Міністерство освіти і науки України

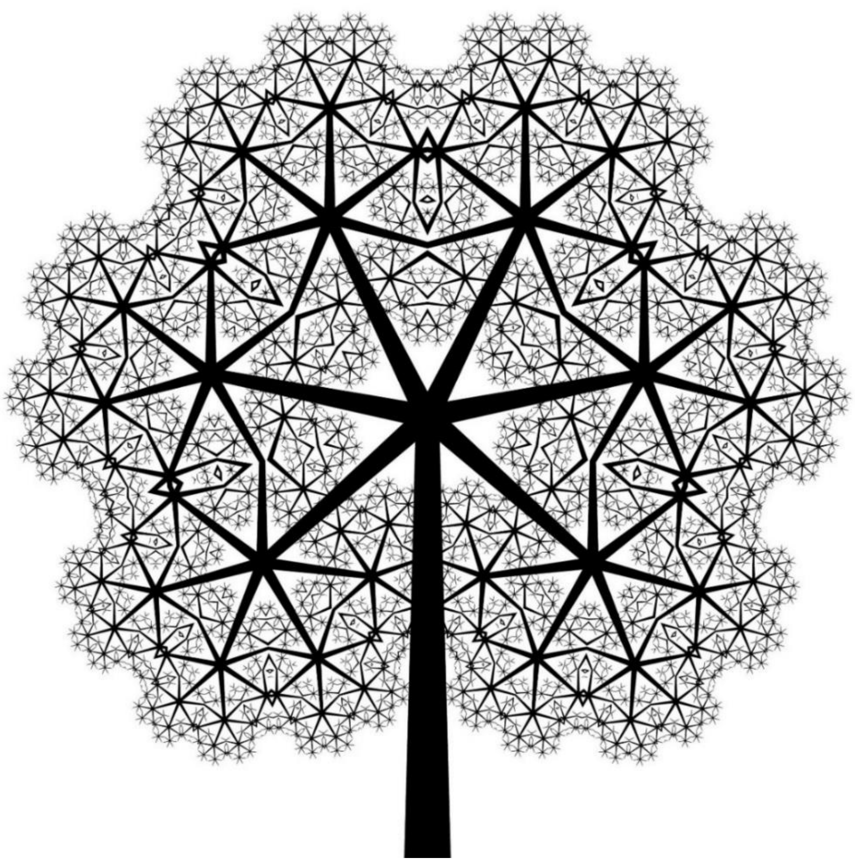
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Ольга Чемерис

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи здобувачів нематематичних спеціальностей

ЧАСТИНА 1



Житомир
Вид-во ЖДУ імені Івана Франка
2024

УДК 51(075.8)
Ч 42

Рекомендовано до друку вченою радою Житомирського державного університету імені Івана Франка
(протокол № 21 від 25.11.2024 р.)

Рецензенти:
Журавльов Валерій – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Поліського національного університету;
Королюк Олена – кандидат педагогічних наук, доцент, викладач математики вищої категорії, викладач-методист Відокремленого структурного підрозділу «Житомирський автомобільно-дорожній фаховий коледж Національного транспортного університету»;
Коломієць Таміла – доктор філософії зі спеціальності 111 Математика, доцент кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики

Чемерис О.
Ч 42 Вища математика : навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи здобувачів нематематичних спеціальностей. Частина 1. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. 49 с.

Навчально-методичний посібник містить короткі теоретичні відомості за темами освітньої компоненти «Вища математика». Посібник включає індивідуальні завдання за варіантами та містить розв’язання прикладів за першими п’ятьма темами курсу.

Адресовано викладачам та здобувачам нематематичних спеціальностей.

