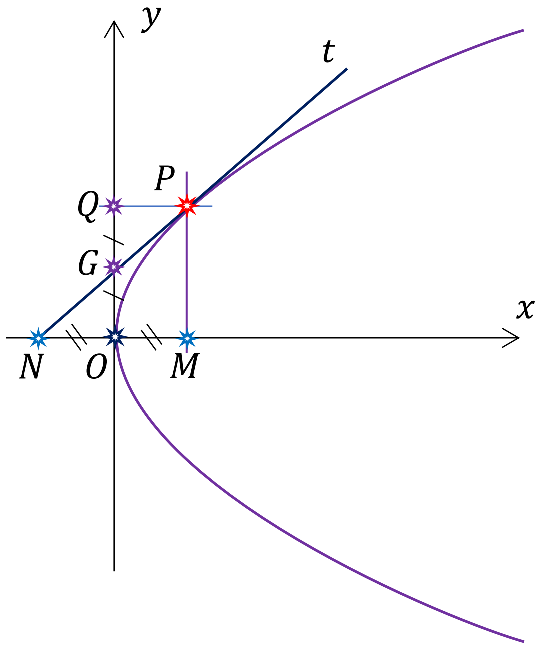


Рис. 49

Узагалі кажучи, розв’язання задачі досить просте, адже в умові все сказано.

Отже, в рівнянні дотичної до параболи $yy_0 = p(x + x_0)$ покладаємо $x = 0$. Тоді $yy_0 = px_0 \Rightarrow x_0 = \frac{yy_0}{p}$. Підставимо значення x_0 в рівняння кривої, адже точка $(x_0;\ y_0)$ належить параболі: $y_0^2 = 2p \cdot \frac{yy_0}{p} = 2yy_0$. Звідки $y_0 = 2y$. Таким чином, ордината точки дотикання у два рази більша ординати точки перетину дотичної з віссю Oy (рис. 49).

Тепер у рівнянні дотичної покладаємо $y = 0$. Тоді $0 = p(x + x_0)$. Однак параметр кривої не дорівнює 0 ($p \neq 0$). Тому $x_0 = -x$. Дотична до параболи перетинає вісь Ox у точці ($-x_0$; 0). Важливі факти стосовно параболи, що задана канонічним рівнянням, доведено.

Задачі для самостійного розв’язання

№ 1. Скласти рівняння параболи, знаючи, що: 1) відстань від вершини до фокуса дорівнює 3; 2) фокус має координати (5; 0), а вісь ординат є директрисою; 3) парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через початок координат та через точку M(1; –4); 4) парабола симетрична відносно осі Oy, фокус розміщений у точці (0; 2) і вершина зливається з початком координат; 5) крива симетрична відносно осі Oy, проходить через початок координат і точку (6; –2).

Відповідь: 1) $y^2 = 12x$; 2) $y^2 = 10x - 25$; 3) $y^2 = 16x$; 4) $x^2 = 8y$; 5) $x^2 =$ $= -18y$.

№ 2. На параболі $y^2 = 8x$ знайти точку, фокальний радіус-вектор якої дорівнює 20.

Відповідь: A(18; 12) і B(18; –12).

№ 3. На параболі $y^2 = 4{,}5x$ узято точку $M(x;\ y)$, яка знаходиться на відстані від директриси d = 9,125. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.

Відповідь: OM = 10.

№ 4. Знайти точки перетину параболи $y^2 = 18x$ із такими прямими: 1) $6x + y - 6 = 0$; 2) $9x - 2y + 2 = 0$; 3) $4x - y + 5 = 0$; 4) $x - 3 = 0$.

Відповідь: 1) (2; –6) і $(\frac{1}{2}; 3)$; 2) пряма дотикається до параболи в точці $(\frac{2}{9}; 2)$; 3) дійсні точки перетину відсутні; 4) $(\frac{1}{2}; 3)$; пряма паралельна осі симетрії.

№ 5. Знайти точки перетину параболи $y^2 = 12x$ з еліпсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Відповідь: $(\frac{5}{4};\ \sqrt{15})$, $(\frac{5}{4};\ -\sqrt{15})$.

№ 6. Записати рівняння спільної хорди параболи $y^2 = 18x$ і кола $(x + 6)^2 + y^2 = 100$.

Відповідь: $x - 2 = 0$.

№ 7. Через точку *P*(5; –7) провести дотичну до параболи $y^2 = 8x$.

Відповідь: $x + y + 2 = 0$ і $2x + 5y + 25 = 0$.

№ 8. Дано параболу $y^2 = 12x$. Провести до неї дотичну: 1) у точці, абсциса якої рівна 3 ($x = 3$). 2) паралельно прямій $3x - y + 5 = 0$; 3) перпендикулярно до прямої $2x + y - 7 = 0$; 4) дотичну, яка утворює із прямою $4x - 2y + 9 = 0$ кут $\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: 1) $x + y + 3 = 0$ в точці (3; – 6) і $x - y + 3 = 0$ в точці (3; 6); 2) $y = 3x + 1$; 3) $x - 2y + 12 = 0$; 4) $3x + y + 1 = 0$.

№ 9. Знайти умову дотикання прямої $y = kx + b$ до параболи $y^2 = 2px$.

Відповідь: (Див. задачу 11 у темі «Еліпс»).

№ 10. Довести, що будь-яка дотична до параболи перетинає директрису та фокальну хорду, перпендикулярну до осі, в точках, рівновіддалених від фокуса.

№ 11. Перевірити (формально і рисунково), що фокус параболи і точки дотикання двох дотичних параболи, проведених із будь-якої точки директриси, лежать на одній прямій.

