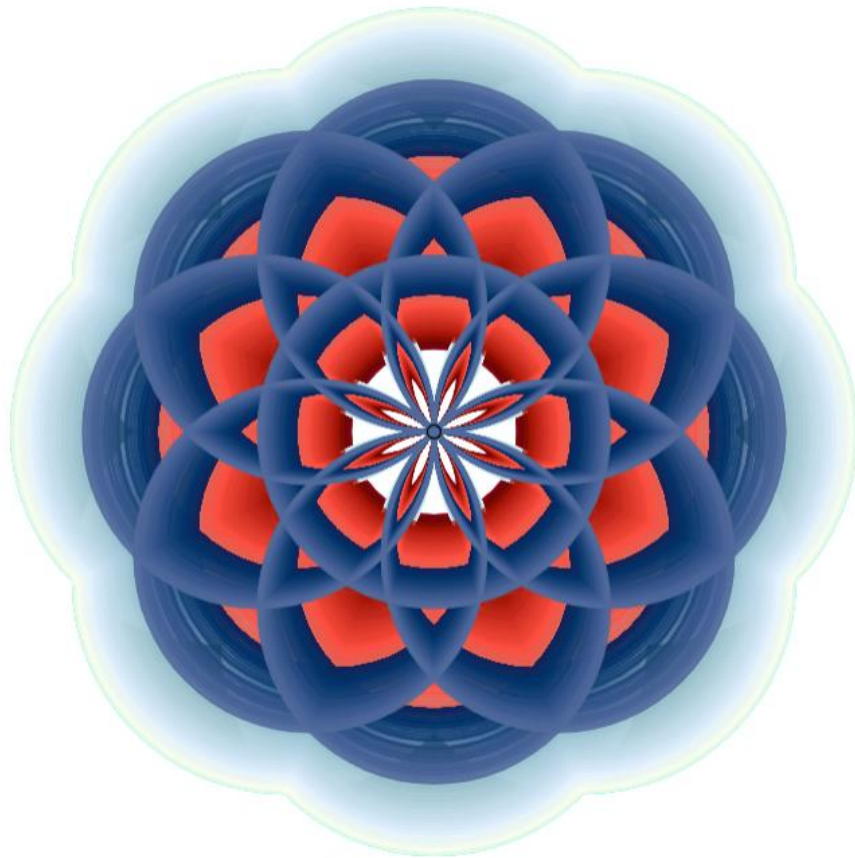


Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Ольга Чемерис, Алла Прус, Олена Фонарюк

Майстерня GeoGebra: практичний підхід до візуалізації математики

методичні рекомендації



Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка

2024

УДК 514.115:514.174

Ч 42

*Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного
університету імені Івана Франка
(протокол № 20 від 25.10.2024 р.)*

Рецензенти:

Журавльов Валерій – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету;

Королюк Олена – кандидат педагогічних наук, доцент, викладач математики вищої категорії, викладач-методист Відокремленого структурного підрозділу «Житомирський автомобільно-дорожній фаховий коледж Національного транспортного університету»;

Мосіюк Олександр – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Житомирського державного університету імені Івана Франка

Чемерис О.

Ч 42 Майстерня GeoGebra: практичний підхід до візуалізації математики : методичні рекомендації / Ольга Чемерис, Алла Прус, Олена Фонарюк. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. 46 с.

Методичні рекомендації пропонують практичний підхід до вивчення математики, допомагають читачам краще зрозуміти та візуалізувати математичні поняття. Посібник містить численні приклади для відтворення, що сприяє розвитку навичок роботи з GeoGebra та підвищує ефективність навчального процесу.

Для вчителів, викладачів та здобувачів, які прагнуть ефективно використовувати програму GeoGebra для вивчення та викладання математики.

УДК 514.115:514.174

© Ольга Чемерис, Алла Прус, Олена Фонарюк, 2024

© Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024

ЗМІСТ

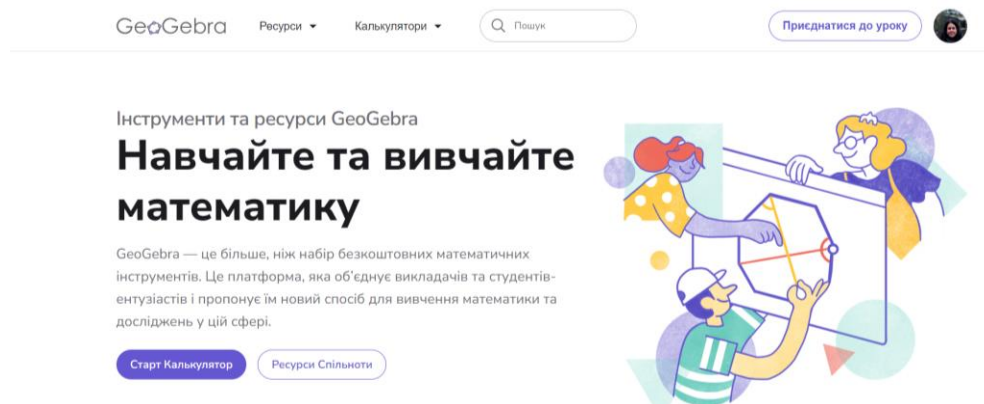
ВСТУП	3
Тема 1. Знайомство з середовищем GeoGebra та його функціоналом	5
Тема 2. Інструменти для побудови геометричних фігур на площині	7
Тема 3. Створення динамічних моделей для закріплення властивостей планіметричних фігур	15
Тема 4. Інструменти для геометричних побудов у просторі	20
Тема 5. Створення динамічних моделей для розв'язування задач зі стереометрії	25
Тема 6. Системи комп'ютерної алгебри	29
Тема 7. Функції та їх дослідження	34
Тема 8. Моделювання в середовищі GeoGebra	40
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ТА РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ	45

ВСТУП

Сьогодні вчителі математики заохочуються до викладання математики з використанням новітніх технологій для розвитку математичного мислення учнів. А програмне забезпечення, відоме як GeoGebra, є одним з найефективніших освітніх програм для викладання та вивчення математики і є найбільш висвітленою технологією для супроводу навчальних програм з математики.

GeoGebra — це безкоштовне динамічне програмне забезпечення для вивчення та викладання математики, яке об'єднує геометрію, алгебру, таблиці, графіки, статистику та математичні розрахунки в одному зручному інструменті. GeoGebra широко використовується в освітніх установах по всьому світу для підтримки математичної освіти. До речі, GeoGebra – кросплатформне програмне забезпечення, яке працює на різних операційних системах (Windows, macOS, Linux) та мобільних пристроях (iOS, Android).

Стартова сторінка середовища виглядає таким чином (<https://www.geogebra.org/>):



Далі для роботи можна обрати калькулятор чи застосунок середовища:

**Калькулятор Сюїта**

Вивчення функцій, розв'язування рівнянь, побудова геометричних фігур

**Графічний Калькулятор**

Візуалізація рівнянь і функцій за допомогою інтерактивних графіків

**Геометрія**

Вивчення геометричних понять і побудов у динамічному середовищі

**3D Калькулятор**

Побудова графіків функцій і виконання побудов у 3D

**Науковий Калькулятор**

Виконання обчислень з дробами, статистичними та експоненціальними функціями

**Нотатки**

Використання пакету додатків, включаючи безкоштовні інструменти для геометрії, електронних таблиць і СКА

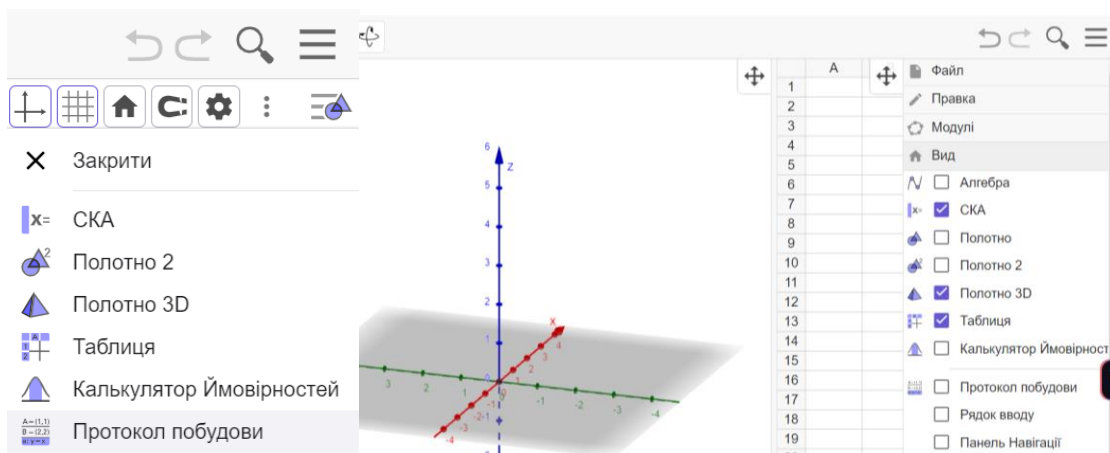
Можна здійснити перехід для вибору калькулятора, зокрема:

- графічного (<https://www.geogebra.org/graphing>),
- Сюїта (<https://www.geogebra.org/calculator>),
- наукового (<https://www.geogebra.org/scientific>) тощо

Нагадаємо основні можливості GeoGebra:

геометрія	побудова геометричних фігур, проведення вимірювань та здійснення анімацій
алгебра	робота з рівняннями та виразами, графічне представлення алгебраїчних функцій
таблиці	використання таблиць для збереження та аналізу даних
графіки	побудова графіків функцій та їх взаємодія з іншими математичними об'єктами
статистика	виконання статистичного аналізу даних
математичні розрахунки	використання інструментів для числових та символічних обчислень

Класичний застосунок (<https://www.geogebra.org/classic>) дає можливість обрати як одне полотно для роботи, так і декілька:



Відповідно до теми занять наводимо власні приклади побудов та розв'язань у середовищі (<https://www.geogebra.org/u/chemeryswork#people>).

Тема 1. Знайомство з середовищем GeoGebra та його функціоналом

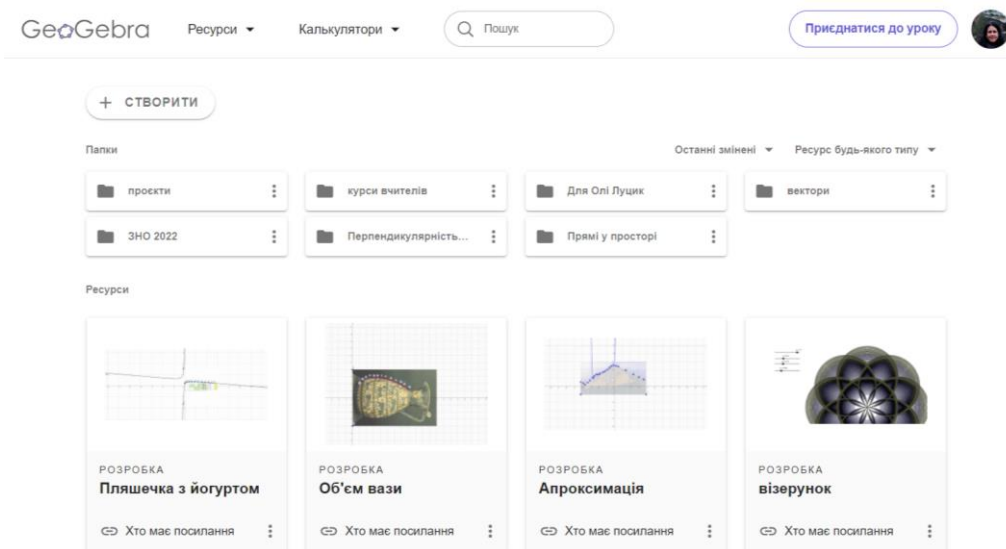
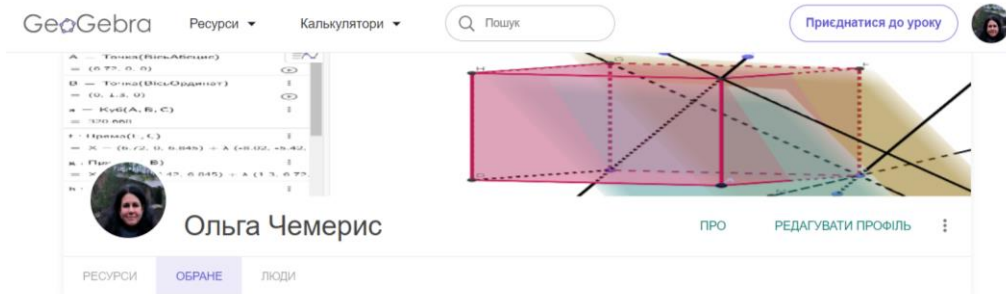
GeoGebra – це потужний інструмент, який використовується для візуалізації та дослідження математичних концепцій.

Рекомендуємо ознайомитись з посібниками, у яких здійснено детальний опис інструментів середовища для побудов планіметричних та стереометричних фігур:

Ракута В. М. GeoGebra 5.0 для вчителів математики. Планіметрія (оновлена та доповнена): Навчальний посібник. – Чернігів: ЧОІППО ім. К. Д. Ушинського, 2020. – 74 с.

Ракута В. М. GeoGebra для вчителів математики. Стереометрія: навчальний посібник. – 2021. – 102 с.

Також радимо створити власний обліковий запис в середовищі GeoGebra. Це дозволить зберегти моделі чи розрахунки для подальшої роботи над ними, вносити зміни, ділитись розробками та полегшить етап перевірки. Також в обліковому записі можна організувати тематичне збереження файлів у папки та колекції.



Розпочати роботу в GeoGebra досить просто. Ось основні кроки, які допоможуть почати:

Крок 1. Завантаження та встановлення:

- відвідайте офіційний сайт [GeoGebra] (<https://www.geogebra.org/>);
- натисніть на кнопку "Download" (Завантажити) на головній сторінці;
- виберіть потрібну версію для вашої операційної системи (Windows, macOS, Linux) або мобільний додаток (iOS, Android);
- завантажте та встановіть програму, дотримуючись інструкцій на екрані.

Крок 2. Запуск GeoGebra:

- відкрийте встановлений додаток GeoGebra на вашому пристрої;
- ви побачите головне вікно з різними інструментами та панелями.

Крок 3. Основні елементи інтерфейсу:

- полотно: робоча область, де ви будете створювати та маніпулювати математичними об'єктами.
- панель інструментів: знаходиться, зазвичай, зліва або зверху, містить інструменти для побудови точок, ліній, кіл, багатокутників тощо.
- протокол побудови: показує алгебраїчні представлення об'єктів, створених у робочій області;

- панель властивостей: дозволяє налаштовувати властивості обраного об'єкта (колір, стиль лінії, тощо).

Крок 4. Створення першого проекту (прикладу):

- створення точки: оберіть інструмент "Точка" на інструментальній панелі та натисніть у робочій області, щоб створити точку;
- проведення прямої: оберіть інструмент "Пряма" і клацніть дві точки у робочій області для побудови прямої через них;
- побудова кола: оберіть інструмент "Коло" і клацніть одну точку для центра кола, а потім іншу точку для визначення радіуса і т.д.

Крок 5. Використання команд:

- у нижній частині вікна є командний рядок, де ви можете вводити математичні команди (клавіатура). Наприклад, введіть « $y = 2x + 3$ », щоб побудувати графік лінійної функції;
- використовуйте команди для створення складніших об'єктів та обчислень.

Крок 6. Збереження та експорт:

- натисніть на меню "File" (Файл) і виберіть "Save" (Зберегти), щоб зберегти ваш проект;
- ви можете експортувати ваші проекти в різних форматах, таких як PNG, PDF або GGB (рідний формат для GeoGebra).