УДК 51(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Вища математика – це фундаментальна наука, яка вивчає абстрактні структури та їхні взаємозв'язки. Від руху планет до роботи комп'ютерних мереж – все піддається математичному моделюванню. Освітня компонента «Вища математика» допоможе засвоїти цей універсальний інструмент і застосовувати його для розв'язання складних задач. Курс складається з таких важливих розділів, як лінійна алгебра, математичний аналіз, теорія ймовірностей та багато інших. Вивчення вищої математики не тільки розширить ваш кругозір, але й допоможе розвинути логічне мислення та аналітичні навички, які будуть корисними в будь-якій сфері діяльності, адже математичний апарат є необхідним інструментом для багатьох галузей знань, таких як фізика, економіка, інженерія тощо.

Від найдавніших часів математика супроводжувала людство, допомагаючи вирішувати найрізноманітніші задачі. Математика була необхідна для вимірювання ділянок землі, розрахунку врожаю та складання календарів. Знання геометрії дозволяли будувати міцні споруди, від пірамід до грецьких храмів. Математичні моделі допомагали передбачати рух небесних тіл, що було важливо для навігації та складання календарів. Математика була необхідна для обчислення прибутку, відсотків та ведення торгових книг. Математичні методи дозволяли створювати більш точні карти, що сприяло дослідженню нових земель. Математика стала основою для розвитку фізики, астрономії та інших наук. Закони Ньютона, теорія відносності Ейнштейна – все це базується на математичних моделях. Математичні методи оптимізували виробничі процеси, дозволили створювати нові машини та матеріали тощо. Вирішення математичних задач розвиває логіку, аналітичні навички та вміння абстрактно мислити. Математичні моделі допомагають аналізувати дані та приймати обґрунтовані рішення. Математика – це не тільки точні розрахунки, але й творчий процес пошуку нових рішень.

Отже, математика – це не просто сукупність формул і теорем. Це потужний інструмент, який дозволяє нам краще розуміти світ, вирішувати складні проблеми та створювати нові технології.

Тема 1. Матриці та визначники (детермінанти)

Матриця — це математичний об'єкт, який являє собою прямокутну таблицю чисел, символів або виразів, розташованих у рядках і стовпцях. Матриці використовуються для розв’язування систем лінійних рівнянь, обробки даних, перетворень у лінійній алгебрі, комп'ютерній графіці, машинному навчанні та багатьох інших галузях.

Матриця зазвичай позначається великою літерою (наприклад, A, B, C)), а її елементи — індексованими змінними (наприклад, a_{ij}, де i вказує на номер рядка, а j — на номер стовпця.

Наприклад, матриця A, що має 2 рядки і 3 стовпці (матриця розміру 2×3), виглядає так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Типи матриць:

1. Квадратна матриця: матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців. Наприклад, 2×2 чи 5×5 тощо.

2. Прямокутна матриця: матриця, у якої кількість рядків не дорівнює кількості стовпців. Наприклад, 2×3, 7×2 тощо.

3. Діагональна матриця: квадратна матриця, у якій всі елементи, крім діагональних (від верхнього лівого до нижнього правого кута), дорівнюють нулю.

4. Одинична матриця: квадратна матриця, в якій всі діагональні елементи дорівнюють 1, а всі інші – 0. Позначається E.

5. Нульова матриця: Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю.

Операції над матрицями:

Матриці можна додавати, віднімати, множити між собою або на число.

1. Додавання матриць: матриці однакового розміру додаються шляхом додавання відповідних елементів.

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 10 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 11 & -3 \\ 0 & 12 & -7 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -4 & 13 & 3 \\ 11 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Множення матриць: для множення двох матриць необхідно, щоб кількість стовпців першої матриці дорівнювала кількості рядків другої матриці. Результатом є нова матриця.

$$A(m * n) \cdot B(n * k) = C(m * k)$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} \\ -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ \boxed{-3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 7 + 3\cdot(-3) & 2\cdot 2 + 3\cdot 5 \\ -1\cdot 7 + 4\cdot(-3) & -1\cdot 2 + 4\cdot 5 \\ 0\cdot 7 + (-5)\cdot(-3) & 0\cdot 2 + (-5)\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ -19 & 18 \\ 15 & -25 \end{pmatrix}$$

Перевірка:

$A\ (3 \times 2)$

$B\ (2 \times 2)$

$$A \cdot B = (3 \times 2) \cdot (2 \times 2) = (3 \times 2)$$

3. Транспонування матриці: перетворення матриці шляхом заміни її рядків на стовпці.

