

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

# **Математичне моделювання динамічних систем і процесів**

*Інструктивно-методичні матеріали  
для самостійної роботи здобувачів закладів вищої освіти  
другого (магістерського) рівня вищої освіти  
спеціальності 122 Комп'ютерні науки*

Житомир 2024

УДК 004.94:378.147(072)

М 32

*Затверджено вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка протокол № 17 від 27 вересня 2024 р.*

### **Рецензенти:**

**Журавльов Валерій** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету.

**Наконечна Оксана** – кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних технологій Одеського державного аграрного університету.

**Севостьянов Євген** – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики Житомирського державного університету імені Івана Франка

М 32      Математичне моделювання динамічних систем і процесів:  
Інструктивно-методичні матеріали для самостійної роботи здобувачів закладів вищої освіти другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 122 Комп'ютерні науки/ Укладачі: Таміла Коломієць, Василь Михайленко, Анатолій Погоруй, Світлана Постова, Анатолій Франовський,. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2024. 60 с.

Інструктивно-методичні матеріали призначені для використання здобувачами закладів вищої освіти під керівництвом викладача на лекціях та лабораторних заняттях, а також для самостійної роботи. Видання містить основні теоретичні відомості вказівки до вивчення основних тем, винесених навчальним планом на самостійну роботу. Викладений матеріал відповідає освітньо-професійній програмі «Комп'ютерні науки» Житомирського державного університету імені Івана Франка для спеціальності здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти.

УДК 004.94:378.147(072)

## Зміст

<b>Вступ .....</b>	<b>4</b>
<b>Тема 1. Фізичне та математичне моделювання. Сучасні програмні середовища і технології моделювання .....</b>	<b>6</b>
<b>Короткі теоретичні відомості.....</b>	<b>6</b>
<b>Тема 2. Етапи моделювання. Побудова математичної моделі та функціонування динамічної системи.....</b>	<b>11</b>
<b>Короткі теоретичні відомості.....</b>	<b>11</b>
<b>Тема 3. Детерміновані динамічні моделі. Моделювання лінійних динамічних систем .....</b>	<b>26</b>
<b>Тема 4. Еволюційне моделювання. Нелінійні динамічні системи та різницеві моделі .....</b>	<b>29</b>
<b>Тема 5. Математичні моделі динамічних систем .....</b>	<b>45</b>
<b>Тема 6. Математичні моделі динамічних систем. Моделювання систем оптимального управління.....</b>	<b>50</b>
<b>Рекомендована література .....</b>	<b>58</b>

## Вступ

Останнім часом важко зустріти статтю або книгу, в якій би не вживався термін «система». На даний час більшість галузей науки знаходяться на етапі осмислення результатів та представлення їх як системи. Основи науки про системи відображаються та використовуються в різних дисциплінах. Моделювання як одну із найважливіших категорій процесу пізнання неможливо відокремити від розвитку людства. Методи комп'ютерного моделювання широко застосовуються в усіх сферах діяльності людини. Моделювання як технологія розв'язання задач усередині специфічного середовища широко застосовується під час аналізу і проектування інформаційних систем для перевірки вимог до їх ефективності.

Дисципліна «Математичне моделювання динамічних систем і процесів» охоплює дослідження міждисциплінарного характеру та стику загальної теорії систем, диференційних рівнянь, методів оптимізації та дослідження операцій, теорії ймовірності та математичної статистики, що орієнтовані на розв'язування задач конструктивної теорії систем та математичного моделювання.

**Метою вивчення дисципліни є:** ознайомлення з основними поняттями теорії систем та системного аналізу, принципами побудови моделей, етапами системного аналізу, методологією дослідження таких властивостей та відношень на об'єктах комп'ютеризації, які важко спостерігаються шляхом представлення цих об'єктів у вигляді цілеспрямованих систем; набуття практичних навичок застосування системної методології для аналізу, моделювання та проектування складних об'єктів, побудови комп'ютерних інформаційних систем, розв'язування інформаційних проблем в них; розвинути навички використання практичних методологій системного аналізу для логіко-фізичного моделювання та проектування КІС; опанування уміннями та навичками постановки задач на прийняття рішень (формалізацію й алгоритмізацію) для їхнього подальшого розв'язання за допомогою стандартного математичного апарату; отримати знання, сформувані уміння та навички, необхідні для розв'язання задач масового обслуговування; опанування основами імовірнісного та імітаційного моделювання; сформувані у майбутніх спеціалістів системне мислення.

**Завдання дисципліни** – розвиток умінь і навичок розв'язування практичних задач з теорії систем з використанням математичних

методів, моделювання систем з використанням математичних методів оптимізації на ПК; ознайомити студентів з принципами та особливостями сучасних методів розв'язування математичних задач масового обслуговування з використанням комп'ютерних засобів математичного моделювання та числових експериментів.

Вивчення дисципліни "Математичне моделювання динамічних систем і процесів" базується на знаннях студентів, які одержані під час вивчення основ інформатики в середній школі та знанні інших математичних, інженерних дисциплін.

Інструктивно-методичні матеріали до самостійної роботи складається з 6 тем, до кожної з яких є план лекції, основні теоретичні відомості з теми, запитання для самостійного опрацювання студентами, окремі приклади розв'язання завдань, а також додаткові запитання для самостійного опрацювання.

Книга призначена для здобувачів, які навчаються за магістерською програмою спеціальності 122 Комп'ютерні науки; крім того, вона може бути використана магістрантами, аспірантами та усіма тими, хто цікавиться проблемами системного аналізу, математичного, імітаційного та комп'ютерного моделювання, а також їхнім застосуванням у практичній діяльності.

# Тема 1. Фізичне та математичне моделювання. Сучасні програмні середовища і технології моделювання

## *План лекції*

1. Предмет, метод і задачі курсу. Основні поняття.
2. Моделювання фізичних процесів.
3. Фізичне та математичне моделювання. Основна термінологія.
4. Математизація наукових знань. Аналіз похибок при комп'ютерних розрахунках. Оцінювання порядків абсолютних та відносних похибок функції за відомими похибками аргументів.
5. Точні та наближені методи.
6. Сучасні програмні середовища і технології моделювання.
7. Методологія функціонального моделювання, типи функціональних зв'язків.
8. Аналіз та обґрунтування вибору сучасного програмного середовища і технології моделювання.

## **Короткі теоретичні відомості**

Термін «модель» (від латів. *modulus* – міра, зразок, норма) увійшов до математики в XIX ст. у зв'язку з розвитком неевклідової геометрії.

Під **моделлю** розуміють такий матеріальний або такий, що в думках представляється об'єкт, який в процесі пізнання (вивчення) заміщає об'єкт-оригінал, зберігаючи деякі важливі для даного дослідження типові його риси.

Окрім поняття «модель» в моделюванні є ще ряд важливих понять.

**Об'єкт** (від латів. *objectum* – предмет) – все, на що направлена людська діяльність. Будь-який об'єкт дослідження є нескінченно складним і характеризується нескінченним числом станів і параметрів.

**Процес** – певна сукупність дій, направлених на досягнення поставленої мети.

**Система** – це сукупність взаємозв'язаних елементів і компонентів, що має цілком конкретну структуру і цілком конкретне цільове призначення.

**Елемент системи** – частина системи, що не піддається подальшому діленню.

**Зовнішнє (оточуюче) середовище** – безліч елементів будь-якої природи, що існують поза системою (об'єкту), роблять вплив на систему (об'єкт) або знаходяться під її (його) дією.

**Гіпотеза** (від гр. hypothesis – підстава, припущення) – певні прогнози, гадані думки про причинно-наслідкові зв'язки явищ, засновані на деякій кількості досвідчених даних, спостережень, припущень.

**Аналогія** (від гр. analogia – відповідність, відповідність) – уявлення про яку-небудь приватну схожість двох об'єктів (істотному або неістотному).

**Моделювання** – заміщення досліджуваного об'єкту (оригіналу) його умовним чином, описом або іншим об'єктом (моделлю) і пізнання властивостей оригіналу шляхом дослідження властивостей моделі.

### ***Цілі і принципи моделювання***

Створюючи модель об'єкту, дослідник пізнає об'єкт, тобто виділяє його з навколишнього середовища і будує його формальний опис. Основні цілі моделювання:

- опис об'єкту;
- пояснення об'єкту;
- прогнозування поведінки і властивостей об'єкту.

Мету опису і пояснення об'єкту можна об'єднати в одну – вивчення об'єкту (пізнавальна мета). Модель потрібна для того, щоб зрозуміти, як влаштований конкретний досліджуваний об'єкт, які його структура, внутрішні зв'язки, основні властивості, закони розвитку, саморозвитку і взаємодії з навколишнім середовищем. Ще одна мета (прогнозування поведінки і властивостей об'єкту) є частиною стратегічної мети – управляти об'єктом, визначаючи по моделі оптимальні дії, що управляють, при заданих цілях і критеріях. Модель потрібна і для того, щоб прогнозувати наслідки різних дій на об'єкт.

У основі моделювання лежить теорія подібності, згідно якої абсолютна подібність можлива тільки при заміні одного об'єкту іншим таким самим. Цю ідею добре виразили А. Розенблют і Н. Вінер, коли сказали, що кращою моделлю kota є інший кіт, а ще краще – той же самий кіт. При моделюванні абсолютна подібність не має місця. Будь-яка модель не тотожна об'єкту-оригіналу і не є повною, оскільки при її побудові дослідник враховував тільки ті особливості об'єкту, які вважав найбільш важливими для вирішення конкретного завдання. Достатньо того, щоб модель добре відображала властивості, що

цікавлять дослідника, і прояви аналізованого об'єкту. Проте ніхто і ніщо не може бути моделлю самого себе.

Реальна користь від моделювання може бути отримана при виконанні наступних умов:

- модель повинна бути адекватною оригіналу в тому сенсі, що повинна з достатньою точністю відображати характеристики оригіналу, що цікавлять дослідника;
- модель повинна усувати проблеми, пов'язані з фізичними вимірюваннями якихось сигналів або характеристик оригіналу.

Моделювання базується на декількох основоположних принципах:

1. Принцип інформаційної достатності – при повній відсутності інформації про об'єкт побудова його моделі неможлива. Існує деякий рівень апріорної інформації про об'єкт, тільки досягнувши якого може бути побудована адекватна модель. За наявності повної інформації про об'єкт побудова його моделі не має сенсу.

2. Принцип здійсненності – створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети дослідження з вірогідністю, що істотно відрізняється від нуля.

3. Принцип множинності моделей – створювана модель повинна відображати в першу чергу ті властивості реального об'єкту (системи), які цікавлять дослідника. Для повного дослідження об'єкту необхідна достатньо велика кількість моделей, що відображають досліджуваний об'єкт з різних сторін і з різним ступенем деталізації.

4. Принцип агрегування – в більшості досліджень систему доцільно представити як сукупність підсистем, для опису яких виявляються придатними стандартні схеми.

5. Принцип параметризації – модель будується у вигляді відомої системи, параметри якої невідомі.

### ***Види моделей і моделювання***

Моделі характеризуються трьома основними ознаками:

- належністю до певного класу завдань (наприклад, управління технологічними процесами, управління технічними об'єктами, планово-економічні завдання і т. д.);
- належністю до певного класу об'єктів (фізичні, біологічні і т. д.);
- способом реалізації.

За способом реалізації моделі підрозділяються на матеріальні та ідеальні.



До цього умовного ділення приводить використання моделювання на теоретичному і емпіричному рівнях пізнання.

**Матеріальне моделювання** – це моделювання, при якому дослідження об'єкту виконується з використанням його матеріального анабалки, відтворюючої основні фізичні, геометричні, динамічні, функціональні характеристики об'єкту.

