Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

**О.П. Довгопятий, Є.О. Севостьянов,
А.Л. Таргонський**

# МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. ЧАСТИНА III

*Навчально-методичний посібник*

Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2024

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

*Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка (протокол № 17 від 27 вересня 2024 р.)*

**Рецензенти:**

**В.П. Журавльов** – доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету, м. Житомир

**І.В. Денега** – доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України, м. Київ

**А.О. Погоруй** – доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка

В22 Математичний аналіз. Частина III / Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. - 56 с.

Навчально-методичний посібник присвячений застосуванню похідної у дослідженні функцій, а також формулі Тейлора. Розглянуті питання про ділянки монотонності функції, локальні екстремуми, знаходження максимумів і мінімумів функції на відрізку, дослідження про опуклість та увігнутість функції, асимптоти та побудову графіків. Окремий розділ присвячений формулі Тейлора та її використанню. Кожен розділ містить в собі мінімальні теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач, та приклади їх розв'язання. Окремо наведені текстові питання, що мають рівень складності вище середнього, та типові задачі для самостійного розв'язання по 30 варіантів кожна.

УДК 517.95
ББК 22.161.6
В22

# ЗМІСТ

**Перелік умовних позначень** **5**

**1 Повне дослідження функцій** **6**

1.1 Ознаки монотонності і сталості функції . . . . . 6
1.2 Завдання для самоконтролю . . . . . . . . . . . 8
1.3 Завдання для самостійної роботи № 1 . . . . . . 10
1.4 Критичні точки і точки локального екстремуму 11
1.5 Завдання для самоконтролю . . . . . . . . . . . 17
1.6 Завдання для самостійної роботи № 2 . . . . . . 19
1.7 Завдання для самостійної роботи № 3 . . . . . . 20
1.8 Максимум та мінімум функції на відрізку . . . . 21
1.9 Завдання для самоконтролю . . . . . . . . . . . 25
1.10 Завдання для самостійної роботи № 4 . . . . . . 27
1.11 Опуклі та увігнуті функції . . . . . . . . . . . 28
1.12 Завдання для самоконтролю . . . . . . . . . . . 30
1.13 Завдання для самостійної роботи № 5 . . . . . . 32
1.14 Асимптоти . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
1.15 Завдання для самоконтролю . . . . . . . . . . . 37
1.16 Завдання для самостійної роботи № 6 . . . . . . 38
1.17 Повне дослідження функції . . . . . . . . . . . 39
1.18 Завдання для самоконтролю . . . . . . . . . . . 44
1.19 Завдання для самостійної роботи № 7 . . . . . . 46

**2 Формула Тейлора** **47**

2.1 Розклад деяких функцій за формулою Тейлора . 47
2.2 Завдання для самоконтролю . . . . . . . . . . . 49
2.3 Завдання для самостійної роботи № 8 . . . . . . 50
2.4 Наближені обчислення за допомогою формули Тейлора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.5 Завдання для самостійної роботи № 9 . . . . . . 53

2.6 Обчислення границь за допомогою формули Тейлора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
2.7 Завдання для самостійної роботи № 10 . . . . . . 55

**Рекомендована література** **56**

## Перелік умовних позначень

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | множина натуральних чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ |
| $\mathbb{Z}$ | множина цілих чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ |
| $\mathbb{R}$ | множина дійсних чисел |
| $\mathbb{Q}$ | множина раціональних чисел, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ |
| $[x]$ | ціла частина числа $x$ : найбільше ціле число, що не перевищує $x$ |
| $A \Rightarrow B$ | з умови $A$ випливає умова $B$ |
| $A \Leftrightarrow B$ | умови $A$ і $B$ рівносильні |
| $\forall$ | «для будь якого, для кожного, для всіх» |
| $\exists$ | «існує, знайдеться» |
| ! | «єдиний» |
| $x \in A$ | «елемент $x$ належить множині $A$» |
| $A \subset B$ | «множина $A$ включається у множину $B$», тобто, кожен елемент $x \in A$ також задовольняє умову $x \in B$ |
| $f : D \to \mathbb{R}$ | функція, область визначення якої є множина $D$, зі значеннями в $\mathbb{R}$ |
| $f(A)$ | $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\, x \in D : f(x) = y\}$ – образ множини $A \subset D$ при відображенні $f$ |
| $f^{-1}(B)$ | $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, y \in B : f(x) = y\}$ – (повний) прообраз множини $B$ при відображенні $f$ |
| $f^{-1} : f(D) \to D$ | обернене відображення до відображення $f$, $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in D$, $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in f(D)$ |
| $\lvert x\rvert$ | Покладемо $\lvert x\rvert = \begin{cases} x\,, & x \geqslant 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$ |
| $f'(x)$ | $f'(x)$ служить означенням звичайної похідної $f$ в точці $x$ |
| $C^1(D)$ | клас неперервних функцій $f : D \to \mathbb{R}$ |

# 1 Повне дослідження функцій

## 1.1 Ознаки монотонності і сталості функції

**Означення 1.1.** *Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – задана функція. Тоді ця функція монотонно зростає на відрізку $[a, b]$, якщо $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ для всяких $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, що $x_1 \leqslant x_2$. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ строго монотонно зростає на відрізку $[a, b]$, якщо $f(x_1) < f(x_2)$ для всяких $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, що $x_1 < x_2$.*

*Аналогічно, функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ монотонно спадає на відрізку $[a, b]$, якщо $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ для всяких $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, що $x_1 \geqslant x_2$. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ строго монотонно спадає на відрізку $[a, b]$, якщо $f(x_1) < f(x_2)$ для всяких $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, що $x_1 > x_2$.*

**Означення 1.2.** *Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називається монотонною на відрізку $[a, b]$, якщо виконано одне з двох: або ця функція монотонно зростає, або монотонно спадає на цьому відрізку. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називається строго монотонною на відрізку $[a, b]$, якщо виконано одне з двох: або ця функція строго монотонно зростає, або строго монотонно спадає на цьому відрізку.*

Графіки монотонних функцій легко уявити. Також неважко «інтуїтивно» зрозуміти, чи є монотонною дана функція. На рисунку 1 зображені графіки монотонних функцій: у ситуації $a$) зображена монотонно спадна функція, а у ситуації $b$) – монотонно зростаюча. Обидві функції строго монотонні. Тепер нам слід пояснити, як монотонність функції по-

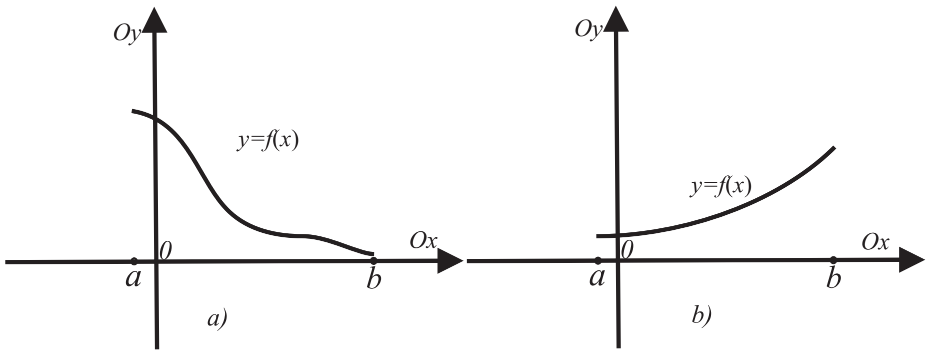



Рисунок 1: Строго монотонні функції: $a$) – монотонно спадна, $b$) – монотонно зростаюча

в'язана з її похідною. З огляду на це маємо наступну теорему.

**Теорема 1.1.** *(Ознаки сталості і монотонності функції). Нехай*

*$f \in C[a,b]$, причому функція $f$ диферецiйовна на $(a,b)$. Тодi якщо:*

*a) $f'(x) \geqslant 0$ на $(a,b)$, то функцiя $f$ зростає на $(a,b)$;*

*$a_1$) $f'(x) > 0$ на $(a,b)$, то функцiя $f$ строго зростає на $(a,b)$;*

*b) $f'(x) \leqslant 0$ на $(a,b)$, то функцiя $f$ спадає на $(a,b)$;*

*$b_1$) $f'(x) < 0$ на $(a,b)$, то функцiя $f$ строго спадає на $(a,b)$;*

*c) $f'(x) \equiv 0$ на $(a,b)$, то функцiя $f$ тотожно дорiвнює сталiй, $f(x) \equiv c = const$ на $[a,b]$.*

Розглянемо наступний

**Приклад 1.** *Встановити промiжки зростання i спадання функцiї $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.*

*Розв'язання.* Дана функцiя $f(x)$ є добутком двох функцiй $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = e^x$, якi є елементарними функцiями, отже, неперервними на своїй областi визначення (всiй дiйснiй осi). Отже, i сама функцiя $f$ неперервна як добуток двох неперервних. З огляду на аналогiчнi мiркування ця функцiя також диференцiйовна на $\mathbb{R}$.

Вiдшукаємо її похiдну:

$$f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)\,.$$

Прирiвнюємо цю похiдну до нуля, отримаємо сукупнiсть:

$$\left[\begin{aligned} &e^x = 0\,,\\ &x+1 = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Перший рядок сукупностi не обертається в нуль для жодного $x$. З другого рядку отримаємо: $x = -1$.

З'ясуємо знак похiдної на кожному з iнтервалiв $(-\infty,-1)$ i $(-1,\infty)$. Ми стверджуємо, що знак похiдна не змiнює на кожному з вказаних iнтервалiв (обґрунтуйте, чому само?). Для з'ясування знаку можна взяти по точцi з кожного iнтервалу, наприклад, $x_1 = -2 \in (-\infty,-1)$ i $x_2 = 0 \in (-1,\infty)$. Очевидно, $f'(-2) = e^{-2}(-2+1) = -e^{-2} < 0$ i $f'(0) = e^0(0+1) = 1 > 0$. Звiдси маємо: функцiя $f$ (строго) спадає на $(-\infty,-1]$, (строго) зростає на $[-1,\infty)$. $\square$

**Приклад 2.** *Встановити промiжки зростання i спадання функцiї $f(x) = |xe^x|$, $x \in \mathbb{R}$.*

*Розв'язання.* Зауважимо, що функцiя $g(y) = |y|$ не є диференцiйовною в точцi $y_0 = 0$, тому слiд розглянути два випадки: коли вираз $xe^x$ пiд модулем обертається в нуль, i коли цей вираз в нуль не обертається.

В першому випадку $xe^x = 0$, звідси $x = 0$.

В другому випадку функція $f(x)$ диференційовна (обґрунтуйте, чому?), більше того, можна скористуватися формулою для похідної складної функції. Маємо: $f'(x) = \operatorname{sign}(xe^x) \cdot (xe^x)' = \operatorname{sign}(xe^x) \cdot e^x(x+1)$, де

$$\operatorname{sign} \mathrm{x} = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,, \\ -1\,, & x < 0 \end{cases} .$$

Зауважимо, що $xe^x < 0$ при $x < 0$ і $xe^x > 0$ при $x > 0$. Тоді $f'(x) = -e^x(x+1)$ при $x < 0$ і $f'(x) = e^x(x+1)$ при $x > 0$.

Якщо $x < 0$, то рівність $f'(x) = -e^x(x+1) = 0$ дасть $x = -1$. Якщо ж $x > 0$, то рівність $f'(x) = e^x(x+1) = 0$ дасть $x = -1$, що неможливо. Отже, маємо дві точки: $x_1 = -1$ з другого випадку і $x_2 = 0$ з першого випадку. Відповідно, маємо три інтервали: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ і $(0, \infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна функції $f$ існує та зберігає знак (обґрунтуйте, чому само так).

Слід обрати довільним чином $z_1 \in (-\infty, -1)$, $z_2 \in (-1, 0)$ і $z_3 \in (0, \infty)$ і з'ясувати знак виразу $f'(z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Пропонується взяти $z_1 = -2$, $z_2 = -\frac{1}{2}$ і $z_3 = 1$. Маємо:

$$f'(-2) = e^{-2} > 0, \qquad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} < 0\,, \qquad f'(1) = 2e > 0\,.$$

Остаточно, функція $f(x) = |xe^x|$ зростає на $(-\infty, -1]$ та $[0, \infty)$, і спадає на $[-1, 0]$. В усіх випадках зростання/спадання є строгими. $\square$

З огляду на приклад 2 ми бачимо, що додавання модуля у функцію $f$ з прикладу 1 істотно вплинули на характер її монотонності.

## 1.2 Завдання для самоконтролю

1. Нехай $f \in C[a, b]$, причому функція $f$ дифереційовна на $(a, b)$. Нехай також $f'(x) \geqslant 0$ на $(a, b)$, причому існує елемент $x_0 \in (a, b)$ такий, що $f'(x_0) = 0$. Чи можна стверджувати, що функція $f$ не є строго монотонною на $[a, b]$?

2. Наведіть приклад функції $f \in C[a, b]$, дифереційовної на $(a, b)$ і такої, що $f'(x) \geqslant 0$ на $(a, b)$, яка не є строго зростаючою на $[a, b]$.

3. Чи є сума/різниця двох монотонних функцій монотонною? Як зміниться відповідь, якщо розглядати суму/різницю двох монотонно зростаючих (спадних) функцій?

4. Чи існує функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка не є монотонною на жодному інтервалі $I \subset [a, b]$?

5*. Чи існує неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка не є монотонною на жодному інтервалі $I \subset [a, b]$?

6. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$. Похідна цієї функції існує в кожній точці $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і дорівнює $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Знак похідної від'ємний для $x > 0$. Чи можна стверджувати, що функція спадна на $[0, \infty)$? На $(0, \infty)$?

7. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ має похідну в усіх точках відрізку $[a, b]$, включаючи однобічні похідні в точках $a$ і $b$, причому $f'(x)$ не обертається в нуль на $[a, b]$. Чи буде вірно, що $f$ монотонна на $[a, b]$?

8. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ має похідну в усіх точках відрізку $[a, b]$, включаючи однобічні похідні в точках $a$ і $b$, причому $f'(x)$ не обертається в нуль на $[a, b]$ і $f'(x)$ неперервна на $[a, b]$. Чи буде вірно, що $f$ монотонна на $[a, b]$?

## 1.3 Завдання для самостійної роботи № 1

**Задача 1.** *Вкажіть ділянки монотонності функції $f(x)$ для кожного з варіантів*

| **Варіант** | **Функція** $f(x)$ | **Варіант** | **Функція** $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = x \ln x,\ f(0) = 0$ | 16 | $f(x) = x^7 - x^6$ |
| 2 | $f(x) = x \ln \lvert x\rvert,\ f(0) = 0$ | 17 | $f(x) = x^8 - x^7$ |
| 3 | $f(x) = \lvert x \ln \lvert x\rvert\rvert,\ f(0) = 0$ | 18 | $f(x) = \cos 7x$ |
| 4 | $f(x) = \lvert \sin x\rvert$ | 19 | $f(x) = \lvert \cos 7x\rvert$ |
| 5 | $f(x) = \sin x + \cos x$ | 20 | $f(x) = x^2 \ln x,\ f(0) = 0$ |
| 6 | $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ | 21 | $f(x) = x^3 \ln x,\ f(0) = 0$ |
| 7 | $f(x) = \lvert x^3 - x^2 + x - 1\rvert$ | 22 | $f(x) = x^4 \ln x,\ f(0) = 0$ |
| 8 | $f(x) = \lvert \cos 5x\rvert$ | 23 | $f(x) = x^5 \ln x,\ f(0) = 0$ |
| 9 | $f(x) = \lvert \sin 5x\rvert$ | 24 | $f(x) = x^2 e^x$ |
| 10 | $f(x) = \lvert \cos(5x + 2)\rvert$ | 25 | $f(x) = x^3 e^x$ |
| 11 | $f(x) = x^6 - x^5 + 4$ | 26 | $f(x) = \lvert x^3 e^x\rvert$ |
| 12 | $f(x) = \lvert \sin 6x\rvert$ | 27 | $f(x) = \lvert x^5 e^x\rvert$ |
| 13 | $f(x) = \lvert \cos 6x\rvert$ | 28 | $f(x) = \lvert \cos 9x\rvert$ |
| 14 | $f(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ | 29 | $f(x) = \cos 9\lvert x\rvert$ |
| 15 | $f(x) = \frac{4x+9}{x-12}$ | 30 | $f(x) = 5 + \cos x$ |

## 1.4 Критичні точки і точки локального екстремуму

Почнемо з означення.

**Означення 1.3.** *Нехай* $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, *і нехай* $f : I \to \mathbb{R}$ *– задана функція. Точка* $x_0 \in (a, b)$ *називається точкою локального максимуму функції* $f$, *якщо існує окіл* $B_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, *точки* $x_0$ *такий, що* $f(x) \leqslant f(x_0)$ *при всіх* $x \in B_\delta(x_0)$. *Точка* $x_0 \in (a, b)$ *називається точкою локального мінімуму функції* $f$, *якщо існує окіл* $B_\delta(x_0)$ *точки* $x_0$ *такий, що* $f(x) \geqslant f(x_0)$ *при всіх* $x \in B_\delta(x_0)$. *Точка* $x_0 \in (a, b)$ *називається точкою локального екстремуму функції* $f$, *якщо виконано одне з двох: або точка* $x_0$ *є точкою локального мінімуму, або точкою локального максимуму.*

Точки локального максимуму і мінімуму добре помітні на графіку функції. На рисунку 2 точка $x_0$ є точкою локального максимуму, а точка $x_1$ – локального мінімуму функції $f$. Дотична до графіку функції в таких точках (якщо вона існує) є паралельною до осі $Ox$. Взагалі, локальний максимум має характерний «горб», «верховину», тоді як цей горб в точці локального мінімуму перетворюється в «низину». Можуть бути, проте, і екстремуми функції без дотичних у них. Ми окремо скажемо про ці випадки трохи пізніше. Є справедливою наступна

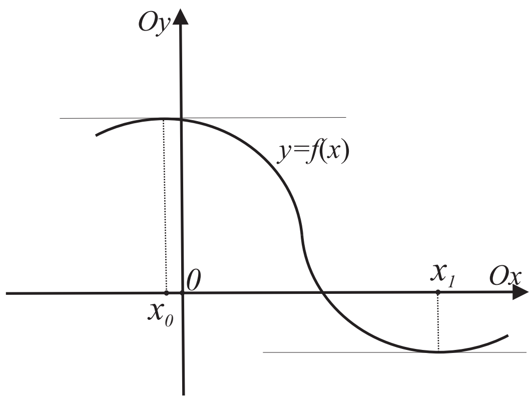



Рисунок 2: Локальні екстремуми функції

**Теорема 1.2.** *(Теорема Ферма, або необхідна умова локального екстремуму). У точці локального екстремуму похідна, якщо вона існує, обертається в нуль.*

Обернене твердження невірне, як показує приклад функції $f(x) = x^3$. Як безпосередньо видно з графіку цієї функції (рисунок 3) функція не має в початку координат ані локального мінімуму, ані локального максимуму. Тим не менш, похідна цієї функції, яка обчислюється за відомою формулою $f'(x) = 3x^2$, обертається в нуль в цій точці.

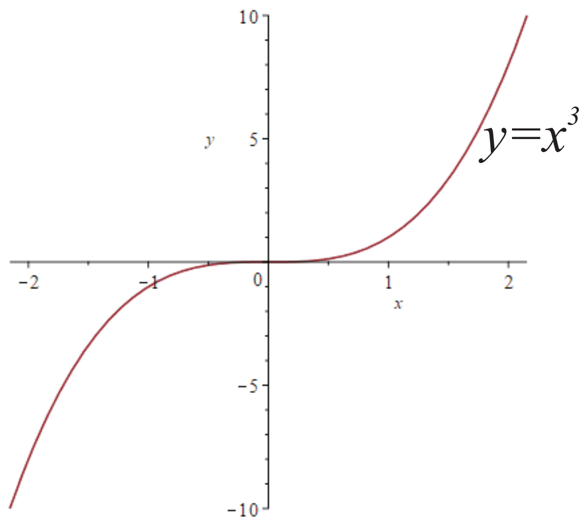



Рисунок 3: Відсутність екстремуму функції $f(x) = x^3$ у точці $x_0 = 0$

**Означення 1.4.** Нехай $I = (a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, і нехай $f : I \to \mathbb{R}$ – задана функція. Точка $x_0 \in (a, b)$ називається *критичною точкою* функції $f$, якщо в цій точці існує похідна цієї функції, і вона обертається в нуль. Коротко: $\exists\, f'(x_0) = 0$.

З огляду на дане означення та на теорему Ферма критичні точки є *підозрілими* на екстремум, тобто, критичні точки варто перевіряти на наявність у функції екстремуму в них. Нам допоможе у цьому наступна теорема.

**Теорема 1.3.** *(Достатня умова локального екстремуму). Нехай $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ – деяка функція, яка є неперервною в точці $x_0$ і диференційовною в декому виколотому околі цієї точки. Нехай також $x_0$ – критична точка функції $f$ і, крім того існує $\delta > 0$ таке, що $f'(x)$ не змінює знак як у $(x_0, x_0 + \delta)$, так і у $(x_0 - \delta, x_0)$. Тоді:*

*1) Якщо при переході через точку $x_0$ похідна цієї функції змінює знак з «–» на «+», точка $x_0$ є точкою (строгого) локального мінімуму цієї функції;*

*2) Якщо при переході через точку $x_0$ похідна цієї функції змінює знак з «+» на «–», точка $x_0$ є точкою (строгого) локального максимуму цієї функції;*

*3) Якщо при переході через точку $x_0$ похідна цієї функції не змінює знак, точка $x_0$ не є точкою локального екстремуму.*

З огляду на теореми 1.2 і 1.3, розглянемо наступні приклади.

**Приклад 3.** *Знайти критичні точки та точки локального екстремуму функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 5$.*

*Розв'язання.* Знайдемо похідну даної функції і прирівнюємо її до нуля. Будемо мати:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6\,,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0\,, \qquad x_1 = 2\,, \qquad x_2 = 3\,.$$

Точки $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$ є критичними точками функції $f$. Оскільки дана функція диференційовна в усіх точках дійної прямої (обґрунтуйте, чому?), інших точок, підозрілих на локальний екстремум, немає.

Тепер треба з'ясувати знак похідної на інтервалах $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ і $(3, \infty)$. Цей знак не змінюється на цих інтервалах (обґрунтуйте, чому?). Отже, можна взяти по точці $y_1 \in (-\infty, 2)$, $y_2 \in (2, 3)$ і $y_3 \in (3, \infty)$ і з'ясувати в них знак $f'(y_1)$, $f'(y_2)$ і $f'(y_3)$. Ці точки обираємо довільним способом (діємо за принципом «так, як зручно»). Нехай $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{5}{2}$ і $y_3 = 4$. Маємо: $f'(0) = 6 > 0$, $f'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 < 0$, $f'(4) = 2 > 0$. Отже, при переході через точку $x_1 = 2$ похідна змінює знак з «+» на «-», при переході через точку $x_2 = 3$ похідна змінює знак з «-» на «+», див. рисунок 4. За теоремою 1.3 точка $x_1 = 2$ є точкою (строгого) локального

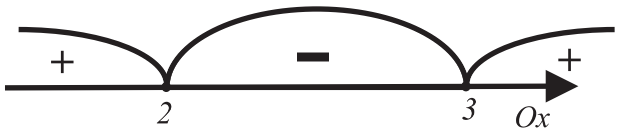



Рисунок 4: Інтервали знакосталості похідної і зміна знаку при переході через відповідні точки

максимуму, а точка $x_2 = 3$ – точкою (строгого) локального мінімуму функції $f$. Інших точок локального екстремуму функція не має. □

**Приклад 4.** *Знайти критичні точки та точки локального екстремуму функції $f(x) = \cos x^2 + \sin x^2$.*

*Розв'язання.* Взяття похідної дасть

$$f'(x) = -2x \cdot \sin x^2 + 2x \cdot \cos x^2 = 2x(\cos x^2 - \sin x^2)\,. \tag{1.4.1}$$

Рівність $f'(x) = 0$ призводить до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} 2x = 0\,, \\ \cos x^2 - \sin x^2 = 0\,. \end{array}\right.$$

З першого співвідношення $x = x_0 = 0$. Розв'язуємо друге співвідношення. Маємо:

$$\cos x^2 - \sin x^2 = 0\,,$$

$$1 - \operatorname{tg} x^2 = 0\,,$$

$$\operatorname{tg} x^2 = 1\,,$$

$$x^2 = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{1.4.2}$$

$$x = x_k = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

В останньому співвідношенні $k$ починається з 0, бо при $k < 0$ рівняння (1.4.2) не має розв'язків на числовій прямій. Отже, $x_0 = 0$ і $x_k = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$ , – сукупність критичних точок функції $f$.

Оскільки функція $f$ не має точок, у котрих вона не є диференційовною (обґрунтуйте !), то точки локального екстремуму за теоремою Ферма 1.2 слід шукати тільки серед критичних точок. Далі розглянемо такі випадки:

1) $x_0 = 0$. Зафіксуємо точку $y_1 \in (0, \sqrt{\pi/4})$, наприклад, можна взяти $y_1 = \sqrt{\pi/6}$. З огляду на (1.4.1)

$$f'\left(\sqrt{\pi/6}\right) = 2 \cdot \sqrt{\pi/6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) > 0\,.$$

Враховуючи, що функція $f'(x)$ є непарною (доведіть!), маємо:

$$f'\left(-\sqrt{\pi/6}\right) < 0.$$

Отже, $f'(x)$ змінює знак з «–» на «+» при переході через точку $x_0 = 0$, тому ця точка є точкою локального мінімуму для $f$.

2) $x_k = \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}$ , $k = 1, 3, 5, \ldots, 2n+1\,, \ldots$ . При таких значеннях $k$ точка $\frac{\pi}{4} + k\pi$ належить третій чверті. Візьмемо $y_k$ таким, щоб

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi} < y_k < \sqrt{\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi}\,.$$

Наприклад, можна обрати $y_k = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$. Тоді з огляду на (1.4.1)

$$f'(y_k) = f'\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \cdot (0+1) > 0\,.$$

Тепер візьмемо $z_k$ таким, щоб

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} + (k-1)\pi} < z_k < \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}\,.$$

Наприклад, можна обрати $z_k = \sqrt{k\pi}$ при $k \neq 1$. Тоді з огляду на (1.4.1)

$$f'(z_k) = f'(\sqrt{k\pi}) = 2(\sqrt{k\pi})(0-1) < 0\,.$$

**Отже, при переході через точку $x_k$ похідна $f'(x)$ змінює знак з «–» на «+», тому точки $x_k = \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}\,,\ k = 1, 3, 5, \ldots, 2n+1\,, \ldots,$ є точками локального мінімуму цієї функції,** див. рисунок 5.