№ 12. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy, яка відтинає на осі абсцис відрізки $\pm\, a$ і на осі ординат відрізок $+\, b$.

Відповідь: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} = 1$.

№ 13. Камінь, кинутий під гострим кутом до горизонту, описав дугу параболи і впав на відстані 16 м від початкового розташування. Знайти параметр траєкторії, знаючи, що найбільша висота, досягнута камінцем, дорівнює 12 м.

Відповідь: $|p| = 2\frac{2}{3}$.

№ 14. Записати рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від точки *F*(–2; 0) і від прямої $x + 6 = 0$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат.

Відповідь: $y^2 = 8x + 32$; (–4; 0), (0; $4\sqrt{2}$), (0; – $4\sqrt{2}$).

№ 15. Рівняння параболи $y = -3x^2 + 8x - \frac{5}{3}$ звести до найпростішого виду та подати рисунок.

Відповідь: Вершина параболи в точці: $\left(\frac{4}{3};\ \frac{11}{3}\right)$; Рівняння параболи після перетворень: $x^2 = -\frac{1}{3}y$.

Полярні рівняння конічних перерізів

Пригадаємо коротко про що йшлося в §4. Головне: в основу викладеної теорії покладено характеристичну властивість еліпса, гіперболи і параболи.

Полярні рівняння **еліпса** і **параболи** мають ідентичний вид: $r = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon \cos\theta}$.

Полярне рівняння **гіперболи** мало чим відрізняється від поданого рівняння еліпса та параболи: $r = \frac{\pm \varepsilon p}{1 \pm \varepsilon \cos\theta}$, де θ – кут між полярними віссю q і радіусом r, а ε – ексцентриситет конічного перерізу.

Тут ε < 1 для еліпса, $\varepsilon = 1$ для параболи і $\varepsilon > 1$ для гіперболи. Фокальний параметр p для еліпса і гіперболи знаходять за формулою $p = \frac{b^2}{c}$, де $a^2 = \frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$, $b^2 = \frac{\varepsilon^2 p^2}{|1-\varepsilon^2|}$, а $c^2 = a^2 \pm b^2$ відповідно для гіперболи чи еліпса. При цьому полюс ПСК для гіперболи розташовується у правому фокусі, а для еліпса – в лівому.

Важливо пам'ятати формули переходу від ПСК до ПДСК і навпаки. А саме: $(x = r \cdot \cos\theta, y = r \cdot \sin\theta) \Rightarrow \left(r = \sqrt{x^2+y^2}, \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Однак не зашкодить подати ще один спосіб виведення полярних рівнянь конічних перерізів. Річ у тім, що в багатьох посібниках (підручниках) подається інший спосіб, й чимало прикладів задач із такими «коніками» розв'язуються описанням еліпса, гіперболи і параболи одним-єдиним рівнянням у ПСК, що надто зручно.

Позначимо через γ лінію (конічний переріз), яка є або еліпсом, або **однією** з гілок гіперболи, або параболою (рис. 50).

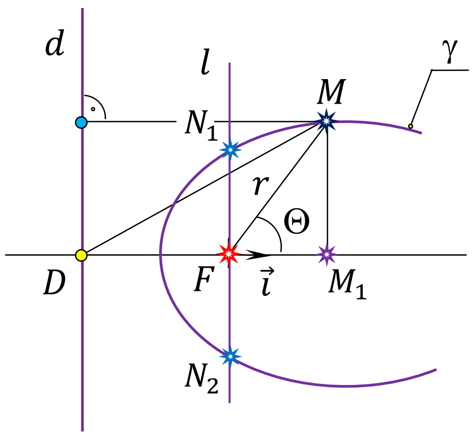


Рис. 50

Нехай F і d є фокусом і директрисою цієї лінії, причому, якщо γ – еліпс, то F – один із фокусі, а d – відповідна йому директриса; якщо ж γ є однією з гілок гіперболи, то F і d – фокус і директриса, які розташовані з того ж боку від її осі Oy, що й гілка γ. Очевидно, що лінія γ всіма своїми точками належить півплощині, з межею d, в якій лежить фокус F.

Урахувавши характеристичну властивість конічних перерізів, приходимо до висновку, що лінія γ є множиною таких точок M півплощини, що $FM = r = \varepsilon \cdot \rho(M, d)$.

Виведемо рівняння $\varphi(F, \vec{\imath})$ лінії γ в ПСК, полюсом якої є фокус F, а $\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{DF}}{DF}$, де D – проєкція точки F на директрису d.

Спочатку обрахуємо відстань від точки M до директриси d – $\rho(M, d)$, де $M(r, \theta)$ – довільна точка лінії γ.

Якщо M_1 – проєкція точки M на полярну вісь (пряму FD), то $\rho(M, d) = {}$ $= DM_1 = DM \cdot \cos\angle MDF = \overrightarrow{DM} \cdot \vec{\imath}$; однак $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM}$, тому $\rho(M, d) = \left(\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM}\right) \cdot \vec{\imath} = \overrightarrow{DF} \cdot \vec{\imath} + \overrightarrow{FM} \cdot \vec{\imath} = DF + r \cdot \cos\theta$.

Точка $M(r; \theta)$ належить кривій γ тоді і лише тоді, коли $FM = \varepsilon \cdot \rho(M, d)$ або $r = \varepsilon \cdot (DF + r \cdot \cos\theta)$. Якщо покласти $\boldsymbol{p = \varepsilon \cdot DF}$, то звідси отримаємо такий результат: $r \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos\theta) = p$ (*).

Це і є рівняння лінії γ, тобто еліпса, однієї з гілок гіперболи чи параболи.