Крок 7. Додаткові ресурси:

- відвідайте [GeoGebra Tube] (<https://www.geogebra.org/m/materials>), щоб знайти готові матеріали та приклади;
- перегляньте відеоуроки на [офіційному YouTube каналі GeoGebra] (<https://www.youtube.com/user/GeoGebraChannel>) для детальніших інструкцій, наприклад:

https://www.youtube.com/watch?v=xK32uosH4us&ab_channel=MathwithDrew

https://www.youtube.com/watch?v=Q9p-Oz8Oyfy&ab_channel=MathwithDrew

https://www.youtube.com/watch?v=1nQt6Tss2oU&ab_channel=MathwithDrew

Тема 2. Інструменти для побудови геометричних фігур на площині

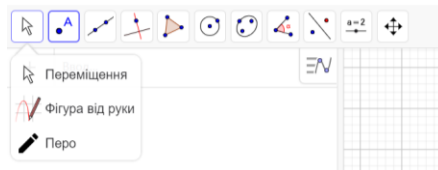
Розберемо вкладки панелі інструментів:

1. **Інструмент «Переміщення»** в GeoGebra є одним з найосновніших та найважливіших інструментів, що забезпечує користувачам можливість взаємодії з об'єктами на екрані. Основні функції цього інструменту:

- переміщення об'єктів: користувач може перетягувати точки, фігури та інші об'єкти, що дозволяє змінювати їх положення на координатній площині.
- переміщення графіка: інструмент дозволяє переміщати весь графік або область креслення, щоб зосередити увагу на певній ділянці або змінити ракурс огляду.
- зміна масштабів: використовуючи колесо миші або жести масштабування (на сенсорних пристроях), можна збільшувати або зменшувати масштаб зображення для детальнішого або загального огляду графіка.
- інтерактивність: переміщення точок дозволяє в реальному часі бачити, як змінюються залежні об'єкти, що дуже корисно для динамічних досліджень функцій та геометричних властивостей.

Приклад використання:

Припустимо, у вас є точка A на площині та коло з центром у точці A . Використовуючи інструмент "Переміщення", ви можете перетягнути точку A в інше місце, і коло автоматично змінить своє положення, зберігаючи той самий радіус, оскільки його центр також переміститься.



2. Інструмент «Точка» в GeoGebra дозволяє створювати різні типи точок на координатній площині. Цей інструмент має декілька вкладок, кожна з яких забезпечує створення різних видів точок. Розглянемо основні можливості цього інструменту.

Інструмент "Точка" дозволяє створювати точку на площині або прив'язувати її до існуючих об'єктів, таких як графіки функцій, прямі або відрізки. Клік на порожній області площини створює вільну точку. Клік на об'єкті (прямій, кривій тощо) створює точку на цьому об'єкті.

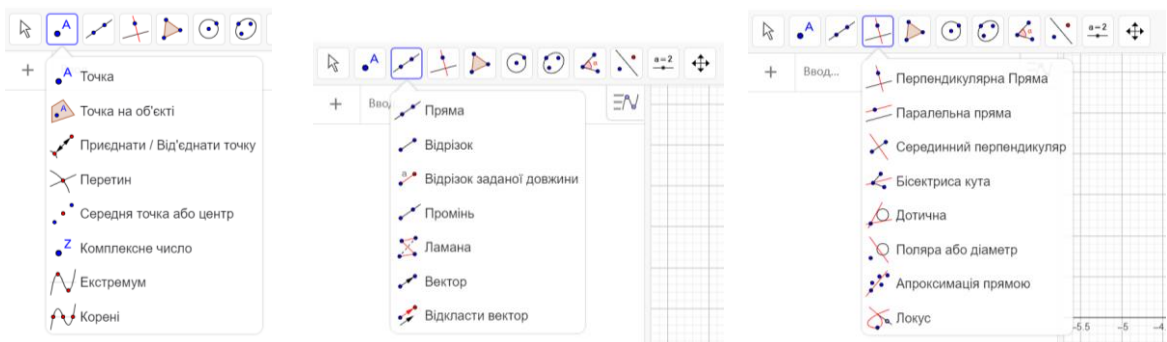
Ще вкладки інструменту "Точка":

- точка на об'єкті: створює точку, яка належить обраному об'єкту (наприклад, точка на колі, прямій або відрізку); точка автоматично рухається разом із зміною об'єкта;

- перетин двох об'єктів: створює точку в місці перетину двох об'єктів (наприклад, точки перетину кола та прямої тощо); якщо об'єкти перетинаються в кількох точках, можна обрати одну з точок.

Також точку можна візуалізувати на площині, ввівши в протокол побудови її координати.

Корисним є створення інтерактивних моделей, де точки рухаються вздовж об'єктів, це допомагає здобувачам зрозуміти залежності між об'єктами.



3. Інструмент «Пряма» в GeoGebra дозволяє створювати різні типи прямих на координатній площині. Цей інструмент має кілька вкладок, кожна з яких забезпечує створення різних видів прямих. Розглянемо основні можливості цього інструменту та його вкладок:

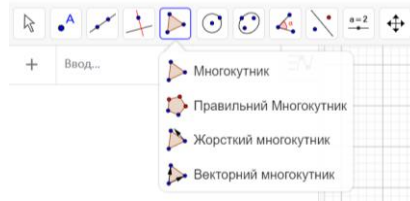
- пряма через дві точки: інструмент дозволяє створювати пряму, яка проходить через дві задані точки; клік на площині створює пряму між двома обраними точками;
- вектор: створює вектор за початкової та кінцевими точками; використовується для вивчення напрямку і довжини векторів;
- промінь: створює промінь, що виходить з початкової точки і проходить через задану точку, продовжуючись в одному напрямку до нескінченності; корисно для вивчення властивостей променів;
- перпендикулярна пряма: створює пряму, перпендикулярну до заданої прямої через зазначену точку; використовується для побудови перпендикулярних ліній;
- паралельна пряма: створює пряму, паралельну до заданої прямої через зазначену точку; використовується для побудови паралельних ліній та інші вкладки.

Створення інтерактивних моделей, де прямі можуть рухатися, змінювати нахил і положення, допомагає здобувачам зрозуміти залежності між об'єктами.

4. **Інструмент «Многокутник»** в GeoGebra дозволяє створювати багатокутники, що складаються з декількох відрізків, з'єднаних між собою, утворюючи замкнену фігуру. Цей інструмент має кілька вкладок, кожна з яких надає різні можливості для створення та дослідження багатокутників. Розглянемо основні функції та можливості інструменту "Многокутник" і його вкладок.

- **многокутник:** дозволяє створити багатокутник, з'єднавши послідовно декілька точок на площині; остання точка автоматично з'єднується з першою, утворюючи замкнену фігуру; корисно для створення трикутників, чотирикутників та інших багатокутників довільної форми; багатокутники можна заливати кольором, застосовується для створення наочних моделей і діаграм;
- **правильний многокутник:** дозволяє створити правильний багатокутник (усі сторони і кути якого рівні) з зазначеною кількістю вершин; користувач вказує дві точки для визначення однієї сторони багатокутника і кількість вершин; GeoGebra автоматично створює правильний багатокутник;
- **многокутник з відомими сторонами:** дозволяє створити багатокутник з відомими довжинами сторін; користувач задає довжини сторін, і GeoGebra автоматично будує багатокутник.

Інструменти дозволяють створювати різні багатокутники, досліджувати їх властивості та взаємозв'язки. Правильні багатокутники можна використовувати для вивчення тригонометричних функцій, кутів і відстаней; для дослідження алгебраїчних рівнянь, нерівностей і функцій. Створення динамічних моделей, де вершини багатокутника можна переміщувати, змінюючи форму і розміри фігури в реальному часі, допомагає здобувачам краще зрозуміти геометричні залежності.

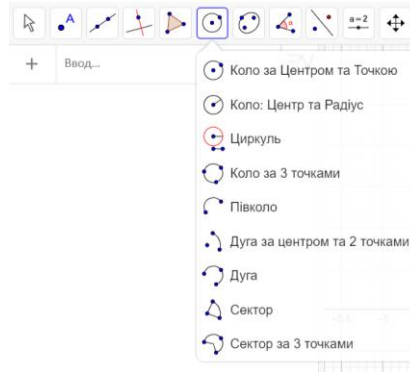


5. **Інструмент «Коло».** В GeoGebra є кілька інструментів та вкладок, призначених для роботи з колами та їх елементами. Ці інструменти дозволяють створювати кола, проводити радіуси, діаметри, хорди, дотичні та січні, а також досліджувати їхні властивості. Розглянемо основні інструменти та вкладки, які допоможуть у вивченні властивостей кола та його елементів.

- коло з центром і точкою: створює коло, визначене центром і точкою на колі; корисно для базових побудов та дослідження властивостей радіуса;
- коло за трьома точками: створює коло, що проходить через три задані точки; використовується для вивчення властивостей кіл, описаних навколо трикутників;
- коло з центром і радіусом: створює коло із заданим центром та радіусом; допомагає у вивченні відношень між радіусом і діаметром, а також інших властивостей кола.

Вкладки для роботи з елементами кола:

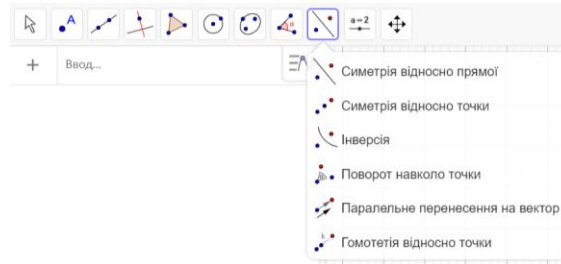
- радіус: створює відрізок від центра кола до будь-якої точки на колі; використовується для вивчення властивостей радіуса і його ролі в колі;
- діаметр: створює відрізок, що проходить через центр кола і з'єднує дві точки на колі; допомагає досліджувати відношення між радіусом і діаметром, а також властивості кола;
- хорда: створює відрізок, що з'єднує дві точки на колі, але не проходить через центр; використовується для вивчення властивостей хорд і їх відношень до інших елементів кола;
- дотична: створює дотичну лінію до кола в заданій точці; допомагає у вивченні властивостей дотичних, зокрема про перпендикулярність їх до радіуса, проведеного у точку дотику;
- січна: створює лінію, що перетинає коло в двох точках; використовується для вивчення властивостей січних і кутів, утворених між січними і дотичними тощо.



6. GeoGebra надає широкий набір інструментів для виконання різних **геометричних перетворень на площині**. Ці інструменти дозволяють здійснювати відображення фігур, переміщення, обертання, масштабування та інші перетворення. Нижче наведено основні інструменти для перетворень на площині в GeoGebra:

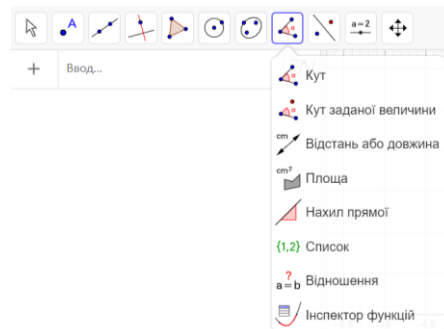
- інструмент "Паралельне перенесення": використовується для переміщення об'єктів на певну відстань і напрямок, можна задати вектор для визначення напрямку перенесення.
- інструмент "Обертання": використовується для обертання об'єктів навколо заданої точки на заданий кут; можна вибрати кут обертання у градусах або радіанах.
- інструмент "Симетрія відносно прямої": використовується для створення дзеркального відображення об'єктів відносно заданої прямої;
- інструмент "Симетрія відносно точки": використовується для створення дзеркального відображення об'єктів відносно заданої точки;
- інструмент "Гомотетія": використовується для масштабування об'єктів відносно заданого центра з заданим коефіцієнтом подібності.

Ці інструменти допомагають здобувачам візуалізувати і розуміти різні геометричні перетворення на площині; досліджувати властивостей фігур, інваріантних при різних перетвореннях (наприклад, площі, кути); для пояснення тригонометричних функцій; для дослідження графіків функцій та їх перетворення через обертання, переміщення і масштабування.

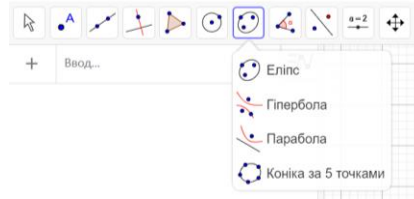


7. Інструменти для вимірювання: GeoGebra надає різні інструменти для вимірювання, які дозволяють обчислювати відстані, кути, площі та інші геометричні характеристики:

- інструмент "Відстань або Довжина": використовується для вимірювання відстані між двома точками або довжини сегмента; дозволяє виміряти довжину ламаної лінії або периметр багатокутника;
- інструмент "Кут": використовується для вимірювання кута між трьома точками або між двома лініями; кут можна виміряти як внутрішній, так і зовнішній;
- інструмент "Площа": використовується для обчислення площі багатокутника або обмеженої області;
- інструмент "Периметр": використовується для обчислення периметра багатокутника або довжини кривої;
- інструмент "Довжина дуги": використовується для вимірювання довжини дуги кола або іншої кривої;



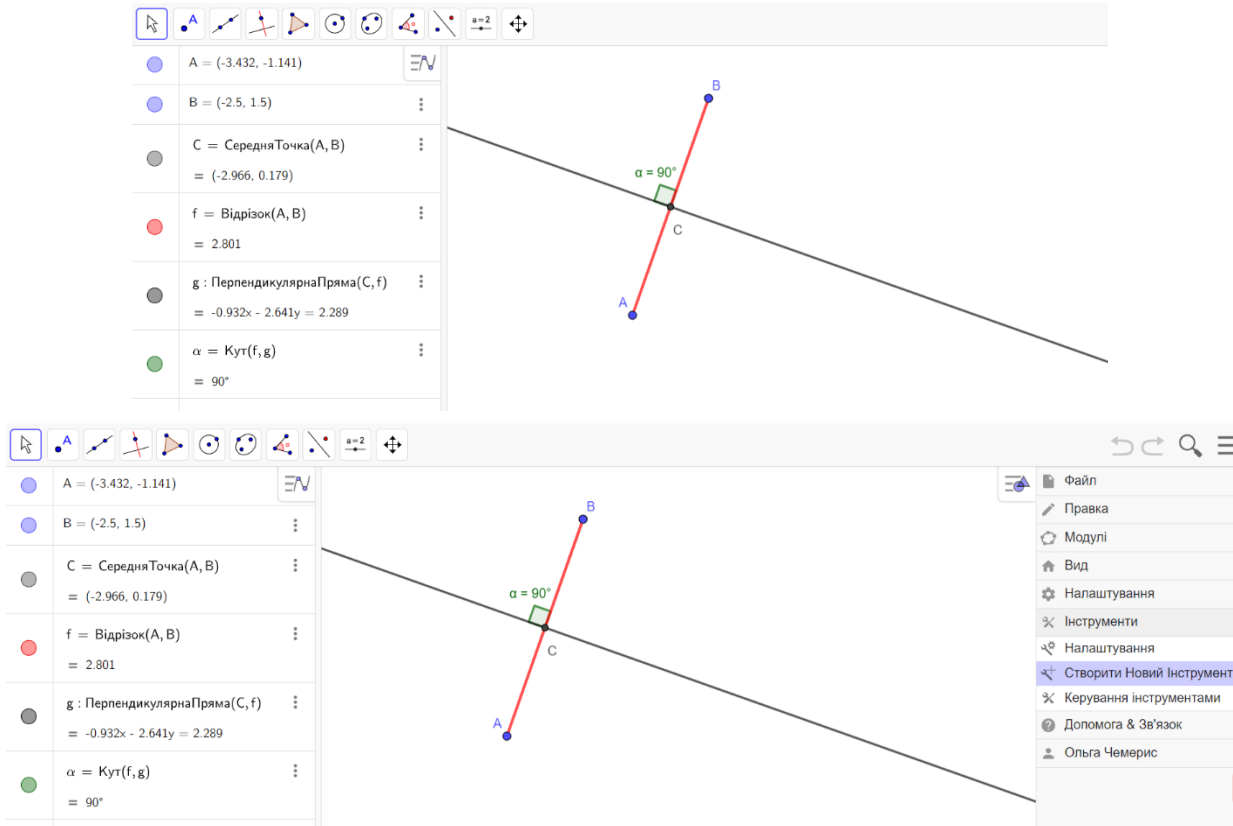
8. Інструменти для створення кривих другого порядку: за п'ятьма точками; за двома фокусами та точкою на кривій (еліпс, гіпербола), за фокусом та директрисою (парабола) тощо.