**Ідеальне моделювання** відрізняється від матеріального тим, що засноване не на матеріальній аналогії об'єкту і моделі, а на тому, що завжди носить теоретичний характер. Ідеальне моделювання є первинним по відношенню до матеріального.

Матеріальні моделі об'єднуються в три основні підкласи:

- геометрично подібні, відтворюючі просторово геометричні характеристики оригіналу (макети будівель, муляжі і т. д.);
- відтворюючі з масштабуванням в просторі і в часі властивості оригіналу тієї ж природи, що і модель (наприклад, моделі судів);
- відтворюючі властивості оригіналу в моделюючому об'єкті іншої природи (наприклад, електрогідрравлічні аналогії) або засновані на ізоморфізмі між формально описаними властивостями оригіналу і об'єкту (всі різновиди комп'ютерного моделювання).

**Інтуїтивне** – моделювання, засноване на інтуїтивному (не обгрунтованому з позицій формальної логіки) уявленні про об'єкт дослідження, непіддатливий формалізації або що не потребує її.

**Наукове** – це завжди логічно обгрунтоване моделювання, що використовує мінімальне число припущень, прийнятих як гіпотези на підставі спостереження за об'єктом моделювання.

**Символічним моделюванням** є штучний процес створення логічного об'єкту, який заміщає реальний і виражає основні властивості його відносин за допомогою певної системи знаків, що відображають набір понять (знакове моделювання), і символів із спеціального словника, очищеного від неоднозначності (мовне моделювання) (приклад знакової моделі – дорожні знаки, мовний – модель словотворення).

**Статичним** називається моделювання, при якому серед параметрів об'єкту і моделі відсутній час і самі параметри об'єкту з часом не змінюються. При **динамічному моделюванні** об'єкт дослідження і його параметри в часі істотно змінюються.

**Детерміноване моделювання** відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких передбачається відсутність всяких

випадкових дій; стохастичне моделювання відображає імовірнісні процеси і події.

### ***Питання для самоконтролю***

- 1. Що таке модель?*
- 2. Що таке об'єкт?*
- 3. Що таке процес?*
- 4. Що таке система?*
- 5. Що таке елемент системи?*
- 6. Що таке навколишнє середовище?*
- 7. Що таке гіпотеза?*
- 8. Що таке аналогія?*
- 9. Що таке моделювання?*
- 10. Позначте цілі моделювання.*
- 11. Назвіть принципи моделювання.*
- 12. Які види моделювання існують?*
- 15. Що таке матеріальне моделювання?*
- 16. Що таке уявне моделювання?*
- 17. Що таке інформація? Назвіть види інформації.*

### ***Перелік додаткових запитань для самостійного опрацювання:***

- 1. Основні властивості моделей.*
- 2. Види моделей.*
- 3. Методологія моделювання систем і процесів.*
- 4. Комп'ютерне моделювання для прикладних задач.*

## **Тема 2. Етапи моделювання. Побудова математичної моделі та функціонування динамічної системи**

### *План лекції*

1. Етапи моделювання.
2. Складання математичної моделі.
3. Оптимізація моделі.
4. Аналіз чутливості і визначення інтервалу оптимальності.
5. Динамічні системи.
6. Класифікація систем.
7. Ознаки класифікації и класи систем.
8. Принципи побудови математичної моделі динамічної системи.
9. Етапи формування математичної моделі.
10. Змінні і параметри в математичних моделях динамічних систем.
11. Функціонування динамічної системи. Стан системи.
12. Характеристики процесів системи.
13. Функції зворотного зв'язку.
14. Визначення характеристик функціонування динамічної системи, функцій зворотного зв'язку, функцій обмежень системи.

### **Короткі теоретичні відомості**

Для аналітичного методу моделювання характерним є запис процесів (або функцій системи) у вигляді деяких функціональних математичних співвідношень: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь, або ж їх комбінацій.

**Аналітична математична** модель звичайно досліджується такими методами як:

\* аналітичний – коли намагаються отримати явні аналітичні вирази для характеристик моделі;

\* числовий – якщо не вдається знайти загальні аналітичні вирази або рішення рівнянь, які описують систему, чи процес;

\* якісний – коли за відсутності точних рішень знаходять та аналізують деякі їх властивості.

Результати аналітичних моделей презентуються у вигляді аналітичних виразів. Моделювання нелінійних систем практично завжди використовує саме числові методи.

Особливістю імітаційного методу моделювання є те, що алгоритм, який реалізує модель, відтворює процес функціонування системи, в певному наближенні, зрозуміло. Елементарні явища, які формують процес функціонування системи, імітуються в їх логічній та часовій послідовності.

Головна перевага такого виду моделювання – можливість роботи зі складнішими системами та процесами, аніж це може дозволити аналітичне моделювання. Головним засобом такого моделювання слугують комп'ютери.

Під час **імітаційного моделювання** комп'ютер відтворює алгоритм – «логіку» системи, яка моделюється, її поведінку в часі за умови різних наборів зовнішніх впливів. Прикладом найпростішої імітаційної моделі можна назвати комп'ютерні моделі різних видів руху матеріальних точок або тіл. У таких моделях імітується

спостереження за позиціями рухомого тіла в різні моменти часу, відтворюється траєкторія руху, варіюються його параметри тощо.

Головним недоліком імітаційного моделювання є відносно великі затрати часу на вирішення задачі, особливо якщо вимагається відносно висока точність такого рішення.

Під час моделювання **стохастичних систем**, тобто систем із випадковими процесами або впливами, модель повинна відтворювати випадкові фактори, події, величини, поля та процеси, які мають місце в оригіналі.

За результатами статистичного моделювання визначають ймовірнісні оцінки критеріїв якості, які характеризують функціонування та ефективність керованої системи. Звичайно це відбувається на заключному етапі моделювання, етапі статистичної обробки отриманих результатів, коли застосовують параметричне чи непараметричне оцінювання, здійснюють статистичну перевірку гіпотез тощо.

Зокрема, прикладом параметричної статистичної оцінки є вибіркове середнє певного показника ефективності.

Метод Монте-Карло (за назвою міста Монте-Карло, Монако, яке відоме своїми казино) – загальна назва групи числових методів, оснований на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного (випадкового) процесу, який формується у той спосіб, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Використовується для розв'язування задач у фізиці, математиці, економіці, оптимізації, теорії управління тощо.

**Метод Монте-Карло** – це метод імітації для приблизного відтворення реальних явищ, він є різновидом статистичного моделювання. Метод об'єднує аналіз чутливості (сприйнятливості) і аналіз розподілу ймовірностей вхідних змінних. Цей метод дає змогу побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі. Побудова моделі починається з визначення функціональних залежностей у реальній системі. Після чого можна одержати кількісний розв'язок, використовуючи теорію ймовірності й таблиці, або програмні генератори, для випадкових чисел.

Метод Монте-Карло широко використовується у всіх випадках симуляції на комп'ютерах. Ідея методу полягає у підрахунку співвідношення випадковим чином генерованих комп'ютером точок, які потрапили під криву інтегрованої функції до загальної кількості генерованих випадкових точок.

Загальною тенденцією основних методів моделювання є скорочення часу моделювання, а також проведення досліджень у масштабі реального часу.

### ***Класифікація та опис моделей***

Під час створення математичних моделей можна вирізнити три основні стадії підготовки такої моделі:

1. Створення уявної моделі.
2. Створення концептуальної моделі.
3. Створення формальної моделі.

**Уявна модель** формується в голові дослідника під час спостережень за об'єктом моделювання як його мислений образ.

Формуючи таку ідеальну модель розробник звичайно намагається отримати відповіді на певні питання, зокрема, чим саме можна знехтувати в реальному і складному об'єкті, а які властивості, навпаки, варто утримати в його образі. Представлення такої уявної моделі звичайною мовою (так званий вербальний образ) називають змістовною моделлю. Такі моделі поділяють на описові, пояснючі та прогностичні відповідно до їх функції.

**Концептуальна модель** є абстрактною моделлю, яка визначає структуру об'єкта моделювання, властивості його елементів, причинно-наслідкові зв'язки, які притаманні об'єкту і важливі для побудови його моделі. Розглядають три типи концептуальних моделей: логіко-семантичні; структурно-функціональні; причинно-наслідкові.

**Логіко-семантична модель**, є описом об'єкта в термінах предметної галузі знань, до якої він належить. Аналіз відбувається засобами логіки. **Структурно-функціональна модель** розглядає об'єкт як цілісну систему, яку можна розділити на певні підсистеми, або елементи. Частина системи пов'язані між собою деякими структурними співвідношеннями, які описують підлеглість одна одній, а також логічну та часову послідовність вирішення задачі. **Причинно-наслідкові моделі**, служать для пояснень та прогнозу поведінки об'єкта.

Побудова концептуальної моделі звичайно передбачає три етапи:

1. Визначення типу системи (об'єкта моделювання).
2. Опис зовнішніх впливів на об'єкт.

3. Декомпозиція об'єкта (його аналіз, розкладання на простіші частини).

Формальна модель є презентацією концептуальної моделі за допомогою деякої формальної мови: зокрема це може бути мова математики, алгоритмічна мова, мова програмування тощо.

Іншою класифікаційною ознакою об'єкта моделювання є множина можливих станів. Якщо об'єкт може перебувати лише в одному стані, то він відноситься до статичних систем.

Якщо кількість можливих станів системи більше одного та/або ці стани можуть змінюватися з часом, то об'єкт належить до динамічних систем. Процес зміни станів називають рухом динамічної системи. Розрізняють динамічні системи: з дискретними станами (кількість станів можна перенумерувати цілими числами); з неперервною множиною станів.

Зміна станів також може відбуватися або у дискретні фіксовані моменти часу (так звані системи з дискретним часом переходів), або ж системи з безперервним часом переходів, тобто такі, які «живуть» у реальному часі.

Умови переходів між станами поділяють системи на: **детерміновані**, в яких новий стан залежить лише від поточного стану та часу; **стохастичні**, в яких можна казати лише про ймовірність переходу з поточного стану до інших можливих станів системи.

У математичному аспекті важливим є також поняття лінійності моделі, котре означає, що справедливим є принцип суперпозиції, тобто, що будь-яка лінійна композиція розв'язків рівнянь моделі, наприклад їх сума, є також розв'язком задачі. Використовуючи



принцип суперпозиції, неважко відшукавши рішення в будь-якому частковому випадку, побудувати рішення для більш загальної ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна судити виходячи з властивостей часткового – різниця між двома розв'язками має лише кількісний характер. Отже, у випадку лінійних моделей відгук (реакція) об'єкта на зміну умов є пропорційним величині цих змін.

Для нелінійних явищ, математичні моделі котрих не підпорядковуються принципу суперпозиції, отримані знання стосовно поведінки частини об'єкта ще не гарантують знань про поведінку об'єкта в цілому, а його відгук на зміну умов може якісно і не пропорційно залежати від кількісної величини (обсягів) цих змін. Наголосимо, що більшість реальних процесів і відповідних (адекватних) їм математичних моделей є суттєво нелінійними. Лінійні ж моделі відповідають досить частковим випадкам і, як правило, слугують лише першим наближенням до реальності.

#### *Етап побудови моделі*

При побудові аналітичної моделі можна використовувати «моделі-заготовки» - в них підставляють конкретні граничні і початкові умови для вирішення поставленого завдання.

При побудові емпіричної моделі спочатку потрібно провести експеримент. Потім результати експериментальних досліджень обробляються математичним апаратом статистичного аналізу (регресійного, дисперсійного, кореляційного і т. д.).

Основою планування експерименту є теорія планування факторного експерименту, що дозволяє визначити необхідну і

достатню кількість дослідів експерименту. В алгоритмі побудови емпіричних моделей цей етап обов'язково передує побудові моделі. В алгоритмі побудови аналітичної моделі планування та проведення експерименту здійснюється після побудови моделі і виконується для оцінки точності аналітичної моделі. При побудові аналітичних моделей нерідкі випадки, коли для перевірки точності розроблюваної моделі об'єкта використовуються експериментальні дані, отримані іншими дослідниками в іншому місці і в інший час.