Із рівняння (*) при θ = 90° чи θ = – 90° маємо: $r = p$.

Таким чином, p – полярний радіус точок N_1 і N_2, в яких перетинається лінія γ із прямою l, котра проходить через фокус F паралельно директрисі d. Число p називається *фокальним параметром*.

З'ясуємо, при яких значеннях θ рівняння (*) визначає всі точки лінії γ. При $\varepsilon < 1$ лінія γ є еліпсом. У цьому випадку при любому θ маємо: $1 - \varepsilon \cdot \cos\theta \neq 0$, тому рівняння (*) можна записати у вигляді: $\boldsymbol{r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\theta}}$ (1).

Якщо θ вибирає всі значення із проміжку $0 \le \theta \le 2\pi$, то рівняння (1) визначає всі точки еліпса.

При $\varepsilon > 1$, лінія γ – одна гілка гіперболи. Рівняння (*) має сенс лише для точок, полярні кути яких задовольняють нерівність $1 - \varepsilon \cdot \cos\theta > 0$ або, що те ж саме, $\cos\theta < \frac{1}{\varepsilon}$ (**).

Нехай θ_0 – кут, для якого $\cos\theta_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді нерівність (**) матиме вигляд: $\cos\theta_0 > \cos\theta$. Якщо θ пробігає значення $\theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0$, то рівняння (1) описує всі точки лінії γ, тобто точки лише однієї гілки гіперболи. Із рівності $\cos\theta_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ випливає, що $\operatorname{tg}\theta_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{b}{a}$. Тому θ_0 – кут, який утворює асимптота $y = \\ = \frac{b}{a}x$ гіперболи з дійсною віссю.

Зауважимо, що коли під θ_0 і r розуміти узагальнені координати точки, то за умови, що $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ рівняння (1) визначатиме іншу гілку гіперболи.

При $\varepsilon = 1$ лінія γ є парабола і $1 - \varepsilon \cdot \cos\theta \neq 0$, якщо $\theta \neq 0$. Однак відомо, що на параболі відсутні точки, для яких θ = 0.

Таким чином, якщо θ пробігає значення $-\pi < \theta < \pi$, то рівняння (*) можна записати у вигляді: $r = \frac{p}{1 - \cos\theta}$. Воно визначатиме всі точки параболи.

Привертаємо **увагу студентів**, які працюють з даним посібником, до надто важливого факту. При виведенні канонічних рівнянь у **§5**, за параметр конічного перерізу ми приймали відстань від фокуса до відповідної директриси, тобто в тій ситуації $\boldsymbol{p = DF} = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \boldsymbol{\frac{b^2}{c}}$, де $x = \frac{a^2}{c}$ – рівняння директриси, котра відповідала фокусу, обраному полюсом ПСК.

У щойно отриманих рівняннях (див. (1)) за параметр прийнято дещо іншу величину: $\boldsymbol{p = \varepsilon \cdot DF}$ (див. **§§ 4** і **5**).

Так, отримаємо: $\boldsymbol{p} = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{a^2}{c} - c\right) = \frac{c}{a} \cdot \frac{a^2 - c^2}{c} = \boldsymbol{\frac{b^2}{a}}$.

Завершуючи, зауважимо: 1) коли у знаменнику замість $\cos\theta$ фігурує $\sin\theta$, то фокальною віссю еліпса чи гіперболи є вісь Oy; 2) якщо полюс ПСК збігається з центром еліпса (гіперболи), а полярна вісь перпендикулярна до директрис, то рівняння кривої матиме вигляд: $r^2 = \frac{\pm b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$; 3) стандартна форма запису рівнянням конічного перерізу в полярній системі має у знаменнику одиницю константою.

Задача 1. За даними полярними рівняннями конічних перерізів, написати їх канонічні рівняння.

Розв'язання.

1. 1. $r = \frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$. Поділимо чисельник і знаменник правої частини даного рівняння на 2. Отримаємо: $r = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$. Звідси $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Отже, дане рівняння описує еліпс.

Таким чином, $p = \frac{b^2}{a}$.

Складаємо систему рівнянь: $\left\{\begin{array}{l} p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}, \\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{array}\right\}$. Розв'язавши дану систему, отримаємо: $c = \sqrt{3}$, $a = 2$ і $b = 1$. Остаточно, канонічне рівняння еліпса матиме вид: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

1. 2. $r = \frac{1}{2-\sqrt{5}\cos\theta}$. Аналогічно попередньому прикладу, приводимо дане рівняння до канонічного вигляду: $r = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\theta}$. Звідси $\left\{\begin{array}{l} p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}, \\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\}$. Рівняння описує гіперболу, адже $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$. Із системи маємо: $c = \sqrt{5}$, $a = 2$, $b = 1$.

Отже, канонічне рівняння гіперболи має вид: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

1. 3. $r = \frac{1}{2-2\cos\theta}$. Або $r = \frac{\frac{1}{2}}{1-\cos\theta}$, звідки $\varepsilon = 1$. Очевидно, що дане рівняння є полярним рівнянням параболи. Тут $p = \frac{1}{2}$, а канонічне рівняння параболи при цьому ($y^2 = 2px$) прийме вид: $y^2 = x$.

Задача 2. Обчислити довжини півосей і відстань між фокусами такого еліпса: $r = \frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\theta}$.

Розв'язання.

Як у попередніх прикладах, ділимо праву частину рівняння на 2. Матимемо: $r = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$. Звідки: $p = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Складаємо систему рівнянь: $\left\{\begin{array}{c} \frac{b^2}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{array}\right\}$.