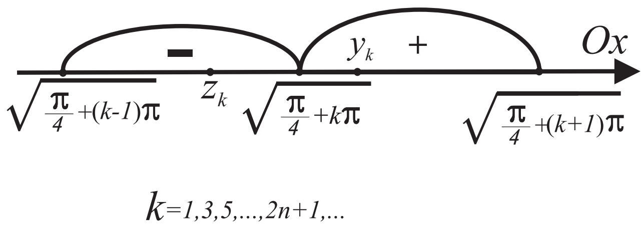



Рисунок 5: При переході через точку $x_k$, $k = 1, 3, 5, \ldots, 2n+1\,, \ldots$ похідна $f'(x)$ змінює знак з «–» на «+»

3) Нехай тепер $x_k = \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}\,,\ k = 2, 4, 6, \ldots, 2n\,, \ldots$. При таких значеннях $k$ точка $\frac{\pi}{4} + k\pi$ належить першій чверті. Візьмемо $y_k$ таким, щоб

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi} < y_k < \sqrt{\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi}\,.$$

Наприклад, можна обрати $y_k = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$. Тоді з огляду на (1.4.1)

$$f'(y_k) = f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) = 2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) \cdot (0-1) < 0\,.$$

Тепер візьмемо $z_k$ таким, щоб при $k \neq 0$

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} + (k-1)\pi} < z_k < \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}\,,$$

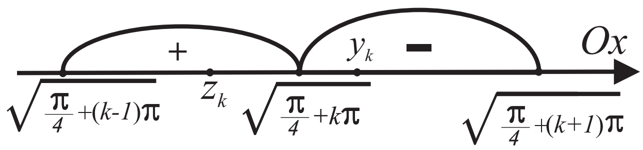
а при $k = 0$

$$0 < z_k < \frac{\pi}{4}\,.$$

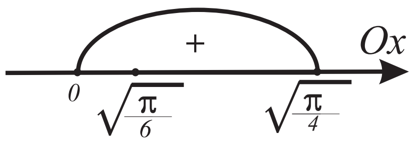
Наприклад, можна обрати $z_k = \sqrt{\frac{\pi}{6} + k\pi}$. Тоді з огляду на (1.4.1)

$$f\,'(z_k) = f\,'\left(\sqrt{\frac{\pi}{6} + k\pi}\right) = 2\left(\sqrt{\frac{\pi}{6} + k\pi}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) > 0\,.$$

**Отже, при переході через точку $x_k$ похідна $f\,'(x)$ змінює знак з «+» на «–», тому точки $x_k = \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}$, $k = 0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots,$ є точками локального максимуму цієї функції,** див. рисунок 6.




$k$=2,4,6,...,2n,...




$k$=0

Рисунок 6: При переході через точку $x_k$, $k = 0, 2, 4, 6, \ldots, 2n\,, \ldots$ похідна $f\,'(x)$ змінює знак з «+» на «–»

4) Нам ще залишилося розглянути точки $x_k = -\sqrt{\frac{\pi}{4} + k\pi}$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$. Слід зауважити, що оскільки функція $f$ парна, то ці точки при непарних $k$ будуть локальними мінімумами функції $f$, а при парних – її локальними максимуму (з цього приводу див. задачу 13 на стор. 18). Результат задачі 13 доведіть самостійно. Див. також графік функції $f$ при $-\pi \leqslant x \leqslant 5$ на рисунку 7.

Отже, усі критичні точки і локальні екстремуми функції $f$ знайдені. $\square$

**Зауваження 1.1.** При виконанні індивідуальних завдань 2 і 3 графіки функцій будувати не потрібно. Для повноцінної побудови графіків потрібні ще відомості про опуклість на вигнутість функції, а також наявність асимптот.

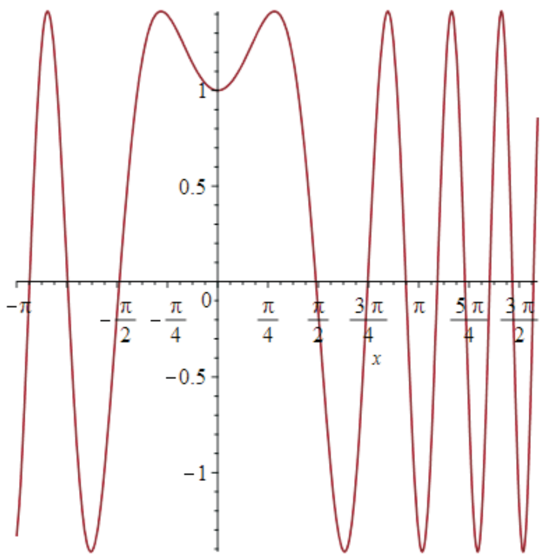



Рисунок 7: Графік функції $f(x) = \cos x^2 + \sin x^2$ при $-\pi \leqslant x \leqslant 5$

### 1.5 Завдання для самоконтролю

1. Наведіть приклад функції $f$, яка має в деякій точці $x_0$ локальний екстремум, але не строгий.

2. Нехай функції $f$ і $g$ мають локальний максимум в точці $x_0$. Чи мають локальний максимум функції: 1) $F(x) = f(x) + g(x)$, 2) $G(x) = f(x) \cdot g(x)$?

3. Нехай функція $f$ має локальний максимум в точці $x_0$, причому $f(x)$ не обертається в нуль в деякому околі точки $x_0$. Чи має функція $F(x) := \frac{1}{f(x)}$ : а) локальний максимум в точці $x_0$; а) локальний мінімум в точці $x_0$?

4. Нехай функція $f$, визначена в деякому околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, точки $x_0$, має локальний максимум в точці $x_0$. Чи випливає звідси, що функція $f$ неперервна в точці $x_0$? Має похідну в точці $x_0$?

5. Чи є критичні точки функції точками її локального екстремуму? А навпаки?

6. Чи є нулі функції точками її локального екстремуму? Критичними точками?

7. Чи може похідна функції дорівнювати нескінченності в точці локального екстремуму?

8. Чи можна навести приклади функцій $f$ і $g$, визначених в деякому околі точки $x_0$, які не обертаються в нуль в цьому околі таких, що:

а) жодна з цих функцій не має локального екстремуму в точці $x_0$, поте їх сума $f(x)+g(x)$ має строгий локальний екстремум в цій точці;

б) жодна з цих функцій не має локального екстремуму в точці $x_0$, поте їх добуток $f(x)\cdot g(x)$ має строгий локальний екстремум в цій точці;

в) жодна з цих функцій не має локального екстремуму в точці $x_0$, поте їх частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ має строгий локальний екстремум в цій точці.

9. Нехай $x_k \in [a,b]$, $k = 1,2,\ldots$, $x_k \to x_0 \in [a,b]$ при $k \to \infty$. Припустимо, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – функція, яка має в кожній з точок $x_k$, $k = 1,2,\ldots$, локальний екстремум. Чи буде точка $x_0$ точкою локального екстремуму функції $f$?

10. Нехай $x_k \in [a,b]$, $k = 1,2,\ldots$, $x_k \to x_0 \in [a,b]$ при $k \to \infty$. Припустимо, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – функція, для якої кожна з точок $x_k$, $k = 1,2,\ldots$, є критичною точкою функції $f$. Чи буде точка $x_0$ критичною точкою для $f$?

11. Як зміниться відповідь на питання 9 та 10, якщо вважати функцію $f$ неперервною на відрізку $[a,b]$?

12. Як зміниться відповідь на питання 9 та 10, якщо вважати функцію $f'$ неперервною на відрізку $[a,b]$?

13. Нехай $f$ – парна функція. Доведіть, що якщо $x_0$ – точка її локального максимуму (мінімуму), то точка $-x_0$ також є точкою її локального максимуму (мінімуму).

14. Нехай $f$ – непарна функція. Доведіть, що якщо $x_0$ – точка її локального максимуму (мінімуму), то точка $-x_0$ є точкою її локального мінімуму (максимуму).

15. Наведіть приклад такої функції $f$ і точки $x_0$, для яких умови теореми 1.3 не виконуються, хоча $x_0$ – точка локального екстремуму для функції $f$.

## 1.6 Завдання для самостійної роботи № 2

**Задача 2.** *Знайдіть критичні точки та точки локального екстремуму функції $f(x)$ для кожного з варіантів*

| **Варіант** | **Функція** $f(x)$ | **Варіант** | **Функція** $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$ | 16 | $f(x) = x \ln x$ |
| 2 | $f(x) = (x+4)(x-5)(x+6)$ | 17 | $f(x) = x^2 + \ln x$ |
| 3 | $f(x) = x^3 - x^2$ | 18 | $f(x) = x + \ln x$ |
| 4 | $f(x) = x^3 - x$ | 19 | $f(x) = x^3 + \ln x$ |
| 5 | $f(x) = x^4 - x^2$ | 20 | $f(x) = x^2 - \ln x$ |
| 6 | $f(x) = x^2 e^x$ | 21 | $f(x) = x - \ln x$ |
| 7 | $f(x) = x^3 e^x$ | 22 | $f(x) = 4x + x^2$ |
| 8 | $f(x) = x^5 - x^2$ | 23 | $f(x) = \lvert 4x - x^2 \rvert$ |
| 9 | $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ | 24 | $f(x) = \lvert 4x + x^2 \rvert$ |
| 10 | $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ | 25 | $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{3}{1-x}$ |
| 11 | $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^4$ | 26 | $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ |
| 12 | $f(x) = e^{-x^2}$ | 27 | $f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2}$ |
| 13 | $f(x) = e^{\lvert x \rvert}$ | 28 | $f(x) = x^5 - x$ |
| 14 | $f(x) = e^{-\lvert x \rvert}$ | 29 | $f(x) = (x^5 - x)^2$ |
| 15 | $f(x) = e^{-x^3}$ | 30 | $f(x) = (x^5 - x)^3$ |

## 1.7 Завдання для самостійної роботи № 3

**Задача 3.** *Знайдіть критичні точки та точки локального екстремуму функції $f(x)$ для кожного з варіантів*

| **Варіант** | **Функція** $f(x)$ | **Варіант** | **Функція** $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = \sin x^2$ | 16 | $f(x) = \cos x^3 + \sin x^3$ |
| 2 | $f(x) = x^2 + \sin x^2$ | 17 | $f(x) = x^2 - \sin x^2$ |
| 3 | $f(x) = x^3 + \sin x^3$ | 18 | $f(x) = x^3 - \sin x^3$ |
| 4 | $f(x) = \cos x^2$ | 19 | $f(x) = x - \cos x$ |
| 5 | $f(x) = x + \cos x$ | 20 | $f(x) = x^2 - \cos x^2$ |
| 6 | $f(x) = x^2 + \cos x^2$ | 21 | $f(x) = x^3 - \cos x^3$ |
| 7 | $f(x) = x^3 + \cos x^3$ | 22 | $f(x) = \cos x^4 + \sin x^4$ |
| 8 | $f(x) = \|\sin x\|$ | 23 | $f(x) = (\cos x + \sin x)^2$ |
| 9 | $f(x) = x + \sin x$ | 24 | $f(x) = (\cos x + \sin x)^3$ |
| 10 | $f(x) = \|\cos x\|$ | 25 | $f(x) = (\cos x + \sin x)^4$ |
| 11 | $f(x) = \|\operatorname{tg} x\|$ | 26 | $f(x) = \cos e^{5x}$ |
| 12 | $f(x) = \|\operatorname{ctg} x\|$ | 27 | $f(x) = \cos(-e^x)$ |
| 13 | $f(x) = \cos e^x$ | 28 | $f(x) = \cos e^{-x}$ |
| 14 | $f(x) = \cos x + \sin x$ | 29 | $f(x) = \sin(-e^x)$ |
| 15 | $f(x) = \sin(\|6x - 1\|)$ | 30 | $f(x) = \sin e^{-x}$ |

## 1.8 Максимум та мінімум функції на відрізку

Нагадаємо формулювання другої теореми Вейєрштрасса.

**Теорема 1.4.** *Нехай* $f \in C[a,b]$. *Тоді існують точки* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *такі, що*

$$M := \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1)\,, \qquad m := \min_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)\,.$$

З огляду на теорему Вейєрштрасса, точками $x_1$ і $x_2$ (вони також називаються точками *глобального максимума і мінімуму*, або коротше – точками *максимума і мінімуму* функції $f$) можуть бути як внутрішні точки інтервалу $(a,b)$, так і точками кінців цього інтервалу. В першому випадку вони очевидно є також і точками локального максимуму (мінімуму) функції.

Ми вже знаємо, як точки локального екстремуму пов'язані з похідною функції $f$ : теорема Ферма каже про те, що похідна в цих точках обертається в нуль, якщо вона існує. Також точки неіснування похідної можуть виявитися точками локального екстремуму; наприклад, такою є точка $x_0 = 0$ для функції $f(x) = |x|$.

Враховуючи сказане вище, маємо **простий алгоритм знаходження максимального (мінімального) значення функції на відрізку:**

1) Треба знайти критичні точки функції і точки, де похідна не існує,

2) Треба обчислити значення функції в знайдених точках, а також значення функції в точках $a$ і $b$. З усіх обчислених значень треба обрати максимальне (мінімальне). Це і будуть максимум і мінімум функції на відрізку $[a,b]$, а відповідні точки, на яких вони досягаються – токами максимуму та мінімуму функції.