При плануванні експерименту визначаються остаточна кількість саме вхідних факторів і кількість їх рівнів.

Рівень фактора - конкретне значення фактора з його області визначення при експериментальному дослідженні об'єкта.

Сукупність рівнів вхідних факторів об'єкта (по одному рівню від фактора) визначає один стан об'єкта.

Мета планування експеримента - визначити кількість факторів і їх рівнів для отримання необхідної і достатньої інформації про об'єкт дослідження.

### ***Етап перевірки адекватності моделі (для емпіричних моделей)***

Адекватність (від лат. Adaequatus- прирівняний) моделі характеризує її відповідність експериментальним даним. Перевірка здійснюється за спеціальними критеріями.

### ***Етап інтерпретації результатів моделювання***

Інтерпретація - «переклад» для користувача результатів моделювання досліджуваного об'єкта з мови математики на мову вербального опису (в схеми, графіки, таблиці і т. д.).

На етапі інтерпретації оцінюється, наскільки результати моделювання (зокрема, модель) відповідають здоровому глузду і існуючій інформації про поведінку і властивості об'єкту.

### ***Етап рішення задачі оптимізації***

Завдання оптимізації – одні з найбільш поширених науково-технічних завдань. Вони виникають в той момент, коли встановлена можливість здійснення процесу і потрібно знайти якнайкращі (оптимальні) умови його реалізації. Завжди необхідно чітко формулювати, в якому сенсі умови повинні бути оптимальними. Це впливає на вибір цілей дослідження. Вище були розглянуті прямі і зворотні завдання. Зворотні завдання за своєю суттю і є завданнями оптимізації.

При рішенні задачі оптимізації необхідно вибрати метод пошуку оптимального рішення залежно від особливостей досліджуваного об'єкту, моделі і вирішуваного завдання і застосувати його для отримання «якнайкращих» характеристик або варіантів поведінки об'єкту або дії на нього.

### ***Етап використання моделі і документування результатів***

Після отримання і перевірки моделі для її подальшого використання необхідно оформити результати моделювання.

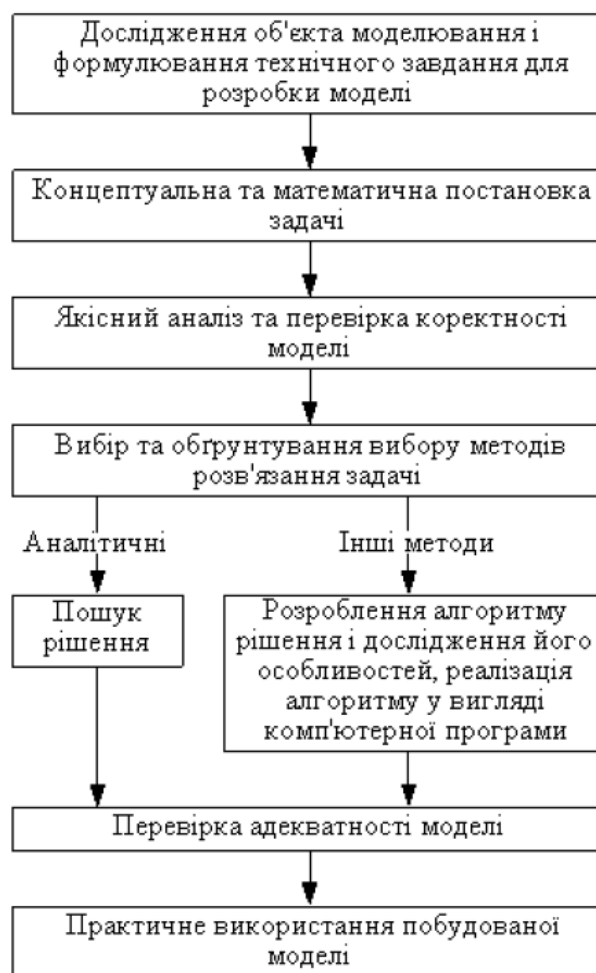
### ***Узагальнена методика математичного моделювання***

Математичні моделі, особливо ті, що використовують чисельні методи, потребують для свого створення значних інтелектуальних, фінансових та часових затрат. Тому рішення про створення нової моделі приймається лише в разі відсутності більш простих шляхів

вирішення поставленої проблеми (наприклад, модифікації однієї з існуючих моделей).

Дослідження об'єкту моделювання і складання його математичного опису полягають у встановленні зв'язків між характеристиками процесу, виявленні його граничних і початкових умов та формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень.

Процес побудови будь-якої математичної моделі можна представити послідовністю етапів, зображених на рис.



На етапі дослідження об'єкта моделювання потрібно виконати наступні дії:

- аналіз взаємодії об'єкта з зовнішнім середовищем, виділення характеристик вхідних впливів та реакції об'єкту, класифікація їх на вимірні та невимірні, керуючі та перешкоди;

- проведення декомпозиції та дослідження внутрішньої структури об'єкту;

- дослідження порядку функціонування об'єкту, виявлення зв'язку між входом та виходом, формування множини станів об'єкту;

- збір та перевірка існуючих експериментальних даних про об'єкти-аналоги, проведення, за необхідності, додаткових експериментів;

- класифікація об'єкта моделювання на стаціонарний чи нестаціонарний, визначення міри впливу випадкових факторів на об'єкт та порядку нелінійності зв'язків між характеристиками об'єкту;

- аналітичний огляд літературних джерел, аналіз та порівняння побудованих раніше моделей подібних об'єктів;

- аналіз та узагальнення всього накопиченого матеріалу, розроблення загального плану створення математичної моделі.

В деяких випадках дослідження внутрішньої будови та порядку функціонування об'єкта моделювання неможливе або економічно недоцільне. Тому можливо розглядати об'єкт як “чорна скринька”, стосовно якої нам відомі лише його входи та виходи.

На підставі аналізу об'єкту моделювання формується змістовна постановка моделювання, в якій мають бути зазначені:

- мета моделювання;
- тип моделі;
- вимоги до адекватності моделі та якості розв'язку.

Тип моделі має відповідати результатам класифікації об'єкта моделювання, інакше модель навряд чи буде адекватною.

Весь накопичений в результаті дослідження матеріал, змістовна постановка задачі моделювання, додаткові вимоги до реалізації моделі, оформлюються у вигляді технічного завдання на проектування та розробку моделі.

Концептуальна постановка задачі моделювання – це сформульований в термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології тощо) список основних питань, а також сукупність гіпотез відносно особливостей та поведінки об'єкта моделювання. Розробник моделі на підставі результатів аналізу об'єкта моделювання формує своє бачення стосовно процесів на об'єкті і формулює його на природній мові в термінах предметної області. При цьому з метою спрощення моделі він приймає низку припущень та обмежень. Припущення можуть містити нехтування певними процесами або зміну характеру їх протікання. Концептуальна модель має пройти погодження з експертами з даної предметної області з метою перевірки на адекватність.

Адекватність концептуальної моделі визначає адекватність математичної моделі, яка формується на її основі.

Математична постановка задачі моделювання – це сукупність математичних співвідношень, які описують поведінку та характеристики об'єкта моделювання.

Необхідно формалізувати змінні моделі та зв'язки між ними. Математичний опис моделі складається на основі законів фізики, хімії тощо, які характеризують динаміку і статику процесів в

досліджуваному об'єкті, і виражається на мові будь-яких розділів математики.

Поняття коректності задачі має важливе значення в процесі моделювання. Адже, наприклад, чисельні методи розв'язку задач доцільно застосовувати лише до коректно поставлених задач. При цьому, не всі практичні задачі можна вважати коректними.

Математична модель є коректною, якщо для неї отримано позитивний результат по всіх контрольних перевірках: розмірності, порядку, характеру залежностей, граничних умов, фізичного сенсу тощо.

Для математичної моделі обирається один з методів розв'язку, який дозволяє при заданих значеннях вхідних змінних отримати значення вихідних змінних. Вибір методу обґрунтовується на підставі властивостей моделі, даних про точність вимірювання значень змінних, вимог до точності та швидкості отримання розв'язку.

Необхідною умовою для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт моделювання є вимога адекватності моделі об'єкту. Адекватність – це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження. Як правило, адекватність моделі визначається на підставі статистичних оцінок розбіжностей значень вихідних змінних моделі та об'єкту при однакових значеннях вхідних змінних, розрахованих за результатами серії експериментів на об'єкті моделювання. Для перевірки адекватності моделі використовуються дані іншої серії експериментів,

ніж для параметричної ідентифікації. Відмінність значень виходу моделі та об'єкту може бути обумовлена наступними причинами:

- спрощеність моделі;
- похибка чисельних методів;
- похибка вимірювальних пристроїв;
- обчислювальна похибка, пов'язана з переходом між десятичною і двійковою системами числення та особливостями комп'ютерних обчислень.

Якщо модель не задовольняє критеріям адекватності, необхідно крок за кроком перевірити коректність розробки на всіх етапах:

- умови проведення експерименту та правильність вимірювання і фіксування його результатів;
- правильність програмної реалізації алгоритмів;
- адекватність результатів параметричної ідентифікації;
- обґрунтованість вибору методу розв'язку моделі;
- коректність математичного опису явищ та характеристик об'єкту;
- адекватність концептуальної моделі.

Після успішної перевірки адекватності модель може бути застосована в задачах прогнозу та дослідження об'єкта.

### ***Запитання для самоконтролю***

1. Назвіть основні етапи алгоритму побудови аналітичної моделі.
2. Назвіть основні етапи алгоритму побудови емпіричної моделі.
3. Розкажіть про відмінності в алгоритмах побудови аналітичної і емпіричної моделей.



4. Що таке критерій оптимізації? Перерахуйте види критеріїв оптимізації.
5. Що таке формалізація?
6. Що таке інтерпретація?
7. Що таке концептуальна модель?
8. Які основи побудови математичних моделей?
9. Поясніть життєвий цикл моделі.

***Перелік додаткових запитань для самостійного опрацювання***

1. Сформулюйте концептуальну модель та обґрунтувати математичну модель до власній кваліфікаційної роботи.

### Тема 3. Детерміновані динамічні моделі. Моделювання лінійних динамічних систем

#### *План лекції*

1. Детерміновані динамічні моделі.
2. Ретроспективний та конструктивний аналіз.
3. Етапи динамічного аналізу.
4. Моделювання лінійних динамічних систем першого порядку.
5. Властивості лінійних динамічних систем.
6. Моделювання лінійних динамічних систем другого порядку.
7. Фазові портрети багатовимірних лінійних систем.
8. Зсув фази та період коливань.
9. Проведення аналізу чутливості та визначення інтервалу оптимальності для детермінованих динамічних моделей.

#### *Короткі теоретичні відомості*

**Динамічною системою** називають реальний об'єкт, поведінка якого з задовільною для досліджування точністю може бути описано системою звичайних диференціальних рівнянь, аргументом яких є час.

Як бачимо, визначення динамічної системи – суто математичне. Воно стосується будь-яких фізичних (механічних, електричних, теплових тощо) і навіть біологічних процесів, поведінка яких можна описати за допомогою диференціальних рівнянь.

1. **Диференціальним рівнянням** прийнято називати рівняння, яке пов'язує значення деякої невідомої функції певних аргументів у деякій точці зі значенням її похідних різних порядків по цих аргументах у тій самій точці. Диференціальне рівняння містить у своєму запису невідому функцію, її похідні та незалежні змінні (аргументи). Система диференціальних рівнянь складається з кількох диференціальних рівнянь, в які входять кілька (за кількістю рівнянь) невідомих функцій та їхні похідні.