Розвязавши дану систему рівнянь, знайдемо: $c=\sqrt{2}$, $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, а рівняння еліпса матиме вид: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$.

Задача 3. На параболі $r=\frac{p}{1-\cos\theta}$ знайти точку: 1) з найменшим радіус-вектором; 2) з радіус-вектором, рівним параметру параболи.

Розв'язання.

Зрозуміло, що фокальний радіус r, у цій конкретній ситуації, є функцією кута θ. Ми не будемо досліджувати функцію $r(\theta)$ на монотонність за існуючою в теоретичних викладках схемою. Достатньо буде знайти першу похідну функції $r'(\theta)$, прирівняти її до нуля та з'ясувати в яких точках парабола прийматиме нульові значення.

Отже, $r'(\theta)=\frac{\sin\theta\cdot p}{(1-\cos\theta)^2}=0$. Тут $p\neq 0$, й це очевидно, тому $\sin\theta=0$ тоді й лише тоді, коли $\theta=\{0,\pi\}$. Початок координат знаходиться в фокусі параболи, через що отримуємо одну і лише одну точку з найменшим фокальним радіусом: $\left(\frac{p}{2};\ \pi\right)$, тобто початок координат.

У другому пункті вимагається, щоб $r=p$. Тому маємо таке: $p=\frac{p}{1-\cos\theta}\Rightarrow$ $\Rightarrow 1-\cos\theta=1$. Або $\cos\theta=0$. Звідки отримуємо дві точки: $\left(p;\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(p;\frac{3}{2}\pi\right)$.

Задача 4. Скласти рівняння асимптот і директрис гіперболи, що задається полярним рівнянням $r=\frac{12}{4+5\cos\theta}$.

Розв'язання.

У знаменнику рівняння гіперболи є в наявності $\cos\theta$, тому директриси розташовуються перпендикулярно до дійсної осі *Ox* кривої. Поряд із цим, для відшукання рівнянь асимптот, потрібні числові значення півосей гіперболи.

Аналогічно задачам 1 і 2, ділимо спочатку чисельник і знаменник правої частини рівняння на 4. Матимемо результат: $r=\frac{\frac{12}{4}}{1+\frac{5}{4}\cos\theta}$. Тепер складаємо систему рівнянь $\begin{cases} p=\frac{b^2}{a}=3, \\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}, \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}$. Звідси отримаємо: $a=\frac{16}{3}$; $b^2=3a\Rightarrow b=4$, а $c=\frac{20}{3}$. Рівняння асимптот гіперболи будуть: $y=\frac{b}{a}x=\frac{3}{4}x$ і $y=-\frac{b}{a}x=-\frac{3}{4}x$, а рівняння директрис матимуть такий вид: $x=\frac{a^2}{c}=\frac{64}{15}$ і $x=-\frac{a^2}{c}=-\frac{64}{15}$.

Задача 5. Скласти рівняння параболи, прийнявши її вісь за полярну вісь, а вершину – за полюс ПСК.

Розв'язання.

Справа в тому, що у ПДСК (із початком у точці $O(0;0)$) парабола описується рівнянням $y^2=2px$. Нам же залишається лише перейти до ПСК за вже відомими формулами (див. §2): $\{\boldsymbol{x=r\cdot\cos\Theta}, \boldsymbol{y=r\cdot\sin\Theta}\}$. Підставивши в рівняння параболи значення x та y, в результаті отримаємо: $r^2\sin^2\theta=2pr\cos\theta$ (рис. 51).

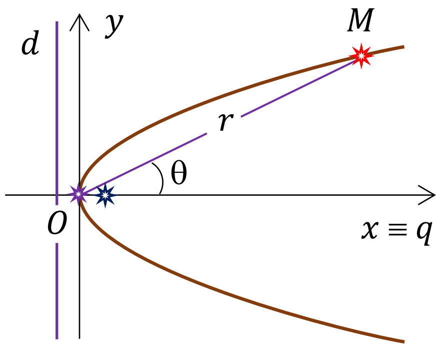


Рис. 51

Після певних (надто простих) перетворень, матимемо таке рівняння параболи в ПСК із початком у полюсі – точці $O(0;\,0)$: $r = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

Зауважимо, що $r = 0$ винятково в полюсі ПСК, коли $\theta = 90°$.

Задача 6. Відносно полярної системи координат скласти рівняння еліпса, центр якого зливається з полюсом, а фокальна вісь виконує, водночас, роль полярної осі.

Розв'язання.

Очевидно, що дана задача надто схожа на попередню. Тобто в ній потрібно в канонічному рівнянні еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, скориставшись формулами переходу від ПДСК до ПСК, замінити x і y їх значеннями: $\{\boldsymbol{x = r \cdot \cos\Theta\,,\, y = r \cdot \sin\Theta}\}$. Однак, тут слід також заміняти a^2 та b^2 їх виразеннями, які ми ввели раніше (див. §5) при виведенні канонічних рівнянь еліпса та гіперболи $\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = a^2$, $\frac{\varepsilon^2 p^2}{|1-\varepsilon^2|} = b^2$.

У цій ситуації спрощення дещо складніші й варто подавати їх у повному обсязі.

Отже, $\frac{\frac{r^2\cos^2\theta}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}}{} + \frac{r^2\sin^2\theta}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2}} = 1 \Rightarrow \frac{r^2\cos^2\theta + \frac{r^2\sin^2\theta}{1-\varepsilon^2}}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{(1-\varepsilon^2)\cdot r^2\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2}}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} = 1$. Звідси отримаємо таке: $r^2\cos^2\theta - r^2\varepsilon^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = \frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2} = b^2$ ($\varepsilon < 1$ для еліпса). Далі, $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - r^2\varepsilon^2\cos^2\theta = b^2 \Rightarrow r^2(1 - \varepsilon^2\cos^2\theta) = b^2$. Остаточно рівняння еліпса в ПСК матиме вигляд: $r^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$.