**Слід зауважити, що:**

1) Точок, на котрих досягається максимум (мінімум) функції може бути декілька. Але існує принаймні одна точка максимуму і одна точка мінімуму функції.

2) Ці точки можуть знаходитися як всередині відрізку $[a,b]$, так і на кінцях цього відрізку, причому як в окремості (точка максимуму всередині, мінімуму – на кінці, і т.п.), так і одночасно (обидві серединні, або обидві на кінцях). Ці точки можуть бути критичними точками, а можуть і не бути. Обчисленню значень функції в них підлягають, як мінімум, усі критичні точки (звісно, за наявності таких точок).

3) Не потрібно перевіряти зміну знаку похідної при переході через точки, як це було в задачах на локальний екстремум з попередньої секції. В даному випадку це буде «зайвим ходом».

Вказаний алгоритм працює лише за умови, що функція, яку ми досліджуємо, є неперервною. Якщо ж ця функція має хоча б одну точку розриву, то як наявність точок максимуму і мінімуму, так і те, що схема їх пошуку дасть позитивні результати, гарантувати не можна.

Розглянемо наступний приклад.

**Приклад 5.** *Знайти максимум та мінімум функції*

$$f(x) = \cos x^2 + \sin x^2$$

*на відрізку* $[0, 5]$.

*Розв'язання.* Ми вже знайшли усі критичні точки даної функції, див. задачу 4. Серед них до відрізку $[0, 5]$ потраплять лише наступні:

$$x_0 = 0\,, \qquad x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}\,, \qquad x_2 = \sqrt{\frac{5\pi}{4}}\,,$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} + 2\pi}\,, \qquad x_4 = \sqrt{\frac{13\pi}{4}} = \sqrt{\frac{5\pi}{4} + 2\pi}\,,$$

$$x_5 = \sqrt{\frac{17\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} + 4\pi}\,, \qquad x_6 = \sqrt{\frac{21\pi}{4}} = \sqrt{\frac{5\pi}{4} + 4\pi}\,,$$

$$x_7 = \sqrt{\frac{25\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} + 6\pi}\,, \qquad x_8 = \sqrt{\frac{29\pi}{4}} = \sqrt{\frac{5\pi}{4} + 6\pi}\,.$$

Зауважимо, що $f(x_{2n-1}) = f(x_1)$, а $f(x_{2n}) = f(x_2)$ при $n = 1, 2, 3, 4$ (чому?, – обґрунтуйте!). Далі, $f(0) = 1$, $f(x_1) = f\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $f(x_2) = f\left(\sqrt{\frac{5\pi}{4}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$.

З огляду на загальну схему нам слід ще обчислити $f(5)$. Проте, $5 \in \left(\sqrt{\frac{29\pi}{4}}, \sqrt{\frac{33\pi}{4}}\right)$ функція $f$ на відрізку $\left[\sqrt{\frac{29\pi}{4}}, \sqrt{\frac{33\pi}{4}}\right]$ строго зростає (чому так?)[1]. Отже,

$$f\left(\sqrt{\frac{29\pi}{4}}\right) < f(5) < f\left(\sqrt{\frac{33\pi}{4}}\right)\,,$$

[1]Вказівка: див. результат задачі 4

або, оскільки за обчисленим вище $f\left(\sqrt{\frac{29\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}$ і $f\left(\sqrt{\frac{33\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}$, то

$$-\sqrt{2} < f(5) < \sqrt{2}\,.$$

З огляду на останнє співвідношення, точка $z_0 = 5$ не є ані точкою максимуму, ані точкою мінімуму функції $f$ на відрізку $[0,5]$.

Остаточно, порівнюючи між собою значення функції $f$ в усіх знайдених точках, ми отримаємо

**Відповідь:** $\max\limits_{x\in[0,5]} f(x) = \sqrt{2}$, $\min\limits_{x\in[0,5]} f(x) = -\sqrt{2}$. $\square$

**Приклад 6.** *Знайти максимум та мінімум функції*

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x$$

*на відрізку* $[-1,1]$.

*Розв'язання.* Починаємо зі знаходження похідної та прирівняння її до нуля. Маємо:

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 6x - 3 = 0\,,$$

$$6x^2(2x+1) - 3(2x+1) = 0\,,$$

$$(2x+1)(6x^2-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0\,, \\ 6x^2-3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\,, \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{array}\right.$$

Будемо мати, що:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{11}{16}\,,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4} - \sqrt{2}\,,$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4} + \sqrt{2}\,,$$

$$f(1) = -1\,, \qquad f(-1) = 1\,.$$

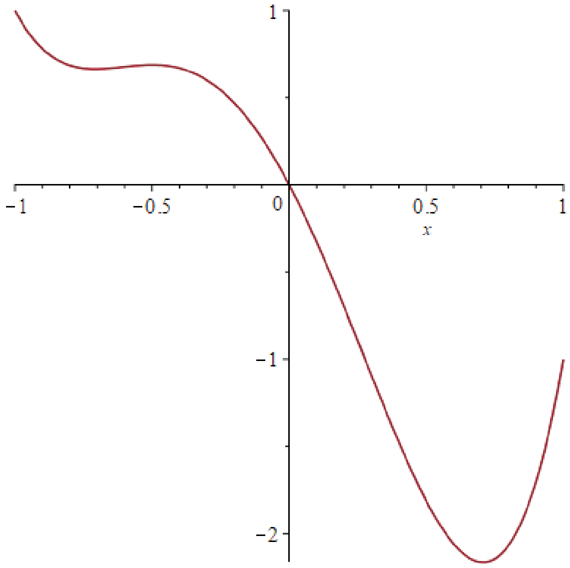



Рисунок 8: Графік функції $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$

Найменшим з усіх перелічених чисел є, очевидно, $-\frac{3}{4} - \sqrt{2}$, а найбільшим – 7. Отже,

$$\max_{x \in [-1,1]} f(x) = 7\,, \qquad \min_{x \in [-1,1]} f(x) = -\frac{3}{4} - \sqrt{2}\,.$$

Нижче на рисунку 8 також наведено графік цієї функції. $\square$

**Приклад 7.** *Знайти максимум та мінімум функції*

$$f(x) = 6x^4 - 3|x|$$

*на відрізку* $[-2, 2]$.

*Розв'язання.* Дана функція не є диференційовною в нулі (обґрунтуйте це), і це треба врахувати. Нехай $x_0 = 0$. Далі, $f(x) = 6x^4 - 3x$ при $x > 0$, отже, $f'(x) = 24x^3 - 3 = 0$, $8x^3 - 1 = 0$, $x^3 = \frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{2} := x_1$. Якщо $x < 0$, $f(x) = 6x^4 + 3x$, $f'(x) = 24x^3 + 3 = 0$, $8x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -\frac{1}{8}$, $x = -\frac{1}{2} := x_2$. Слід зауважити, що функція $f$ є парною: $f(x) = f(-x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Враховуючи парність функції $f$, маємо:

$$f(0) = 0\,, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{16} - \frac{3}{2} = \frac{3}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}\,,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}\,,$$

$$f(2) = f(-2) = 6 \cdot 16 - 3 \cdot 2 = 90\,.$$

Очевидно, найменшим зі знайдених значень є $-\frac{9}{8}$, а найбільшим є число 90.

**Відповідь:** $\max\limits_{x\in[-2,2]} f(x) = 90$, $\min\limits_{x\in[-2,2]} f(x) = -\frac{9}{8}$.

Графік функції $f$ зображений на рисунку 9. При розв'язанні індивідуальних завдань цієї секції малювати графіки функцій не потрібно. □

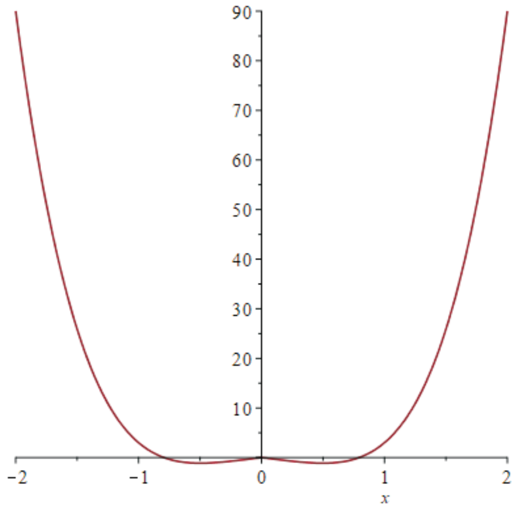



Рисунок 9: Графік функції $f(x) = 6x^4 - 3|x|$ при $-2 \leqslant x \leqslant 2$

## 1.9 Завдання для самоконтролю

1. Чи є локальний екстремум максимумом, або мінімумом функції, заданої на відрізку? А навпаки?

2. Побудуйте функцію, визначену на відрізку, котра не має ані локальних екстремумів, ані максимального й мінімального значень на цьому відрізку. Чи існують такі функції? Якщо так, то чи може така функція бути диференційовною в точках відрізку? Неперервною на відрізку?

3. Чи може не тотожно стала неперервна функція, задана на відрізку, мати нескінченну кількість точок, у яких вона сягає свого мінімального та/або максимального значень? Якщо відповідь «так», то чи зобов'язана в таких точках похідна цієї функції обертатися в нуль?

4. Припустимо, що функція $f$ строго монотонна на відрізку $[a, b]$. Чи може ця функція мати локальні екстремуми в $(a, b)$?

5. Доведіть, що якщо неперервна функція $f$ строго монотонна на відрізку $[a, b]$, то свого максимального та мінімального значень вона сягає в кінцевих точках цього відрізку.

6. Припустимо, функція $f$ не є тотожно сталою та неперервна на відрізку $[a, b]$. Припустимо, що ця функція має не менше двох точок, в яких вона сягає свого максимального значення. Чи є вірним, що дана функція має щонайменше один локальний максимум? Чи є вірним, що дана функція має щонайменше один локальний мінімум?

7. Наведіть приклад не тотожно сталої неперервної функції, заданої на відрізку, яка не є монотонною на цьому відрізку, але похідна функції не обертається в нуль в жодній точці відрізку. Чи може така функція бути диференційовною в усіх точках цього відрізку?

8. Наведіть приклад функції $f$ на відрізку $[a, b]$, яка має щонайменше один локальний мінімум і щонайменше один локальний максимум, але не має ані $\max f(x)$, ані $\min f(x)$ на цьому відрізку.

9. Чи може функція мати нескінченну похідну в точці локального максимуму? А якщо в цій точці просто досягається максимум функції на відрізку?

10. Нехай несталі функції $f$ і $g$ мають локальний максимум у точці $x_0 \in [a, b]$. Чи можна підібрати ці функції так, щоб функція $F(x) := f(x) - g(x)$ мала строгий локальний максимум у цій точці?

11. Дайте відповідь на питання 10 за додаткової умови: функції $f$ і $g$, задані на відрізку $[a, b]$, мають строгий локальний максимум у точці $x_0$.

### 1.10 Завдання для самостійної роботи № 4

**Задача 4.** *Знайдіть максимальне і мінімальне значення функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a, b]$ *для кожного з варіантів*

| Варіант | Функція $f(x)$ | Варіант | Функція $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = \sin x^2 + x,\ [a,b] = [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ | 16 | $f(x) = 5x^8 - 5x^7 + x^5, [a,b] = [0,2]$ |
| 2 | $f(x) = \sin x + x,\ [a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ | 17 | $f(x) = x^2 - \lvert x(x-1)\rvert, [a,b] = [-2,2]$ |
| 3 | $f(x) = \sin x + x,\ [a,b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | 18 | $f(x) = x^2 + \lvert x(x-1)\rvert, [a,b] = [-2,2]$ |
| 4 | $f(x) = \sin x^2 + x^2,\ [a,b] = \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$ | 19 | $f(x) = x^2 + \lvert x(x-1)(x-2)\rvert, [a,b] = [-3,3]$ |
| 5 | $f(x) = x^4 - x^3 - 20x,\ [a,b] = [0,3]$ | 20 | $f(x) = x^2 - \lvert x(x-1)(x-2)\rvert, [a,b] = [-3,3]$ |
| 6 | $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x,\ [a,b] = [0,3]$ | 21 | $f(x) = \lvert x^2 - 5x + 6\rvert, [a,b] = [0,4]$ |
| 7 | $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x,\ [a,b] = [0,3]$ | 22 | $f(x) = x^2 - 5\lvert x\rvert + 6, [a,b] = [0,4]$ |
| 8 | $f(x) = x^4 - x^3 - 20x,\ [a,b] = [-3,3]$ | 23 | $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 4x, [a,b] = [0,4]$ |
| 9 | $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x,\ [a,b] = [-3,3]$ | 24 | $f(x) = x^2 - 5x + 6 + \sin\left(x - \frac{5}{2}\right), [a,b] = [\frac{5}{2}, \frac{5+\pi}{2}]$ |
| 10 | $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x,\ [a,b] = [-3,3]$ | 25 | $f(x) = \cos(x^2 - 5x + 6), [a,b] = [\frac{5}{2}, 4]$ |
| 11 | $f(x) = x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2,\ [a,b] = [-2,4]$ | 26 | $f(x) = \cos(x^2 - 5x + 6), [a,b] = [\frac{5}{2}, 3]$ |
| 12 | $f(x) = (x+1)^8(x-2),\ [a,b] = [-3,2]$ | 27 | $f(x) = \cos(x^2 - 5x + 6), [a,b] = [1,3]$ |
| 13 | $f(x) = (x-1)(x+2)^8,\ [a,b] = [-3,2]$ | 28 | $f(x) = \cos(\lvert x^2 - 5x + 6\rvert), [a,b] = [1,3]$ |
| 14 | $f(x) = (x-1)^8(x+2),\ [a,b] = [-2,2]$ | 29 | $f(x) = \cos(\lvert x^2 - 5x + 6\rvert), [a,b] = [0,4]$ |
| 15 | $f(x) = (x-1)(x+2)^8,\ [a,b] = [-2,2]$ | 30 | $f(x) = \cos(\frac{1}{10} \cdot (x^2 - 5x)), [a,b] = [0,4]$ |

## 1.11 Опуклі та увігнуті функції

Існує декілька означень опуклих та увігнутих функцій. Ми дамо аналітичне означення, яке є найбільш лаконічним, що відповідає нашим цілям.