2. **Розв'язком (інтегралом) диференціального рівняння** називається функція аргументу, при підставленні якої у рівняння воно стає тотожністю.

Процес розв'язування диференціального рівняння називають інтегруванням.

Розв'язок системи диференціальних рівнянь являє собою сукупність функцій (за кількістю рівнянь), одночасне підставлення яких у рівняння обертає їх усі у тотожності.

3. **Порядок, або степінь диференціального рівняння** – це найбільший порядок похідних, що входять в нього. Порядок системи диференціальних рівнянь являє собою суму найбільших порядків похідних усіх шуканих змінних, що входять у ці рівняння.

4. **Диференціальні рівняння** поділяють на **звичайні (ЗДР)**, в які входять лише функції (і їхні похідні) від **одного** аргументу, і **рівняння з частинними похідними (РЧП)**, в яких функції залежать від **кількох** незалежних змінних (аргументів).

5. Серед звичайних диференціальних рівнянь виділяють **лінійні диференціальні рівняння**, усі члени якого є лінійними функціями або самих шуканих змінних (за кількістю рівнянь), або їх похідних (того чи іншого порядку) за аргументом. Особливо повно розроблена теорія відшукування розв'язків **лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами**, в яких усі кутові коефіцієнти відповідних лінійних залежностей є постійними величинами (тобто не залежать від аргументу).

Будь-яке подання реального процесу чи явища у виді сукупності диференціальних рівнянь, навіть якщо воно побудовано на основі твердо встановлених законів (механіки, електрики тощо), завжди є наближеним до реального процесу, і тому може розглядатися лише як його теоретична модель. Це пов'язано з тим, що наукові закони формулюються для ідеалізованих об'єктів, якими реальні об'єкти не є. Як будь-яка модель, система диференціальних рівнянь відбиває реальну дійсність лише з деяким наближенням, яке може бути задовільним для досягнення поставленої мети дослідження, або незадовільним. В останньому випадку слід замінити теоретичну модель на більш точну, більш досконалу.

Реальні системи, поведіння яких із задовільною для потреб дослідження точністю може бути описано за допомогою системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, називають **лінійними стаціонарними системами (ЛСС)** (англійською – Line Time-invariant Systems (LTI) – лінійними системами, інваріантними у часі).

Якщо ж задовільного опису реальних процесів у системі можна досягти лише за системою лінійних диференціальних рівнянь, в яких хоча б один коефіцієнт у членах рівняння, пропорційних невідомим змінним чи їхнім похідним, не є постійним (тобто є заданою явною функцією часу), то такі реальні системи носять назву **лінійних нестационарних систем (ЛНСС)**.

В реальних технічних системах з розвитком техніки все частіше зустрічаються випадки, коли поводження системи неможливо описати, застосовуючи лише лінійні диференціальні рівняння, бо в реальній системі виникає низка особливостей руху, що не притаманні лінійній стаціонарній системі.

Тому в інженерній практиці великого значення набуває теоретичне дослідження саме **нелінійних систем (НС)**, які описуються диференціальними рівняннями, в яких трапляються члени (сили), які нелінійно залежать від узагальнених координат  $i$  (або) узагальнених швидкостей.

### *Запитання для самоконтролю*

1. Дайте визначення та коротку характеристику детермінованих динамічних моделей.
2. В чому полягає сутність ретроспективного та конструктивного аналізу.
3. Опишіть основні етапи динамічного аналізу.
4. Дайте коротку характеристику методів моделювання лінійних динамічних систем першого порядку.
5. Сформулюйте властивості лінійних динамічних систем.

### *Перелік додаткових запитань для самостійного опрацювання*

1. Регресійні моделі з однією вхідною змінною.
2. Адекватність регресійних моделей.
3. Точність регресійних моделей.

## Тема 4. Еволюційне моделювання. Нелінійні динамічні системи та різницеві моделі

### *План лекції*

1. Еволюційне моделювання. Загальні поняття про еволюційне моделювання.
2. Нелінійні динамічні системи та різницеві моделі.
3. Нелінійні динамічні системи та різницеві моделі з граничним циклом.
4. Еволюційне моделювання лінійних динамічних систем першого та другого порядку.
5. Розробка та реалізація еволюційної моделі в програмному середовищі.

### *Короткі теоретичні відомості*

Для створення інтелектуальних систем часто застосовують еволюційний підхід, що умовно можна поділити на:

- **Еволюційні алгоритми** (моделювання загальних закономірностей еволюції). Це системи, які використовують еволюційні принципи розвитку популяції або . Вони успішно використовують для завдань функціональної оптимізації і можуть легко бути описані математичною мовою.

- **Еволюційні моделі.** Це системи, які відтворюють біологічні популяції чи системи і не є корисними в прикладному сенсі. Еволюційні моделі більше схожі на біологічні системи, мають складну поведінку, мало спрямовані на вирішення технічних завдань. До цих систем відносять так зване «штучне життя».

До еволюційних алгоритмів відносяться:

- Генетичні алгоритми
- Мурашині алгоритми
- Еволюційні стратегії
- Еволюційне програмування
- Генетичне програмування

**Еволюційні алгоритми** - термін, що часто використовується для загального опису алгоритмів пошуку, оптимізації або навчання, що

засновані на формалізованих принципах природного еволюційного процесу.

Еволюційні методи призначені для пошуку бажаних рішень і засновані на статистичному підході до дослідження ситуацій та ітераційному наближенні системи до шуканого стану. На відміну від точних методів математичного програмування еволюційні методи дозволяють знаходити рішення, близькі до оптимальних, за прийнятний час, а на відміну від відомих евристичних методів оптимізації характеризуються істотно меншою залежністю від особливостей додатку (більш універсальні) і в багатьох випадках забезпечують кращу ступінь наближення до оптимального рішення.

Основною перевагою еволюційних методів оптимізації є можливості вирішення багатомодальних (з кількома локальними екстремумами) завдань з великою розмірністю за рахунок поєднання елементів випадковості і детермінованості точно так само, як це відбувається у природному середовищі. Детермінованість цих методів полягає в моделюванні природних процесів відбору, що відбуваються за строго визначеними правилами, основним з яких є закон еволюції: «перемагає найсильніший».

Іншим важливим чинником ефективності еволюційних алгоритмів є відтворення процесів розвитку. Розглянуті варіанти рішень можуть за певним правилом породжувати нові рішення, які будуть на - слідувати кращі риси своїх попередників. В якості випадкового елемента в методах еволюційних обчислень використовується моделювання процесу мутації. З її допомогою характеристики того чи іншого рішення можуть бути випадково змінені, що призведе до нового напрямку в процесі еволюції рішень і може прискорити процес вироблення кращого рішення.

#### *Переваги еволюційних алгоритмів*

- Широка область застосування.

- Можливість проблемно - орієнтованого кодування рішень, підбору початкових умов, комбінування еволюційних обчислень з не еволюційними алгоритмами, продовження процесу еволюції до тих пір, поки є необхідні ресурси.

- Придатність для пошуку в складному просторі рішень великої розмірності.

- Відсутність обмежень на вид цільової функції.

- Ясність схеми і базових принципів еволюційних обчислень.

- Інтегрованість еволюційних обчислень з іншими неklasичними парадигмами штучного інтелекту, такими як штучні нейромережі та нечітка логіка.

#### *Недоліки еволюційних алгоритмів*

- Евристичний характер еволюційних обчислень не гарантує оптимальності отриманого рішення (правда, на практиці, найчастіше, важливо за заданий час отримати одне або кілька субоптимальних альтернативних рішень, тим більше, що вихідні дані в задачі можуть динамічно змінюватися, бути неточними або неповними).

- Відносно висока обчислювальна трудомісткість, яка проте долається за рахунок розпаралелювання на рівні організації еволюційних обчислень і на рівні їх безпосередньої реалізації в обчислювальній системі.

- Відносно невисока ефективність на заключних фазах моделювання еволюції (оператори пошуку в еволюційних алгоритмах не орієнтовані на швидке попадання в локальний оптимум).

- Невирішеність питань самоадаптації.

#### *Генетичний алгоритм*

Генетичний алгоритм - це евристичний алгоритм пошуку, який застосовується для вирішення завдань оптимізації та моделювання шляхом випадкового підбору, комбінування і модифікації шуканих

параметрів з використанням механізмів, що нагадують біологічну еволюцію.

Еволюційна теорія стверджує, що життя на планеті виникло спочатку лише в найпростіших формах - у вигляді одноклітинних організмів. Ці форми поступово ускладнювалися, пристосовуючись до навколишнього середовища, породжуючи нові види, і через багато мільйонів років з'явилися перші тварини і люди. Кожен біологічний вид з часом вдосконалює свої якості, щоб ефективно справлятися з найважливішими задачами виживання, самозахисту, розмноження. Таким чином виникло захисне забарвлення в багатьох риб і комах, панцир у черепахи, отрута в скорпіона тощо.

За допомогою еволюції природа постійно оптимізує живі організми, знаходячи часом неординарні рішення. Неясно, за рахунок чого відбувається цей прогрес, однак йому можна дати наукове пояснення, ґрунтуючись лише на двох біологічних механізмах - природного відбору і генетичного спадкування.

Ключову роль в еволюційній теорії відіграє природний відбір. Його суть полягає в тому, що найбільш пристосовані особини краще виживають і приносять більше нащадків, ніж менш пристосовані. Сам по собі природний відбір ще не забезпечує розвиток біологічного виду. Тому важливо дізнатися, яким чином відбувається спадкування, тобто як властивості нащадків залежать від властивостей батьків.

Основний закон спадкування є інтуїтивно зрозумілим - нащадки схожі на батьків. Зокрема, нащадки більш пристосованих батьків будуть, швидше за все, одними з найпристосованіших у своєму поколінні. Для ясного розуміння спадковості, потрібно дещо поглибитися в побудову природної клітини - у світ генів і хромосом.

Майже в кожній клітині будь-якої особини є набір хромосом, що містять інформацію про цю особину. Основна частина хромосоми -



нитка ДНК, яка визначає, які хімічні реакції будуть відбуватися в даній клітині, як вона буде розвиватися і які функції виконувати.

Ген - це відрізок ланцюга ДНК, який відповідає за певну властивість особини, наприклад за колір очей, тип волосся, колір шкіри тощо. Вся сукупність генетичних ознак людини кодується за допомогою приблизно 60 тис. генів.

Розрізняють два види клітин: статеві (такі, як сперматозоїд і яйцеклітина) і соматичні. В кожній соматичній клітині людини міститься 46 хромосом (23 пари). В кожній парі одна з хромосом отримана від батька, а друга - від матері. Парні хромосоми відповідають за однакові ознаки - наприклад, батьківська хромосома може містити ген чорного кольору око, а парна їй материнська - ген голубого кольору. Існують визначені закони, що керують участю тих чи інших генів у розвитку особини. Зокрема, у нашому прикладі нащадок буде чорнооком, оскільки ген блакитних очей є "слабким" і подавляється геном будь-якого іншого кольору.

В статевих клітинах хромосом лише 23, і вони непарні. При заплідненні відбувається злиття чоловічої і жіночої статевих клітин і утворюється клітина зародка, що містить саме 46 хромосом. Які властивості нащадок одержить від батька, а які - від матері? Це залежить від того, які саме статеві клітини брали участь у заплідненні. Справа в тому, що процес вироблення статевих клітин в організмі піддається змінам, завдяки яким нащадки відрізняються від своїх батьків. Зокрема, відбувається наступне: парні хромосоми соматичної клітини зближаються впритул, потім їхні нитки ДНК розриваються в кількох випадкових місцях і хромосоми обмінюються своїми частинами.