Задача 7. Під яким кутом до фокальної осі нахилений той діаметр еліпса $r^2 = \frac{288}{16 - 7\cos^2\theta}$, довжина якого дорівнює 10 од. м.

Розв'язання.

Дивлячись на рівняння еліпса, порівнюючи його з результатом задачі під номером 6, неважко здогадатися, що полюс ПСК зливається з центром кривої. Окрім того, r є полярним радіусом конічного перерізу, якщо діаметр дорівнює 10 од. м., тому $r = 5$ од. м.

Із полярного рівняння нам залишається лише виразити $\cos\theta$ і обчислити його значення.

Отже, $25 = \frac{288}{16 - 7\cos^2\theta} \Rightarrow 25 \cdot 16 - 25 \cdot 7\cos^2\theta = 288 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{112}{175}$. Звідси отримуємо: $\cos\theta = 0{,}8$, а $\theta = \arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$.

Задача 8. На параболі $r = \frac{8\cos\theta}{\sin^2\theta}$ знайти точку, радіус-вектор якої дорівнює відстані цієї точки від директриси параболи.

Розв'язання.

Порівнюючи із задачею під номером 5, бачимо, що полюс ПСК збігається з вершиною параболи та, до того ж, $2p = 8 \Rightarrow p = 4$.

На відміну від уже згаданої задачі, де ми робили перехід від ПДСК до ПСК, тут виконаємо обернену операцію, тобто перейдемо від ПСК до ПДСК. Для цього варто скористатися відповідними формулами переходу (див. §2).

Зорієнтуватися за полярним рівнянням параболи не просто, а от канонічні рівняння дають повне уявлення про конічний переріз.

Отже, застосуємо формули: $\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2},} \\ \boldsymbol{\sin \Theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos \Theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \end{array}\right\}$ (рис. 52).

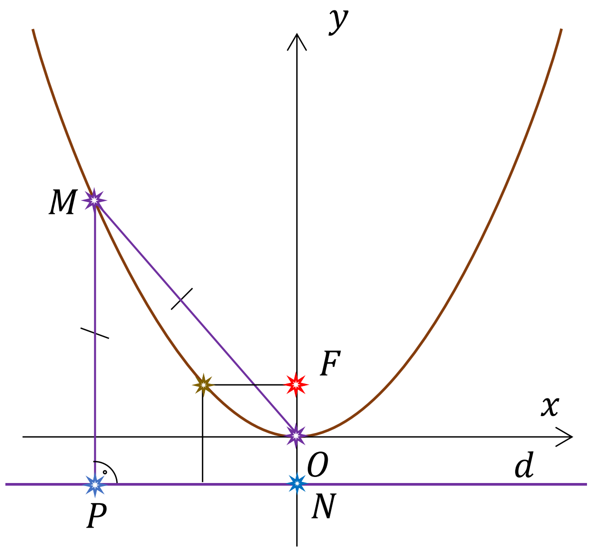


Рис. 52

Виконавши прості дії, отримаємо рівняння такого виду: $x^2 = 8y$. Очевидно, що віссю симетрії даної параболи є додатна піввісь *Oy* з вершиною в початку координат *O*(0; 0).

Шукаємо точку $M(x;\ y)$ на параболі таку, щоб *MO* = *MP*. Довжина відрізка $MO = \sqrt{x^2 + y^2}$, а довжину відрізка *MP* (відстань від точки *M* до директриси) знайдемо як відстань від точки до прямої, яка має рівняння $y = -\frac{p}{2} = -2$. У точок *M* і *P* абсциси рівні, тому $MP = \sqrt{(y+2)^2}$. Прирівнявши дані відрізки, отримаємо $x^2 = 2y + 4$. Однак точка *M* належить параболі, тому її координати задовольняють рівнянню $x^2 = 8y$. Розвязавши ці два рівняння разом, матимемо $y = \frac{2}{3}, x = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Результат у ПСК буде таким: $r = \frac{2\sqrt{13}}{3}$; $\sin\theta \cong 0{,}96$; $\cos\theta \cong 0{,}277$. Звідси маємо: $\theta \cong 73°$. Отримані дані задовольняють рівнянню параболи $r = \frac{8\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

Задача 9. Вивести формули для обчислення відстані між двома точками $P(r_1; \theta_1)$ і $Q(r_2; \theta_2)$, що задані полярними координатами. Знайти відстань між точками 1) $\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$ і $\left(5; \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\left(4; \frac{11\pi}{18}\right)$ і $\left(3; \frac{\pi}{9}\right)$; 3) $\left(4; \frac{\pi}{5}\right)$ і $\left(6; \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання.

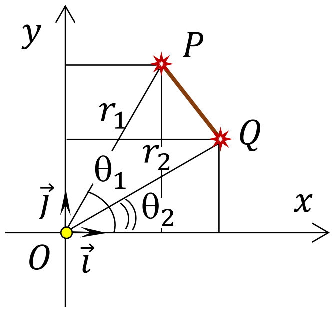


Рис. 53

Нехай $(O;\vec{\imath})$ дана ПСК (рис. 53). Побудуємо допоміжну ПДСК $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. У ПДСК дані точки матимуть координати $P(x_1;y_1)$ і $Q(x_2;y_2)$, де $x_1 = r_1\cdot\cos\theta_1$, $y_1 = r_1\cdot\sin\theta_1$; $x_2 = r_2\cdot\cos\theta_2$, $y_2 = r_2\cdot\sin\theta_2$. Далі слід скористатися відомими формулами довжини відрізка $PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Підставивши в останню формулу значення виразів для x_1, y_1, x_2 і y_2, отримаємо такий вираз: $PQ = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$ (*).