**Означення 1.5.** Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називається *опуклою* (в іншій термінології – *опуклою вниз*), якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in [a, b]$ і всіх $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ виконується нерівність

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \,. \tag{1.11.1}$$

Якщо при $0 < \lambda < 1$ нерівність в (1.11.1) є строгою, то функція $f$ називається *строго опуклою.*

**Означення 1.6.** Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називається *увігнутою* (в іншій термінології *опуклою вгору*), якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in [a, b]$ і всіх $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ виконується нерівність

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \,. \tag{1.11.2}$$

Якщо при $0 < \lambda < 1$ нерівність в (1.11.2) є строгою, то функція $f$ називається *строго увігнутою.*

Графіки опуклих та увігнутих функції легко відрізнити один від одного: для опуклих функції будь-яка січна $l = l(x)$ лежить вище самого графіку функції, а для увігнутих – навпаки, лежить під графіком. На рисунку 10, a), зображена опукла функція, а рисунку 10, b) – увігнута. На рисунку 11 зображена функція $y = x^3$, яка не є ані опуклою, ані увігнутою (при $x < 0$ увігнута, при $x > 0$ – опукла). Точка, де характер опуклості змінюється, називається *точкою перегину.* Для функції, зображеної на рисунку 11 такою точкою є $x_0 = 0$. Нас передусім цікав-

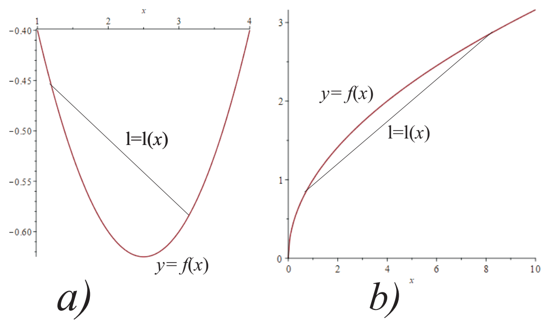



Рисунок 10: Функція опукла, a), і увігнута, b)

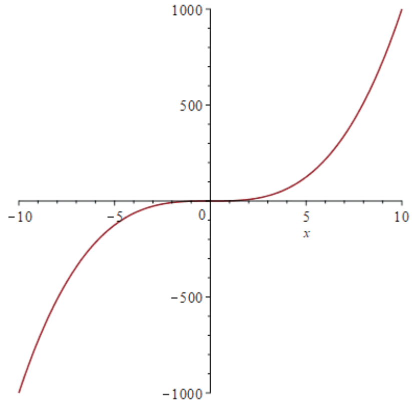



Рисунок 11: Функція $y = x^3$, яка не є ані опуклою, ані увігнутою на своїй області визначення. Опукла при $x > 0$ і увігнута при $x < 0$

лять не стільки властивості опуклих та увігнутих функцій, скільки їх зв'язок з похідними. На рахунок цього маємо наступну теорему.

**Теорема 1.5.** *($i_1$) (Достатні умови опуклості на увігнутості). Нехай функція $f$ є двічі диференційовною на відрізку $[a, b]$. Тоді вона є опуклою тоді і тільки тоді, коли $f''(x) \geqslant 0$ при всіх $x \in [a, b]$, і увігнутою тоді і тільки тоді, коли $f''(x) \leqslant 0$ при всіх $x \in [a, b]$. Якщо вказані нерівності є строгими, функція є строго опуклою (увігнутою). Обернене твердження невірне (друга похідна як строго опуклої, так і строго увігнутої функції може обертатися в нуль).*

*($i_2$) (Необхідна умова точки перегину). У точці перегину друга похідна функції, якщо вона існує, дорівнює нулю.*

*($i_3$) (Достатня умова точки перегину). Нехай функція $f$ є двічі диференційовною в деякому виколотому околі точки $x_0 \in (a, b)$. Якщо при переході через точку $x_0$ друга похідна функції $f$ змінює знак, то $x_0$ – точка перегину функції $f$.*

### Слід зауважити, що:

1) точки перегину функції – це точки локального екстремуму для її похідної; в той самий час, не всі точки локального екстремуму похідної є точками перегину (чому?),

2) ділянки опуклості та увігнутості функції – це відповідні ділянки зростання та спадання її похідної, відповідно.

**Для того, щоб дослідити функцію**

**на предмет її опуклості та увігнутості, треба:**

1) знайти другу похідну функції і прирівняти її до нуля. Нулі другої похідної – точки, підозрілі на перегин функції. Також треба знайти усі точки, в котрих друга похідна не існує.

2) треба дослідити зміну знаку другої похідної функції при переході через вказані точки.

**Приклад 8.** *Дослідити функцію на опуклість/увігнутість, знайти точки її перегину, якщо* $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 5$ *.*

*Розв'язання.* Беремо першу і другу похідні функції, отримаємо:

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 8x - 4\,,$$

$$f''(x) = 20x^3 - 12x + 8\,.$$

Видно, що число $x = -1$ є коренем виразу $20x^3 - 12x + 8$. Отже, за теоремою Безу поліном $p(x)$ ділиться націло на $x + 1$. Ділячи $p(x)$ на $x + 1$ у стовпчик, ми отримаємо:

$$\begin{array}{rrr|l}
20x^3 & -12x & +8 & x+1 \\ \cline{4-4}
20x^3+20x^2 & & & 20x^2-20x+8 \\ \cline{1-2}
-20x^2 & -12x & +8 & \\
-20x^2 & -20x & & \\ \cline{1-2}
 & 8x & +8 & \\
 & 8x & +8 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Прирівнюючи тепер другу похідну функції до нуля, ми отримаємо, що

$$f''(x) = 20x^3 - 12x + 8 = (20x^2 - 20x + 8)(x+1) = 4(5x^2 - 5x + 2)(x+1) = 0\,.$$

Оскільки вираз $5x^2 - 5x + 2$ коренів не має, то звідси випливає: $x = -1$. Отже, точка $x = -1$ підозріла на точку перегину. Далі покладаючи у виразі для $f''(x)$ спочатку $x = -2$, потім $x = 0$, отримаємо: $f''(-2) < 0$, $f''(0) > 0$. Висновок: функція $f$ увігнута при $x < -1$ та опукла при $x > -1$, а сама точка $x_0 = -1$ – точка перегину функції (див. графік функції нижче на рисунку 12). □

## 1.12 Завдання для самоконтролю

1. Чи може функція бути одночасно опуклою і увігнутою?

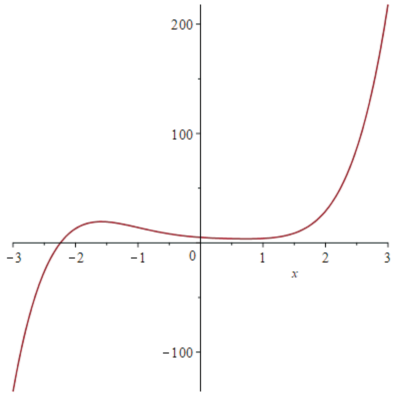



Рисунок 12: Графік функції $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 5$. Єдина точка перегину $x_0 = -1$. Функція увігнута при $x < -1$ і опукла при $x > -1$

2. Нехай $f$ і $g$ – опуклі функції, визначені на відрізку $[a, b]$ (або інтервалі $(a, b)$). Чи вірно, що: 1) їх сумма є опуклою функцією; 2) їх добуток є опуклою функцією?

3. Доведіть, що для опуклих функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ має місце *нерівність Iенсена,* а саме, для будь-яких $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ і всяких $q_1, q_2, \ldots, q_n > 0$ таких, що $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$ виконується нерівність: $f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n) \leqslant q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots q_nf(x_n)$.[2]

4. Побудуйте неперервну функцію $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, яка є опуклою на $[0, 1]$ і $[2, 3]$ і увігнутою на $[1, 2]$ і $[3, 4]$. Задача вважається розв'язаною лише за побудови аналітичного запису $y = f(x)$ (іншими словами, вкажіть, будь ласка, конкретну формулу для $f$).

5. Чи може опукла функція спадати на всій області визначення? А зростати? В разі позитивної відповіді, запишіть аналітично формули для таких функцій.

6. Чи можна підібрати відрізок $[a, b]$ і функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ так, щоб функції $f(x)$ і $\frac{1}{f(x)}$ були опуклими?

7. Чи можна підібрати відрізок $[a, b]$ і функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ так, щоб функція $f(x)$ була опуклою, а функція $\frac{1}{f(x)}$ – увігнутою?

[2]**Вказівка.** Скористайтеся методом математичної індукції

## 1.13 Завдання для самостійної роботи № 5

**Задача 5.** *Дослідити функцію $f$, задану на відрізку $[a, b]$, на опуклість та увігнутість, знайти точки її перегину.* [3]

| Варіант | Функція $f(x)$ | Варіант | Функція $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 7x^2$ | 16 | $f(x) = x^5 + x^4 - \frac{17}{3}x^3 + x^2$ |
| 2 | $f(x) = 2x^5 - x^4 + x^3 - 17x^2$ | 17 | $f(x) = x^5 - x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2$ |
| 3 | $f(x) = 2x^5 - x^4 + 2x^3 - 20x^2$ | 18 | $f(x) = x^5 + 2x^4 - \frac{23}{3}x^3 + x^2$ |
| 4 | $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 19x^2$ | 19 | $f(x) = x^5 + 3x^4 - \frac{29}{3}x^3 + x^2$ |
| 5 | $f(x) = 2x^5 - x^4 + x^3 + 29x^2$ | 20 | $f(x) = x^5 - 2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$ |
| 6 | $f(x) = 2x^5 - x^4 + 2x^3 + 32x^2$ | 21 | $f(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + 7x^2$ |
| 7 | $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 22x^2$ | 22 | $f(x) = -2x^5 + x^4 - x^3 + 17x^2$ |
| 8 | $f(x) = 2x^5 - x^4 + x^3 - 142x^2$ | 23 | $f(x) = 2x^5 - x^4 + x^3 - 17x^2 + 2x - 9$ |
| 9 | $f(x) = 2x^5 - x^4 + 2x^3 - 148x^2$ | 24 | $f(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 - 80x^2 - 2x$ |
| 10 | $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - 74x^2$ | 25 | $f(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - 74x^2 + x + 1$ |
| 11 | $f(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 - 80x^2$ | 26 | $f(x) = -x^5 + x^4 - 3x^3 + 74x^2$ |
| 12 | $f(x) = 3x^5 - x^4 + x^3 + 39x^2$ | 27 | $f(x) = x^5 + 4x^4 - \frac{35}{3}x^3 + x^2$ |
| 13 | $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 42x^2$ | 28 | $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x^2$ |
| 14 | $f(x) = 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 45x^2$ | 29 | $f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2$ |
| 15 | $f(x) = 3x^5 - x^4 + 4x^3 + 48x^2$ | 30 | $f(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2$ |

[3]**Вказівка.** Для знаходження коренів рівняння $f''(x) = 0$ скористайтеся діленням на $x - \alpha$, де $\alpha$ – один з коренів виразу $f''(x)$, як це зроблено у прикладі 8. Для кожного варіанту підбір (вгадування) кореня $\alpha$ здійснюється індивідуально

### 1.14 Асимптоти

Ми наближаємося до фінальної мети наших вивчень – повного дослідження функції. Передостаннім з них є знаходження асимптот. Якщо сказати на словах, асимптота – це пряма, до якої нескінченно близько наближається графік функції. Асимптот може у функції зовсім не бути, а може їх бути й декілька. Наприклад, функція $y = x^2$ асимптот не має, а функція $y = \frac{1}{x}$ має рівно дві асимптоти: пряма $y = 0$ (горизонтальна асимптота) і $x = 0$ (вертикальна асимптота). З огляду на сказане, розглянемо такі означення.

**Означення 1.7.** Пряма $x = x_0$ називається *вертикальною асимптотою функції* $f$, якщо виконана одна з двох умов: або $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$, або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$. На рисунку 13 зображена функція $y = \frac{1}{x}$, для якої $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\infty$ і $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$. Отже, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою функції $f$. Якщо б виконувалася тільки одна з цих двох рівностей, наприклад, тільки $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$, то цього вже було б достатньо для ствердження, що пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою для $f$.