Цей процес забезпечує появу нових варіантів хромосом і зветься "кросинговер" (в літературі по генетичних алгоритмах також вживається назва кросовер або схрещування). Кожна з нових хромосом

з'являється потім всередині однієї з статевих клітин, і її генетична інформація може реалізуватись в нащадках даної особини.

Другий важливий фактор, що впливає на спадковість, - це мутації, які виражаються в зміні деяких ділянок ДНК. Мутації є випадковими і можуть бути викликані різними зовнішніми факторами, такими, як радіоактивне випромінювання. Якщо мутація відбулася в статевій клітині, то змінений ген може передатися нащадку і проявитися у вигляді нових властивостей. Саме мутації є причиною появи нових біологічних видів, а кросинговер визначає вже змінність всередині виду (наприклад, генетичні розходження між людьми).

### *Задачі оптимізації*

Еволюція - це процес постійної оптимізації біологічних видів. Природний відбір гарантує, що найбільш пристосовані особини надають більшу кількість нащадків, а завдяки генетичному спадкуванню частина нащадків не лише збереже високу пристосованість батьків, але буде мати і деякі нові властивості. Якщо нові властивості виявляються корисними, то з великою імовірністю вони перейдуть і в наступне покоління. Таким чином, відбувається нагромадження корисних якостей і поступове підвищення пристосованості біологічного виду в цілому. Знаючи, як вирішується задача оптимізації видів у природі, можна застосувати схожий метод для рішення різних реальних задач.

Задачі оптимізації - поширений і важливий для практики клас задач. Їх приходиться вирішувати або в побуті, розподіляючи свій час між різними справами, або на роботі, домагаючись максимальної віддачі від прикладених зусиль. Деякі задачі легко розв'язати, але є і такі, точне рішення яких знайти практично неможливо.

Введемо позначення і приведемо кілька класичних прикладів. Як правило, в задачі оптимізації можна керувати кількома параметрами ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), метою є максимізація (чи мінімізація) певної функції,

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що залежить від цих параметрів. Функція  $f$  називається *цільовою функцією*.

Наприклад, якщо потрібно максимізувати цільову функцію "дохід компанії", тоді керованими параметрами буде число працівників компанії, обсяг виробництва, витрати на рекламу, ціни на кінцеві продукти тощо. Ці параметри пов'язані між собою - наприклад, при зменшенні числа співробітників швидше за все впаде й обсяг виробництва.

Ефективним способом вирішення задач оптимізації є генетичні алгоритми.

Відомо два основні шляхи рішення таких задач - переборний та градієнтний. Розглянемо класичну задачу комівояжера. Суть задачі полягає у знаходженні короткого шляху проходження всіх міст.

Переборний метод є найпростішим. Для пошуку оптимального рішення (максимум цільової функції) потрібно послідовно обчислити значення функції у всіх точках. Недоліком є велика кількість обчислень.

Іншим способом є градієнтний спуск. Обираємо випадкові значення параметрів, а потім значення поступово змінюють, досягаючи найбільшої швидкості зросту цільової функції. Алгоритм може зупинитись, досягнувши локального максимуму. Градієнтні методи швидкі, але не гарантують оптимального рішення (оскільки цільова функція має декілька максимумів).

Генетичний алгоритм уявляє собою комбінацію переборного та градієнтного методів. Механізми кросоверу (схрещування) та мутації реалізують переборну частину, а відбір кращих рішень - градієнтний спуск.

Тобто, якщо на деякій множині задано складну функцію від кількох змінних, тоді генетичний алгоритм є програмою, яка за визначений час знаходить точку, де значення функції знаходиться

достатньо близько до максимально можливого значення, це буде одним з кращих рішень.

### *Робота генетичного алгоритму*

Уявимо собі штучний світ, населений множиною істот (особин), причому кожна особина - це деяке рішення задачі. Будемо вважати особину більш пристосованою, чим кращим є її рішення (чим більше значення цільової функції воно дає). Тоді задача максимізації цільової функції зводиться до пошуку найбільш пристосованої істоти.

Звичайно, не можна поселити в віртуальний світ всі істоти відразу, оскільки їх дуже багато. Замість цього будемо розглядати багато поколінь, що змінюють один одного. Якщо застосувати природний відбір і генетичне спадкування, тоді отримане середовище буде підкорятися законам еволюції. Відповідно до визначення пристосованості, метою штучної еволюції буде саме створення найкращих рішень.

Еволюція є нескінченним процесом, в ході якого пристосованість особин поступово підвищується. Якщо примусово зупинити цей процес за певний час після його початку і вибрати найбільш пристосовану особину у поточному поколінні, можна отримати відповідь не абсолютно точну, але близьку до оптимальної. Це загальна ідея генетичного алгоритму.

Для того щоб говорити про генетичне спадкування, потрібно наділити особини хромосомами. В генетичному алгоритмі хромосома - це числовий вектор, що рішенню задачі. Які саме вектори варто розглядати в конкретній задачі, вирішує користувач. Кожна з позицій вектора хромосоми називається геном. Ген відповідає за певний вхідний параметр.

Простий генетичний алгоритм випадковим образом генерує початкову популяцію рішень. Робота генетичного алгоритму є ітераційним процесом, що продовжується доти, поки не виконається

задане число поколінь або інший критерій зупинки. В кожному поколінні генетичного алгоритму реалізується відбір пропорційно до пристосованості, одноточковий кросинговер і мутація.

1. Спочатку, пропорційний відбір призначає кожній особині імовірність  $P_s(i)$ , яка дорівнює відношенню її пристосованості до сумарної пристосованості популяції:

$$P_s(i) = \frac{f(i)}{\sum_{i=1}^n f(i)}$$

Потім відбувається відбір (із заміщенням) всіх  $n$  особин для подальшої генетичної обробки, відповідно до величини  $P_s(i)$ .

При такому відборі члени популяції з високою пристосованістю будуть вибиратися з більшою імовірністю, ніж особини з низькою пристосованістю. Після відбору,  $n$  обраних особин випадковим чином розбиваються на  $n/2$  пари. Для кожної пари з імовірністю  $P_c$  може застосовуватися кросинговер. Відповідно з імовірністю  $1-P_c$  кросинговер не відбувається і незмінені особини переходять на стадію мутації. Якщо кросинговер відбувається, отримані нащадки заміняють собою батьків і переходять до мутації.

2. Кросинговер - це операція, при якій із двох хромосом породжується одна чи декілька нових хромосом. Одноточковий кросинговер працює в такий спосіб. Спочатку, випадковим образом вибирається одна з  $l-1$  точок розриву (ділянка між сусідніми бітами в рядку).

Обидві батьківські структури розриваються на два сегменти в цій точці. Потім, відповідні сегменти різних батьків склеюються і виходять два генотипи нащадків.

Після того як закінчується стадія кросинговеру, виконуються оператори мутації.

3. Мутація - це перетворення хромосоми, яке випадково змінює одну чи декілька її позицій (генів). Поширеним видом мутацій є випадкова зміна лише одного гену з хромосоми.

У кожному рядку, що піддається мутації, випадковий біт з імовірністю  $P_m$  змінюється на протилежний.

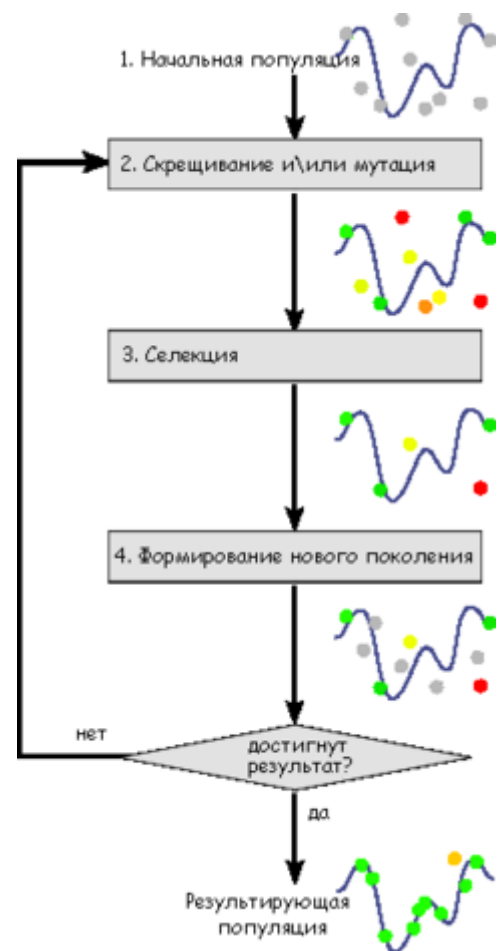
4. Популяція, що отримана після мутації заміняє стару і цикл одного покоління завершується. Наступні покоління обробляються подібним чином: відбір, кросинговер і мутація.

### **Блок-схема генетичного алгоритму**

Спочатку генерується початкова популяція особин (індивідуумів), тобто деякий набір рішень задачі. Як правило, це робиться випадковим чином. Далі моделюється розмноження всередині цієї популяції. Для цього випадково відбирається кілька пар індивідуумів, відбувається схрещування між хромосомами в кожній парі, а отримані нові хромосоми втілюються в популяцію нового покоління.

В генетичному алгоритмі зберігається основний принцип природного відбору - чим пристосованішим є індивідуум (чим більшим є відповідне йому значення цільової функції), тим з більшою імовірністю він буде брати участь у схрещуванні.

Далі моделюються мутації - в кількох випадково обраних особинах нового покоління змінюються деякі гени. Стара популяція частково або цілком знищується і відбувається обробка наступного покоління. Популяція наступного покоління в більшості реалізацій



генетичних алгоритмів містить стільки ж особин, скільки початкова, але в силу відбору пристосованість в ній у середньому вище.

Тепер описані процеси відбору, схрещування й мутації повторюються вже для нової популяції.

Кроки алгоритму повторюються ітеративно, моделюється «еволюційний процес», що триває кілька життєвих циклів (поколінь), поки не буде виконано критерій зупинки алгоритму. Таким критерієм може бути:

- Знаходження глобального, або субоптимального рішення;
- Вичерпання числа поколінь, що відведено на еволюцію;
- Вичерпання часу, що відведено на еволюцію.

Генетичні алгоритми в основному призначені для пошуку рішень в багатовимірних просторах пошуку.

В кожному наступному поколінні буде спостерігатися виникнення нових рішень задачі. Серед них будуть як погані, так і хороші, але завдяки відбору число прийнятних рішень буде зростати. В природі не буває абсолютних гарантій, і найпристосованіший тигр може загинути від рушничного пострілу, не залишивши нащадків. Імітуючи еволюцію на комп'ютері, можна уникнути подібних небажаних подій і завжди зберігати життя кращому з індивідумів поточного покоління - така методика називається "*стратегією елітизму*".

Дослідники генетичних алгоритмів пропонують багато інших операторів відбору, кросинговеру і мутації. От лише найбільш розповсюджені з них.

**Елітні методи** відбору гарантують, що при відборі обов'язково будуть виживати лише кращі члени популяції. Поширеною є процедура обов'язкового збереження самої кращої особини і не надавати їй до процесів відбору, кросинговеру і мутації. Елітизм може

бути впроваджений практично в будь-який стандартний метод відбору.

**Двоточковий кросинговер і рівномірний кросинговер** – альтернативи для одноточкового оператора. В двоточковому кросинговері вибираються дві точки розриву, і батьківські хромосоми обмінюються сегментом, що знаходиться між двома цими точками. У рівномірному кросинговері, кожен біт першого батька успадковується першим нащадком із заданою імовірністю; у протилежному випадку цей біт передається другому нащадку. І навпаки.

### ***Недоліки у порівнянні з іншими методами оптимізації:***

- Функціональна оцінка для складних проблем, часто є чинником, що обмежує використання алгоритмів штучної еволюції. Пошук оптимального рішення для складної задачі високої розмірності часто вимагає великих витрат. В реальних задачах, таких як задачі структурної оптимізації, обчислення функціональної оцінки вимагає від кількох годин до кількох днів.