Для відшукання відстані між даними точками, скористаємося формулою (*).

Таким чином, візьмемо, в якості прикладу, дві точки з умови під номером 2 і знайдемо відстань між ними: $PQ = \sqrt{16+9-2\cdot4\cdot3\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 7$.

Читачу, будь-ласка, знайдіть відстань між іншими парами точок самостійно.

Задачі для самостійного розв'язання

№ 1. Відносно ПДСК написати канонічні рівняння таких конічних перерізів: 1) $r = \frac{25}{13-12\cos\theta}$; 2) $r = \frac{1}{3-3\cos\theta}$; 3) $r = \frac{9}{4-5\cos\theta}$; 4) $r = \frac{4}{\sqrt{5}-\cos\theta}$.

Відповідь: 1) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25} = 1$; 2) $y^2 = \frac{2x}{3}$; 3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5} = 1$.

№ 2. Відносно ПСК скласти рівняння кола, радіус якого дорівнює a і центр розташований: 1) у полюсі; 2) в точці з координатами (a; 0).

Відповідь: 1) $r = a$; 2) $r = 2a\cdot\cos\theta$.

№ 3. Скласти рівняння гіперболи, взявши його фокальну вісь за полярну й помістивши центр гіперболи в полюс ПСК.

Відповідь: $r^2 = \frac{-b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$.

№ 4. Трикутник *ABC* задано полярними координатами його вершин $A\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$. Довести, що даний трикутник рівнобедрений.

Указівка: Скористайтеся формулою відстані між двома точками в ПСК.

№ 5. Для кожного з конічних перерізів з фокусом у полюсі, з'ясувати тип кривої та її розташування, знайти ексцентриситет і записати рівняння директриси: 1) $r = \frac{6}{3+2\sin\theta}$; 2) $r = \frac{12}{4+5\cos\theta}$; 3) $r = \frac{7}{2-2\sin\theta}$.

Відповідь: 1) $\varepsilon = \frac{2}{3}$, $p = 2$; 2) $\varepsilon = \frac{5}{4}$, $p = 3$; 3) $\varepsilon = 1$, $p = \frac{7}{2}$.

№ 6. У ПСК задано точки $K\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $L\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$, $M\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $N\left(3;-\frac{\pi}{6}\right)$. Знайти їх координати у ПДСК, якщо вісь *Oy* містить полюс ПСК і перпендикулярна до полярної осі.

Відповідь: $K\left(1;\sqrt{3}\right)$, $L(-1;1)$, $M(0;5)$, $N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

№ 7. Вивести формулу площі трикутника *OAB*, точка *O* якого зливається з полюсом ПСК, а дві інші вершини задані своїми полярними координатами: $A(r_1;\theta_1)$, $B(r_2;\theta_2)$.

Відповідь: $S = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$.

№ 8. Вершини трикутника знаходяться в точках $A\left(2\sqrt{3}; \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ й $C\left(4+\sqrt{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$. Довести, що трикутник *ABC* прямокутний.

№ 9. Дано квадрат *ABCD*, сторона якого рівна 3. Узявши вершину *A* полюсом ПСК, а пряму *AB* за полярну вісь, знайти координати його вершин і точку *P*, в якій перетинаються діагоналі. Розглянути два різні випадки розташування квадрата.

Відповідь: 1-й випадок: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C\left(3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(3; \frac{\pi}{2}\right)$, $P\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$; 2-й випадок: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C\left(3\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(3; -\frac{\pi}{2}\right)$, $P\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

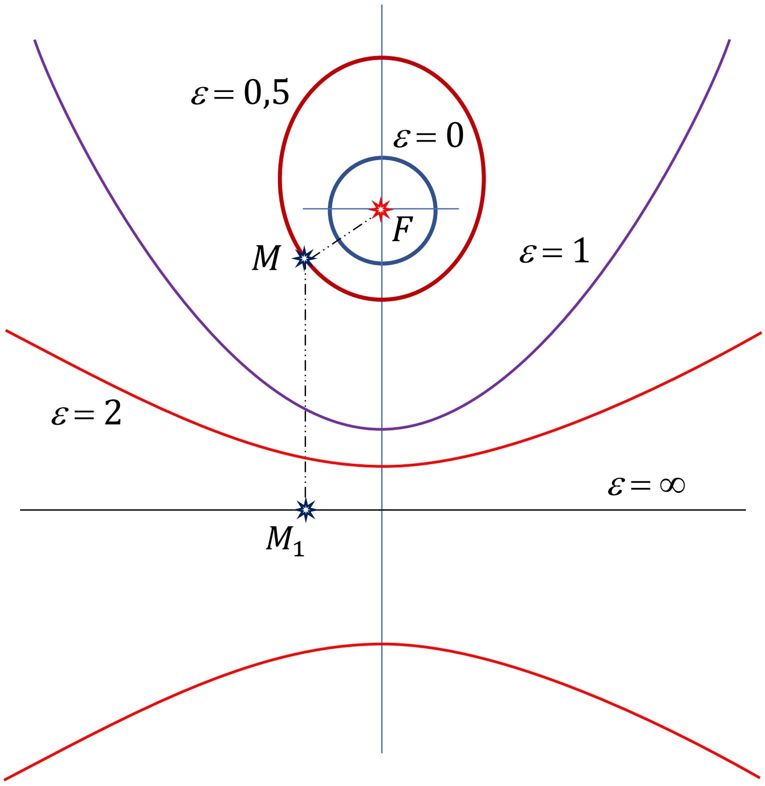


Рис. 54

На останок зауважимо, що будь-який конічний переріз можна формально задати трьома його параметрами: одним-єдиним **фокусом**, фіксованою лінією, що зветься **директрисою**, і відношенням відстаней точки на графіку перерізу до фокуса і директриси (рис. 54).