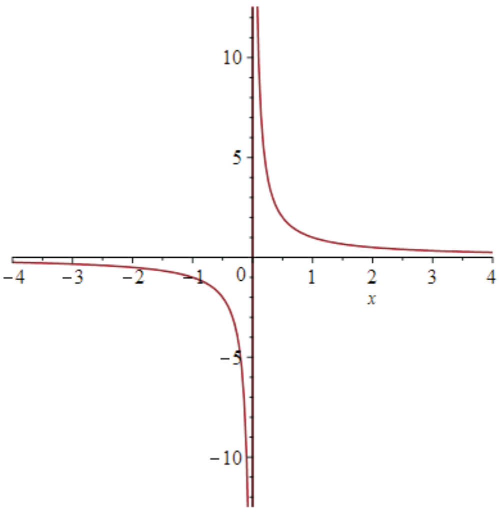



Рисунок 13: Функція $y = \frac{1}{x}$ має дві асимптоти: $x = 0$ – вертикальна асимптота, $y = 0$ – горизонтальна асимптота

**Означення 1.8.** Пряма $y = kx + b$, $k, b \in \mathbb{R}$, називається *асимптотою функції* $f$ *з нахилом*, якщо виконана одна з двох умов:

1) або $f(x) = kx + b + \varepsilon(x)$, де $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to -\infty$,

1) або $f(x) = kx + b + \varepsilon(x)$, де $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Частковим випадком асимптоти з нахилом є *горизонтальна асимптота,* коли в наведеному вище означенні $k = 0$. Очевидно, пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою для функції $f$ тоді і тільки тоді, коли або $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$. Для функції $y = \frac{1}{x}$ пряма $y = 0$ є такою асимптотою, оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ (див. рисунок 13).

**З огляду на сказане вище,<br>маємо зауважити про наступне:**

1) функція $f$ може мати декілька вертикальних асимптот. Їхня кількість може бути навіть нескінченна;

2) функція $f$ може мати не більше двох асимптот з нахилом, включаючи горизонтальні асимптоти;

3) якщо функція $f$ має рівно дві асимптоти з нахилом, то це можуть бути різні асимптоти ($y = kx + b$ та $y = k_1x + b_1$, де $k$ і $k_1$ та $b$ і $b_1$ не дорівнюють одне одному одночасно). Наведіть приклад такої функції!

**Правило знаходження вертикальних асимптот**

Вертикальні асимптоти знаходимо за означенням: точки, у котрих функція прямує до нескінченності, легко виявити за видом функції (див. приклади нижче). Зокрема, якщо $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, де $p$ і $q$ – поліноми, $x_0$ є коренем для $q$ і не є дночасно коренем для $p$, то пряма $x = x_0$ – вертикальна асимптота функції $f$.

**Правило знаходження асимптот з нахилом**

При $x \to +\infty$ обчислюємо

$$k := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b := \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Якщо $k$ або $b$ не існують, або нескінченні, асимптот з нахилом при $x \to +\infty$ немає. Якщо $-\infty < k, b < \infty$, пряма $y = kx + b$ – асимптота з нахилом для функції $f$ при $x \to +\infty$.

Аналогічно, при $x \to -\infty$ обчислюємо

$$k := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b := \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx).$$

Якщо $k$ або $b$ не існують, або нескінченні, асимптот з нахилом при $x \to -\infty$ немає. Якщо $-\infty < k, b < \infty$, пряма $y = kx + b$ – асимптота з нахилом для функції $f$ при $x \to -\infty$.

**Приклад 9.** Знайти асимптоти функції $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$, де $a, b > 0$ – задані числа.

*Розв'язання.* З огляду на означення функції, вертикальних асимптот немає, бо функція обмежена в околі будь-якої точки області визначення. Відшукаємо асимптоти з нахилом. Розглянемо такі випадки: $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Маємо:

$$k := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} b\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{b}{a}\,,$$

$$b := \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x\right)\left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{b}{a}x\right)}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{b}{a}x} =$$

$$= -b^2 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{b}{a}x} = 0\,.$$

Отже, пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптотою з нахилом функції $f$. Оскільки функція $f$ є парною, то за отриманим вище

$$k_1 := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(-x)}{-x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{f(-x)}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -k = -\frac{b}{a}\,,$$

$$b_1 := \lim_{x\to-\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to+\infty} f(-x) + k_1 x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = 0\,.$$

Отже, пряма $y = -\frac{b}{a}x$ також є асимптотою з нахилом функції $f$.

**Висновок:** функція $f(x)$ вертикальних асимптот не має. Крім того, прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ є асимптотами з нахилом даної функції. $\square$

**Приклад 10.** Знайти асимптоти функції $f = \frac{5x}{x-6}$.

*Розв'язання.* Оскільки знаменник функції прямую до нуля при $x \to 6$, а чисельник при тих же $x$ відмінний від нуля, маємо: $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = \infty$. Отже, пряма $x = 6$ є вертикальною асимптотою для $f$.

Далі,

$$k := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x(x-6)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x-6} = 0\,,$$

$$b := \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x-6} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5}{1-\frac{6}{x}} = 5\,.$$

Отже, пряма $y = 5$ є горизонтальною асимптотою для $f$. Інших асимптот функція $f$ не має. □

**Приклад 11.** Знайти асимптоти функції $f = \sqrt{x^2+1} - x$.

*Розв'язання.* Очевидно, функція не має вертикальних асимптот: знаменника, який би обертався в нуль, нема; сам вираз всюду скінченний і до нескінченності ніде не прямує. Стосовно асимптот з нахилом, будемо мати:

a) при $x \to +\infty$ :

$$k := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 = 0\,,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0\,.$$

Отже, пряма $y = kx + b = 0 \cdot x + b = 0$ є асимптотою функції $f$ при $x \to +\infty$.

b) при $x \to -\infty$ :

$$k_1 := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x} = -\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1 = -2\,,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1\cdot x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x+2x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = 0\,.$$

**Висновок:** функція $f(x)$ вертикальних асимптот не має. Крім того, прямі $y = 0$ і $y = -2x$ є, відповідно, горизонтальною асимптотою та асимптотою з нахилом даної функції. □

### 1.15 Завдання для самоконтролю

1. Задайте аналітично (за допомогою формули) функцію, яка має три вертикальних асимптоти $x = 4$, $x = 3$ та $x = -2$.

2. Чи можна побудувати функцію, в якої вертикальними асимптотами $x = x_n$ є кожна з точок послідовності $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$? У разі позитивної відповіді, запишіть таку функцію аналітично.

3. Чи можна побудувати функцію, в якої вертикальною асимптотою є $x = 0$, крім того, вертикальними асимптотами $x = x_n$ є кожна з точок послідовності $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$? У разі позитивної відповіді, запишіть таку функцію аналітично.

4. Вигадайте функцію, в якої одночасно асимптотами з нахилом є прямі $y = x + 5$ та $y = x + 4$. Скільки існує таких функцій?

5. Чи може неперервна на відрізку функція мати вертикальну асимптоту?

6. Нехай $y = kx + b$ – асимптота з нахилом як для функції $f$, так і для функції $g$. Чи правильним буде твердження, що тоді й для суми цих функцій $f + g$ пряма $y = kx + b$ також є асимптотою з нахилом для функції $f + g$?

7. Нехай $y = kx + b$ – асимптота з нахилом як для функції $f$, так і для функції $g$, причому в обох випадках – при $x \to +\infty$. Чи правильним буде твердження, що тоді й для суми цих функцій $f+g$ пряма $y = kx+b$ також є асимптотою з нахилом для функції $f + g$ при $x \to +\infty$?

8. Функція має безліч вертикальних асимптот, одну горизонтальну асимптоту та одну асимптоту з нахилом. Чи можливо це? Відповідь обґрунтуйте.

9. Чи можлива ситуація, коли функція має рівно три (різних) асимптоти? Поясніть, чому так.

## 1.16 Завдання для самостійної роботи № 6

**Задача 6.** *Знайдіть усі асимптоти функції $f$ у кожному з варіантів*

| Варіант | Функція $f(x)$ | Варіант | Функція $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = \frac{5x}{3x-1} + x$ | 16 | $f(x) = \frac{3x^3}{2(1+x^2)}$ |
| 2 | $f(x) = \frac{7x}{2x-1} + 5x$ | 17 | $f(x) = \frac{3x^3}{2(1-x^2)}$ |
| 3 | $f(x) = \frac{9x}{2x-1} + 5x$ | 18 | $f(x) = \frac{x}{(2-x)^2}$ |
| 4 | $f(x) = \frac{3x-1}{5x} + x$ | 19 | $f(x) = \frac{x}{(2-x)^2} + x$ |
| 5 | $f(x) = \frac{2x-1}{7x} + 5x$ | 20 | $f(x) = \frac{x^2}{(2-x)^2} + x$ |
| 6 | $f(x) = \frac{2x-1}{9x} + 4x$ | 21 | $f(x) = \frac{x^2}{(2-x)^2} + x^2$ |
| 7 | $f(x) = 5x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ | 22 | $f(x) = \frac{3}{x^2+5x+6}$ |
| 8 | $f(x) = x^2 \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ | 23 | $f(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{x^2-16}$ |
| 9 | $f(x) = x^3 \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ | 24 | $f(x) = \frac{(x+2)^2(x+3)^3}{x^2-16}$ |
| 10 | $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ | 25 | $f(x) = \frac{(x+2)(x+3)}{(x^2-16)^2}$ |
| 11 | $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ | 26 | $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$ |
| 12 | $f(x) = 5xe^{\frac{1}{x}}$ | 27 | $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$ |
| 13 | $f(x) = 5(x-3)e^{\frac{1}{x}}$ | 28 | $f(x) = 5\sqrt{x^2+1}$ |
| 14 | $f(x) = 5(2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$ | 29 | $f(x) = bx + \operatorname{arctg} \frac{x}{b}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| 15 | $f(x) = 5xe^{\frac{1}{2x}}$ | 30 | $f(x) = 2x - \arccos \frac{1}{x}$ |

## 1.17 Повне дослідження функції

Тепер ми в змозі провести так зване повне дослідження функції, що, зокрема, передбачає побудову її графіка. Будемо використовувати наступну схему.

**Повне дослідження функції відповідає наступним складовим:**

1. Область визначення функції, область значень – по можливості. Область значень з'ясовується в багатьох випадках лише в кінці схеми.

2. Парність та непарність функції (за наявності).

3. Нулі функції та значення функції в нулі – за наявності та можливості обчислення.

4. Дослідження функції на неперервність. Точки розриву та їх рід.

5. Критичні точки, локальні екстремуми. Ділянки спадання та зростання функції.

6. Опуклість та/або увігнутість функції. Точки перегину.

7. Асимптоти (за наявності).

8. За результатами пунктів 1–7 будуємо графік функції. Повне дослідження проведено.

Розглянемо наступні приклади.

**Приклад 12.** *Провести повне дослідження функції*

$$f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}\,.$$

*Розв'язання.* З огляду до запропонованої вище схеми, маємо:

**1. Область визначення функції.** Очевидно, функція $f$ визначена всюди, за виключенням точок, де знаменник обертається в нуль, тобто, точок $x = \pm 1$. Вони ж будуть точками розриву функції другого роду, бо функція прямує до нескінченності, коли аргумент наближається до цих точок. Зокрема, $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = +\infty$.

**2. Парність та непарність функції.** Очевидно, функція $f$ є непарною (перевірте, що $f(-x) = -f(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$).

**3. Нулі функції та значення функції в нулі.** Очевидно, $f(0) = 0$, причому інших нулів функція немає.

**4. Дослідження функції на неперервність. Точки розриву та їх рід.** Ми вже з'ясували (див. пункт **1**), що дана функція має дві точки розриву $x_{1,2} = \pm 1$. Дана функція є часткою двох поліномів степені 1 та степені 2, відповідно, тому вона неперервна на своїй області визначення за теоремою про неперервність елементарних функцій. Отже, функція $f$ неперервна всюди, крім точок $x_{1,2} = \pm 1$.

**5. Критичні точки, локальні екстремуми. Ділянки спадання та зростання функції.** Взяття похідної за правилом похідної дробу дасть нам

$$f'(x) = \frac{x'(1-x^2)^2 - x((1-x^2)^2)'}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{(1-x^2)(1-x^2+4x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}\,.$$

Чисельник останнього виразу у нуль не обертається; отже, критичних точок немає. Точки, підозрілі на локальний екстремум (у котрих похідна не існує) – це точки $x = \pm 1$. Підстановкою довільних значень $x_1 := -2 < -1$, $x_2 := 0$ та $x_3 := 2 > 1$ у вираз для $f'(x)$ бачимо, що $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -1)$ та при $x \in (1, \infty)$, та $f'(x) > 0$ при $x \in (-1, 1)$. Отже, функція $f$ спадає на проміжках $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, та зростає на $(1, \infty)$.

**6. Опуклість та/або увігнутість функції. Точки перегину.** Відшукаємо другу похідну:

$$f''(x) = \frac{(1+3x^2)'(1-x^2)^3 - ((1-x^2)^3)'(1+3x^2)}{(1-x^2)^6} =$$

$$= \frac{6x(1-x^2)^3 - 3(1-x^2)^2\cdot(-2x)(1+3x^2)}{(1-x^2)^6} =$$

$$= \frac{(1-x^2)^2(6x(1-x^2) + 6x(1+3x^2))}{(1-x^2)^6} =$$

$$= \frac{(1-x^2)^2(12x^3+12x)}{(1-x^2)^6} = \frac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}\,.$$

Отже,

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4} = 0 \Rightarrow x = 0\,.$$

Перевірку знаку другої похідної дає: $f''(x) < 0$ при $x < 0$, $x \neq -1$, і $f''(x) > 0$ при $x > 0$, $x \neq 1$. Отже, функція опукла вниз при $x > 0$, $x \neq 1$, і вгору (увігнута) при $x < 0$, $x \neq -1$. Точка $x_0 = 0$ – точка перегину функції, оскільки функція визначена в деякому околі нуля і друга похідна цієї функції змінює знак з «–» на «+» при переході через точку $x_0 = 0$.