- Генетичні алгоритми погано масштабуються під складність вирішуваної проблеми. При збільшенні області пошуку рішень збільшується число елементів, що піддаються до мутацій. Це робить використання алгоритму надзвичайно складним.

- Умови зупинки алгоритму є різними для кожної проблеми.

- В багатьох завданнях генетичні алгоритми мають тенденцію сходиться до локального оптимуму або до спірних точок, замість глобального оптимуму для даної задачі. Це означає, що вони "не знають", яким чином пожертвувати короткочасною високою придатністю для досягнення довгострокової придатності.

### ***Застосування генетичних алгоритмів***

Генетичні алгоритми застосовуються для вирішення наступних завдань:

- Оптимізація функцій



- Оптимізація запитів в базах даних
- Різноманітні завдання на графах (задача комівояжера)
- Складання розкладів
- Ігрові стратегії
- Теорія наближень
- Штучне життя
- Біоінформатика

### ***Еволюційна стратегія***

Еволюційна стратегія - евристичний метод оптимізації в розділі еволюційних алгоритмів, який засновано на адаптації та еволюції.

Еволюційна стратегія схожа з генетичним алгоритмом, але існує декілька суттєвих відмінностей.

Еволюційна стратегія оперує векторами дійсних чисел. При пошуку рішення в еволюційній стратегії спочатку відбувається мутація і схрещування особин для отримання нащадків, потім відбувається детермінований відбір без повторень кращих особин із загального покоління батьків і нащадків. В якості мутації часто використовується додавання нормально розподіленої випадкової величини до кожної компоненти вектора. При цьому параметри нормального розподілу самоадаптуються в процесі виконання алгоритму.

### ***Еволюційне програмування***

Еволюційне програмування було запропоновано доктором Лоуренсом Дж. Фогелем в 1960 році. У той час штучний інтелект було обмежено двома основними напрямками досліджень: моделюванням людського мозку (нейронні мережі) і моделюванням поведінки людини (евристичне програмування). Альтернативний варіант Фогеля відкидав моделювання кінцевого продукту еволюції, і був спрямований на моделювання процесу еволюції, як засобу отримання розумної поведінки. Фогель розглядає інтелект як складову частину

здатності робити передбачення зовнішнього середовища у поєднанні з переведенням кожного прогнозу у доцільну відповідь згідно заданої мети (наприклад, для максимізації функції виграшу). Таким чином, на його думку прогнозування є необхідною умовою для розумної поведінки.

Гіпотези про вид залежності цільової змінної від інших змінних формулюються системою у вигляді програм на деякій внутрішній мові програмування. Якщо це універсальна мова, то теоретично на ній можна виразити залежність будь-якого виду. Процес побудови таких програм будується як еволюція в популяції програм. Якщо система знаходить програму, яка точно відтворює шукану залежність, вона починає вносити до неї невеликі модифікації і відбирає серед дочірніх програм лише ті, які підвищують точність.

Система "вирощує" кілька генетичних ліній програм, що конкурують між собою в точності знаходження шуканої залежності. Спеціальний транслюючий модуль перекладає знайдені залежності з внутрішньої мови системи на зрозумілу користувачеві мову (математичні формули, таблиці тощо), роблячи їх легкодоступними. Для того, щоб зробити отримані результати більш зрозумілими для користувача-нематематика, існує великий арсенал різноманітних засобів візуалізації виявлених залежностей.

Пошук залежності цільових змінних від інших факторів проводиться у формі функцій певного виду. Наприклад, в одному з найбільш вдалих алгоритмів цього типу - методі групового урахування аргументів (МГУА) залежність шукають у формі поліномів. Причому складні поліноми замінюються кількома простими, враховують лише деякі ознаки (групи аргументів). Отримані формули залежностей надаються до аналізу та інтерпретації.

Відродження еволюційного програмування було продовжено в 1980-х. розробки стосувалися довільного представлення даних і узагальненої проблеми оптимізації.

Еволюційне програмування було застосоване до різних інженерних завдань:

- Системи управління, системи ідентифікації.
- Маршрутизація трафіку.
- Військове планування.
- Обробка сигналів.
- Ігрові та навчальні програми.

### *Генетичне програмування*

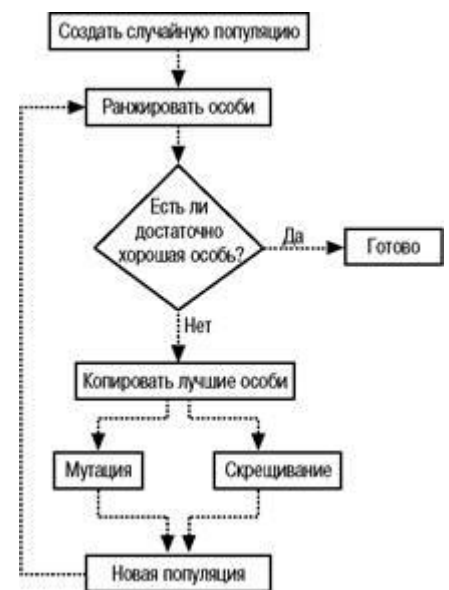
Генетичне програмування - це методика машинного навчання, прототипом якої є біологічна еволюція. У загальному випадку обчислення починаються з великого набору програм (популяції), згенерованих випадковим чином або написаних вручну, про які відомо, що це досить хороші рішення. Потім ці програми конкурують між собою в спробі вирішити деяку поставлену користувачем завдання. Це може бути гра, в якій програми змагаються між собою безпосередньо, або спеціальний тест, покликаний визначити, яка програма краще. По завершенні змагання складається ранжований список програм - від найкращої до найгіршої.

Далі вступає в справу еволюція - найкращі програми копіюються і модифікуються одним із двох способів. Найпростіший називається мутацією; в цьому випадку деякі частини програми випадковим чином і дуже незначно змінюються в надії, що від цього рішення стане краще.

Інший спосіб називається схрещуванням (або кросовером) - частина однієї з відібраних програм переміщається в іншу. В результаті процедури копіювання та модифікації створюється багато нових програм, які засновані на найкращих особинах попередньої популяції, але не збігаються з ними. На кожному етапі якість програм

обчислюється за допомогою функції виживаності (fitness function). Оскільки розмір популяції не змінюється, програми, які виявилися гіршими, видаляються з популяції, звільняючи місце для нових.

Створюється нова популяція, яка називається «наступним поколінням», і весь процес повторюється. Оскільки зберігаються і змінюються самі кращі програми, то є надія, що з кожним поколінням вони будуть вдосконалюватися, як діти, які можуть перевершити своїх батьків. Нові покоління створюються доти, поки не буде виконана умова завершення, яке в залежності від завдання може формулюватися одним із таких способів:



- Знайдено ідеальне рішення.
- Знайдено достатньо хороше рішення.
- Рішення не вдається поліпшити протягом кількох поколінь.
- Кількість поколінь досягло заданої межі.

Для таких завдань, як визначення математичної функції, що відображає один набір значень на інший, можна знайти ідеальне рішення. Для інших, наприклад коли йдеться про настільній грі, знайдене рішення може бути не ідеальним, оскільки його якість залежить від стратегії супротивника.

Блок-схема, зображена на рисунку, надає уявлення про процес генетичного програмування.

### *Запитання для самоконтролю*

1. В чому полягає сутність еволюційного моделювання?
2. Охарактеризуйте нелінійні динамічні системи та різницеві моделі.
3. Яка особливість еволюційного моделювання лінійних динамічних систем першого та другого порядку?

## Тема 5. Математичні моделі динамічних систем

### *План лекції*

1. Динамічні моделі, що породжуються різницевиими системами.
2. Біфуркаційна діаграма.
3. Математичні моделі динамічних систем зі сконцентрованими (зосередженими) параметрами.
4. Математичні моделі на основі звичайних диференціальних рівнянь.
5. Розробка та реалізація нелінійної різницевої динамічної моделі зі сконцентрованими параметрами в програмному середовищі.

### *Короткі теоретичні відомості*

Існує досить багато фізичних процесів, що протікають в динамічних об'єктах, параметри яких не можна вважати зосередженими в одній точці простору.

Більше того, деякі об'єкти при моделюванні за одними ознаками мають зосереджені параметри, а за іншими — переходять в клас об'єктів з розподіленими параметрами.

Нагадаємо, що будь-яку динамічну систему відносять до класу систем з розподіленими параметрами, якщо в її структурі є хоча б один елемент, реакція на вхідний сигнал у якому суттєво запізнюється у порівнянні з реакціями усіх інших елементів цієї системи.

У класі електронних систем — це системи, в структурі яких використовуються лінії затримки сигналу. У класі електричних систем — це системи з довгими лініями електропередачі. У класі електромеханічних систем — це електроприводні системи з тросами, довгими штангами, конвеєрами і трубопроводами. У класі систем автоматичного керування технологічними процесами — це системи з хімічними реакціями, з плавильними печами, з термоустановками для випалювання, сушки чи випарювання та з іншими об'єктами, процеси в яких через особливості динаміки чи протяжність у просторі протікають суттєво повільніше, ніж в контурах управління ними. У класі автоматизованих систем управління — це системи з комп'ютерною обробкою інформації за алгоритмами, що характеризуються суттєво більшими затратами часу на їх реалізацію у порівнянні з часом обробки інформації і прийняття рішень в інших контурах автоматизованої системи.

В підйомних кранах вантажі піднімаються і опускаються з використанням тросів. Оскільки трос сплітається з великої кількості тонких сталевих дротів, то він має властивість витягуватись чи

скорочуватись в залежності від ваги вантажу, прикріпленого до одного з його кінців.

При підніманні вантажу трос спочатку витягується в «струну», але потім, навіть при постійній швидкості обертання вала електродвигуна, який намотує трос на катушку, завдяки взаємодії сил, обумовлених вагою вантажу і інерцією, в тросі виникають небажані повздовжні коливання, котрі розгойдують вантаж у вертикальній площині, заважаючи точно встановити його на нове місце і завдаючи цьому місцю та вантажу шкідливі удари.

Як ще один приклад електромеханічних систем з тросами розглянемо систему електропривода конуса, яким закривається кругле завантажувальне вікно доменної печі на її вершині. Через це вікно у доменну піч до початку плавлення завантажуються шихта. При завантаженні шихти металевий конус, призначенням якого є відкривання і закривання завантажувального вікна і який є підвішеним на тросі, знаходиться в своєму нижньому положенні, відкриваючи широку щілину між конусом і місцем його посадки у завантажувальному вікні та створюючи можливість шихті через цю щілину висипатись у доменну піч.

Після завантаження шихти за допомогою троса, інший кінець якого прикріплено до катушки, з'єднаної з валом електродвигуна, металевий конус підтягується, закриваючи завантажувальне вікно.

Висота деяких доменних печей сягає 70 метрів. Відстань від вертикальної осі доменної печі до місця встановлення електропривода конуса біля її підніжжя має аналогічний порядок. Тож довжина троса, яким передається рух від вала електродвигуна до конуса, може сягати 150 метрів.

За рахунок повздовжніх коливань троса при підтягуванні конуса він завдає таку кількість ударів по своєму ложу у завантажувальному вікні доменної печі і такої сили, що кожна доменна піч не менше одного разу на рік вимагає ремонтних робіт для відновлення щільного прилягання в системі «конус — вікно».

За допомогою електроприводів приводять у рух насоси перекачувальних станцій нафтопроводів і компресори перекачувальних станцій газопроводів, котрих в Україні багато тисяч кілометрів.

Основним результувальним параметром, яким регулюється продуктивність нафто- і газопроводів, є тиск в рідині чи газі, котрий створюється дією насосів та компресорів і який передається вздовж

трубопроводу зі швидкістю звуку, яка залежить від складу рідини чи газу.