Матриці використовуються в багатьох галузях, зокрема:

- фізика: для опису квантових станів і операторів;
- інформатика: у графіці та обробці зображень, машинному навчанні;
- економіка: для моделювання систем лінійних рівнянь, які описують економічні моделі;
- інженерія: у теорії керування, аналізі механічних структур.

Матриці є фундаментальним інструментом для розв'язання складних задач у різних галузях науки і техніки.

Детермінант (визначник) другого порядку – це числове значення, яке обчислюється для квадратної матриці розміру 2×2 і є характеристикою цієї матриці. Детермінант допомагає визначити важливі характеристики матриці, наприклад, чи існує обернена матриця тощо.

Для матриці другого порядку A, детермінант обчислюється так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to detA = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Приклад:

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 35 + 8 = 43$$

Важливі висновки:

- якщо детермінант матриці другого порядку дорівнює нулю, то така матриця не має оберненої, і система рівнянь, яку вона представляє, має або нескінченну кількість розв'язків, або не має їх взагалі;
- якщо детермінант відмінний від нуля, то матриця має обернену, і відповідна їй система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок.

Детермінант другого порядку використовується в багатьох математичних та прикладних задачах, зокрема, у геометрії (наприклад, для обчислення площі паралелограма) та фізиці.

Детермінант третього порядку – це числове значення, яке обчислюється для квадратної матриці розміру 3×3 і є характеристикою цієї матриці.

Для матриці третього порядку A, детермінант обчислюється так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

1) *як суму добутків елементів матриці: в кожному із добутків є рівно по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпця; кожному добутку приписується знак плюс чи мінус, в залежності від парності перестановки номерів:*

$$= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) -$$
$$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$$

2) *розклали за елементами першого рядочка:*

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$$
$$+a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Приклад (розписали обчислення детально):

спосіб 1 (прийом «сітки»):

дописали

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{array}{c|ccc|c} -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -4 & 7 & 0 \end{array} =$$

$-$ $\qquad$ $+$

$$= \left(-3\cdot 5\cdot(-4) + 2\cdot(-2)\cdot 7 + 1\cdot 4\cdot 0\right) -$$

$$- \left(7\cdot 5\cdot 1 + 0\cdot(-2)\cdot(-3) - 4\cdot 4\cdot 2\right) =$$

$$= (60 - 28) - (35 - 32) = 32 - 3 = 29$$

спосіб 2 (розклали за елементами першого рядочка):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \underbrace{\overset{a_{11}}{\overset{\parallel}{2}}\cdot(-1)^{1+1}\cdot \overset{M_{11}\ (\text{мінор елемента } a_{11})}{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}}}_{A_{11}\ (\text{алгебраїчне доповнення елемента } a_{11})} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ \underset{a_{13}}{\underset{\parallel}{(-3)}}\cdot\underbrace{(-1)^{1+3}\cdot\overbrace{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}^{M_{13}}}_{A_{13}} =$$

$$= 2\left(-2\cdot 7 - 4\cdot(-4)\right) - 1\cdot\left(5\cdot 7 - 4\cdot 0\right) - 3\cdot\left(5\cdot(-4) - (-2)\cdot 0\right) =$$

$$= 2\cdot 2 - 35 - 3\cdot(-20) = 29$$

Властивості детермінантів:

1. *Лінійність за рядками та стовпцями:* ящо один зі стовпців або рядків помножити на число, то детермінант також помножиться на це число.
2. *Зміна знаку при перестановці рядків або стовпців:* якщо два рядки або два стовпці матриці поміняти місцями, детермінант змінить знак.
3. *Нульовий детермінант:* якщо один з рядків або стовпців матриці складається з нулів, або якщо два рядки (чи стовпці) є пропорційними, то детермінант дорівнює нулю.
4. *Множення матриць:* детермінант добутку двох матриць дорівнює добутку їхніх детермінантів.

