

*Огінська Марина,
учениця 11 класу (31 група) ліцею №1 міста Житомира
Науковий керівник: Коломієць Таміла,
доктор філософії,
старший викладач кафедри математичного
аналізу, бізнес-аналізу та статистики
Житомирський державний університет імені Івана Франка*

ДИСКРЕТНИЙ ТА ІНТЕРВАЛЬНИЙ РЯДИ РОЗПОДІЛУ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОЇ ВИБІРКИ. ПОЛІГОН І ГІСТОГРАМА

Статтю присвячено застосуванню основних понять теорії статистики [1–3], зокрема математичної статистики [4–6], для побудови дискретного та інтервального статистичних рядів розподілу вибірки, вибраної з множини комплексних чисел [7]. Наведено графічне зображення комплекснозначної вибірки у вигляді 3D-полігону та 2D-гістограми з використанням мови програмування JavaScript [8].

Основні результати. Розглянемо алгоритми побудови дискретних та інтервальних статистичних рядів розподілу комплекснозначної вибірки (відповідно до запропонованих нижче способів порівняння комплексних чисел) за аналогом алгоритму побудови дискретного ряду розподілу дійснозначної вибірки.

Нехай $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{C} = \{z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}\}$ – множина комплексних чисел.

Алгоритм побудови дискретного статистичного ряду розподілу комплекснозначної вибірки, використовуючи порівняння комплексних чисел за їх модулем:

1. Знайти обсяг сукупності $n \in \mathbb{N}$ – кількість елементів у вибірці (об'єм вибірки).

2. Побудувати варіаційний ряд розподілу – записати значення комплексних варіант $z_j \in \mathbb{C}$ вибірки у порядку зростання, використовуючи алгоритм порівняння комплексних чисел за їх модулем $|z_j| \in \mathbb{R}$.

3. Знайти частоти $n_j \in \mathbb{N}$ зустрічі комплексних варіант $z_j \in \mathbb{C}$ у вибірці відповідно до їх модулів $|z_j| \in \mathbb{R}$.

4. Результати оформити у вигляді таблиці (таблиця 1).

Таблиця 1

Дискретний ряд розподілу за модулем комплексного числа

z_j	z_1	z_2	z_3	...	z_{k-1}	z_k
$ z_j $	$ z_1 $	$ z_2 $	$ z_3 $...	$ z_{k-1} $	$ z_k $
n_j	n_1	n_2	n_3	...	n_{k-1}	n_k

Для дискретного ряду розподілу комплекснозначної вибірки, заданого таблицею 1, виконується умова

$$\sum_{j=1}^k n_j = n. \quad (1)$$

Алгоритм побудови дискретного статистичного ряду розподілу комплекснозначної вибірки, використовуючи порівняння комплексних чисел за їх дійсними та / або уявними частинами:

1. Знайти обсяг сукупності $n \in \mathbb{N}$ – кількість елементів у вибірці (об'єм вибірки).

2. Побудувати варіаційний ряд розподілу – записати значення комплексних варіант $z_j \in \mathbb{C}$ вибірки у порядку зростання, порівнюючи комплексні числа за їх дійсними $\text{Re}(z)$ та / або уявними $\text{Im}(z)$ частинами.

3. Знайти частоти $n_j \in \mathbb{N}$ зустрічі комплексних варіант $z_j \in \mathbb{C}$ у вибірці відповідно до їх дійсних $\text{Re}(z)$ та / або уявних $\text{Im}(z)$ частин.

4. Результати оформити у вигляді таблиці (таблиця 2).

Таблиця 2

Дискретний ряд розподілу за дійсною та / або уявною частинами комплексного числа

z_j	z_1	z_2	z_3	...	z_{k-1}	z_k
-------	-------	-------	-------	-----	-----------	-------

n_j n_1 n_2 n_3 ... n_{k-1} n_k

Для дискретного ряду розподілу комплекснозначної вибірки, заданого таблицею 2, також виконується умова (1).