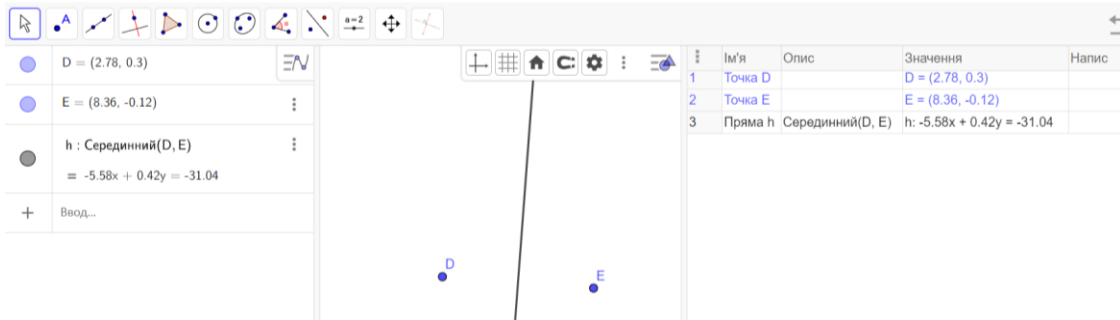
9. **Введення нового інструмента.** У GeoGebra можна створити новий інструмент, який дозволить швидше вийти на результат конкретного етапу побудови моделі в середовищі. Його можна розмістити на Панелі інструментів у GeoGebra. Реалізація містить наступні кроки:

- **підготовка об'єктів:** створіть об'єкти в робочій області GeoGebra, які будуть використовуватися для задання нового інструмента. Наприклад, створіть точки, лінії, кола або інші геометричні фігури, які входять до нового інструмента;
- **налаштування:** перейдіть до меню "Інструменти" у верхньому рядку меню та оберіть пункт "Створити новий інструмент";
- **вибір вхідних об'єктів:** у вікні, що відкрилося, виберіть об'єкти, які будуть використовуватися як вхідні дані для вашого інструмента. Це можуть бути точки, сегменти, кути та інші об'єкти, від яких буде залежати робота вашого інструмента;
- **вибір вихідних об'єктів:** оберіть об'єкти, які будуть створюватися або модифікуватися вашим інструментом. Це можуть бути нові геометричні об'єкти, які ви створили на першому кроці;
- **назва та опис інструмента:** введіть назву для вашого нового інструмента; можна також додати опис, щоб пояснити його функціональність;
- **збереження інструмента:** натисніть кнопку "Готово", щоб завершити процес створення інструмента. Тепер ваш новий інструмент буде доступний у панелі інструментів разом з іншими стандартними інструментами GeoGebra.

Додамо приклад-візуалізацію створення нового інструмента «Серединний перпендикуляр»:



Далі бачимо, як використовується новий інструмент до заданих точок:

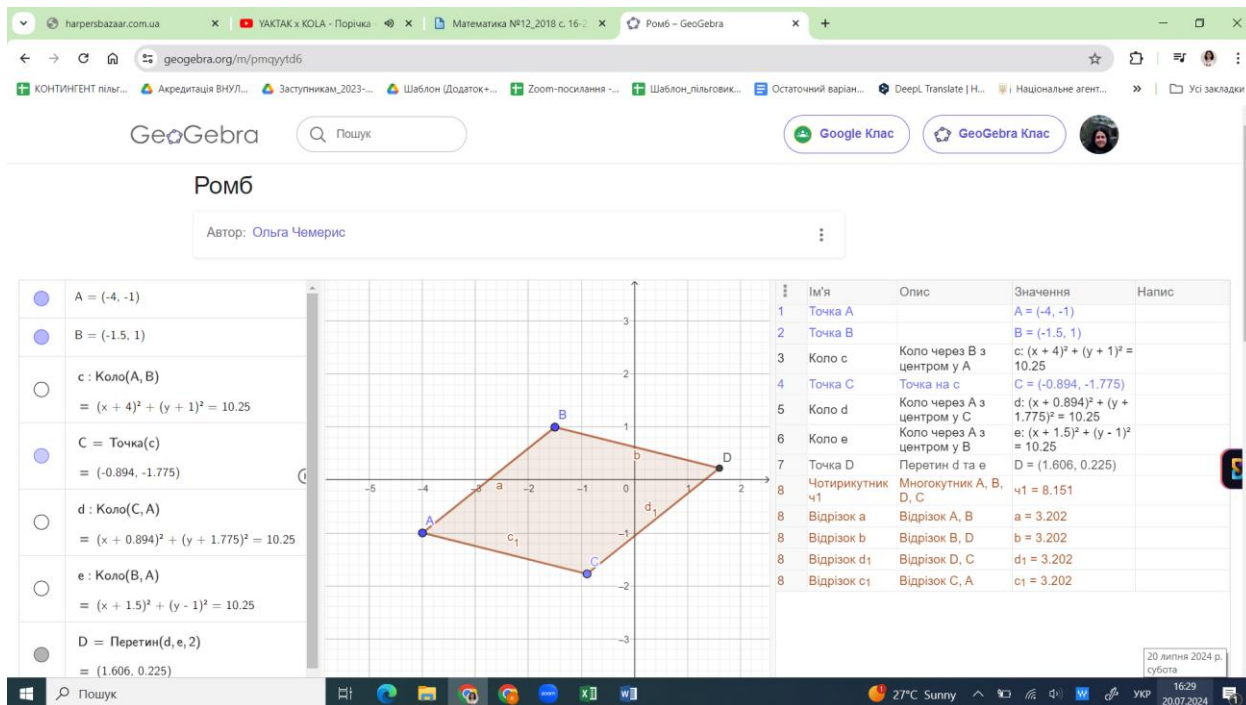


Тема 3. Створення динамічних моделей для закріплення властивостей планіметричних фігур

GeoGebra дозволяє здобувачам будувати точки, лінії, кола, багатокутники тощо, і досліджувати їх властивості. Наведемо кілька прикладів, як середовище GeoGebra може бути використано у шкільному курсі планіметрії.

Приклад 1. Створити динамічну модель деякої геометричної фігури, наприклад, ромба, щоб при його переміщенні його властивості зберігались.

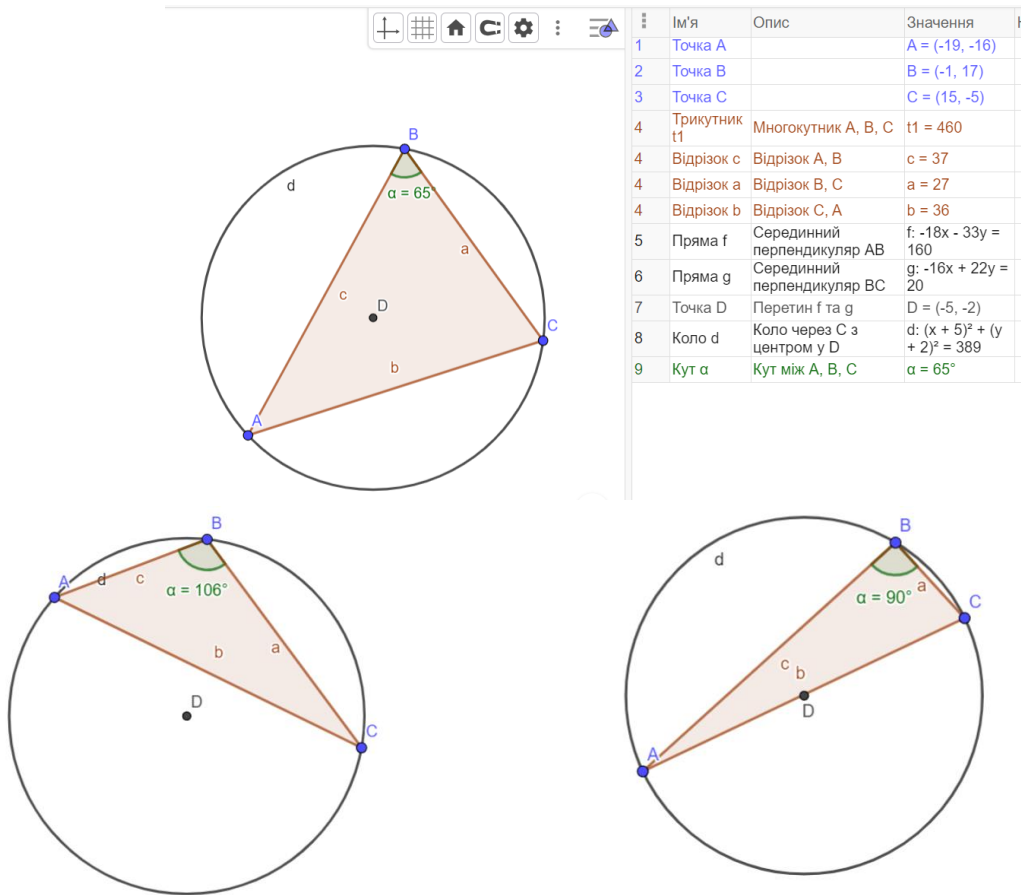
Ось так виглядає результат побудови ромба (використали в побудові факт, що всі його сторони рівні): <https://www.geogebra.org/m/pmqqytd6>.



Ще побудова ромбів (використали такі факти про ромб: діагоналі точкою перетину діляться навпіл; діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом): <https://www.geogebra.org/classic/ftqwhnnk>

Приклад 2. Створити динамічну модель для розміщення центра описаного кола для різних типів трикутників.

Ось так виглядає результат побудови (для зручності винесли справа повний протокол, який можна відтворювати покроково, наприклад, для демонстрації або анімації) <https://www.geogebra.org/m/s3ug57jq> :

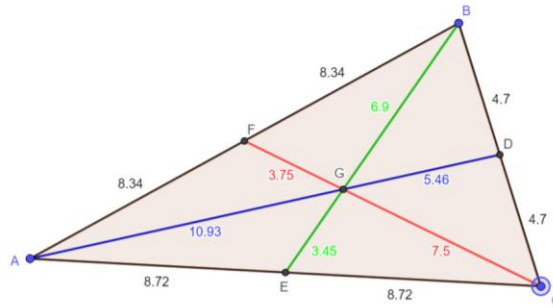


Висновок: наочно переконались, що центр кола, описаного навколо гострокутного трикутника міститься всередині трикутника; описаного навколо тупокутного трикутника – поза трикутником; описаного навколо прямокутного трикутника – є серединою гіпотенузи.

Ознайомтесь з подібною задачею про ортоцентр трикутника: <https://www.geogebra.org/m/pczr6ddz>.

Приклад 3. Створити динамічну модель для вивчення властивості медіан трикутника та її перевіркою.

Зайдіть за посиланням <https://www.geogebra.org/classic/v7xqjgph> та збережіть у свою колекцію. Які факти дає можливість закріпити дана розробка?



Приклад 4. Створити динамічну модель для вивчення основної властивості бісектриси кута трикутника та її перевіркою.

Бісектриса кута трикутника

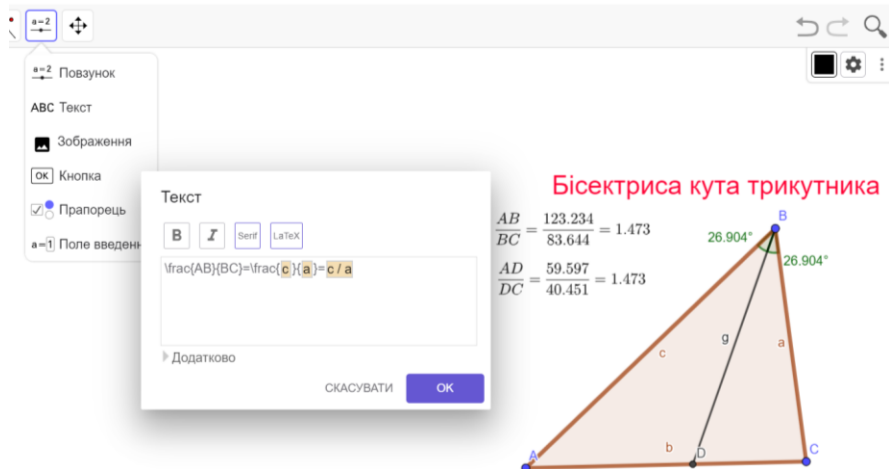
$$\frac{AB}{BC} = \frac{105.643}{69.35} = 1.523$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{44.694}{29.34} = 1.523$$

№	Ім'я	Опис	Значення
1	Точка A		A = (-103.6, -29.324)
2	Точка B		B = (-22.618, 38.516)
3	Точка C		C = (-29.576, -30.484)
4	Трикутник t1	Многокутник A, B, C	t1 = 2557.881
4	Відрізок c	Відрізок A, B	c = 105.643
4	Відрізок a	Відрізок B, C	a = 69.35
4	Відрізок b	Відрізок C, A	b = 74.034
5	Пряма f	Бісектриса кута між A, B, C	f: 0.884x - 0.468y = -38.012
6	Точка D	Перетин f та b	D = (-58.912, -30.024)
7	Кут α	Кут між A, B, D	α = 22.144°
8	Кут β	Кут між D, B, C	β = 22.144°
9	Відрізок g	Відрізок B, D	g = 77.556
10	Відрізок h	Відрізок A, D	h = 44.694
11	Відрізок i	Відрізок D, C	i = 29.34
12	Текст текст1	$\frac{\text{frac{AB}}{BC}}{\text{frac{AD}}{DC}} = \frac{\text{frac{AB}}{BC}}{\text{frac{AD}}{DC}}$	$\frac{\text{frac{AB}}{BC}}{\text{frac{AD}}{DC}} = \frac{\text{frac{105.643}}{69.35}}{\text{frac{44.694}}{29.34}} = 1.523$
13	Текст текст2	$\frac{\text{frac{AD}}{DC}}{\text{frac{AB}}{BC}} = \frac{\text{frac{AD}}{DC}}{\text{frac{AB}}{BC}}$	$\frac{\text{frac{AD}}{DC}}{\text{frac{AB}}{BC}} = \frac{\text{frac{44.694}}{29.34}}{\text{frac{105.643}}{69.35}} = 1.523$
14	Текст текст3		"Бісектриса кута трикутника"

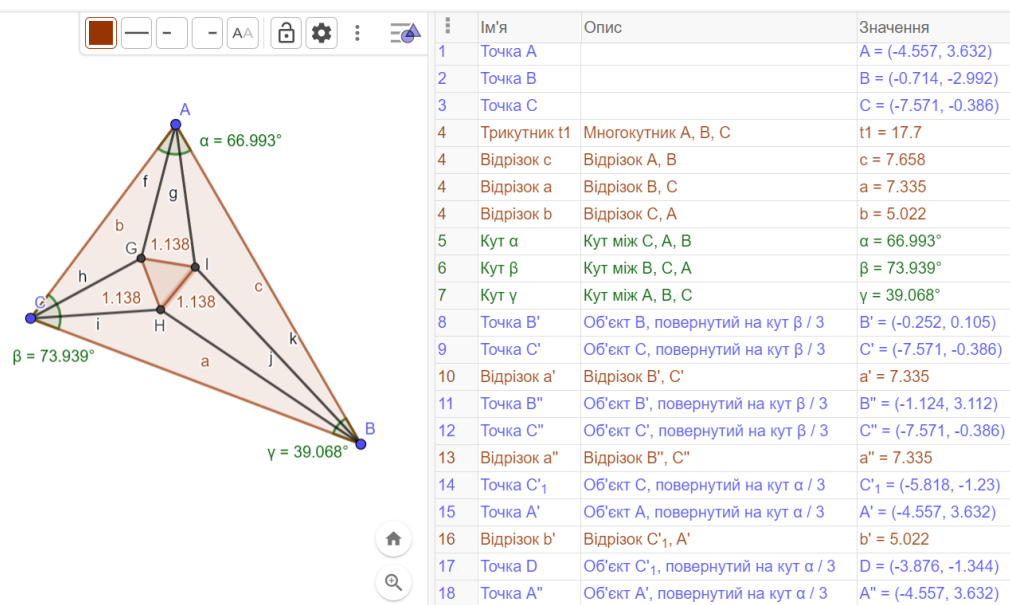
Використано наступні інструменти <https://www.geogebra.org/m/d379b3pd>

- :
- 1) побудова трикутника за трьома точками;
 - 2) вимірювання довжини відрізка;
 - 3) проведення бісектриси кута трикутника;
 - 4) вимірювання кута;
 - 5) додавання назви та динамічного тексту.