5. *Обернена матриця:* матриця має обернену матрицю, якщо її детермінант не дорівнює нулю.

Обчислення детермінанта четвертого порядку

Розглянемо матрицю A четвертого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Для обчислення детермінанта четвертого порядку можна використати метод розкладання за рядком або стовпцем. Наприклад, розкладаємо за першим рядком:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}) - a_{14} \cdot det(A_{14}),$$

де $det(A_{ij})$ – це детермінант матриці третього порядку, утвореної шляхом виключення *i*-го рядка та *j*-го стовпця з матриці *A*.

Приклад. Обчислимо детермінант 4-го порядку (застосуємо розкладання за першим рядком):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = 0$$

Обчислення кожного з детермінантів третього порядку та підстановка результатів дозволить отримати значення детермінанта матриці *A*.

Також наведемо повне обчислення детермінанта за властивостями:

$\cdot(-2)\ +$

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{5} & 6 & 7 & 8 \\ \boxed{8} & 7 & 6 & 5 \\ \boxed{4} & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -8 & -12 \\ 8 & -9 & -18 & -27 \\ 4 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -9 & -18 & -27 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} =$$

$\cdot(-3)\ +$

$\cdot(-4)\ +$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{-4} & -8 & -12 \\ \boxed{-9} & -18 & -27 \\ \boxed{-5} & -10 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\cdot(-2)\ +$

$\cdot(-3)\ +$

Застосування детермінантів:

1. Розв’язування систем лінійних рівнянь: детермінанти використовуються в методі Крамера для розв'язання систем лінійних рівнянь.
2. Обчислення об'ємів: детермінанти третього порядку використовуються для обчислення об'єму паралелепіпеда, заданого трьома векторами.
3. Аналіз лінійної залежності: детермінант допомагає визначити, чи є три вектори лінійно залежними; якщо детермінант відповідної матриці дорівнює нулю, то вектори лінійно залежні.
4. Теорія керування: в системах автоматичного керування детермінанти використовуються для аналізу стабільності систем.
5. Фізика та інженерія: у механіці, детермінанти використовуються для аналізу статичних систем, включаючи рівновагу сил та моментів.

Позааудиторна самостійна робота №1

Завдання (відповідно до свого варіанту):

1) Сформуйте матриці A та B (третього порядку) та виконайте додавання цих матриць.

2) Сформуйте матриці A та B (третього порядку) та виконайте множення цих матриць.

3) Обчисліть детермінант матриці B (двома способами).

4) Обчисліть детермінант матриці C (четвертого порядку).

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}							
								b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{31}	b_{32}	b_{33}
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}
Варіант 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Варіант 2	5	6	7	8	-1	2	0	16	-3	-7	2	1	-4	5	-4	2
Варіант 3	8	7	6	5	-9	-3	-2	1	10	0	-3	-8	2	-4	3	4
Варіант 4	4	3	2	1	17	5	1	-6	-2	6	4	2	-2	-5	2	1
Варіант 5	7	-5	4	10	2	1	1	0	9	21	-7	1	8	2	11	-1
Варіант 6	0	-1	9	-4	1	-9	-3	2	7	-14	8	0	-3	1	3	-2
Варіант 7	11	13	-4	8	-2	-7	2	-4	1	17	1	10	-3	0	4	5
Варіант 8	-2	1	25	9	10	-1	4	11	-3	-5	2	-1	4	2	6	-2
Варіант 9	6	-2	9	1	-3	0	-5	15	4	12	7	4	9	-1	9	3
Варіант 10	3	14	-1	1	6	5	7	-2	-4	-16	-6	5	-2	-3	10	0
Варіант 11	10	1	16	11	14	2	13	5	12	3	15	4	8	7	6	9
Варіант 12	-7	5	2	2	5	6	-4	-1	1	7	-4	8	16	0	2	-3
Варіант 13	0	8	4	-3	-4	7	2	-9	-8	6	3	5	1	-2	-3	10
Варіант 14	6	4	1	4	-5	3	-2	17	2	2	2	1	-6	1	5	-2
Варіант 15	21	7	-1	-7	2	-5	8	2	1	4	11	10	0	1	1	9
Варіант 16	-14	0	-2	8	1	-1	-3	1	0	9	3	-4	2	-3	-9	7
Варіант 17	17	11	5	1	0	13	-3	-2	10	-4	4	8	-4	2	-7	1
Варіант 18	-5	-2	-2	2	2	1	4	10	-1	25	6	9	11	4	-1	-3
Варіант 19	12	6	3	7	-1	-2	9	-3	4	9	9	1	15	-5	0	4
Варіант 20	-16	3	0	-6	-3	14	-2	6	5	-1	10	1	-2	7	5	-4
Варіант 21	4	8	1	6	10	15	7	16	13	2	9	14	12	5	11	3
Варіант 22	8	16	5	2	-7	-4	0	2	-4	6	-3	5	1	-1	2	7
Варіант 23	5	1	8	-3	0	3	-2	4	2	7	10	-4	-8	-9	-3	6
Варіант 24	1	-6	4	5	6	2	1	1	-2	3	-2	-5	2	17	4	2
Варіант 25	10	0	7	1	21	11	1	-1	8	-5	9	2	1	2	-7	4
Варіант 26	-4	2	0	-9	-14	3	-3	-2	-3	-1	7	1	0	1	8	9
Варіант 27	8	-4	11	-7	17	4	2	5	-3	13	1	0	10	-2	1	-4
Варіант 28	9	11	-2	-1	-5	6	4	-2	4	1	-3	2	-1	10	2	25
Варіант 29	1	15	6	0	12	9	-5	3	9	-2	4	-1	4	-3	7	9
Варіант 30	1	-2	3	5	-16	10	7	0	-2	14	-4	-3	5	6	-6	-1

Тема 2. Різні методи розв’язування систем лінійних рівнянь

За формулами Крамера — це метод розв'язування систем лінійних рівнянь, який базується на використанні визначників. Він може бути застосований до систем лінійних рівнянь, де кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, і система має єдиний розв'язок (визначена система).

Кроки методу Крамера:

- обчислюємо визначник основної матриці *detA* (основна матриця системи – це матриця коефіцієнтів при невідомих); якщо *detA* =0, то метод Крамера не застосовується, оскільки система є або несумісною, або невизначеною (має нескінченно багато розв'язків);
- обчислюємо визначники допоміжних матриць – для кожного невідомого формується матриця, яка отримується заміною певного стовпця матриці на вектор вільних членів;
- знаходимо розв'язки як результати відношень визначників допоміжних матриць до визначника основної матриці.

Метод Крамера є досить простим і наочним для малих систем лінійних рівнянь, але є неефективним для великих систем через складність обчислення визначників, яка зростає експоненціально з розміром матриці.

Розв’яжемо систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 8x+2y-z=0 \\ 2x+y-3z=-12 \\ 3x-2y+4z=23 \end{cases}$$

1) $$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & \boxed{1} & -3 \\ 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -8-35 = -43 \neq 0$$

$$\Delta = -43$$

2) $$\det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & -3 \\ 23 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -12 & -5 & -3 \\ 23 & 6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -12 & -5 \\ 23 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-72+115) = -43 = \Delta_x$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 2 & -12 & -3 \\ 3 & 23 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -22 & -12 & -3 \\ 35 & 23 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -22 & -12 \\ 35 & 23 \end{vmatrix} =$$

$\cdot 8$

$+$

$$= -(-22\cdot 23 + 12\cdot 35) = 86 = \Delta_y$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -12 \\ 3 & -2 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -12 \\ 11 & -2 & 23 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -12 \\ 11 & 23 \end{vmatrix} =$$

$\cdot(-4)$

$+$

$$= -2(-2\cdot 23 + 12\cdot 11) = -172 = \Delta_z$$

3) $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-43}{-43} = 1$

$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{86}{-43} = -2$

$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-172}{-43} = 4$ Відповідь: $(1; -2; 4)$

Метод Гаусса – це алгоритм для розв'язування систем лінійних рівнянь шляхом послідовного перетворення системи до трикутної форми з подальшим застосуванням зворотного ходу для знаходження розв'язків. Цей метод також відомий як ***метод послідовного виключення невідомих***.

Кроки методу Гаусса:

1. Прямий хід (приведення до трикутної форми):

Мета цього етапу – перетворити систему рівнянь так, щоб матриця коефіцієнтів набула трикутної форми. Для цього використовуються елементарні перетворення рядків**:**

- додавання до одного рядка іншого рядка, помноженого на деякий коефіцієнт;
- перестановка рядків;
- множення рядка на ненульовий скаляр.

2. Зворотний хід (обчислення розв'язків):

Після приведення системи до трикутної форми починаємо зворотний хід – обчислення невідомих, починаючи з останнього рівняння.

Метод Гаусса – універсальний і підходить для будь-якої системи лінійних рівнянь, як визначеної, так і невизначеної, незалежно від кількості рівнянь, хоча при великих розмірах системи метод може бути складним у ручному виконанні через велику кількість арифметичних операцій.

Розв’яжемо ту саму систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 8x+2y-z=0 \\ 2x+y-3z=-12 \\ 3x-2y+4z=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z+8x+2y=0 \\ -3z+2x+y=-12 \\ 4z+3x-2y=23 \end{cases} \quad \cdot(-3)\,+ \quad \cdot 4\,+$$

$$\begin{cases} -z+8x+2y=0 \\ -22x-5y=-12 & \cdot 6 \\ 35x+6y=23 & \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z+8x+2y=0 \\ -132x-30y=-72 \\ 175x+30y=115 \end{cases} \quad +$$

$$\begin{cases} -z+8x+2y=0 \\ -22x-5y=-12 \\ 43x=43 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & x=\frac{43}{43}=1 \\ & 5y=12-22x=12-22=-10 \\ & y=\frac{-10}{5}=-2 \\ & z=8x+2y=8\cdot 1+2\cdot(-2)=4 \end{aligned}$$

Відповідь: $(1;-2;4)$

Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь (система записується як $A\cdot X=B$) включає кілька кроків. Суть методу полягає в поданні системи рівнянь у вигляді матричного рівняння і розв'язанні його за допомогою оберненої матриці. Ось основні етапи методу:

1. Запишемо систему у вигляді матричного рівняння $A\cdot X=B$, де:
   - A – матриця коефіцієнтів системи (розмірності $m\times n$),
   - X – стовпчик змінних (розмірності $n\times 1$),
   - B – стовпчик вільних членів (розмірності $m\times 1$).
2. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}:

Якщо матриця A є квадратною (тобто кількість рівнянь дорівнює кількості змінних) і невироджена (детермінант матриці A не дорівнює нулю), можна знайти її обернену матрицю A^{-1}. Обернена матриця задовольняє умові:
$A\cdot A^{-1}=E$, де E – одинична матриця.

3. Розв'яжемо рівняння:

Якщо знайдена обернена матриця A^{-1}, то розв'язок системи можна знайти як: X= $A^{-1}\cdot$B. Це означає, що треба помножити обернену матрицю на стовпчик вільних членів B, щоб отримати стовпчик змінних X.

Щоб знайти ***обернену матрицю*** для квадратної матриці A (розмірності $n \times n$), необхідно дотримуватися певних кроків. Обернена матриця A^{-1} визначається лише для тих матриць, у яких детермінант не дорівнює нулю. Нижче описано стандартний метод знаходження оберненої матриці для матриці A.

1. Знайдемо детермінант матриці A.

2. Перевіримо, чи існує обернена матриця: якщо детермінант матриці A дорівнює нулю, то обернена матриця не існує (матриця є виродженою); якщо детермінант матриці A не дорівнює нулю, то можна продовжити.

3. Знайдемо матрицю алгебраїчних доповнень (матрицю мінорів):

- для кожного елемента матриці A, знайдемо мінор – визначник матриці, яка утворюється після вилучення рядка і стовпця, до яких належить цей елемент;
- далі знайдемо алгебраїчне доповнення (кофактор) для кожного елемента, змінивши знак у відповідності до правила шахівниці: $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента на позиції (i,j).

4. Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень (замінимо рядки на стовпці).

5. Поділимо транспоновану матрицю на детермінант – це і буде обернена матриця A^{-1}.

Розв’яжемо ту саму систему лінійних рівнянь матричним методом:

Отже, відповідно до умови введемо позначення для основної матриці, матриці вільних членів та матриці невідомих:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 23 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Оскільки det A = - 43 (відмінний від 0) - обчислювали при розв'язанні системи методом Крамера, то будемо формувати обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3)(-2) = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - (-3) \cdot 3) = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2)) = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 35$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(8 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) = 22$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 = -5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(8 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2) = 22$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4$$

Отже,
$$A^{-1} = \frac{1}{-43} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 1 & 35 & 22 \\ -7 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

Тоді
$$x = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-43} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 1 & 35 & 22 \\ -7 & 22 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 23 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-43} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 - 6 \cdot (-12) - 5 \cdot 23 \\ 1 \cdot 0 + 35 \cdot (-12) + 22 \cdot 23 \\ -7 \cdot 0 + 22 \cdot (-12) + 4 \cdot 23 \end{pmatrix} = \frac{1}{-43} \cdot \begin{pmatrix} -43 \\ 86 \\ -172 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-43}{-43} \\ \frac{86}{-43} \\ \frac{-172}{-43} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{array}$$

Відповідь: $(1, -2, 4)$

Позааудиторна самостійна робота №2

Завдання (відповідно до свого варіанту):

Розв'яжіть систему лінійних рівнянь: 1) за формулами Крамера; 2) методом Гаусса; 3) матричним методом.

Приклади взято з посібника:

Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни "Вища математика" для студентів інженерних спеціальностей / Укл.: В. П. Мурашковська, Л. А. Руновська. Чернігів : ЧНТУ, 2019. 68с.

Варіант 1	$\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=11, \end{cases}$
Варіант 2	$\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2, \end{cases}$
Варіант 3	$\begin{cases} 2x-y+z=8, \\ x-3y-5z=6, \\ 3x+y-7z=-4, \end{cases}$
Варіант 4	$\begin{cases} 2x+y-5z=-12, \\ 2x+4y+z=13, \\ 3x+y-3z=-4, \end{cases}$
Варіант 5	$\begin{cases} 2x+y+4z=11, \\ 4x+2y+4z=14, \\ 3x-y+5z=12, \end{cases}$
Варіант 6	$\begin{cases} x+2y-z=4, \\ 2x-y+z=5, \\ x+y-3z=-7, \end{cases}$
Варіант 7	$\begin{cases} 2x-4y+z=10, \\ 3x-y+4z=20, \\ x-2y-2z=-5, \end{cases}$
Варіант 8	$\begin{cases} 2x+2y+z=-1, \\ x-3y+2z=-1, \\ 3x+y+z=2, \end{cases}$