Через невисоку швидкість розповсюдження звукових хвиль, запізнення в їх появі на виході відрізка трубопроводу від однієї перекачувальної станції до іншої можуть сягати суттєвих значень, без врахування яких ефективною системи стабілізації тиску в трубопроводі побудувати не можна, оскільки сигнал з виходу об'єкта регулювання надходить по каналу зворотного зв'язку на регулятор, встановлений на вході об'єкта, зі значним запізненням і може слугувати причиною появи коливань тиску зі значною амплітудою

Для ряду конвеєрних транспортних систем, які є складовими в більш складних системах, наприклад, в системах випалювання залізородних котунів, чи системах сушіння сипких матеріалів, важливим є дотримання однакової товщини шару матеріалу на конвеєрній стрічці. При нерівномірній подачі матеріалу на стрічку на вході конвеєра стабілізувати товщину шару матеріалу на цій стрічці можна лише змінюючи швидкість обертання приводних електродвигунів. І додаткові складнощі у побудові такої системи стабілізації створюються саме тим, що має місце запізнення появи вихідного сигналу об'єкта регулювання. І, звичайно ж, чим довшим є конвеєр, тим більшим буде запізнення появи сигналу на його виході.

В теорії автоматичного керування розроблено багато способів управління об'єктами з розподіленими параметрами, але кожен з них базується на тому, що відомою є математична модель об'єкта.

В класі систем з розподіленими параметрами особливе місце займають системи з чистим запізненням.

Це, наприклад, технологічні об'єкти з переміщенням матеріалів за допомогою конвеєрів, пристрої з лініями затримки сигналу чи хімічні реактори з конвеєрним або лопатевим переміщенням реагентів.

Їх особливе місце пояснюється тим, що після визначення чистого запізнення проходження сигналу в таких об'єктах процеси в них можна описувати за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, а не рівнянь в частинних похідних, що значно простіше.

Теорія біфуркацій вивчає перебудову в фазовому просторі при зміні параметрів системи звичайних диференціальних рівнянь, які завжди описують важливі процеси в фізиці, хімії, біології, медицині, економіці тощо. Саме завдяки цьому зв'язку з іншими науками теорія біфуркацій займає особливий статус в диференціальних рівняннях та динамічних системах і фактично в останні роки стала

міждисциплінарним окремим розділом. Теорія біфуркацій займається вивченням локальних сімейств диференціальних рівнянь, наприклад диференціальних рівнянь, які залежать від параметрів. Однією з важливих задач теорії біфуркацій – зрозуміти, як при зміні параметрів якісно перебудовується топологічна структура системи.

Диференціальні рівняння, які описують реальні природні задачі завжди містять параметри, точні значення яких невідомі. Якщо система не є структурно стійкою, то важливо знати які саме біфуркації фазового портрету відбуваються при зміні параметрів. Перифразовуючи слова Пуанкаре про періодичні розв'язки, можна сказати, що біфуркації наче смолоскипи освітлюють шлях від досліджених систем до недосліджених.

Першим кроком в дослідженні багатьох задач якісної теорії диференціальних рівнянь є спрощення рівняння, тому ключовими методами дослідження є теорія центральних многовидів та теорія нормальних форм. Теорія центральних многовидів дозволяє зводити досліджувану задачу до задачі меншої розмірності, а теорія нормальних форм дозволяє спрощувати рівняння до вигляду, який містить нелінійні члени максимально простого вигляду.

### ***Запитання для самоконтролю***

1. В чому суть «розподіленості параметрів» об'єктів? Наведіть приклади об'єктів з розподіленими параметрами.

2. Що таке принципова схема однієї фази електричної системи? Зобразіть її.

3. Виведіть систему диференціальних рівнянь 1-го порядку в частинних похідних, які описують процеси в довгій електричній лінії.

4. Як отримати математичну модель довгої електричної лінії у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних 2-го порядку гіперболічного типу?

5. За яких умов із загального рівняння гіперболічного типу можна отримати рівняння, які описують:

- процеси передачі тиску і об'ємних витрат в гідравлічних і пневматичних трубопроводах;
- процеси передачі температури в довгому ізольованому середовищі;
- коливальні процеси в тросах?

6. Як виглядає модель у часовому просторі теплообмінника типу «труба в трубі»?

7. Отримайте передаточну функцію довгої лінії.



8. Як із загальної передаточної функції довгої лінії отримати переда- точні функції трубопроводу, теплопроводу і троса?
9. Як виглядає структурна схема теплообмінника «труба в трубі», і якими є передаточні функції її структурних ланок?
10. Як виглядають передаточні функції і частотні характеристики ліній затримок і конвеєрів?
11. Як виглядають експериментальні перехідні характеристики хіміч- них реакторів?
12. За яким принципом підбираються математичні моделі хімічних реакторів?
13. Як визначити параметри математичних моделей хімічних реакторів?
14. Який вигляд має структурна схема хімічного реактора як складової частини системи автоматичного регулювання?
15. Запишіть множину можливих передаточних функцій хімічного реактора, що працює в складі системи автоматичного регулювання.
16. Які функції є ортонормованими? Наведіть приклад.
17. Запишіть модель імпульсної перехідної характеристики динамічного об'єкта в ортогональному базисі.
18. Як виглядає схема ідентифікації імпульсної перехідної характеристики динамічного об'єкта в ортогональному базисі? В чому суть ідентифікації?
19. Складіть схему ідентифікації об'єкта з розподіленими параметрами за допомогою моделі у вигляді диференціального рівняння з аргументом, що запізнюється (ДРАЗ).
20. Як визначити параметри моделі у вигляді ДРАЗ в процесі нормальної експлуатації об'єкта?
21. Як виглядає рівняння Вінера-Хопфа для об'єкта з розподіленими параметрами?
22. Як визначити чисте запізнення  $\tau_3$  та імпульсну перехідну характеристику  $g(t)$  об'єкта з розподіленими параметрами, на вхід якого надходить стаціонарний випадковий сигнал?

## Тема 6. Математичні моделі динамічних систем. Моделювання систем оптимального управління

### План лекції

1. Математичні моделі динамічних систем з розподіленими параметрами.
2. Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь з частковими похідними.
3. Моделювання систем оптимального управління. Поняття системи оптимального управління. Цілі системи оптимального управління.
4. Розробка та реалізація динамічної оптимізаційної моделі управління з розподіленими параметрами в програмному середовищі.

### Короткі теоретичні відомості

Більшість методів теоретичного дослідження систем диференціальних рівнянь спирається на подання цієї системи у виді сукупності диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних, тобто такого виду:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = Z_1(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \frac{dy_2}{dt} = Z_2(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = Z_n(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \end{cases}$$

де  $n$  – порядок системи диференціальних рівнянь, а  $Z_k (y_1, y_2, \dots, y_n, t)$ , де  $k = 1, 2, \dots, n$ , є довільними (у тому числі – нелінійними) функціями вказаних аргументів. Таку форму системи диференціальних рівнянь називають **нормальною формою Коші**.

До такого виду може бути зведена будь-яка система диференціальних рівнянь. Але таке приведення зв'язано з введенням додаткових (по відношенню до узагальнених координат) змінних. Тому ця операція не є однозначною. І нормальних форм Коші однієї системи диференціальних рівнянь може бути безліч.

Змінні  $y_1$ ,  $y_2$ , ...,  $y_n$ , які дозволяють подати задану систему диференціальних рівнянь у формі Коші, називають **змінними стану** системи, або **фазовими змінними** системи. Їх сукупність утворює **стан**, або **фазу системи**. Характерною особливістю стану (фази) системи є те, що його завдання у початкову мить повністю визначає усе подальше поведження системи (тобто значення цього стану у подальші моменти часу).

Умовний математичний простір, в якому координатами є фазові змінні (змінні стану), зазвичай називають **фазовим простором** (простором стану).

Конкретна фаза (стан) системи відображується певною точкою у цьому просто рі, яка отримала назву **зображувальної точки**. При русі системи зображувальна точка змінює своє положення у фазовому просторі. Геометрично при своєму русі зображувальна точка (яка повністю характеризує стан системи у поточний момент часу) описує у фазовому просторі траєкторію, яку називають **фазовою траєкторією**. Вид цієї фазової траєкторії і напрямок руху вдовж неї зображувальної точки дає можливість скласти уявлення про рух системи в околі незбуреного руху (якому, як відомо, відповідає початок координат у фазовому просторі).

З того, що поведження динамічних систем описується диференціальними рівняннями, випливає, що основним методом програмного моделювання таких систем є чисельне інтегрування відповідних диференціальних рівнянь.

Чисельне інтегрування диференціальних рівнянь зводиться до приведення вихідної системи диференціальних рівнянь до нормальної форми Коші і організації циклічного покрокового процесу, всередині якого обчислюються значення фазових змінних на наступному кроці за відомими їх значеннями на попередньому кроці. Це здійснюється за допомогою спеціальної програми, яка зазвичай зветься розв'язувачем.

Основні розв'язувачі реалізують чисельне інтегрування так званими методами Рунге-Кутта. Кожен з методів Рунге-Кутта є

однокроковим, тобто здійснює обчислення значень вектора  $y_{m+1}$  фазових змінних на наступному кроці, користуючись відомим значенням ут цього вектора лише на попередньому кроці. Загальна формула обчислення нового значення є такою:

$$y_{m+1} = y_m + h F(t_m; y_m),$$

де  $h$  – значення кроку інтегрування;  $t_m$  – значення часу на попередньому кроці;  $F(t_m; y_m)$  – деяка функція-вектор правих частин системи диференціальних рівнянь, яка інтегрується (різна для різних методів Рунге-Кутта).

Порядок метода чисельного інтегрування – це показник  $k$  степеня у степеневій залежності глобальної похибки  $\Delta_i$  ( $i$  – номер метода) усікання цього методу від кроку  $h$  інтегрування  $\Delta_i = a_i \cdot h^k$ , де  $a_i$  – деякий коефіцієнт. Він показує як зменшується похибка чисельного інтегруванням зі зменшенням кроку інтегрування. Якщо, наприклад, зменшити крок інтегрування у 10 разів, то це приведе до зменшення похибки методу інтегрування

- для методу першого порядку – у 10 разів;
- для методу другого порядку – у 100 разів;
- для методу третього порядку – у 1000 разів;
- для методу четвертого порядку – у 10 000 разів.

Характерною рисою методів чисельного інтегрування є їх чисельна нестійкість при перевищенні величини кроку інтегрування деякої порогової величини  $H$ . Це означає, що якщо встановити крок інтегрування вищим за це порогове значення ( $h \geq H$ ), то результат, одержаний чисельним інтегруванням, не буде мати нічого загального з істинним розв'язком диференціального рівняння, швидко віддаляючись від нього у процесі інтегрування.

Величина цього порогового значення кроку залежить не від методу інтегрування, а від власних властивостей системи диференціальних рівнянь, яка інтегрується. Для ЛСС порогова величина кроку інтегрування дорівнює значенню мінімальної сталої часу цієї системи (тобто величині, яка є зворотною максимуму за модулем кореню характеристичного рівняння системи).

Для гарантованої працездатності метода чисельного інтегрування крок інтегрування має бути принаймні у десять разів

менше порогового значення.

Найбільш розвинутою комп'ютерною системою з точки зору організації процесів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь є Matlab. Особливо зручно використовувати можливості пакета прикладних програм Simulink, який входить до складу цієї системи. Застосування пакета Simulink дозволяє автоматизувати процеси обрання величини кроку інтегрування і організації циклу чисельного інтегрування, значно розширити кількість застосовуваних програм-розв'язувачів, у тому числі – для так званих "жорстких" систем диференціальних рівнянь.