Алгоритм побудови інтервального статистичного ряду розподілу комплекснозначної вибірки, впорядкованої за модулем комплексного числа:

1. Знайти обсяг сукупності $n \in \mathbb{N}$ – кількість елементів у вибірці (об'єм вибірки).

2. Визначити кількість інтервалів $l \in \mathbb{N}$ за формулою Стерджеса (l округлити до цілого числа):

$$l = 1 + 3,322 \cdot \lg n.$$

3. Знайти мінімальне $z_{min} \in \mathbb{C}$ і максимальне $z_{max} \in \mathbb{C}$ значення вибірки, використовуючи алгоритм порівняння комплексних чисел за їх модулем $|z_j| \in \mathbb{R}$.

4. Визначити ширину одного інтервалу $h \in \mathbb{C}$ за формулою:

$$h = \frac{z_{max} - z_{min}}{l}.$$

5. Знайти межі інтервалів $z_j [z_j; z_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots, l$, тобто

$$z_1 = z_{min}, z_2 = z_1 + h, \dots, z_k = z_{k-1} + h, z_{k+1} = z_k + h.$$

6. Записати кількість спостережень в кожному інтервал (частоти n_j , $j = 1, 2, \dots, k$), тобто число комплексних варіант z_j , $j = 1, 2, \dots, k$, які входять до відповідних інтервалів $[z_j; z_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots, k$.

7. Результати оформити у вигляді таблиці (таблиця 3).

Таблиця 3

Інтервальний ряд розподілу за модулем комплексного числа

$[z_j; z_{j+1})$	$[z_1; z_2)$	$[z_2; z_3)$	$[z_3; z_4)$...	$[z_{k-1}; z_k)$	$[z_k; z_{k+1}]$
n_j	n_1	n_2	n_3	...	n_{k-1}	n_k

Для інтервального статистичного ряду розподілу, заданого таблицею 3, виконується умова (1).

Алгоритм інтервального статистичного ряду розподілу комплекснозначної вибірки, використовуючи порівняння комплексних чисел за їх дійсними та / або уявними частинами є аналогічним до алгоритму дійснозначної вибірки.

Метод побудови дискретного та інтервального рядів розподілу комплекснозначної вибірки за наведеними вище алгоритмами не є достатньо інформативним, оскільки при аналізі окремо дійсної та уявної частин, а також модуля комплексного числа, втрачається інформація про початкову послідовність комплексних чисел.

Запропонуємо узагальнений алгоритм побудови дискретного та інтервального статистичних рядів розподілу комплекснозначної вибірки, який враховує алгебраїчну форму комплексних чисел, заданих у вибірці.

Алгоритм побудови дискретного та інтервального статистичного ряду розподілу комплекснозначної вибірки, враховуючи алгебраїчну форму комплексних чисел:

1. Знайти обсяг сукупності $n \in \mathbb{N}$ – кількість елементів у вибірці з комплексних чисел (об'єм вибірки).

2. Знайти частоту n_k появи кожного комплексного числа z_k , $k = 1, 2, \dots, n$ у вибірці.

3. Відсортувати масив комплексних чисел за їх модулями, тобто записати у порядку зростання модулів. Всі подальші дії виконуються з відсортованим масивом.

4. Починаючи з першого числа у тривимірній системі координат, побудувати послідовність точок, де $x = \text{Re}(z_k)$, $y = \text{Im}(z_k)$, $z = n_k$, тобто частоті появи відповідного числа z_k .

5. Побудовану послідовність точок з'єднати ламаною лінією та знайти її довжину L . Ця ламана лінія є 3D-полігоном частот дискретного розподілу комплексних чисел.

6. Визначити кількість інтервалів $l \in \mathbb{N}$ за формулою Стерджеса (l округлити до цілого числа):

$$l = 1 + 3,322 \cdot \lg n.$$

7. Знайти довжину інтервалу h , яка дорівнює довжині ламаної лінії L поділеної на кількість інтервалів l , тобто

$$h = \frac{L}{l}.$$

8. Починаючи з першої точки, вздовж ламаної лінії L відкласти довжину інтервалу h . Визначити, скільки комплексних чисел (з урахуванням частоти їх появи) потрапило в перший інтервал $[z_j; z_{j+1})$.

Координати початкової та кінцевої точок цього інтервалу записати в новий масив, на основі якого далі буде побудовано 2D-гістограму, що являє собою плоске зображення розподілу кількості комплексних чисел.

9. Повторювати дії пункту 8 до останньої точки. Остання межа l -го інтервалу входить в цей інтервал і співпадає з найбільшим за модулем комплексним числом у заданій вибірці, тобто $z_l = z_n$.

10. На основі масиву, сформованого в пунктах 8 і 9, побудувати 2D-гістограму: на осі x відкласти модулі комплексних чисел $|z_j| \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, l$, що відповідають межам інтервалів; на осі y відкласти кількість комплексних чисел, що потрапили в даний інтервал.

11. Результати оформити у вигляді таблиці (таблиця 4).

Таблиця 4

Статистичний ряд розподілу комплекснозначної вибірки з урахуванням алгебраїчної форми комплексного числа

$[z_j; z_{j+1})$	$[z_1; z_2)$	$[z_2; z_3)$	$[z_3; z_4)$...	$[z_{l-1}; z_l = z_n]$
n_j	n_1	n_2	n_3	...	n_l

Для інтервального ряду розподілу комплекснозначної вибірки, заданого таблицею 4, також виконується умова (1).

Наведемо приклад графічних зображень дискретного та інтервального статистичних рядів розподілу комплекснозначної вибірки.

Приклад. Побудувати 3D-полігон дискретного та 2D-гістограму інтервального статистичних рядів розподілу комплекснозначної вибірки, що задана таблицею 5, використовуючи мову програмування JavaScript.

Таблиця 5

Вибірка з множини комплексних чисел \mathbb{C}

$3 + 4i$	$-4 + i$	$2 + 3i$	$4 + 2i$	$-3 + 4i$
$-4 + 3i$	$1 - 2i$	$5 + 3i$	$1 - 2i$	$1 - 2i$
$3 + 4i$	$2 + 4i$	$4 + 5i$	$4 - 5i$	$2 - 3i$
$1 - 2i$	$5 + 3i$	$1 + 3i$	$-1 + 3i$	$2 - 3i$

Скориставшись мовою програмування JavaScript за посиланням <https://9d6d0825-41d2-47f7-891b-875797e6f902-00-1s2rz3cfthtn4.picard.replit.dev>, одержуємо графіки 3D-полігону та 2D-гістограми відповідних розподілів комплексних чисел (рис. 1, рис. 2).

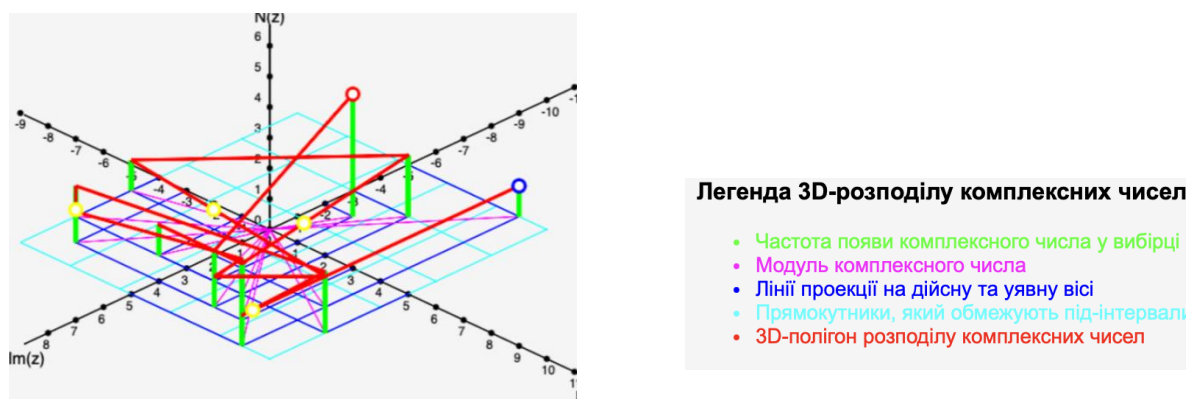


Рис. 1. 3D-полігон розподілу комплексних чисел.