Щоб успішно працювати з конічним перерізом, рівняння якого записане в полярній формі, спочатку зробіть постійний член в знаменнику рівним одиниці. Це можна зробити, розділивши чисельник і знаменник дробу на константу, яка з'являється перед плюсом або мінусом у знаменнику. Тоді коефіцієнт синуса або косинуса у знаменнику буде **ексцентриситетом**. Його значення **ідентифікує** конічний переріз. Якщо в знаменнику з'являється косинус, то фокальна вісь конічного перерізу – горизонтальна. Якщо ж – синус, то конічний переріз вертикальний (на чому ми вище вже робили наголос). Центр конічного перерізу ***не обов'язково*** розташовується в початку.

Варіанти позааудиторної
модульної контрольної роботи

Варіант 1

Теоретичне питання. Полярна система координат. Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки. Приклади (коло, пряма).

Задача № 1. Записати рівняння кола, що проходить через точки A(–1; 1) і B(1; –3), якщо центр його лежить на прямій $2x - y + 1 = 0$.

Задача № 2. Еліпс дотикається осі Oy в точці A(0; 5) і перетинає вісь Ox в точках B(5; 0) і C(11; 0). Знаючи, що осі еліпса паралельні координатним осям, скласти рівняння цього еліпса.

Задача № 3. Знайти рівняння двох спряжених гіпербол, знаючи, що відстань між директрисами першої з них рівна 3,6 і відстань між директрисами другої рівна 6,4.

Задача № 4. З'ясувати, який конічний переріз задано рівнянням $r = \frac{4}{\sqrt{5}-\cos\theta}$ у ПСК. Знайти ексцентриситет та рівняння директрис.

Варіант 2

Теоретичне питання. Характеристична властивість конічних перерізів (доведення).

Задача № 1. Записати рівняння кола, знаючи, що воно дотикається осі Oy в точці A(0; –3) і має радіус, рівний 2.

Задача № 2. На еліпсі $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, для якої добуток фокальних радіусів рівний квадрату малої півосі.

Задача № 3. Дано параболу $y^2 = 2px$. Проведіть до кривої дотичну, перпендикулярну прямій $2x + y - 7 = 0$.

Задача № 4. З'ясувати, який конічний переріз задано рівнянням $r = \frac{7}{5-2\cos\theta}$. Знайти ексцентриситет та рівняння директрис.

Варіант 3

Теоретичне питання. Виведення канонічних рівнянь конічних перерізів.

Задача № 1. На осі абсцис знайти центр кола, яке проходить через точки A(2; 3) і B(5; 2), й написати рівняння цього кола.

Задача № 2. Знайти рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ в точці (2; –3).

Задача № 3. Написати рівняння гіперболи, що проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ і яка має вершини у вершинах цього еліпса.

Задача № 4. З'ясувати, який конічний переріз задано рівнянням $r = \frac{3}{4-4\cos\theta}$. Знайти ексцентриситет та рівняння директрис.

Варіант 4

Теоретичне питання. Дослідження форми конічних перерізів (еліпс та парабола).

Задача № 1. Як розташовані точки: A(–3; 0), B(5; 0), C(4; 2), D(2; 7), E(–4; 6), F(3; –1), G(–2; 3) відносно кола $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$?

Задача № 2. Обчислити сторону квадрата, вписаного в еліпс, рівняння якого має вид: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Задача № 3. Скласти рівняння гіперболи, знаючи її фокуси $F_1(10;\ 0)$, $F_2(-10;\ 0)$ і одну з точок кривої $P(12;\ 3\sqrt{5})$.

Задача № 4. Записати рівняння еліпса, прийнявши його фокальну вісь за полярну вісь і розмістивши полюс ПСК у правому фокусі.

Варіант 5

Теоретичне питання. Дослідження форми конічних перерізів (гіпербола).

Задача № 1. Точка M переміщуючись по колу $(x-4)^2+(y-8)^2=20$, зірвалася з нього, і відносно її подальшого руху відомо, що вона перетнула вісь Ox в точці (–2; 0). Знайти точку кола, з якої зірвалася рухома точка M.

Задача № 2. Через точку (2; –5) провести прямі, що паралельні асимптотам гіперболи $x^2-4y^2=4$.

Задача № 3. Скласти рівняння геометричного місця точок, віддалених на однакову відстань від точки $F(-2;\ 0)$ і від прямої $x+6=0$. Знайти спільні точки знайденої кривої з осями координат.

Задача № 4. Нехай φ(r, θ) – дана ПСК, а ПДСК отримано шляхом повороту полярної осі на кут + 90°. Дано полярні координати точок $A\left(2;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3;\ -\frac{\pi}{6}\right)$. Знайти їх прямокутні декартові координати.

Варіант 6

Теоретичне питання. Дотична до конічного перерізу (на прикладах еліпса (гіперболи) і параболи).

Задача № 1. Під впливом деякої сили точка M рухалася по колу $(x-5)^2+$ $+(y+3)^2=25$. Дія сили перервалася в той момент, коли точка M зіллялася з точкою A(2; 1). Знайти як рухалася точка після відриву від кола.

Задача № 2. На гіперболі $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ знайти точку, яка була б у три рази ближча від однієї асимптоти, ніж від іншої.