**7. Асимптоти.** Вертикальні асимптоти – прямі $x = \pm 1$, див. вище. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (обґрунтуйте!), то пряма $y = 0$ – горизонтальна асимптота функції $f$. Інших асимптот немає (чому так?).

**8. За результатами пунктів 1–7 будуємо графік функції,** див. рисунок 14. Повне дослідження проведено. [4] □

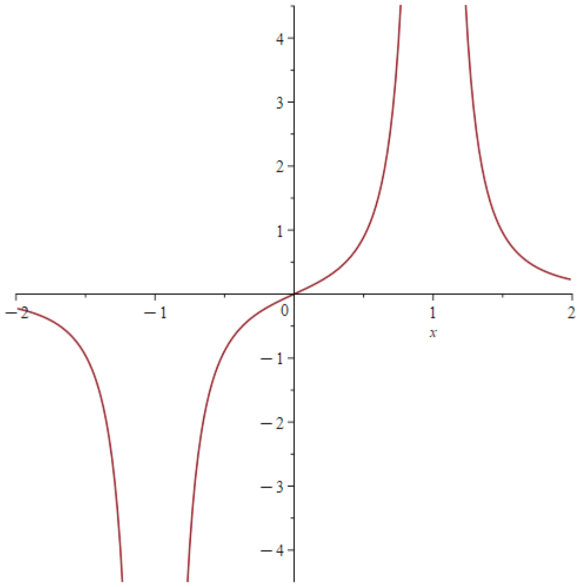



Рисунок 14: Графік функції $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$

**Приклад 13.** *Провести повне дослідження функції*

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x\,.$$

*Розв'язання.* З огляду до запропонованої вище схеми, маємо:

**1. Область визначення функції:** $x \in \mathbb{R}$.

**2. Парність та непарність функції.** Функція $f$ не є ані парною, ані непарною (обґрунтуйте).

[4] В індивідуальних задачах, відповідних цьому розділу, побудова графіку функції є обов'язковою

**3. Нулі функції та значення функції в нулі.** Маємо $f(0) = 1$. Знайдемо нулі функції, розв'язавши рівняння $\sin x + \cos^2 x = 0$. Звідси $\sin x + 1 - \sin^2 x = 0$. Поклавши $\sin x = t$, маємо: $t^2 - t + 1 = 0$, $t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Перший корінь $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ більше 1, відповідне рівняння $\sin x = t_1$ розв'язків не має. Другий корінь по модулю менше 1, рівняння $\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ має нескінченну кількість розв'язків $x_k = (-1)^k \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

**4. Дослідження функції на неперервність. Точки розриву та їх рід.** Функція $f$ неперервна всюди на $\mathbb{R}$ як елементарна функція.

**5. Критичні точки, локальні екстремуми. Ділянки спадання та зростання функції.** Взяття похідної за правилом похідної суми та суперпозиції функцій дасть нам

$$f'(x) = \cos x - 2\cos x \sin x = \cos x(1 - 2\sin x)\,,$$

$$\cos x(1-2\sin x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\,,\\ 1 - 2\sin x = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\,,\\ x = y_k = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\,.\end{array}\right.$$

Рівність $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ дає дві групи точок на тригонометричному колі $x_k^{(1)} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, та $x_k^{(2)} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. При переході через першу групу точок похідна змінює знак з «–» на «+», при переході через другу – також, з «–» на «+». Отже, точки $x = x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$, є точками локального мінімуму функції $f$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що в точках $x = y_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ функція $f$ має локальний максимум.

**6. Опуклість та/або увігнутість функції. Точки перегину.** Відшукаємо другу похідну:

$$f''(x) = (\cos x - \sin 2x)' = -\sin x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x =$$
$$= -\sin x - 2 + 2\sin^2 x + 2\sin^2 x = 4\sin^2 x - \sin x - 2\,,$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0\,, \qquad t := \sin x \Rightarrow$$
$$4t^2 - t - 2 = 0\,, \qquad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\,,$$

$\varphi(t) := 4t^2 - t - 2 < 0$ при $t \in \left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$ і $\varphi(t) > 0$ при $t \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}, \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]$. Відповідно, функція $f$ є увігнутою при

$$x \in \left(\arcsin \frac{1-\sqrt{33}}{8} + 2k\pi, \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8} + 2k\pi\right) \bigcup$$

$$\bigcup\left(\pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8} + 2k\pi, \pi + \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8} + 2k\pi\right);$$

на доповненні до цієї множині функція $f$ опукла. Сукупність точок $x_k = (-1)^k \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8} + k\pi$ та $y_k = (-1)^k \arcsin\frac{1-\sqrt{33}}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, є множиною точок перегину функції $f$.

**7. Асимптоти.** Обчислюємо $k := \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (обґрунтуйте!), далі, за означенням $b := \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x + \cos^2 x$. Ця границя не існує (чому так?), аналогічно – при $x \to -\infty$. Отже, функція $f$ жодних асимптот (ані вертикальних, ані з нахилом/горизонтальних) не має.

**8. За результатами пунктів 1–7 будуємо графік функції,** див. рисунок 15. Повне дослідження проведено. □

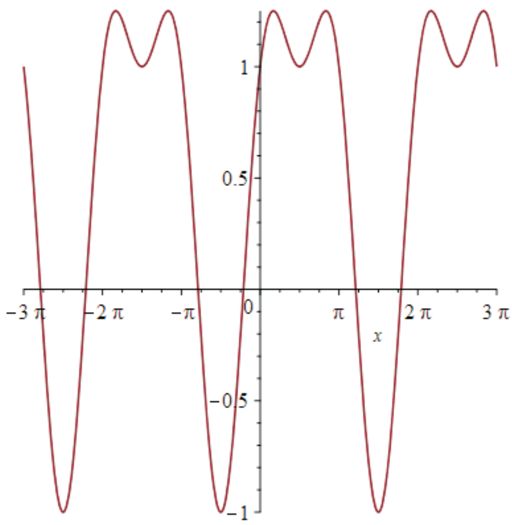



Рисунок 15: Графік функції $y = \sin x + \cos^2 x$

**Приклад 14.** *Провести повне дослідження функції*

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 .$$

*Розв'язання.* З огляду до запропонованої вище схеми, маємо:

**1. Область визначення функції:** $x \in \mathbb{R}$.

**2. Парність та непарність функції.** Функція $f$ не є ані парною, ані непарною. Наприклад, $f(-1) = 0 \neq 2 = f(1)$. Звідси також випливає, що $f(-1) \neq -f(1)$.

**3. Нулі функції та значення функції в нулі.** Очевидно, $f(0) = 4$. Функція $f$ обертається в нуль в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$. Інших нулів функція не має.

**4. Дослідження функції на неперервність. Точки розриву та їх рід.** Функція $f$ неперервна всюди на $\mathbb{R}$ як елементарна функція.

**5. Критичні точки, локальні екстремуми. Ділянки спадання та зростання функції.** Взяття похідної за правилом похідної добутку функцій дасть нам

$$f'(x) = (x+1)'(x-2)^2 + (x+1)((x-2)^2)' =$$

$$= (x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) = (x-2)(x-2+2(x+1)) = 3x(x-2)\,,$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0\,.$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ – критичні точки $f$. При переході через точку $x_1 = 0$ похідна $f'$ змінює знак з «+» на «–», крім того, при переході через точку $x_2 = 2$ похідна $f'$ змінює знак з «–» на «+». Отже, точка $x_1 = 0$ є точкою локального максимуму, а точка $x_2 = 2$ – локального мінімуму функції $f$.

**6. Опуклість та/або увігнутість функції. Точки перегину.** Відшукаємо другу похідну:

$$f''(x) = 3(x-2) + 3x = 6x - 6\,,$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1\,.$$

Знак другої похідної: «–» при $x < 1$ (тут функція $f$ увігнута), «+» при $x > 1$ (тут функція опукла). Отже, точка $x_0 = 1$ є точкою перегину функції $f$.

**7. Асимптоти.** Обчислюємо $k := \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ (обґрунтуйте!). Асимптот немає.

**8. За результатами пунктів 1–7 будуємо графік функції,** див. рисунок 16. Повне дослідження проведено. □

## 1.18 Завдання для самоконтролю

1. Чи можна правильно побудувати графік функції, якщо уникнути формального знаходження точок локального екстремуму і точок перегину, а замість цього будувати цей графік по довільно обраних точках, відстань між якими не перевищує $0,01$?

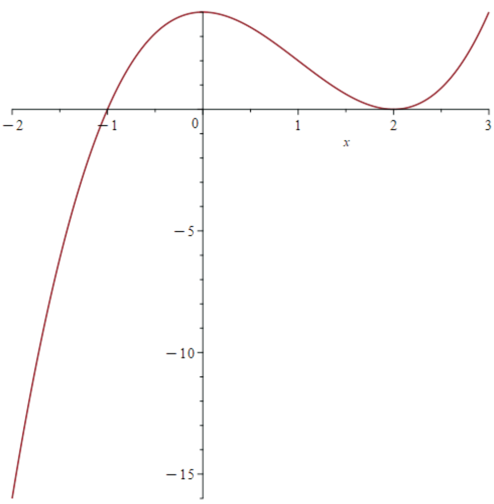



Рисунок 16: Графік функції $y = (x + 1)(x - 2)^2$

2. Нехай $f$ – опукла функція на проміжку $I$ ($I$ – відрізок, або інтервал числової прямої). Доведіть існування сталої $C > 0$ такої, що $f(x) \geqslant C_1 x$ при всіх $x \in I$.

3*. Функція $f$ задана на інтервалі $(a, b)$, $f \in C^2(a, b)$, $f(x) \to -\infty$ при $x \to a + 0$ і $f(x) \to +\infty$ при $x \to b - 0$. Чи буде вірно, що функція $f$ має принаймні одну точку перегину?

### 1.19 Завдання для самостійної роботи № 7

**Задача 7.** *Провести повне дослідження функції для кожного з варіантів*

| Варіант | Функція $f(x)$ | Варіант | Функція $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ | 16 | $f(x) = (7 + 2\cos x)\sin x$ |
| 2 | $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ | 17 | $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ |
| 3 | $f(x) = \frac{x^3(x-1)}{(1+x)^2}$ | 18 | $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$ |
| 4 | $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ | 19 | $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$ |
| 5 | $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$ | 20 | $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$ |
| 6 | $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ | 21 | $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ |
| 7 | $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$ | 22 | $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$ |
| 8 | $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ | 23 | $f(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$ |
| 9 | $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$ | 24 | $f(x) = x + e^{-x}$ |
| 10 | $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$ | 25 | $f(x) = x^{2/3}e^{-x}$ |
| 11 | $f(x) = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$ | 26 | $f(x) = e^{-2x}\sin^2 x$ |
| 12 | $f(x) = (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}$ | 27 | $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ |
| 13 | $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ | 28 | $f(x) = (x+2)e^{1/x}$ |
| 14 | $f(x) = \frac{\lvert 1+x\rvert^{3/2}}{\sqrt{x}}$ | 29 | $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ |
| 15 | $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$ | 30 | $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ |

# 2 Формула Тейлора

## 2.1 Розклад деяких функцій за формулою Тейлора

Сутність формули Тейлора полягає в можливості наближеннями функцій степеневими виразами (їх називають многочленами Тейлора). Зрозуміло, що значення трансцендентних функцій (тригонометричні, логарифмічні, експонеційні функції) важко отримати шляхом прямих обчислень. Інша справа – обчислення значень функції, що є цілою степеню $x$, або сумою цілих степеней $x$. З огляду на це, є справедливим наступний результат.