Висновок: наочно перевірили основну властивість бісектриси (бісектриса кута трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам).

Приклад 5. Переконайтесь у правильності твердження *теорема Морлі*: точки перетину суміжних трисектрис внутрішніх кутів довільного трикутника є вершинами рівностороннього трикутника <https://www.geogebra.org/m/tth3ztwb>.



19	Відрізок b"	Відрізок D, A"	b" = 5.022
20	Точка A' ₁	Об'єкт A, повернутий на кут $\gamma / 3$	A' ₁ = (-5.951, 2.595)
21	Точка B' ₁	Об'єкт B, повернутий на кут $\gamma / 3$	B' ₁ = (-0.714, -2.992)
22	Відрізок c'	Відрізок A' ₁ , B' ₁	c' = 7.658
23	Точка E	Об'єкт A' ₁ , повернутий на кут $\gamma / 3$	E = (-7.075, 1.271)
24	Точка F	Об'єкт B' ₁ , повернутий на кут $\gamma / 3$	F = (-0.714, -2.992)
25	Відрізок c"	Відрізок E, F	c" = 7.658
26	Точка G	Перетин b' та a"	G = (-5.276, 0.859)
27	Точка H	Перетин a' та c"	H = (-4.872, -0.205)
28	Точка I	Перетин c' та b"	I = (-4.153, 0.677)
29	Відрізок f	Відрізок A, G	f = 2.865
30	Відрізок g	Відрізок A, I	g = 2.982
31	Відрізок h	Відрізок C, G	h = 2.61
32	Відрізок i	Відрізок C, H	i = 2.705
33	Відрізок j	Відрізок B, H	j = 5.005
34	Відрізок k	Відрізок B, I	k = 5.029
35	Трикутник t2	Многокутник G, I, H	t2 = 0.561
35	Відрізок h ₁	Відрізок G, I	h ₁ = 1.138
35	Відрізок g ₁	Відрізок I, H	g ₁ = 1.138
35	Відрізок i ₁	Відрізок H, G	i ₁ = 1.138

Спробуйте самостійно побудувати динамічну модель для теореми Морлі для трисектрис зовнішніх кутів трикутника і перевірити її правильність: точки перетину суміжних трисектрис зовнішніх кутів довільного трикутника є вершинами рівносторонніх трикутників.

Тема 4. Інструменти для геометричних побудов у просторі

У Полотні 3D середовища GeoGebra можна виконати побудову тривимірних об'єктів, зокрема, многогранників, тіл обертання тощо, маніпулювати об'єктами: виконувати переміщення, обертання та масштабування 3D об'єктів, відображення об'єктів у трьох вимірах з використанням різних видів проєкцій (перспективної, ортогональної). У налаштуваннях об'єктів передбачена зміна кольорів, прозорості та стилів відображення для кращої візуалізації. Просторові об'єкти можна задавати аналітично (рівняннями, нерівностями тощо). Діючими є інструменти вимірювання.

Інструменти в GeoGebra для побудови на звичайному полотні (2D) і полотні 3D мають багато спільного, оскільки вони базуються на аналогічних математичних концепціях. Ось деякі з основних інструментів, які можна використовувати як у 2D, так і в 3D середовищі:

- точки:

2D: точка, перетин точок, точка на об'єкті;

3D: точка, точка на площині, точка на поверхні;

- лінії та відрізки:

2D: пряма, промінь, відрізок, середина відрізка;

3D: пряма, промінь, відрізок, середина відрізка у просторі;

- кола та дуги:

2D: коло, дуга кола, окружність через три точки;

3D: коло, дуга кола, сфера;

- многокутники:

2D: трикутник, чотирикутник, багатокутник;

3D: трикутник, площина, призма, піраміда;

- перпендикуляри та паралелі:

2D: перпендикулярна пряма, паралельна пряма;

3D: перпендикулярна пряма, паралельна пряма, перпендикуляр до площини;

- перетворення:

2D: відображення, обертання, масштабування, паралельне перенесення;

3D: відображення, обертання, масштабування, паралельне перенесення у просторі;

- вектори:

2D: вектор, сума векторів, різниця векторів;

3D: вектор, сума векторів, різниця векторів у просторі;

- міри:

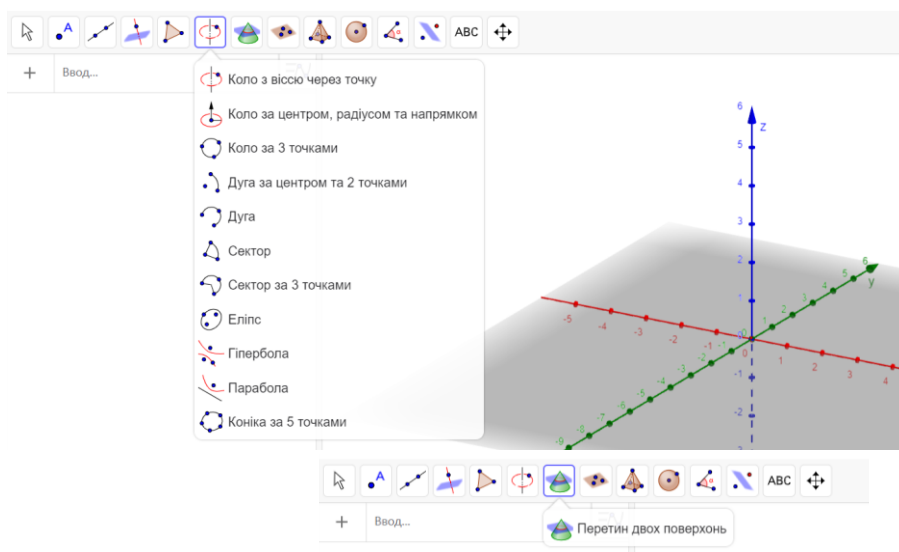
2D: довжина відрізка, площа многокутника, кут;

3D: довжина відрізка, площа поверхні, об'єм, кут між площинами.

На полотні 3D *інструмент "Коло"* дозволяє створювати кола в тривимірному просторі. Ось основні функціональні можливості та способи використання цього інструменту:

- коло через три точки: створює коло, що проходить через три задані точки в просторі; цей метод визначає унікальне коло, яке лежить у площині, що проходить через ці три точки;

- коло з центром і радіусом: дозволяє побудувати коло, задавши центр і радіус; потрібно вказати точку як центр кола і задати відстань (радіус), щоб визначити розмір кола;
- коло на площині: створює коло, яке лежить у заданій площині; можна задати площину і радіус або використовувати інші об'єкти для визначення розташування кола;
- коло як перетин: створює коло як перетин сфери та площини; це може бути корисно для візуалізації певних геометричних відношень або задач у тривимірному просторі;



При створенні кола в 3D полотні важливо пам'ятати, що воно завжди буде лежати в якійсь площині, навіть якщо ця площина не є однією з координатних площин (oXY , oYZ , або oZX). GeoGebra автоматично визначає положення площини кола на основі заданих точок або параметрів.

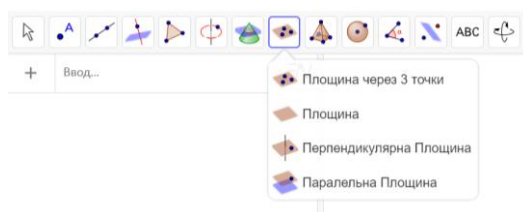
Інструмент "Площина" в GeoGebra 3D надає різноманітні можливості для створення та маніпуляції площинами в тривимірному просторі. Основні функції та можливості цього інструменту:

- площина через три точки: створює площину, що проходить через три задані точки – один із найосновніших способів визначення площини в просторі;
- площина через точку та пряму;

- перпендикулярна площина: створює площину, за заданими точкою та прямою, точкою і вектором нормалі. Це зручно для побудови площини з певною орієнтацією;
- площина як перетин різних геометричних об'єктів, таких як поверхні чи тіл; може бути використано для дослідження взаємодії між об'єктами.
- задання площини рівнянням, наприклад, загальним: будує площину за алгебраїчним виразом.

Після створення площини її можна переміщати, обертати та масштабувати. Можна змінювати положення точки або напрям вектора нормалі для динамічної зміни площини.

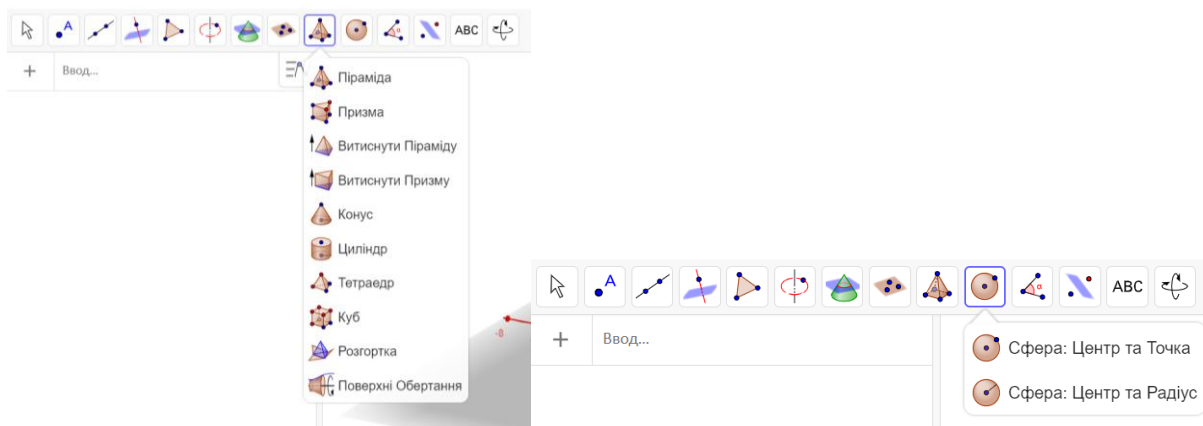
Як і для будь-якого об'єкта, у середовищі передбачена зміна налаштувань кольору, прозорості та стилю відображення площини для кращої візуалізації у тривимірному просторі. Можна зробити площину більш прозорою для бачення інших об'єктів за нею.



У середовищі GeoGebra 3D **побудова многогранників** є досить зручною та інтуїтивною. Основні можливості та інструменти для побудови різних многогранників:

- піраміда через основи і вершину:
 - виберіть інструмент "Піраміда";
 - виберіть точку для вершини піраміди;
 - виберіть основу (багатокутник або коло);
 - піраміда буде побудована з вибраною основою і вершиною.
- призма через основу і висоту:
 - виберіть інструмент "Призма";
 - виберіть багатокутник як основу призми;
 - введіть висоту призми;
 - призма буде побудована на основі заданої висоти.
- правильні многогранники: тетраедр, куб, октаедр, додекаедр, ікосаедр:

- виберіть інструмент "Правильні многогранники";
 - виберіть центр і радіус (або інші параметри) для побудови правильного многогранника;
 - многогранник буде побудований з центром і розмірами, які ви задали.
- многогранник через вершини:
- виберіть інструмент "Многогранник через вершини";
 - виберіть послідовно всі вершини многогранника, натискаючи на точки в просторі;
 - многогранник буде побудований через вибрані вершини.
- конструктор многогранників: створення власних многогранників:
- виберіть інструмент "Конструктор многогранників";
 - визначте вершини, ребра і грані вручну для створення унікального многогранника;
 - цей метод дозволяє повністю контролювати форму і структуру многогранника.



Для побудови **тіл обертання** в середовищі GeoGebra 3D можна скористатися різними інструментами та методами. Отже, обертання навколо осі – цей інструмент дозволяє створювати тіла обертання, обертаючи плоскі фігури навколо заданої осі.

Приклад обертання площинної фігури навколо осі:

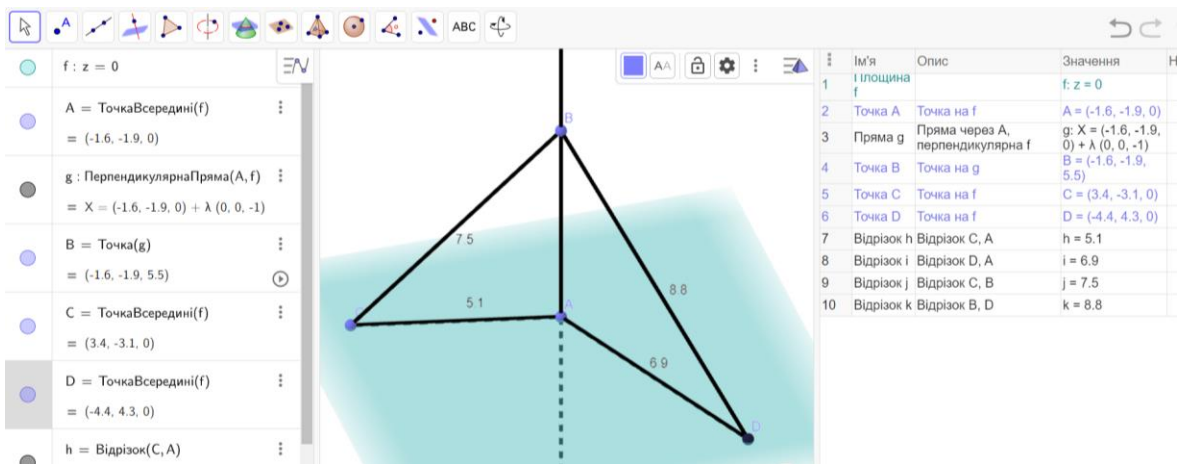
- зобразіть плоску фігуру (наприклад, відрізок, багатокутник чи дугу);
- оберіть інструмент "Обертання навколо осі";
- оберіть фігуру, яку потрібно обертати;

- оберіть вісь обертання;
- введіть кут обертання (наприклад, 360 градусів для повного обертання). Тіло обертання буде створено.

Тема 5. Створення динамічних моделей для розв'язування задач зі стереометрії

Приклад 1. Створити динамічну модель для циклу задач на дві похилі та їх проекції.