Задача № 3. Через точку P(5; –7) провести дотичну до параболи, рівняння якої має вид: $y^2=8x$.

Задача № 4. Обчислити довжину півосей, ексцентриситет і відстань між фокусами конічного перерізу $r=\frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\theta}$. З'ясуйте тип кривої.

Варіант 7

Теоретичне питання. Фокальні властивості конічних перерізів (парабола та еліпс).

Задача № 1. Скласти рівняння спільних дотичних двох кіл: $(x-2)^2+$ $+(y-1)^2=1\ \ (x+2)^2+(y+1)^2=9$.

Задача № 2. Дано еліпс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Знайти довжину його діаметра, напрям якого зливається з напрямком бісектриси координатного кута.

Задача № 3. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої ексцентриситет рівний 2, а відстань між фокусами рівна двом відстаням між директрисами.

Задача № 4. Записати рівняння параболи в ПСК, рівняння якої у ПДСК має вид: $x^2 = 8y$.

Варіант 8

Теоретичне питання. Фокальні властивості конічних перерізів (парабола та гіпербола).

Задача № 1. На якій із координатних осей розташовані центри заданих кіл: 1) $x^2 + 2x + y^2 - 8 = 0$; 2) $x^2 - 3y + y^2 + 2 = 0$.

Задача № 2. Вершини трикутника, що має нерухому основу, переміщуються так, що периметр трикутника зберігається постійним. Знайти траєкторію вершини за умови, що основа рівна 24 см, а периметр рівний 50 см.

Задача № 3. Дано параболу $y^2 = 12x$. Провести до неї дотичну, яка утворює з прямою $4x - 2y + 9 = 0$ кут 45°.

Задача № 4. Знайти тип і канонічне рівняння кривої, що задана рівнянням у ПСК: $r = \frac{15}{3 - 7\cos\theta}$.

Варіант 9

Теоретичне питання. Оптичні властивості конічних перерізів (на прикладі гіперболи).

Задача № 1. Які особливості можна відмітити в розташуванні кола відносно осей координат, якщо деякі із коефіцієнтів його загального рівняння приймають значення рівне нулю: $A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$?

Задача № 2. На гіперболі $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ знайти точку, для якої відстань від лівого фокуса вдвоє більша, ніж відстань від правого фокуса.

Задача № 3. Довести, що будь-яка дотична до параболи перетинає директрису і фокальну хорду, перпендикулярну до осі, в точках, рівновіддалених від фокуса.

Задача № 4. Дано правильний трикутник *ABC*, сторона якого дорівнює 5. Узявши вершину *A* за полюс ПСК, а пряму *AB* за полярну вісь, знайти полярні координати вершин і центра *P* трикутника.

Варіант 10

Теоретичне питання. Діаметри конічних перерізів (еліпс, парабола).

Задача № 1. Знайти геометричне місце точок, які мають таку властивість: дотичні, проведені з кожної точки до кола $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 9$, рівні за довжиною ($l = 4$).

Задача № 2. В еліпс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ уписано прямокутник, дві протилежні сторони якого проходять через фокуси. Обчислити площу цього прямокутника.

Задача № 3. Якій умові має задовольняти ексцентриситет гіперболи, щоб на її правій гілці існувала точка, однаково віддалена від правого фокуса і від лівої директриси, якщо канонічне рівняння гіперболи має вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$)?

Задача № 4. Дано правильний шестикутник *ABCDEF* , сторона якого рівна *a*. Узявши вершину *A* за полюс ПСК, а пряму *AB* за полярну вісь, знайти полярні координати вершин і центра *P* перетину діагоналей.

ВИКОРИСТАНІ ЛІТЕРАТУРНІ ДЖЕРЕЛА

1. Булдигін В. В., Алєксєєва В. О., Гайдей О. О. та ін. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. – К. : ТВіМС, 2011. – 224 с.

2. Габрусєв Г. В. Конспект лекцій із вищої математики (ч. 3 : аналітична геометрія) / Г. В. Габрусєв – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 64 с.

3. Коляда Р. В., Мельник О. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 3. Аналітична геометрія на площині : методичні вказівки для студентів / Р. В. Коляда, О. М. Мельник – Львів : Укр. акад. друкарства, 2019. – 52 с.

4. Конічні перерізи // Термінологічний словник-довідник з будівництва та архітектури / Р. А. Шмиг, В. М. Боярчук, І. М. Добрянський, В. М. Барабаш ; за заг. ред. Р. А. Шмига. – Львів, 2010. – С. 110. – 222 с.

5. Ленчук І. Г., Семенець С. П. Геометрія. Ч. І. Аналітична геометрія на площині : Навч.-метод. посіб. / І. Г. Ленчук, С. П. Семенець. – Житомир : Вид-до ЖДУ ім. І. Франка, 2006. – 124 с.

6. Сінцов Д. М. Аналітична геометрія на площині. Ч. I / Д. М. Сінцов. – Харків-Одеса : Радянська школа, 1931. – 212 с.

7. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математики / З. И. Слепкань. – К.: Радянська школа, 1983. – 192 с.

8. Собкович Р. І. Конспекти лекцій з аналітичної геометрії. Ч. І. Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого та другого ступеня з двома та трьома змінними : Навч. посібник. / Р. І. Собкович. – Івано-Франківськ : Галіней О. М., 2016. – 236 с.

9. Яковець В.П., Боровик В. Н., Ваврикович Л. В. Аналітична геометрія : Навч. посіб. / В. П. Яковець, В. Н. Боровик, Л. В. Ваврикович. – Суми : Університетська книга, 2004. – 294 с.