**Теорема 2.1.** *Нехай функція $f$ диференційовна в деякому околі $U$ точки $x_0$ і має там щонайменше $n$ похідних, $n \geqslant 1$. Тоді в цьому околі справедливо наступне зображення (формула Тейлора з остатнім членом у формі Пеано):*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + o((x - x_0)^n)\,. \qquad (2.1.1)$$

Існує і деякий інший вигляд формули Тейлора. Нехай функція $f$, визначена на відрізку $[a, b]$, має щонайменше $n$ похідних $f'(x), f^2(x), \ldots,$ $f^n(x)$, $n \geqslant 1$, які є неперервними на $[a, b]$, крім того, на $(a, b)$ існує $f^{(n+1)}$. Зафіксуємо $x, x_0 \in [a, b]$. Тоді існує точка $\xi$, яка лежить між $x$ і $x_0$ така, що

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2} + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}\,. \qquad (2.1.2)$$

Співвідношення (2.1.2) – *формула Тейлора в формі Лагранжа.*

Для багатьох функцій розклади у формулу Тейлора загальновідомі, причому переважно використовується випадок $x_0 = 0$ (формула Тейлора в цьому випадку називається також *формулою Маклорена*). Наведемо перелік найбільш вживаних розкладів:

$$1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\,,$$

$$2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\,,$$

$$3) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\,,$$

$$4) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)\,,$$

$$5) \qquad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n + o(x^n)\,, \qquad m \neq 0, \quad m \notin \mathbb{N}\,.$$

$$6) \qquad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})\,.$$

**Приклад 15.** *Записати формулу Тейлора для даної функції до степені $x^{13}$ включно, якщо*

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}\,.$$

*Розв'язання.* З огляду на розкладом 3) на стор. 48, маємо:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)\,, \tag{2.1.3}$$

але з іншого боку за розкладом 5) на стор. 48

$$\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2)\,. \tag{2.1.4}$$

Враховуючи співвідношення (2.1.3) та (2.1.4), ми отримаємо, що

$$\sqrt[3]{\sin t} = \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^6)\right)^{1/3} =$$

$$= t^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}+o(t^5)\right)^{\frac{1}{3}} = \left\{\alpha(t) := -\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}+o(t^5)\right\} =$$

$$= t^{\frac{1}{3}}(1+\alpha(t))^{\frac{1}{3}} = t^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\alpha(t)-\frac{1}{9}(\alpha(t))^2+o((\alpha(t))^2)\right) =$$

$$= t^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)^2+o\left(\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)^2\right)\right) =$$

$$= t^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{t^2}{18}-\frac{t^4}{3240}+o(t^5)\right) = x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}+o(x^{16})\,. \ \square$$

**Приклад 16.** *Записати формулу Тейлора для даної функції до степені $x^3$ включно, якщо*

$$f(x) = \sin(\sin x)\,.$$

*Розв'язання.* З огляду на розкладом 3) на стор. 48, маємо:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\,. \tag{2.1.5}$$

Тоді маємо:

$$\sin\sin x = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3!} + o((\sin x)^4) =$$

$$= x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)-\frac{1}{6}\cdot\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3+o\left(\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^4\right) =$$

$$= x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{6}+o(x^4) = x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\,. \ \square$$

## 2.2 Завдання для самоконтролю

1. Нехай $f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \ldots + A_n(x-x_0)^n + o(x-x_0)$, причому функція $f$ має щонайменше $n$ похідних в деякому околі $U$ точки $x_0$. Чи буде вказаний розклад формулою Тейлора для $f$ у точці $x_0$? (Зокрема, чи вірно, що $A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$?).

2. Нехай $f(x) = A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n+o(x-x_0)$ в деякому околі $U$ точки $x_0$. Чи вірно, що: а) функція $f$ неперервна в точці $x_0$; б) диференційовна в точці $x_0$; в) має щонайменше $n$ похідних в точці $x_0$? в) має щонайменше $n+1$ похідну в точці $x_0$?

3.* Припустимо, що $f \in C^\infty(a,b)$ і $x_0 \in (a,b)$. Покладемо $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Чи вірно, що при кожному фіксованому $x \in (a,b)$ виконується умова: $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

4. Для заданих $[a,b]$ і $x_0 \in [a,b]$ наведіть приклад неперервної функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, для якої розклад $f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \ldots + A_n(x-x_0)^n + o(x-x_0)$ не має місця для жодного $n \in \mathbb{N}$ та за жодних сталих $A_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

## 2.3 Завдання для самостійної роботи № 8

**Задача 8.** *Розкласти функцію $f$ по степенях $x$ до $x^6$ включно для кожного з варіантів*

| **Варіант** | **Функція** $f(x)$ | **Варіант** | **Функція** $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = e^{\cos x}$ | 16 | $f(x) = \cos^3 x$ |
| 2 | $f(x) = \sin(\cos x)$ | 17 | $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ |
| 3 | $f(x) = e^{2x-x^2}$ | 18 | $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$ |
| 4 | $f(x) = \ln(\cos x)$ | 19 | $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$ |
| 5 | $f(x) = \ln(\cos^2 x)$ | 20 | $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$ |
| 6 | $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ | 21 | $f(x) = e^{x-x^2}$ |
| 7 | $f(x) = (x-3)\sqrt{1+x}$ | 22 | $f(x) = e^{x-x^3}$ |
| 8 | $f(x) = (x-3)\sqrt[3]{1+x}$ | 23 | $f(x) = (1+x^2)e^{-x^2}$ |
| 9 | $f(x) = e^{x-x^4}$ | 24 | $f(x) = x + e^{-x}$ |
| 10 | $f(x) = e^{x-x^5}$ | 25 | $f(x) = x^{2/3}e^{-x}$ |
| 11 | $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$ | 26 | $f(x) = e^{-2x}\sin^2 x$ |
| 12 | $f(x) = \ln \frac{\cos x}{x}$ | 27 | $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ |
| 13 | $f(x) = \sin^2 x$ | 28 | $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ |
| 14 | $f(x) = \cos^2 x$ | 29 | $f(x) = xe^{x^2}$ |
| 15 | $f(x) = \sin^3 x$ | 30 | $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$ |

## 2.4 Наближені обчислення за допомогою формули Тейлора

Формула Тейлора з залишковим членом у вигляді Пеано (2.1.1) не дуже підходить для обчислень. Справа у тому, що ми нічого не знаємо про характер поведінки члена $o((x-x_0)^n)$ у цій формулі. Він може виявитись як зручним (див. нижче), так і в принципі не вживаним для будь-яких наближень функції $f$. Зараз ми докладніше розглянемо формулу (2.1.2) і покажемо, як нею можна користуватися для обчислень значень функції $f$ «з точністю до» на відміну від співвідношення (2.1.1). Нехай у подальшому $x_0 = 0$. Слід зауважити, що для всякого $k \in \mathbb{N}$ похідні $k$-го порядку $f^{(k)}(x)$ від відповідних функцій $f$ знаходяться наступним шляхом:

$$(e^x)^k = e^x\,, \qquad (\cos x)^k = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\,,$$

$$(\sin x)^k = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\,, \qquad (\ln(1+x))^k = \frac{(-1)^k(k-1)!}{(1+x)^k}\,,$$

$$((1+x)^m)^{(k)} = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}\,, \quad m \notin \mathbb{N}\cup\{0\}\,.$$

З огляду на формулу Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа та наведені вище формули, див. (2.1.2), існує $0 < \theta < 1$ таке, що співвідношення 1)–6) на стор. 47–48 можна записати наступним шляхом:

$$1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

$$2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,,$$

$$3) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n\cos(\theta x)x^{2n+3}}{(2n+3)!}\,,$$

$$4) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}\,,$$

$$5) \qquad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n+\frac{m(m-1)\cdots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)}x^{n+1},$$

$$6)\qquad \operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+$$

$$+(\operatorname{arctg} x)'(\theta x)\cdot(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Приклад 17.** *За допомогою формули Тейлора обчислити з точністю до $10^{-4}$ число $\sqrt{e}$.*

*Розв'язання.* Можна скористатися розкладом для $e^x$ при $x=\frac{1}{2}$, бо $\sqrt{e}=e^{1/2}$. З огляду на вигляд залишкового члена, шляхом підбору відповідного номера $n\in\mathbb{N}$ з'ясовуємо, що $r_{n+1}(x):=e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}<10^{-4}$ при $n=5$. Отже, нам потрібно взяти перші п'ять членів в розкладі для $e^x$ при $x:=\frac{1}{2}$. З огляду на сказане, будемо мати:

$$e^x\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{16\cdot 24}+\frac{1}{32\cdot 120}=\frac{6331}{3840}\approx 1,6486979.$$

Якщо взяти $n=6$, можна отримати ще більш точний результат: $\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\approx\frac{75973}{46080}\approx 1,648719618$. $\square$

**Приклад 18.** *За допомогою формули Тейлора обчислити з точністю до $10^{-4}$ число $\sqrt[3]{30}$.*

*Розв'язання.* Скористаємося розкладом для $(1+x)^m$ при $m=\frac{1}{3}$, проте спочатку зауважимо, що $\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{\frac{30}{27}\cdot 27}=3\sqrt[3]{\frac{10}{9}}$. Якщо $1+x=\frac{10}{9}$, то $x=\frac{1}{9}$. Зауважимо, що залишковий член

$$R_{n+1}(x):=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)}x^{n+1}$$

у формулі для $(1+x)^m$ можна оцінити співвідношенням

$$|R_{n+1}(x)|\leqslant x^{n+1},$$

оскільки $x=\frac{1}{9}$, то нам достатньо найти таке натуральне $n$, щоб $\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}<\frac{1}{10000}$. Шляхом підбору $n$ можна переконатися, що достатньо взяти $n=4$.

Отже, за формулою Тейлора (Маклорена) для $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ при $x = \frac{1}{9}$ ми отримаємо, що

$$\sqrt[3]{\frac{10}{9}} \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\cdot\frac{1}{81} +$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}\cdot\frac{1}{729} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{24}\cdot\frac{1}{6561} =$$

$$= \frac{13210480}{12754584} \approx 1{,}0357436981088\,.$$

З огляду на отримане на початку співвідношення $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{\frac{30}{27}\cdot 27} = 3\sqrt[3]{\frac{10}{9}}$, маємо:

$$\sqrt[3]{30} \approx 3\cdot 1{,}0357436981088 \approx 3{,}107231094\,.\square$$

## 2.5 Завдання для самостійної роботи № 9

**Задача 9.** *Знайти відповідні значення за формулою Тейлора з точністю до* $10^{-4}$ *для кожного з варіантів*

| Варіант | Число | Варіант | Число |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sqrt[3]{e}$ | 16 | $\cos 1$ |
| 2 | $\sqrt[4]{e}$ | 17 | $\cos 2$ |
| 3 | $\sqrt[5]{e}$ | 18 | $\cos 3$ |
| 4 | $\sqrt[6]{e}$ | 19 | $\cos 4$ |
| 5 | $\sqrt[7]{e}$ | 20 | $\cos 5$ |
| 6 | $e^2$ | 21 | $\ln 2$ |
| 7 | $e^3$ | 22 | $\ln 3$ |
| 8 | $e^4$ | 23 | $\ln 4$ |
| 9 | $e^5$ | 24 | $\sqrt{2}$ |
| 10 | $e^6$ | 25 | $\sqrt{3}$ |
| 11 | $\sin 1$ | 26 | $\sqrt{5}$ |
| 12 | $\sin 2$ | 27 | $\sqrt[3]{2}$ |
| 13 | $\sin 3$ | 28 | $\sqrt[3]{3}$ |
| 14 | $\sin 4$ | 29 | $\sqrt[3]{5}$ |
| 15 | $\sin 5$ | 30 | $\sin(\sin 1)$ |

## 2.6 Обчислення границь за допомогою формули Тейлора

Розглянемо декілька прикладів.

**Приклад 19.** *За допомогою формули Тейлора обчислити границю:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}\,.$$

*Розв'язання.* Зручно скористатися формулою Тейлора з залишковим членом у формі Пеано, а само розкладами функції $\cos x$ та $e^x$ на сторінках 47–48. За цими розкладами отримаємо:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\,,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\,.$$

Звідси

$$\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4} \to -\frac{1}{12}\,, \quad x \to 0\,.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{12}\,.$ □

**Приклад 20.** *За допомогою формули Тейлора обчислити границю:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}\,.$$

*Розв'язання.* Зручно скористатися формулою Тейлора з залишковим членом у формі Пеано, а само розкладами функції $\sin x$ та $e^x$ на сторінках 47–48. За цими розкладами отримаємо:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\,,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\,.$$

Звідси

$$\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{36} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} \to \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\,, \quad x \to 0\,.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$□

## 2.7 Завдання для самостійної роботи № 10

**Задача 10.** *Обчислити границі функцій за допомогою формули Тейлора для кожного з варіантів*

| Варіант | Границя | Варіант | Границя |
|---|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ | 16 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{5x}-\frac{1}{\sin 5x}\right)$ |
| 2 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin 5x}\right)$ | 17 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{6x}-\frac{1}{\sin 6x}\right)$ |
| 3 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{5x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ | 18 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{7x}-\frac{1}{\sin 7x}\right)$ |
| 4 | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)-\frac{1}{3}x^3}{x^4}$ | 19 | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$ |
| 5 | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)-\frac{1}{3}x^3}{x^5}$ | 20 | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2},\quad a>0$ |
| 6 | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)-\frac{1}{3}x^3+\frac{x^5}{12}}{x^6}$ | 21 | $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ |
| 7 | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ | 22 | $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}$ |
| 8 | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^2}$ | 23 | $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}$ |
| 9 | $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^4}$ | 24 | $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[4]{x^5+x^4}-\sqrt[4]{x^5-x^4}$ |
| 10 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos x-1}\right)$ | 25 | $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^5-x^6}}{x}$ |
| 11 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos 2x-1}\right)$ | 26 | $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^4-x^5}}{x}$ |
| 12 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\cos x-1}\right)$ | 27 | $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$ |
| 13 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ | 28 | $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x})$ |
| 14 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ | 29 | $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-3\sqrt{x})$ |
| 15 | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{-x}-1}\right)$ | 30 | $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-3x)$ |

# РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

[1] Давидов М.О. *Курс математичного аналізу. Ч. 1.* – К.: Вища школа, 1990.

[2] *Практикум з вищої математики: Навчальний посібник.* За ред. В.О. Коваля. — Житомир: ЖДТУ, 2008.

[3] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз. Частина I.* – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2022.

[4] Довгопятий О.П., Севостьянов Є.О., Таргонський А.Л. *Математичний аналіз. Частина II.* – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2023.

[5] Денисьєвський М.О., Курченко О.О., Нагорний В.Н., Нестеренко О.Н., Петрова О.Н., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної.* — К.: ВПЦ «Київський університет», 2005.

[6] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак.* 4-те вид. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013.