Приведення системи первісних диференціальних рівнянь математичної моделі до нормальної форми Коші є обов'язковим етапом складання програмної моделі для чисельного інтегрування цієї системи. Усі розв'язувачі, тобто програми, що здійснюють чисельне інтегрування диференціальних рівнянь спираються на попереднє подання цих рівнянь у формі Коші, бо на кожному кроці інтегрування вони звертаються до процедури обчислення правих частин, тобто функцій  $Z_k (y_1, y_2, \dots, y_n, t)$ .

Тому перед складанням програми, яка здійснює чисельне інтегрування диференціальних рівнянь, потрібно виконати наступні дії:

- 1) привести первісні рівняння до нормальної форми Коші;
- 2) скласти програму (процедуру), яка б обчислювала значення функцій правих частин  $Z_k$  приведених рівнянь по заданих значеннях вектора  $y_1, y_2, \dots, y_n$  змінних стану і часу  $t$ .

У середовищі Matlab задля здійснення чисельного інтегрування передбачені дві процедури ode23 і ode45 з автоматичним обчисленням кроку інтегрування на кожному кроці.

У пакеті Simulink системи Matlab для цієї мети у розпорядженні користувача є тринадцять процедур чисельного інтегрування (розв'язувачів) – шість з фіксованим розміром кроку інтегрування і сім – з автоматичним обчисленням цього кроку.

Якщо математична модель системи вже відома, тобто складена відповідна система з  $s$  диференціальних рівнянь загального порядку  $n$  відносно  $s$  невідомих шуканих змінних  $x_k (k = 1, 2, \dots, s)$ , то найбільш простим способом одержання рівнянь у формі Коші є такий:

1) позначити усі  $s$  шукані змінні як перші  $s$  змінні стану:  $y_1 = x_1$ ;  $y_2 = x_2$ ; ...  $y_s = x_s$ ;

2) рештою  $(n - s)$  змінними стану позначити усі похідні від первинних шуканих змінних  $x_k$ , за виключенням похідної найбільш високого порядку, яка зустрічається у первинних рівняннях.

Привести до форми Коші можна й не складаючи попередньо і детально системи диференціальних рівнянь. Для вирішення цієї задачі прислужуються самі закони механіки, електрики чи електромеханіки, які зазвичай мають диференціальну форму. Особливо це стосується законів механіки.

Специфіку динамічних процесів у гіроскопічних пристроях і приладах складають наступні особливості.

1. Основним режимом роботи практично усіх гіроприладів є коливання головної осі гіроскопа. Ці коливання можуть бути обумовлені різними причинами і мати різний характер – власні прецесійні і нутаціальні коливання (гірокомпас, гіромаятник); вимушені коливання, обумовлені зовнішніми і внутрішніми вібраціями і хитавицею основи; автоколивання у гіростабілізаторах; сполучення різних видів коливань, наприклад, у наземного гірокомпаса при вібрації основи.

2. У робочому режимі коливання гіроскопа здійснюються одночасно з кількома частотами. Наприклад, власні частоти гірокомпаса носять двочастотний характер (прецесійні і нутаційні коливання). Зовнішні дії є також багаточастотними.

3. Частоти коливань гіроскопа можуть значно різнитися за величиною. Так, період прецесійних коливань морського гірокомпаса приблизно дорівнює півтори години, період його нутаційних коливань складає відсотки секунд, тобто вони відрізняються на п'ять порядків. Робочий діапазон частот зовнішніх дій також вельми широкий – від довгоперіодичних (порядка десятків хвилин – циркуляція корабля, віраж і фугоїдні коливання літака) до високочастотних (порядка кількох сотен герц), обумовлених вібраціями маршового двигуна

рухомого транспортного засобу, на якому встановлений гіроскопічний прилад.

4. Вплив коливань зі настільки відмінними за величиною частотами на точність гіроприладу зазвичай є порівнянним (того самого порядку), хоча й обумовлений різними причинами і носить різний характер. Тому неможливо досліджувати поведження гіроприладу, відкидаючи (не враховуючи) або високочастотні, або низькочастотні коливання.

Хоча коливання з настільки різними частотами допускають, здавалося б, розділення рухів, тобто роздільне вивчення високочастотних і низькочастотних рухів, але на практиці цьому перешкоджають дві обставини:

а) через те, що рівняння руху гіроприладу є нелінійними, принцип суперпозиції тут не може бути застосованим: дія на гіроскоп сукупності низькочастотних і високочастотних збурень не дорівнюватиме сумі впливів окремо розглядуваних низькочастотного і високочастотного збурень;

б) збурення, які розглядаються як сталі при дослідженні високочастотного процесу, можуть при переході до вивчення низькочастотних процесів виявляти себе як повільно змінювані, закон змінювання у часі яких визначатиметься низькочастотним рухом гіроскопа.

Описані характерні особливості динамічних процесів у гіроскопічних приладах приводять, з одного боку, до необхідності моделювати рух гіроприладу за повними рівняннями руху, враховуючи увесь спектр діючих збурень, а з іншого боку, – до необхідності вивчати і застосовувати засоби, які б дозволяли на кілька порядків зменшити час досліджування цих рівнянь на ЕОМ при збереженні припустимої точності опису динамічних процесів, що вивчаються.

Основні задачі, які вирішує проектувальник моделюванням поведіння гіроприладу на ЕОМ, можуть бути наступними:

1) вивчення стійкості власних коливань гіроприладу з врахуванням його нелінійних властивостей; підбір параметрів гіроприладу, які б забезпечували заданий запас стійкості; особливо це відноситься до можливих автоколивань;

2) вивчення динамічної похибки гіроприладу, тобто тієї накопиченої сталої складової похибки вимірювання вхідної величини, яка обумовлена зовнішніми збурювальними моментами сил; підбір таких параметрів гіроприладу і корегуючих пристроїв, які б забезпечували мінімізацію цієї похибки у заданих умовах експлуатації (зовнішніх дій).

Слід додати, що часто проектувальнику немає потреби вивчати закони коливань похибок по відношенню до її середньої величини, достатньо лише знання самої цієї середньої величини (сталого складової похибки).

### ***Запитання для самоконтролю***

1. Чим характеризуються математичні моделі динамічних систем з розподіленими параметрами?
2. Які особливості математичних моделей на основі диференціальних рівнянь з частковими похідними?
3. Опишіть моделювання систем оптимального управління.

### ***Перелік додаткових запитань для самостійного опрацювання***

1. Регресійні моделі з декількома вхідними змінними.
2. Багатофакторна (множинна) лінійна регресія.
3. Матричний підхід до визначення коефіцієнтів регресії.
4. Оцінка адекватності і точності багатофакторної лінійної моделі.
5. Лінійні регресійні моделі з декількома вхідними змінними.



6. Нелінійні регресійні моделі з декількома вхідними змінними.
7. Крокові методи побудови регресійних моделей.
8. Інтерпретація і оптимізація регресійних моделей.

## Рекомендована література

### **Основна:**

1. Богданова Н. В., Богданов О. В. *Математичне моделювання систем і процесів. Конспект лекцій: Навчальний посібник*. Електронне мережне навчальне видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 85 с.

2. Дмитрієва О. А. *Паралельне моделювання динамічних об'єктів зі сконцентрованими параметрами*. Харків: «Ноулідж», 2014. 336 с.

3. Дмитрієва О. А., Гуськова Н. Г., Башков Є. О., Назарова І. А. *Числові методи моделювання динамічних об'єктів в мультипроцесорних системах: монографія*. Покровськ: ДВНЗ «ДонНТУ», 2020. 268 с.

4. Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., Усов А. В. *Моделювання та оптимізація систем: підручник*. Вінниця: ПП «Еднльвейс», 2017. 804 с.

5. Жученко А. І., Ладієва Л. Р., Піргач М. С., Жураковський Я. Ю. *Математичне моделювання процесів і систем [Електронний ресурс]: Навчальний посібник*: Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 351 с.

6. Махней О. В. *Математичне моделювання: методичні рекомендації*. Івано-Франківськ: Голіней, 2014. 36 с.

7. Табунщик Г. В., Каплієнко Т. І., Петрова О. А. *Проектування та моделювання програмного забезпечення сучасних інформаційних систем*. Запоріжжя: Дике Поле, 2016. 250 с.

8. Чуйко Г. П., Дворник О. В., Яремчук О. М. *Математичне моделювання систем і процесів: Навчальний посібник*. Миколаїв: Вид-во ЧДУ імені Петра Могили, 2015. 244 с.

### **Додаткова:**

1. Бахрушин В. Є. *Математичні основи моделювання систем: Навчальний посібник для студентів*. Запоріжжя: Класичний приватний університет, 2009. 224 с.

2. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування: практикум*: Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. 307 с.

3. Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О. М. *Комп'ютерне моделювання систем і процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник*. Вінниця: ВНТУ, 2012. 193 с.

4. Лазарєв Ю. Ф. *Моделювання динамічних систем у Matlab*. Електронний навчальний посібник. Київ: НТУУ «КПІ», 2011. 421 с.

5. Павленко П. М. *Основи математичного моделювання систем і процесів: Навчальний посібник*: Київ: Книжкове видавництво НАУ, 2010. 198 с.

6. Станжицький О.М., Таран С. Ю., Гординський Л. Д. *Основи математичного моделювання: Навчальний посібник*. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. 96 с.

7. Стеценко І. В. *Моделювання систем [Електронний ресурс, текст]*. Черкаси: ЧДТУ ім. Ігоря Сікорського, 2010. 399 с.

8. Томашевський В. М. *Моделювання систем у Matlab*. Київ: Видавнича група ВНУ, 2005. 349 с.

9. Хусаїнов Д. Я., Харченко І. І., Шатирко А. В. *Введення в моделювання динамічних систем: Навчальний посібник*. Київ: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2010. 132 с.

#### ***Інтернет-ресурси:***

1. *Бібліотека Житомирського державного університету імені Івана Франка*. URL: <https://library.zu.edu.ua/> (Дата перегляду 12.06.2024).

2. *Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського*. URL: <http://nbuv.gov.ua/node/554> (Дата перегляду 12.06.2024).

3. Сторінка кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики ЖДУ ім. Івана Франка. URL: [https://zu.edu.ua/fizmat\\_kaf2.html](https://zu.edu.ua/fizmat_kaf2.html) (Дата перегляду 12.06.2024).
4. Mathematical Modeling and Computing journal. URL: <http://science.lpnu.ua/mmc> (Дата перегляду 12.06.2024).
5. Nonlinear Problems: Mathematical Modeling, Analyzing, and Computing. URL: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/2017/1081585/> (Дата перегляду 12.06.2024).
6. Mathematical Modeling and Analyzing of Soft Computing. URL: <http://www.hindawi.com/journals/mpe/mathematical.soft.computing/> (Дата перегляду 12.06.2024).
7. GeoGebra Динамічна математика для навчання та викладання [Електронний ресурс]: [Веб-сайт]. URL: <http://www.geogebra.org> (Дата перегляду 12.06.2024).
8. WolframMathWorld – найширший ресурс математики в Інтернеті. *Алгебра*. [Електронний ресурс]. URL: <https://mathworld.wolfram.com/topics/Algebra.html> (Дата перегляду 12.06.2024).

Навчальне видання

**Математичне моделювання динамічних систем і процесів**

*Інструктивно-методичні матеріали  
для самостійної роботи здобувачів закладів вищої освіти  
другого (магістерського) рівня вищої освіти  
спеціальності 122 Комп'ютерні науки*

Надруковано з оригінал-макета авторів

Підписано до друку 30.09.24. Формат 60x90/16. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman. Друк різнографічний.

Ум. друк. арк. 5,6. Обл. вид. арк. 5. Наклад 300. Зам. 505.

---

Видавець і виготовлювач

Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка

м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.

електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua