Щехорський Анатолій
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики
Житомирський державний університет імені Івана Франка

АЛГОРИТМИ ПОХІДНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Відображення f евклідових просторів R^m в R^n називають складним, якщо його можна задати як суперпозиція функцій $Y = f(G(X)), Y = (y_1,..., y_n), X = (x_1,..., x_m), f = (f_1,..., f_n), G = (g_1,..., g_k)$. Важливим питанням є отримання формул частинних похідних, повних диференціалів довільного порядку за аргументами складних відображень. Відомий окремий випадок складної формули похідної для функції двох змінних, коли зовнішня функція f є добуток функцій – формула Лейбніца, $F(x) = f(g_1(x), g_2(x)) = g_1(x)g_2(x)$,її можна отримати методом математичної індукції по порядку похідної і на кінець, записати код алгоритму на алгоритмічних мовах символьної математики.

Знайти методом математичної індукції алгоритм похідної, навіть для складної функцій однієї змінної $F(x) = f(g(x))$, неможливо по причині появи при кожному диференціюванні нових доданків, які не є індуктивним продовженням доданків попередніх диференціювань. Виникає проблема знаходження структурних форм похідних складних функцій і їх алгоритмічного використання.

Мета статті. На нинішній час структурної форми похідної складної функції, для практичного її використання, не існує за відсутності алгоритму її утворення. В статті така форма пропонується, а також програмний продукт створення її алгоритму з використанням систем комп'ютерної математики.

Виклад основного матеріалу. Оскільки прямої рекурентної формули для похідної складної функції n-го порядку не існує, то її подання можливе у символічному вигляді. Для складної функції $F(x) = f(g_1(x),..., g_k(x))$ зовнішню похідну по змінній $g_s(1 \leq s \leq k)$ позначимо через $D_1 f$, а і – ту похідну від функції $g(x)$ – через $g^{(i)}(x)$. Похідну s -того порядку від функції $F(x)$ позначимо як результат дії на функцію f лінійного оператора $A_s(g_1,..., g_k)$ порядку s з коефіцієнтами, залежними від функцій $g_1(x),...,g_k(x)$ і їх похідних , C_n^k - число комбінацій із *n* – елементів по *k* елементів.

Теорема 1. Для похідної складної функції багатьох змінних має місце символічна формула

$$F^{(n)}(x)=\begin{vmatrix} g_1^{'} & g_2^{'} & g_3^{''} & ,\dots, & A_n(g_1,...,g_k) \\ -1 & g_1^{'}D_1 & C_2^1 g_2^{'}D_1,\dots & , & C_m^1 A_{n-1}(g_1,...,g_k) \\ 0 & -1 & g_1^{'}D_1 & ,..., & C_n^2 A_{n-2}(g_1,...,g_k) \\ . & . & . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 & 0 & ,\dots, & C_n^{n-1} A_1(g_1,...,g_k) \\ 0 & 0 & 0 & ,...., & g_1^{'}D_1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Слід зауважити, що формула (1) носить назву символьної завдяки умовної заміни оператора при обчисленні визначника оператора зовнішнього диференціювання на операцію множення.

Формулу (1) можна отримати індукцією по порядку похідної функції *F(x)*. Для *n = 1.2* формула (1) перевіряється безпосередньо. Нехай формула (1) справедлива для похідної *n*-го порядку. Будемо вважати, що $A_0(g_1,...,g_k)$ одиничний оператор. Розклад визначника кожен раз за елементами останньої строчки приводить до рекурентної формули

$$F^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n} C_{n-i}^{i} A_{n-i}(g_1)A_i(g_2,...,g_k)f \qquad (2)$$

Досить довести, що формула (2) має місце і для похідної $\boldsymbol{F^{(n+1)}(x)}$.

$$F^{(n)}(x)=\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i A_{n-i}(g_1)A_i(g_2,...,g_k)f\right)=\sum_{i=0}^{n} C_n^i A_{n-i+1}(g_1)A_i(g_2,...,g_k)f+$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i A_{n-1}(g_1)A_{i+1}(g_2,...,g_k)f=A_{n+1}(g_1)f+\sum_{i=1}^{n}(C_n^i+C_n^{i-1})A_{n-i+1}(g_1)A_i(g_2,...,g_k)f+$$

$$A_{n+1}(g_2,...,g_k)f=\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i A_{n-i+1}(g_1)A_i(g_2,...,g_k)f$$

Зауважимо, коли оператор $A(g_0)$ вважати нульовим і покласти в теоремі 1 $k=0$, то отримаємо символьну формулу для похідної складної функції однієї змінної

$$F^{(n)}(x)=\begin{vmatrix} g_1^{'} & g_2^{'} & g_3{''} & ,\ldots, & g^{(n)} \\ -1 & g_1^{'}D & C_2^1 g_2^{'}D,\ldots\ , & & C_m^1 g^{(n-1)}D \\ 0 & -1 & g_1^{'}D & ,\ldots, & C_n^2 g^{(n-2)}D \\ . & . & . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 & 0 & ,\ldots, & C_n^{n-1} g^{(1)'}D \\ 0 & 0 & 0 & ,\ldots., & g_1^{'}D \end{vmatrix} Df$$

Формула для похідної однієї змінної має символічний вид ще тому, що для її практичного використання потрібно мати числові значення елементів-функцій визначника (3),, які можна отримати при його розкритті за елементами останньої строчки ,

$$F^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^{i} g^{(n-i)}(x) A_{n-i}(g_1) f \qquad (3)$$

Теоретично, розкриття визначників $A_{n-i}(g_1)$ приводить до скалярного добутку вектора похідних функції $f^{(i)}(g)$ і вектора, елементи якого є лінійні комбінації похідних функції $g(x)$ (коефіцієнти при похідних функції $f^{(i)}(g)$). Рекурентним утворенням отримані коефіцієнти при старших похідних функції f не підлягають. Фактично, виникає проблема отримання виду многочлена відносно старшої похідної функції f за кожним кроком її диференціювання по аргументу g . Такий многочлен отримано завдяки побудованому алгоритму з використанням програмного ресурсу систем комп'ютерної математики таких як, Mathematic, Maple, Mathcad Pro, Mathcad Prime, MatLab та інші. На Рис.1 приведені фрагменти в системі Mathcad Pro [1] виводу результатів коду многочленів другого і третього порядків похідної складної функції

$$H\cdot r \to \overline{\frac{d^2}{dg^2}f(g)}\cdot\left(\frac{d}{dx}g(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}g(x)\cdot C_{0,0}\cdot C_{1,2}+\frac{d}{dx}g(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}g(x)\cdot C_{0,1}\cdot C_{2,2}\right)+\frac{d^3}{dx^3}g(x)\cdot\overline{\frac{d}{dg}f(g)}\cdot C_{0,2}+\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)^3\cdot\overline{\frac{d^3}{dg^3}f(g)}\cdot C_{0,0}\cdot C_{1,1}\cdot C_{2,}$$

$$H\cdot r \to \overline{\frac{d^2}{dg^2}f(g)}\cdot C_{0,0}\cdot C_{1,1}\cdot\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)^2+\frac{d^2}{dx^2}g(x)\cdot\overline{\frac{d}{dg}f(g)}\cdot C_{0,1}$$

Рис.1

Фрагменти програми (Рис.1) дають відповідь на питання неможливості отримати рекурентну формулу похідної складної функції. Доведено методом кодової індукції, що наступна похідна від попереднього виразу похідної формує додаткові члени, які не входять в попередні вирази і не є рекурентними отриманим. Отриманий алгоритм дає можливість мати тільки структуру додаткових членів.

Безпосереднє визначення числового значення похідної *n*-го порядку складної функції не викликає утруднень. Використання приведених формул доцільне, коли треба мати символьний вектор похідних від *1*-го до *n*-го порядку в теоретичних дослідженнях. В чисельних дослідженнях виникає потреба задовольнити початкові умови Коші розв'язку диференціального рівняння, який є складною функцією, або отримати рекурентні його оцінки.

Висновки та перспективи подальших досліджень . Створена програма дозволяє в перспективі записати код похідних довільного порядку не тільки для комп'ютерних систем, які мають ядро символьної математики, але і для інших комп'ютерних систем наприклад, для Python заміною оператора диференціювання різницевим оператором.

Список використаних джерел та літератури.

1. Кондрат А. М., Кондрат М. М. Науково-технічні обчислення засобами Mathcad. Навч. посібник. Рівне НУВГП, 2014. 252 с.