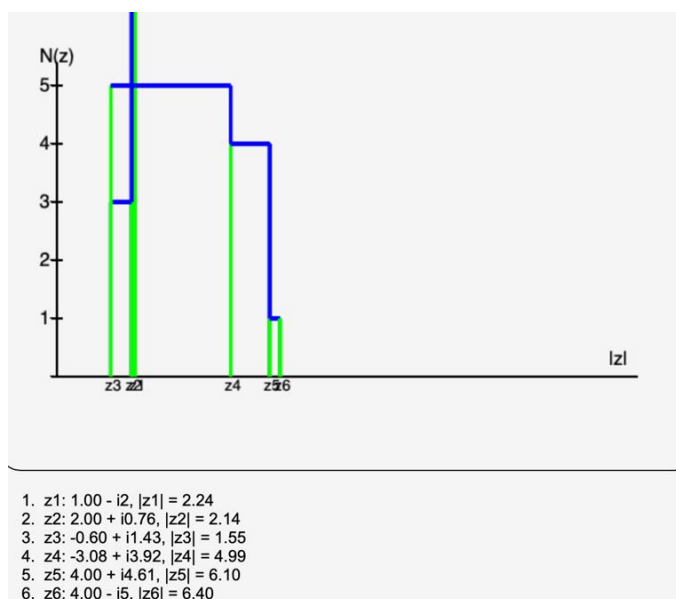


Рис. 2. 2D-гістограма розподілу комплексних чисел.

Висновки. Запропоновано алгоритми побудови дискретного та інтервального статистичних рядів розподілу комплекснозначної вибірки відповідно до способу порівняння комплексних чисел (за модулем комплексного числа, за дійсною та / або уявною частинами комплексних чисел і з урахуванням алгебраїчної форми комплексного числа). Наведено приклад графічного зображення дискретного статистичного ряду розподілу комплекснозначної вибірки у вигляді 3D-полігону частот та інтервального статистичного ряду розподілу комплекснозначної вибірки у вигляді 2D-гістограми частот з використанням мови програмування JavaScript. Такий спосіб побудови є найбільш точним та інформативним, оскільки, враховуючи алгебраїчну форму комплексного числа, охоплює всі комплексні числа, задані у вибірці.

Список використаних джерел та літератури

1. Бідюк П. І., Данилов В. Я., Жиров О. Л. *Прикладна статистика: навч. посібник*. Київ: КПІ ім. І. Сікорського, 2023. 186 с.
2. Ковтун Н. В. *Теорія статистики: підручник*. Кив: Знання, 2012. 400 с.
3. Щурик М. В., Ключенко А. В. *Статистика: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. усіх рівнів акредит. – 3-тє вид., оновлене і доповнене*. Івано-Франківськ: НАІР, 2016. 274 с.
4. Конет І. М., Недокіс В. А. *Практикум з математичної статистики: навчальний посібник*. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011. 252 с.
5. Огірко О. І., Галайко Н. В. *Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник*. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
6. Руденко В. М. *Математична статистика: навч. посіб.* К.: Центр учбової літератури, 2012. 304 с.
7. Щоголев С. А. *Комплексні числа: навчально-методичний посібник*. Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2015. 44 с.
8. David Flanagan – JavaScript. The Definitive Guide. Master the World's Most-Used Programming Language 7th Edition – O'Reilly, 2020. 706 p.