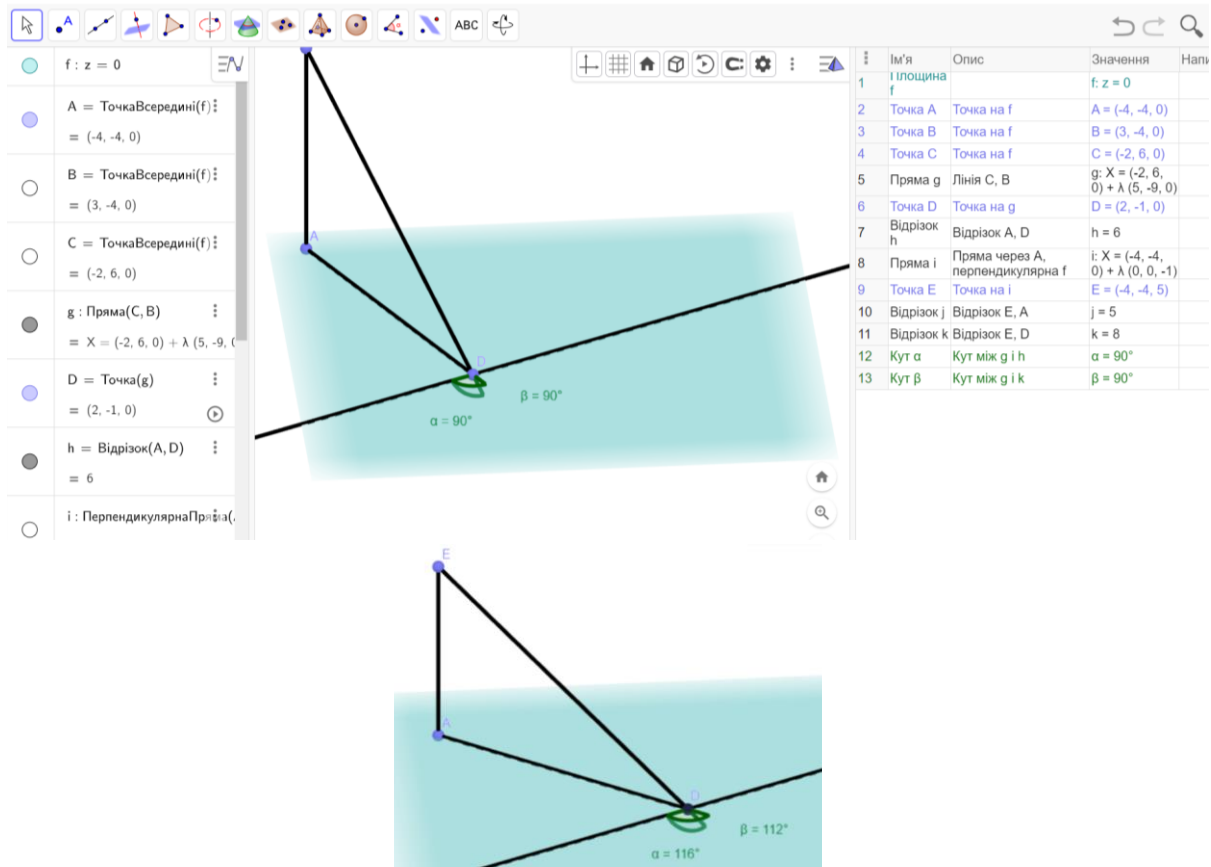
В умові відмітили довжини похилих та їх проекцій, але це можуть бути і кут між похилою та проекцією, або кут між похилими, або кут між проекціями. Ось так виглядає результат побудови (для зручності винесли справа повний протокол, який можна відтворювати покроково, наприклад, для демонстрації або анімації) <https://www.geogebra.org/classic/vajn4xhe> :



Приклад 2. Створити динамічну модель для опрацювання теореми про три перпендикуляри.

Нагадаємо формулювання теореми: *Якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до проекції похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до самої похилої. І навпаки, якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до проекції похилої на цю площину.*

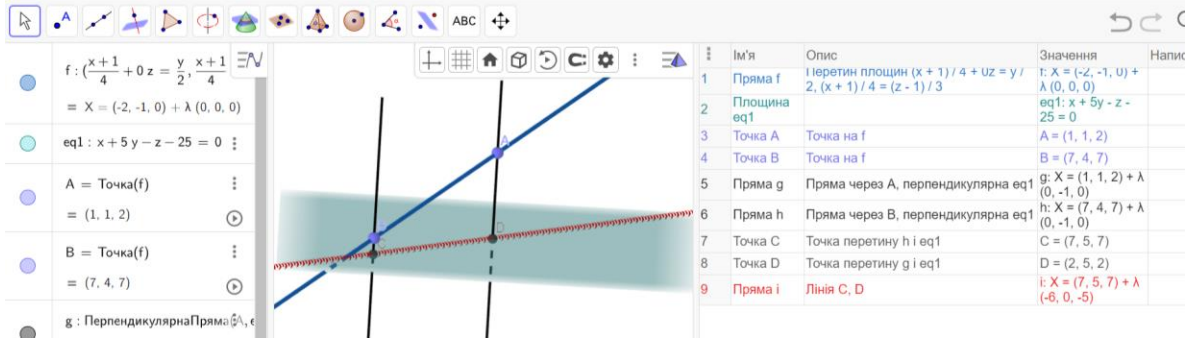
Приклад власної моделі додаємо з протоколом побудови (справа повний варіант): <https://www.geogebra.org/classic/v6mzdmrn>.



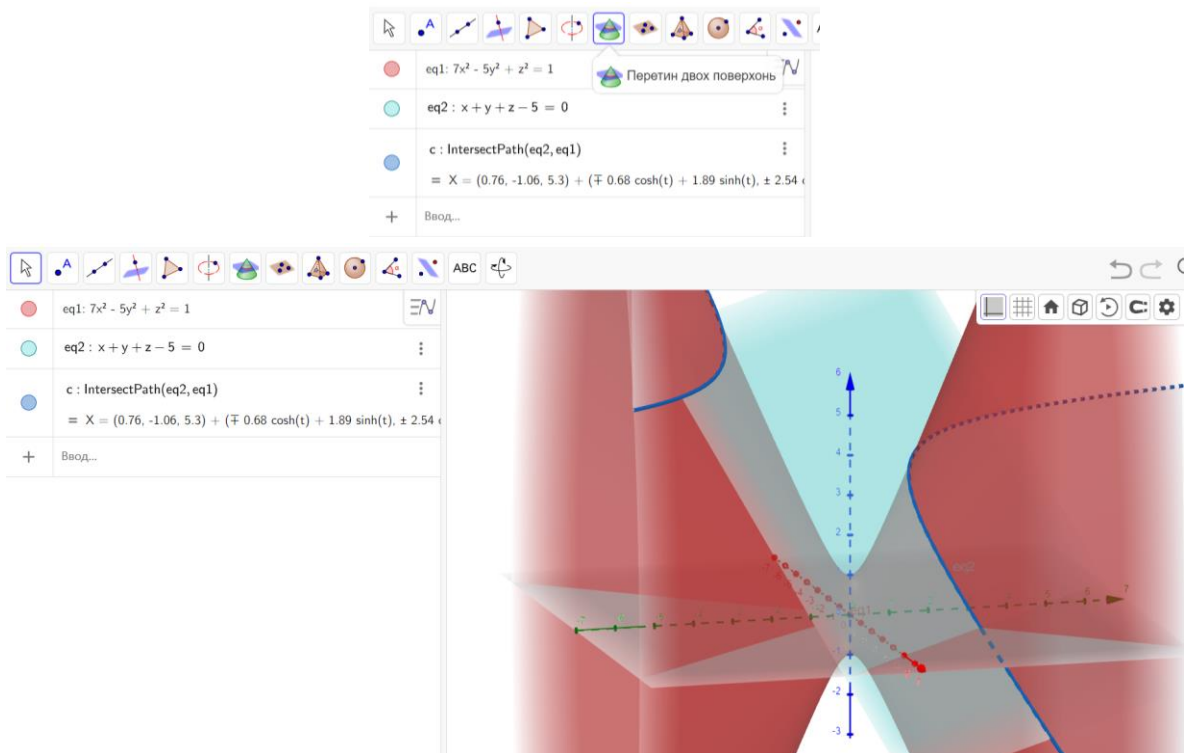
Змінюючи положення точки D, бачимо зміни в кутах між похилою та прямою, чи проекцією та прямою.

Приклад 3. Створити динамічну модель проєкції прямої на площину.

Для роботи з просторовими об'єктами можна використовувати аналітичне задання цих об'єктів (наприклад, пряму в просторі можна задати або двома точками та використати інструмент для її проведення, або через точку і вектор, або як пряму перетину двох площин тощо; для площини теж є свої варіанти; тут обрали загальне рівняння площини в протоколі побудови – інші способи можна пригадати з курсу аналітичної геометрії): <https://www.geogebra.org/classic/psgv8ufg>.



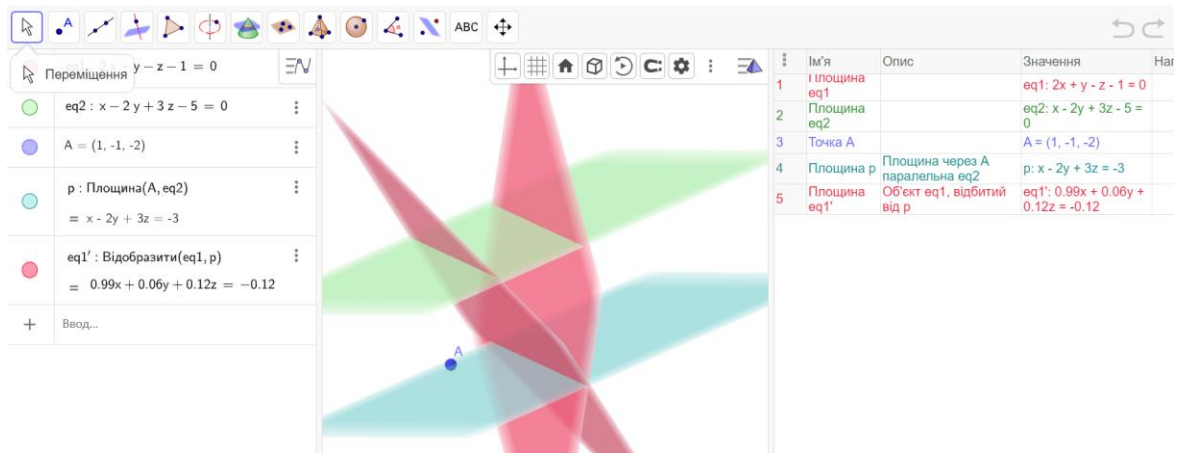
Приклад 4. Питання дослідження лінії перетину двох поверхонь стає доступним та легким для унаочнення: достатньо ввести рівняння цих поверхонь в протокол побудови та застосувати інструмент середовища *Перетин двох поверхонь*:



Даний приклад можна переглянути, перейшовши за посиланням: <https://www.geogebra.org/classic/qseehn5p>.

Приклад 5. Знайти площину, яка симетрична до заданої відносно такої, яка паралельна до деякої та проходить через конкретну точку.

Це легке завдання, адже є готові інструменти: 1) для проведення площини, паралельної для заданої площини і яка має проходити через задану точку; 2) для симетричного відображення відносно точки, прямої чи площини



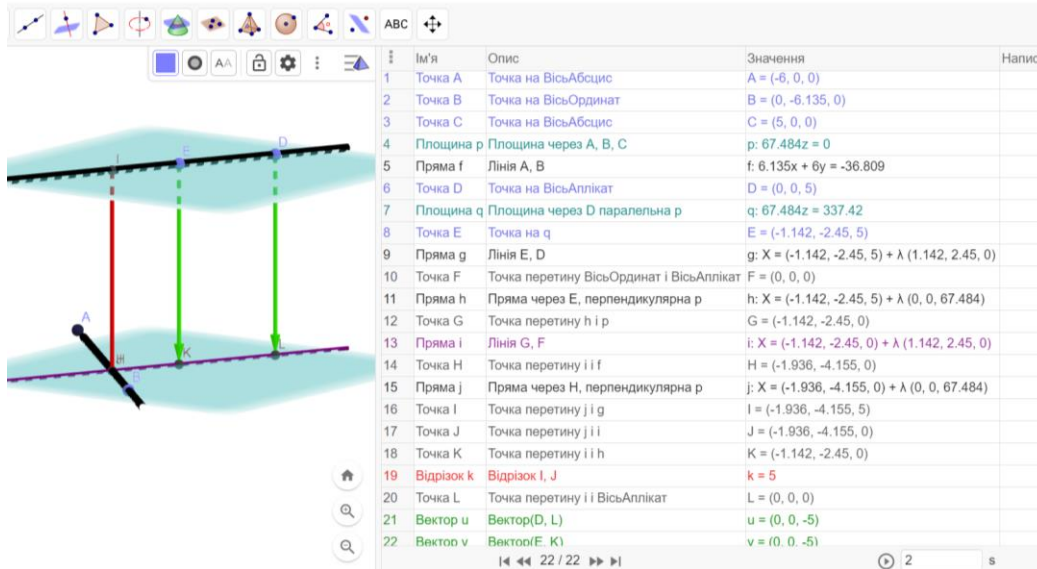
Даний приклад можна переглянути, перейшовши за посиланням: <https://www.geogebra.org/classic/jeynebqu> .

Також пропонуємо познайомитись з такими розробками:

- утворення циліндра: <https://www.geogebra.org/m/sqzczpys> (для перегляду результату анімуйте точку D);
- утворення конуса: <https://www.geogebra.org/m/bnjpc3mf> (для перегляду результату анімуйте точку D);
- базова модель для задач на переріз сфери чи кулі площиною: <https://www.geogebra.org/m/rcanzf7r> ;
- розгортка куба: <https://www.geogebra.org/m/bw6uvq6w> ;
- переріз конуса: <https://www.geogebra.org/m/ep44kmve> .

Приклад 6. Створити динамічну модель для знаходження відстані між мимобіжними прямими.

Ця відстань дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра. Також в моделі продемонструємо, що відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між паралельними площинами, які містять ці прямі:



Даний приклад можна переглянути, перейшовши за посиланням: <https://www.geogebra.org/classic/abnc8m8r>.

Тема 6. Системи комп'ютерної алгебри

Вкладка "СКА" (Системи комп'ютерної алгебри) в середовищі GeoGebra пропонує користувачам потужні інструменти для роботи з символічними обчисленнями. Це дозволяє виконувати широкий спектр математичних операцій, які можуть бути складними або неможливими для виконання вручну. Ось деякі можливості цієї вкладки:

- розв'язок рівнянь, нерівностей та їх систем;
- спрощення виразів;
- розкладання на множники;
- перетворення радикалів;
- обчислення похідних;
- обчислення інтегралів (невизначених та визначених) тощо.

Використання вкладки "СКА" в навчальному процесі дозволяє виконувати складні математичні обчислення швидко та точно, поглиблювати розуміння математичних концепцій через символічні обчислення; перевіряти результати

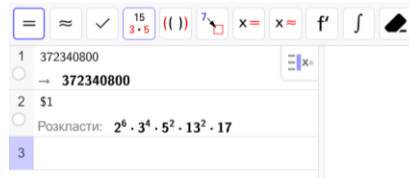
власних розрахунків; знаходити рішення задач, які важко або неможливо розв'язати вручну; візуалізувати математичні процеси та їх результати.

Рекомендуємо ознайомитись з посібником, у якому здійснено детальний опис інструментів вкладки СКА:

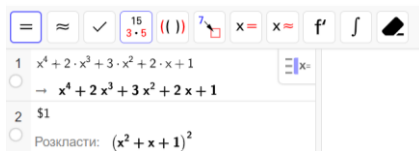
Ракута В. М. GeoGebra 5.0 для вчителів математики. Алгебра (оновлена версія): Навчальний посібник. – Чернігів: ЧОІППО ім. К. Д. Ушинського, 2020. – 79 с.

Розкласти на множники:

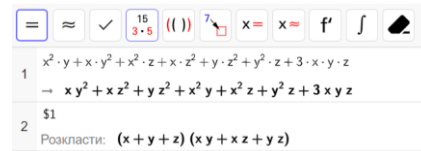
1) складене число:



2) вираз 1:



3) вираз 2:

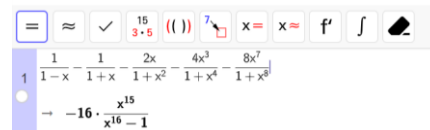


4) вираз 3 (вручну ввели назву функції):

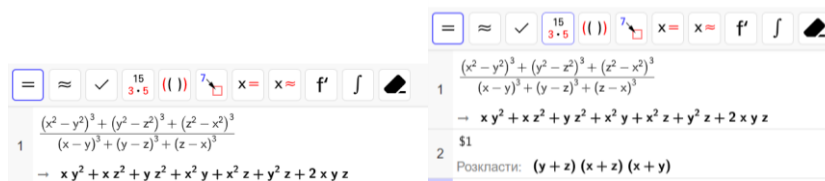


Після введення виразу в протоколі відразу маємо відповідь:

5) вираз 4:



6) вираз 5 (з проміжним перетворенням):



Розв'язати рівняння:

1) рівняння 1:

1 $\log_2(2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3) = 2$
 $\rightarrow \frac{\ln(2x^2 - 4x + 3)}{\ln(2)} = 2$
 2 \$1
 Solve: $\{x = 3\}$

2) рівняння 2:

1 $16 \cdot x^4 + 8 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$
 $\rightarrow 16x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$
 2 \$1
 Solve: $\left\{x = -1, x = -\frac{1}{4}\right\}$

3) рівняння 3:

1 $3 \cdot (\sin(x))^2 + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 2$
 Solve: $\left\{x = k_1 \pi + \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{3} - 1), x = k_2 \pi + \operatorname{tg}^{-1}(-\sqrt{3} - 1)\right\}$

4) рівняння 4:

1 $5 \sin(x) - 12 \cos(x) = -13 \sin(3x)$
 $\rightarrow -12 \cos(x) + 5 \sin(x) = -13 \sin(3x)$
 2 \$1
 Solve: $\left\{x = 2k_7\pi + 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{13}-2}{3}\right), x = 2k_8\pi + 2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{13}-2}{3}\right), x = 2k_9\pi - 2.848, x = 2k_{10}\pi - 1.277, x = 2k_{11}\pi + 0.294, x = 2k_{12}\pi + 1.865\right\}$

Розв'язати нерівності:

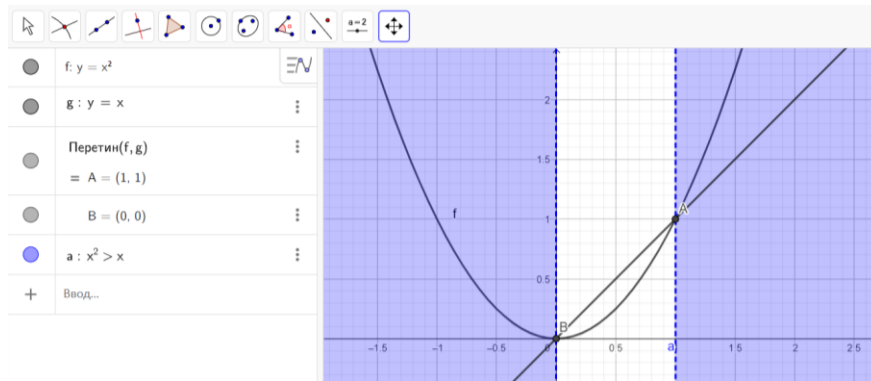
1) нерівність 1 (через інструмент «Розв'язати» в СКА):

1 $|1 - 2x| > 3 - x$
 $\rightarrow |1 - 2x| > 3 - x$
 2 \$1
 Solve: $\left\{x < -2, x > \frac{4}{3}\right\}$

2) нерівність 2 (підключили як СКА, так і координатну площину):

1 $\sqrt{x+1} + 1 < 4x^2 + \sqrt{3}x$
 $\rightarrow 4x^2 + \sqrt{3}x > \sqrt{x+1} + 1$
 2 \$1
 $\rightarrow 4x^2 + \sqrt{3}x > \sqrt{x+1} + 1$
 3

3) нерівність 3 (на координатній площині):

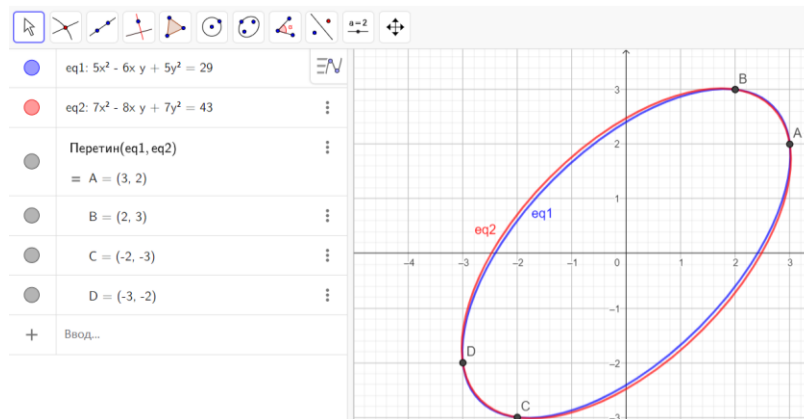


4) система нерівностей (приклад зображення області):



Розв'язати систему рівнянь та нерівностей:

Спосіб 1 – побудувати лінії, задані рівняннями системи, та знайти їх точки перетину (це будуть розв'язки системи):



Спосіб 2 – ввести рівняння чи нерівності системи окремо в рядочки протоколу побудови в СКА та виділивши кольором рядки (через Shift) обрати інструмент «Розв’язати»:

The left screenshot shows the input of a system of equations:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

The right screenshot shows the solution of a system of inequalities:

$$\begin{cases} \frac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9} \leq 0 \\ \frac{1-x^2}{x^2+2x-8} \geq 0 \end{cases}$$

Наведемо приклади звичайних обчислень в середовищі (у відповіді може бути як табличне значення, так і чисельна оцінка; наближення має ту кількість знаків після коми, яку ми виставили в налаштуванні):

The top screenshot shows calculations of trigonometric and logarithmic functions:

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.707 \\ & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ & \log_2(3) \approx 1.585 \end{aligned}$$

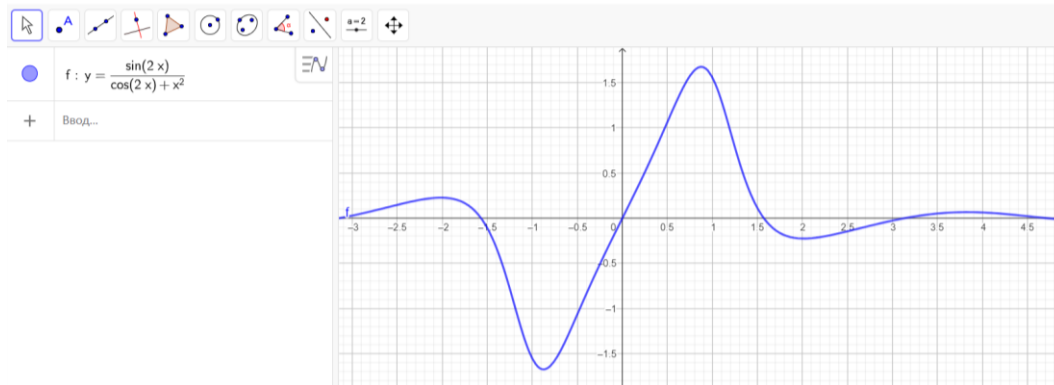
The bottom screenshot shows a list of calculations:

- Послідовність $(t^2 - 3t, t, -2, 10)$ → {10, 4, 0, -2, -2, 0, 4, 10, 18, 28, 40, 54, 70}
- Скалярний Добуток $((-2, 11), (8, -3))$ → -49
- Векторний Добуток $((3, -4, 5), (6, 1, -10))$ → (35, 60, 27)
- Сума $(a^2 - 2a, a, 2, 10)$ → 276

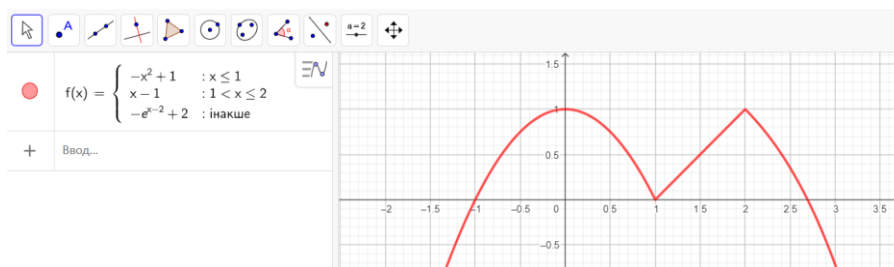
Тема 7. Функції та їх дослідження

Візуалізація функцій в GeoGebra дозволяє створювати графіки та вивчати їх властивості на різних інтервалах. У цьому допомагають різні вкладки: Графічний калькулятор, модуль СКА чи класичне полотно з протоколом побудови.

У полі введення введемо функцію, яку хочемо побудувати:

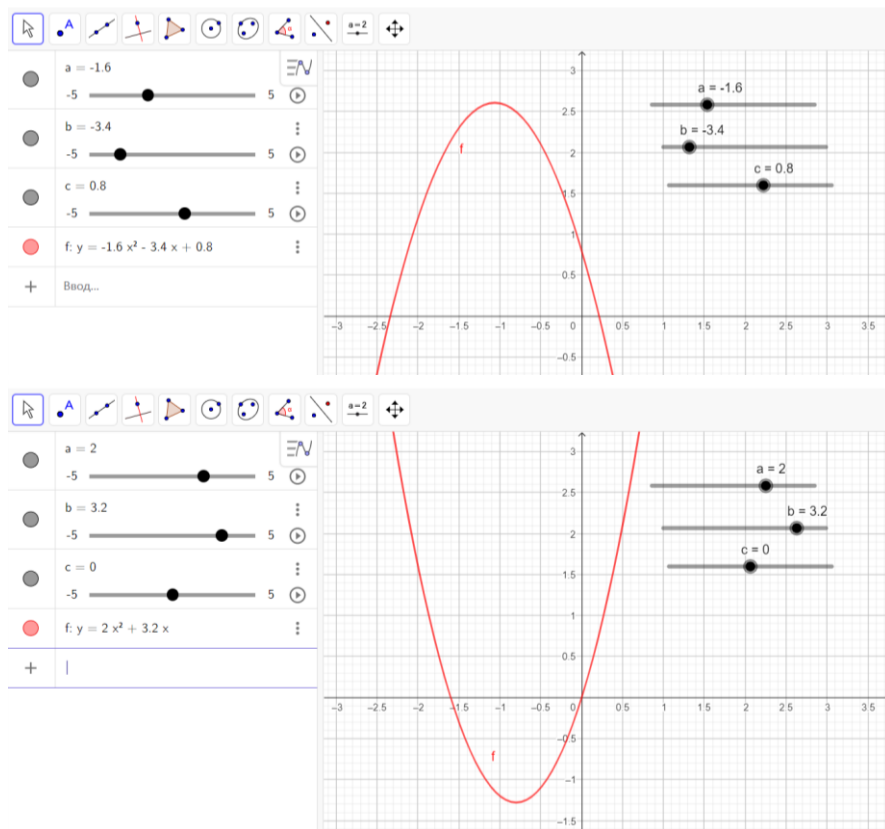


Для побудови графіка кусково-заданої функції скористаємось логічним міркуванням: $f(x) = \text{Якщо}(x \leq 1, -x^2 + 1, \text{Якщо}(1 < x \leq 2, x - 1, -e^{(x-2)+2}))$, після введення якого будемо бачити звичний для нас запис:



Для динамічної візуалізації параметричних функцій створимо Повзунок:

- виберіть інструмент Повзунок і розмістіть його на робочій площині.
- встановіть параметри повзунка (назву, інтервал і крок).
- використовуйте повзунок у функції.



Повзунки дозволяють легко змінювати коефіцієнти та бачити, як це впливає на форму графіка. Це дуже корисно для вивчення властивостей різних типів функцій.

У GeoGebra інструмент Прапорець можна використовувати для створення інтерактивних елементів, які дозволяють включати або виключати різні об'єкти на графіку. Це особливо корисно для демонстрацій, навчання та досліджень.

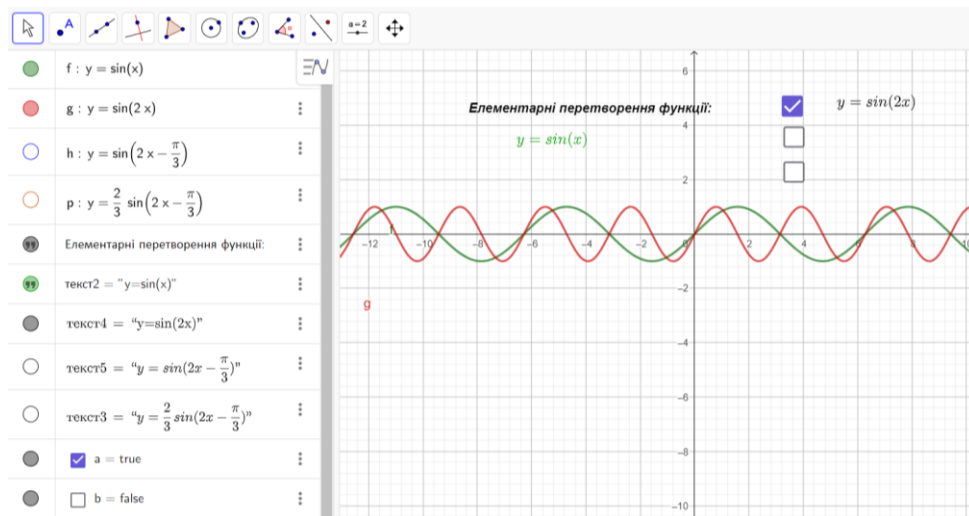
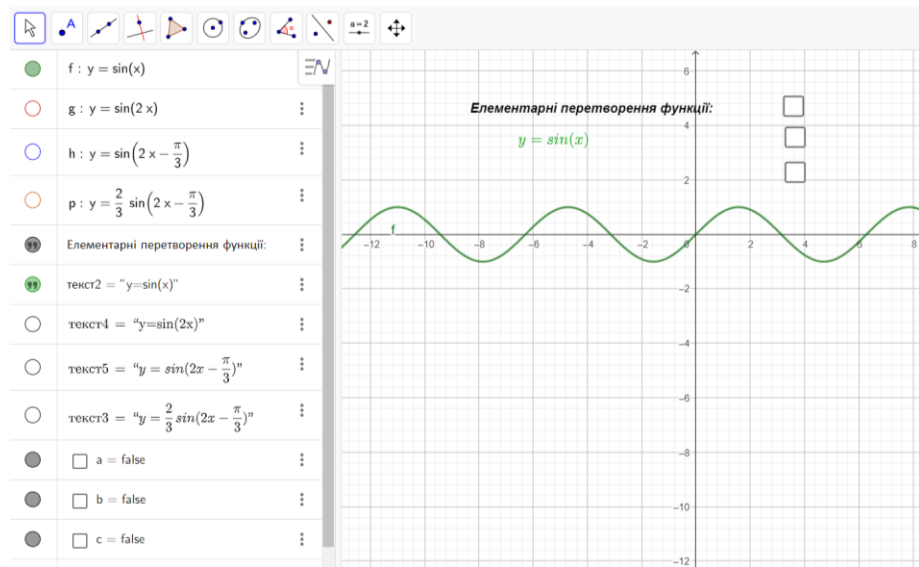
Кроки для створення та використання прапорця:

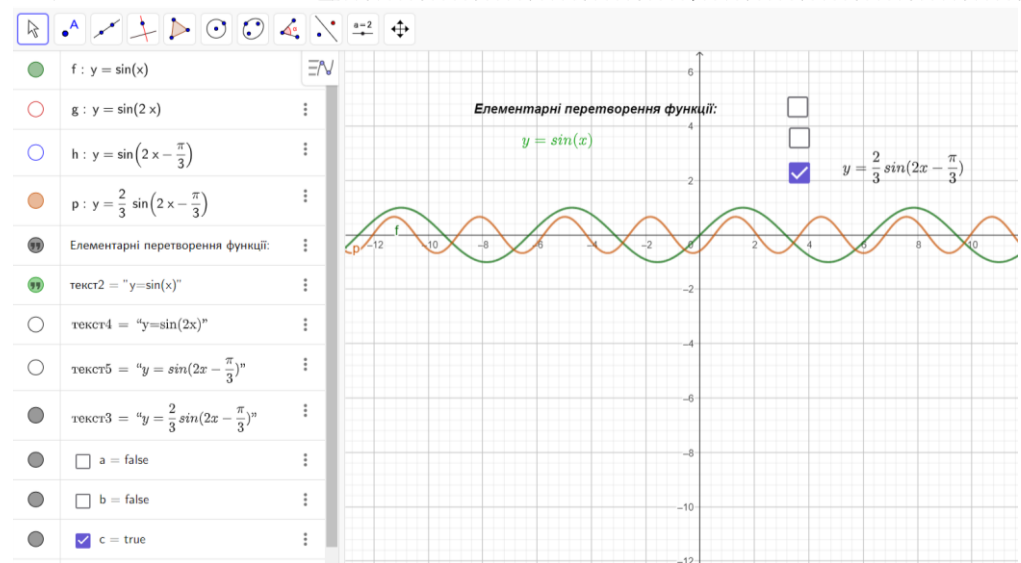
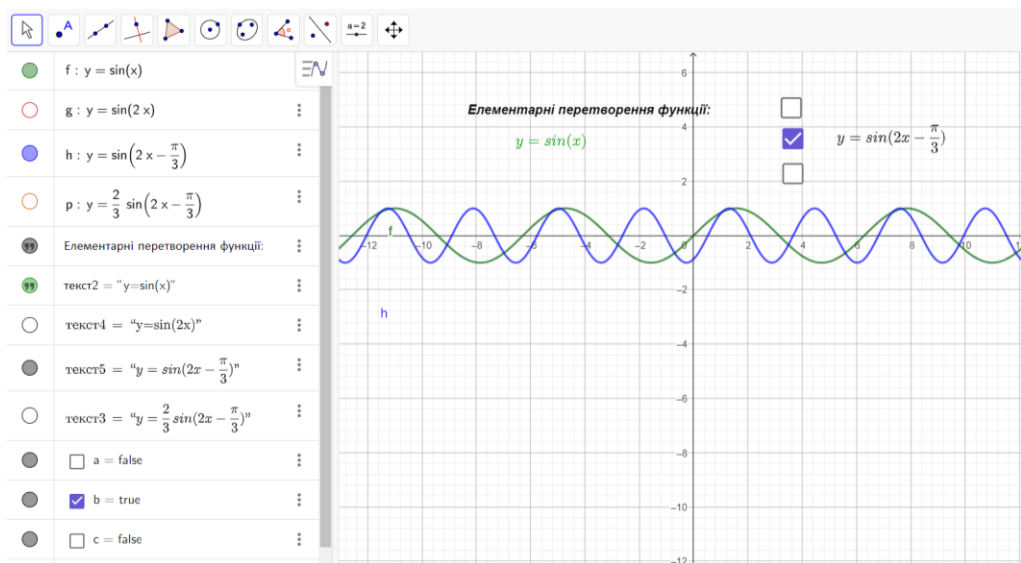
- запустіть середовище GeoGebra;
- оберіть інструмент Прапорець та клацніть у місці, де ви хочете розмістити прапорець на графіку або робочій площині;
- введіть назву прапорця та зв'яжіть прапорець з об'єктом;
- можна виконати перевірку: для цього встановіть або зніміть прапорець; об'єкт має з'явитись або зникнути відповідно.

GeoGebra надає широкий набір інструментів для дослідження функцій, що дозволяють вивчати їх властивості, будувати графіки, знаходити

екстремуми, інтеграли та похідні, а також аналізувати поведінку функцій на інтервалах.

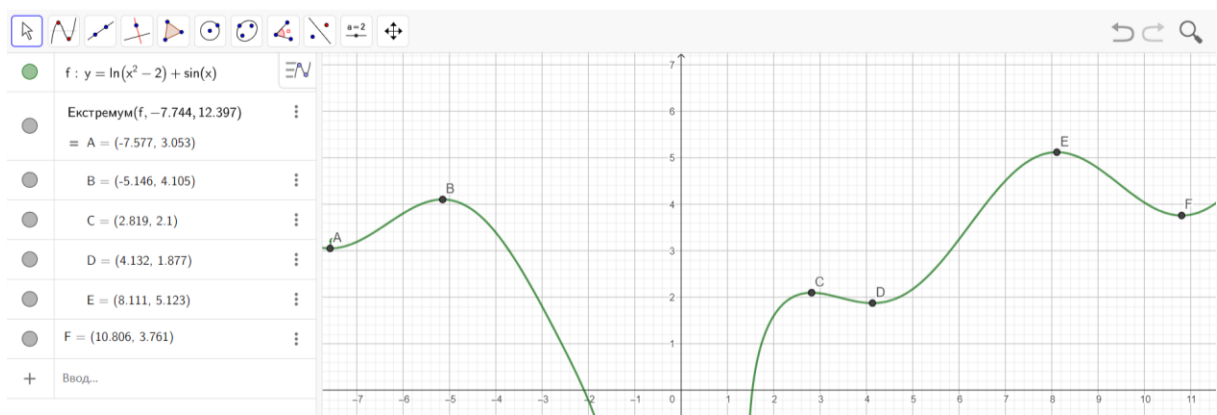
Наведемо приклад побудови графіка функції шляхом елементарних перетворень:



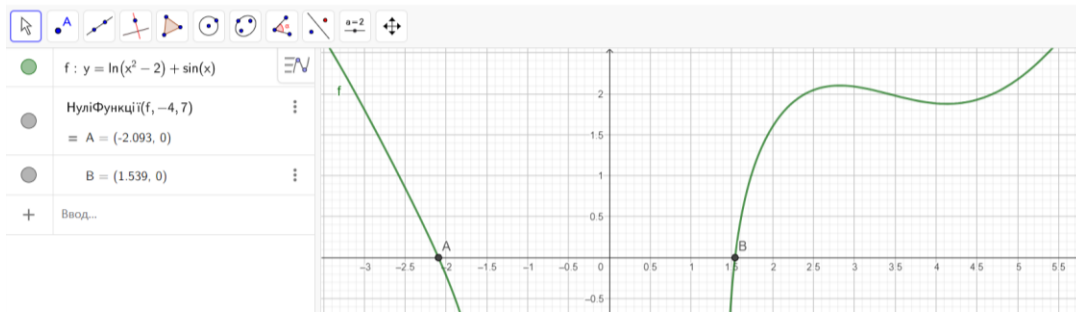


Продемонструємо знаходження екстремумів, нулів та точок перетину:

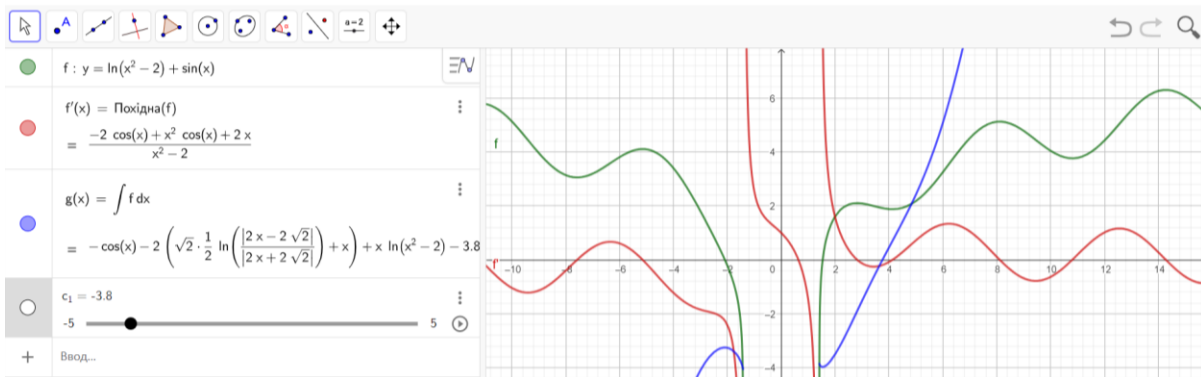
- Знаходження точок екстремуму заданої функції на проміжку:



- Знаходження нулів функції на проміжку:



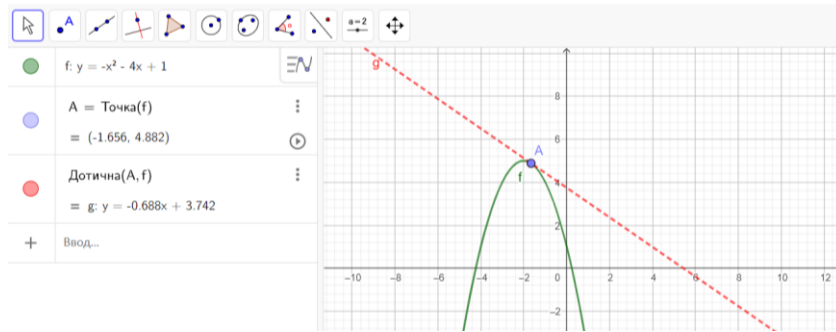
Також можна знайти похідну та первісну для заданої функції:



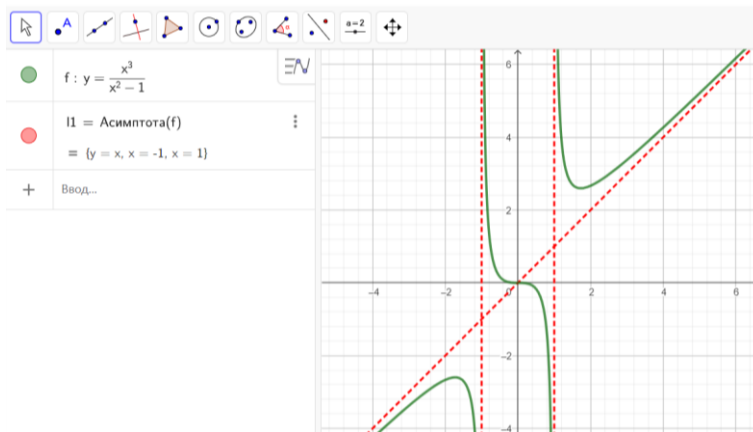
Якщо потрібно лише записати результат, то можна використати модуль СКА:

Наведемо приклади деяких етапів дослідження функції:

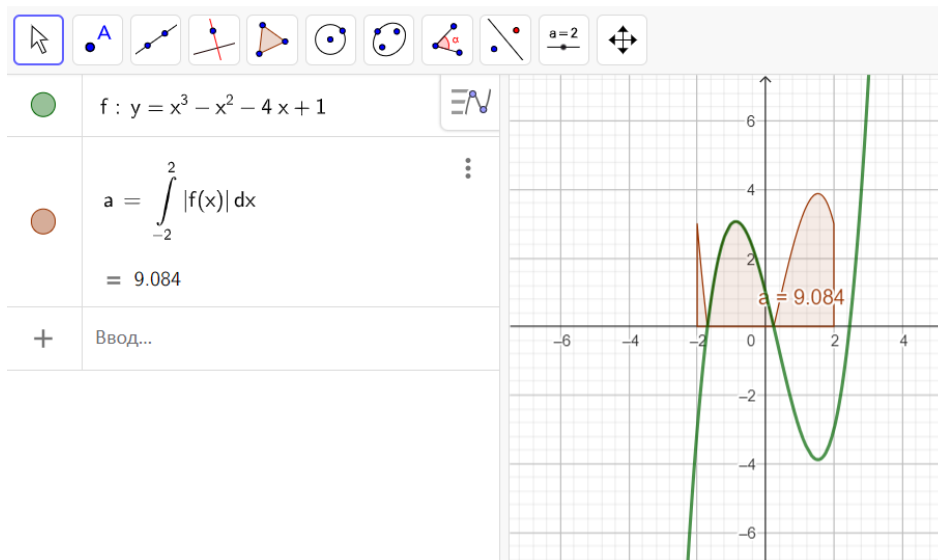
- проведення дотичної в точці до графіка функції (використали команду):



- знаходження асимптот функції (через команду):



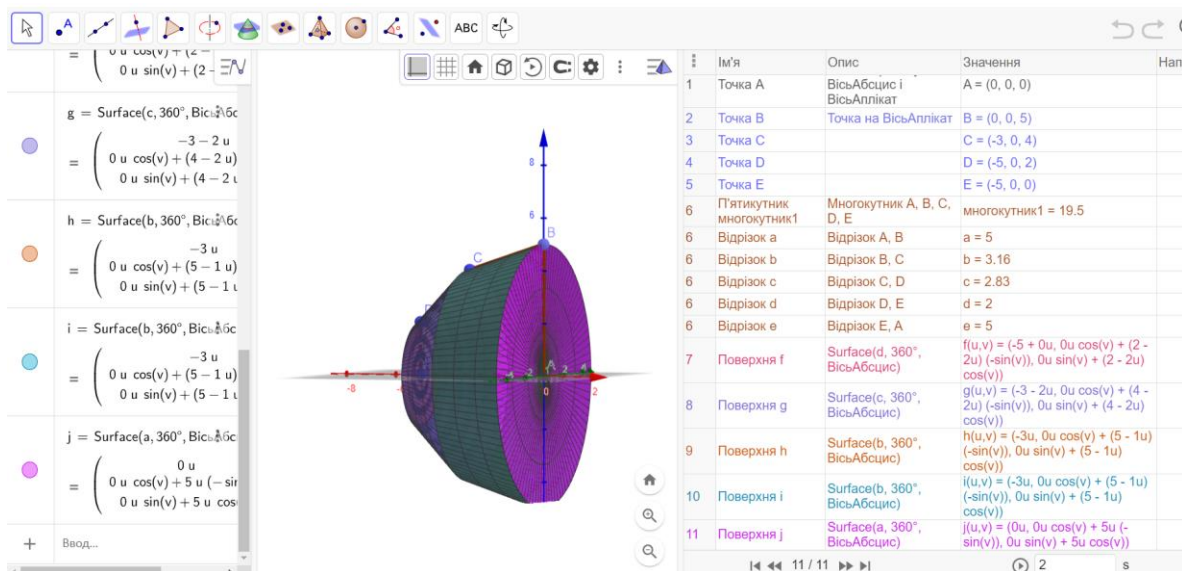
- обчислення визначеного інтеграла: вводимо в рядочок побудови: $a = \text{Інтеграл}(\text{abs}(f(x)), -2, 2)$ – не забуваємо функцію подати під знаком модуля та вказати межі:



Тема 8. Моделювання в середовищі GeoGebra

Моделювання в середовищі GeoGebra – це процес створення, дослідження та аналізу математичних моделей за допомогою інструментів, що надаються цією інтерактивною програмою. GeoGebra об'єднує динамічну геометрію, алгебру, таблиці, графіки, статистику та обчислення в одній простій для використання платформі. Це дозволяє візуалізувати та змінювати математичні об'єкти в реальному часі, що робить моделювання інтуїтивним і наочним. До речі, прикладне моделювання – це процес створення математичних, фізичних або комп'ютерних моделей для аналізу та розв'язання конкретних практичних задач у різних галузях, таких як інженерія, економіка, біологія, фізика та інші. Метою прикладного моделювання є використання цих моделей для прогнозування поведінки систем, оптимізації процесів, підтримки прийняття рішень та вирішення реальних проблем.

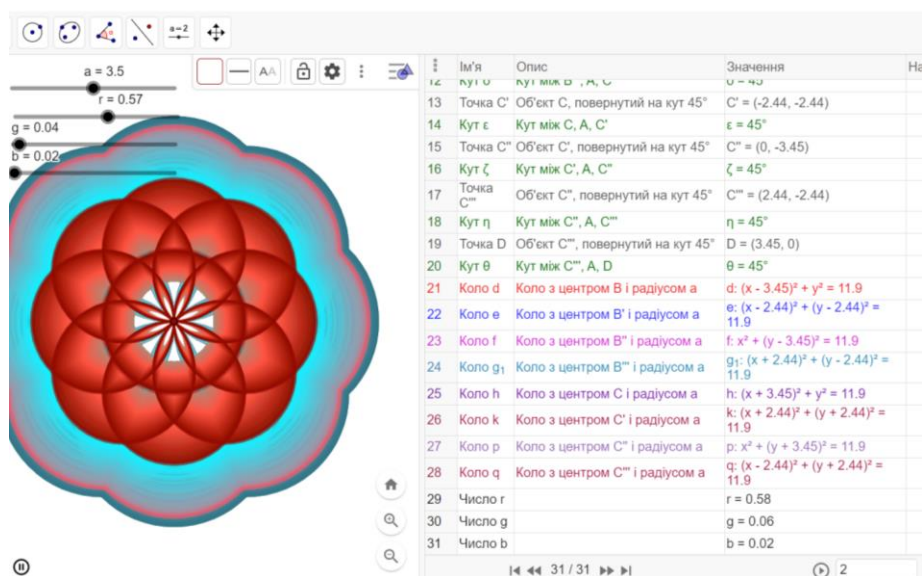
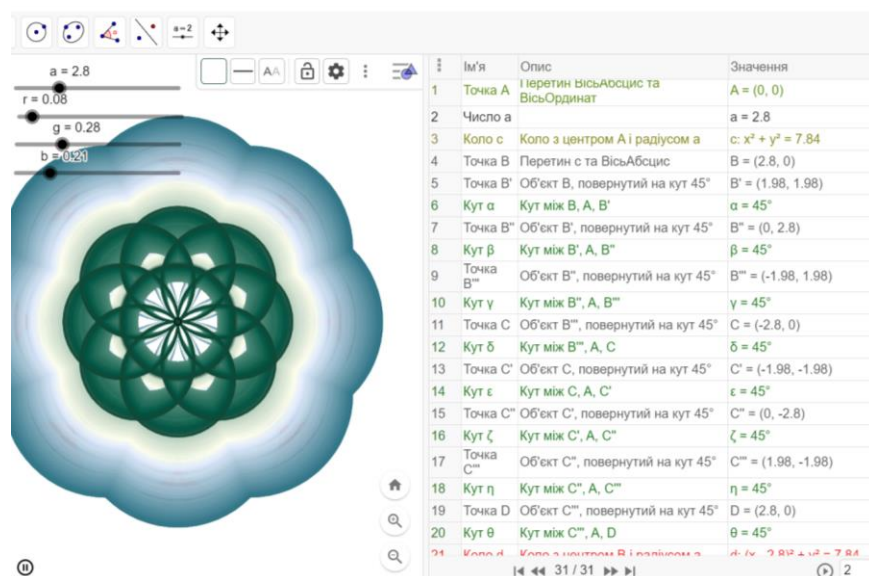
Приклад 1. Обертання п'ятикутника:



Даний приклад можна переглянути, перейшовши за посиланням:

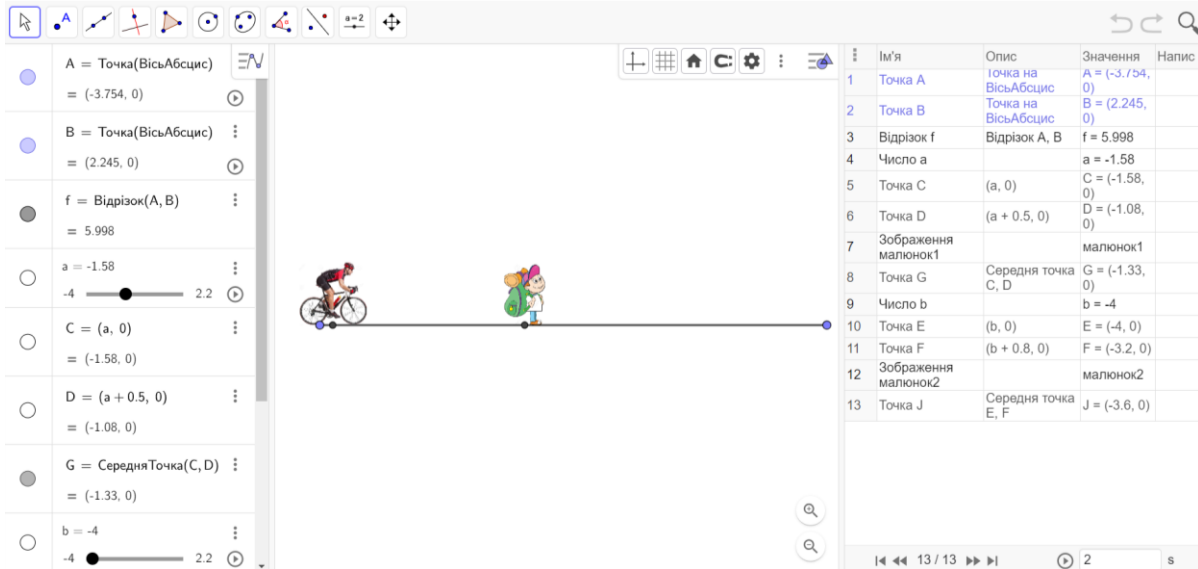
<https://www.geogebra.org/classic/xhb3gnd8>.

Приклад 2. Створення релакс-анімації: .



Даний приклад можна переглянути, перейшовши за посиланням: <https://www.geogebra.org/m/x28bdxbe> .

Приклад 3. Створення анімації для розуміння умови текстових задач, наприклад, на рух об'єктів в одну сторону: <https://www.geogebra.org/classic/szu6xsmx> .



Приклад 4. Моделювання реальних об'єктів: підбір функції до зображення/набору точок.

Пропонуємо ознайомитись з відеоматеріалами (у відео є підказки щодо використання інструментів середовища):

- моделювання моста:

https://www.youtube.com/watch?v=xF9GAOjGIw0&ab_channel=PhilTrezise ;

- моделювання пляшки:

https://www.youtube.com/watch?v=ycfI9xmmrcQ&t=1s&ab_channel=Daniellngham ;

https://www.youtube.com/watch?v=hBcwBfxJuLc&ab_channel=CarlaD%E2%80%98Alessandro ;

- вивчення рельєфу земної поверхні:

https://www.youtube.com/watch?v=wdVTzVHse1w&ab_channel=JoelSperanzaMath ;

https://www.youtube.com/watch?v=EirHTPst2bI&ab_channel=JamesMcMullan ;

https://www.youtube.com/watch?v=KGOsAvBO3WQ&ab_channel=Mustafa%C3%96zdemir ;

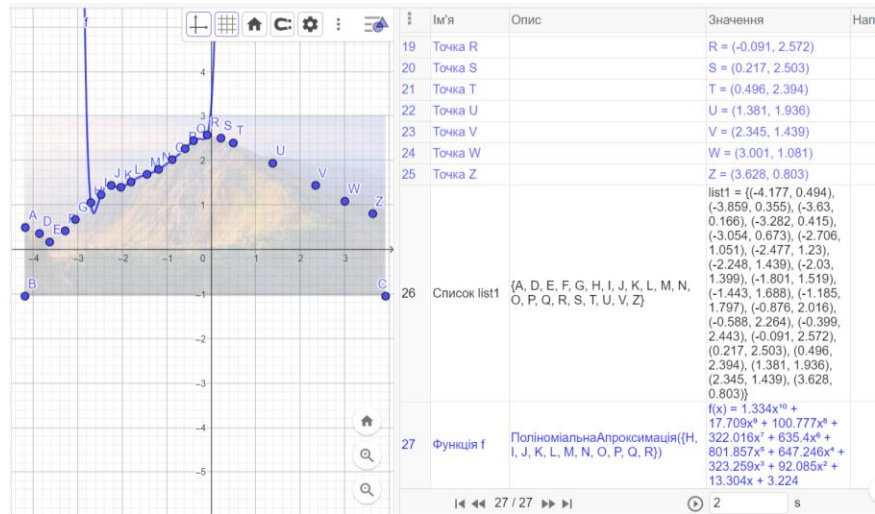
- хвиля:

https://www.youtube.com/watch?v=Q677mZdSNbU&ab_channel=BrittonRiehm

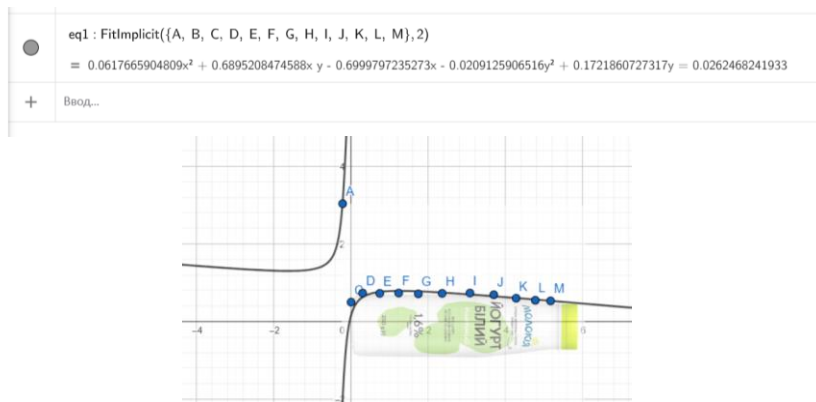
перелік можна продовжувати...

Додаємо приклади з власної бібліотеки:

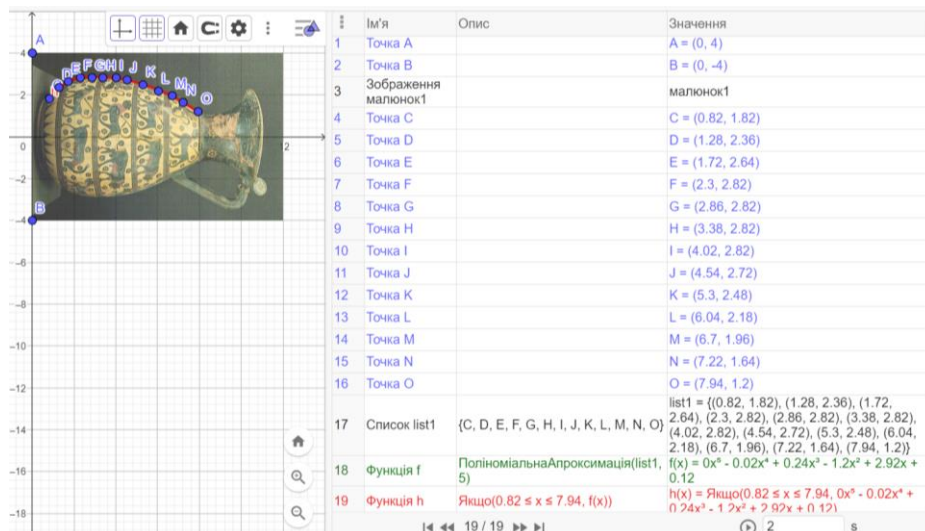
- рельєф земної поверхні: <https://www.geogebra.org/m/dsy3c9v7> :



- пляшечка йогурта: <https://www.geogebra.org/calculator/ynunj8rt> :



- старовинна ваза: <https://www.geogebra.org/classic/kuyd26qs> :



Проект. «Сонячна система» в GeoGebra

Підготовчий етап: пригадайте уроки астрономії з школи – які є планети Сонячної системи, на якій відстані розташовуються планети від Сонця, радіус планет тощо. До речі, можна переглянути відео за темою завдання:

<https://ua.izzi.digital/DOS/306708/355673.html>

<https://futurenow.com.ua/planety-sonyachnoyi-systemy-po-poryadku/>.

Пропонуємо ознайомитись з відеоматеріалами (у відео є підказки щодо використання інструментів середовища):

- Сонячна система в 2D:

https://www.youtube.com/watch?v=JzypMR5FtRg&ab_channel=SvijetMatematike;

- Сонячна система в 3D:

[https://www.youtube.com/watch?v=7be-A-](https://www.youtube.com/watch?v=7be-A-1BJL4&ab_channel=JuanFranciscoHern%C3%A1ndez;)

[1BJL4&ab_channel=JuanFranciscoHern%C3%A1ndez;](https://www.youtube.com/watch?v=7be-A-1BJL4&ab_channel=JuanFranciscoHern%C3%A1ndez;)

https://www.youtube.com/watch?v=bSfw_t6XHE&ab_channel=SvijetMatematike;

Звичайно, що є аналогічні навчальні відео, тому обираєте на Ваш розсуд.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ТА РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. *GeoGebra. Динамічна математика для навчання та викладання : [веб-сайт]. 2024. URL : <http://www.geogebra.org/>. (Дата перегляду. 08.07.2024).*
2. *GeoGebra Forum : [веб-сайт]. 2024. URL : <https://help.geogebra.org/>. (Дата перегляду. 05.07.2024).*
3. *GeoGebra YouTube Channel : [youtube-канал]. 2024. URL : <https://www.youtube.com/user/GeoGebraChannel>. (Дата перегляду. 03.07.2024).*
4. *TeacherTube GeoGebra : освітня спільнота [веб-сайт]. 2024. URL : <https://www.teachertube.com/>. (Дата перегляду. 10.07.2024).*
5. *Волошена В. В. Можливості та особливості використання додатку GeoGebra при вивченні геометрії в умовах дистанційного навчання. 2023.*
6. *Глазова В. В.; Безсмертна А. В. Використання програми Geogebra 5.0 для розв'язування задач стереометрії. 2017.*
7. *Довбня П. І. Використання мобільних додатків «GeoGebra» при вивченні геометричних об'єктів. міжнародної науково-методичної конференції ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ ПМО–2019, 2019, 209 с.*
8. *Зенгін Їлмаз; Фуркан Хасан; Кутлуца Тамер. Вплив програмного забезпечення динамічної математики geogebra на успішність учнів у навчанні тригонометрії. Procedia-соціальні та поведінкові науки , 2012, 31: С. 183-187.*
9. *Йорганчі Серпіл. Дослідження поглядів аспірантів на використання GeoGebra у викладанні математики. Онлайн подання , 2018, 4.8: С. 63-78.*
10. *Марина В.; Самусенко П. Застосування програмного засобу GeoGebra до розв'язування алгебраїчних задач з параметром. Фізико-математична освіта, 2023, 38.1: С. 7-13.*
11. *Пікалова В. В. Використання пакету GeoGebra як інструмента реалізації концепції STEM-освіти у процесі підготовки майбутніх учителів математики. 2021.*

12. Поліщук Т.; Іщенко Г.; Возносименко Д. Підготовка майбутніх учителів математики у процесі вивчення математичних дисциплін з використанням пакету GEOGEBRA. Проблеми підготовки сучасного вчителя, 2020, 21: С. 111-118.

13. Ракута В. М. GeoGebra 5.0 для вчителів математики. Алгебра (оновлена версія): Навчальний посібник. Чернігів: ЧОІППО ім. К. Д. Ушинського, 2020. 79 с.

14. Ракута В. М. GeoGebra 5.0 для вчителів математики. Планіметрія (оновлена та доповнена): Навчальний посібник. Чернігів: ЧОІППО ім. К. Д. Ушинського, 2020. 74 с.

15. Ракута В. М. GeoGebra для вчителів математики. Стереометрія: навчальний посібник. 2021. 102 с.

16. Сангвін Кріс. Короткий огляд GeoGebra: динамічна математика. MSor Connections , 2007, 7.2: 36 с.

17. Семеніхіна О. В.; Друшляк М. Г. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії. Інформаційні технології і засоби навчання, 2014, 44, вип. 6: С. 124-133.

18. Яременко Ю. В. Використання програми GeoGebra при викладанні геометрії. 2019.