Варіант 9	$\begin{cases} 3x+4y+z=8, \\ x-2y+4z=3, \\ 2x+3y-3z=2, \end{cases}$
Варіант 10	$\begin{cases} 2x+3y+z=9, \\ 3x-2y+z=6, \\ x-4y+2z=2, \end{cases}$
Варіант 11	$\begin{cases} x+3y-z=0, \\ 2x-2y+3z=5, \\ 3x+2y+z=4, \end{cases}$
Варіант 12	$\begin{cases} x+y-5z=-12, \\ 2x+4y+z=13, \\ 3x+y-3z=-4, \end{cases}$
Варіант 13	$\begin{cases} x+3y-4z=3, \\ 2x+y-z=3, \\ x+y+3z=6, \end{cases}$
Варіант 14	$\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11, \end{cases}$
Варіант 15	$\begin{cases} x+3y-2z=-1, \\ 2x-3y+4z=13, \\ 3x+y+z=10, \end{cases}$
Варіант 16	$\begin{cases} 3x+2y+z=6, \\ 4x+3y-2z=5, \\ x-3y+z=-1, \end{cases}$
Варіант 17	$\begin{cases} 2x+4y-z=5, \\ x-2y+3z=2, \\ 5x-y+4z=8, \end{cases}$
Варіант 18	$\begin{cases} 2x+4y+5z=19, \\ x-3y+3z=0, \\ 3x+2y+2z=15, \end{cases}$
Варіант 19	$\begin{cases} 3x+5y+4z=12, \\ -2x+3y+z=2, \\ x+2y+2z=5, \end{cases}$

Варіант 20	$\begin{cases} 5x + 4y - z = 16, \\ x + 3y + 2z = 12, \\ 4x - y + 3z = 12, \end{cases}$
Варіант 21	$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 0, \\ x + 2y - 3z = 3, \\ 4x + 3y + 4z = 18, \end{cases}$
Варіант 22	$\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 13, \\ x - 3y + z = -2, \\ 2x + 5y + 3z = 19, \end{cases}$
Варіант 23	$\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 11, \\ 3x + y + z = 6, \end{cases}$
Варіант 24	$\begin{cases} 3x + 5y - z = 16, \\ x + 2y - z = 5, \\ x - 3y + 4z = 5, \end{cases}$
Варіант 25	$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 3x + 2y - z = 6, \\ x + 3y + 4z = 13, \end{cases}$
Варіант 26	$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 6, \\ x + 3y + 4z = 8, \\ 2x + 4y - z = 5, \end{cases}$
Варіант 27	$\begin{cases} 7x - 2y - z = 1, \\ x + 3y + 2z = 11, \\ 2x + 4y + 3z = 16, \end{cases}$
Варіант 28	$\begin{cases} x - 4y + 2z = 5, \\ 2x + y - 3z = -6, \\ 3x - 2y - z = -2, \end{cases}$
Варіант 29	$\begin{cases} 5x + 4y - z = 16, \\ x + 3y + 2z = 12, \\ 4x - y + 3z = 12, \end{cases}$
Варіант 30	$\begin{cases} 2x + 4y - z = 5, \\ x - 2y + 3z = 2, \\ 5x - y + 4z = 8, \end{cases}$

Тема 3. Криві в декартовій та полярній системах координат

Лінії відіграють велику роль у науці та техніці. Вони дозволяють встановити й дослідити функціональну залежність між різними величинами, адже знання властивостей ліній дозволяє наочно розв'язати складні практичні завдання без застосування громіздкого математичного апарату.

Алгебраїчні криві – це найпростіші об'єкти евклідової геометрії, які визначаються як множина нулів многочлена від двох змінних. До плоских алгебраїчних кривих відносять спіраль Архімеда, лемніскату Бернуллі, клотоїду, кардіоїду тощо.

Не менш цікавими є ***трансцендентні криві*** – аналітичні криві, які не можна задати алгебраїчними функціями: синусоїда, циклоїда, спіраль Архімеда, трактріса, ланцюгова лінія, троянди тощо.

Параметричні рівняння кривої – це рівняння $x = x(t)$, $y = y(t)$, які з точки зору фізики задають положення матеріальної точки $M(x, y)$ в певний момент часу t.

Криву, задану параметричними рівняннями можна побудувати: 1) обчисливши координати точок M, покладаючи конкретне значення параметра t (результати зручно вносити в таблицю); 2) виключити параметр t та побудувати графік функції $f(x, y) = 0$.

Приклад 1. Побудувати криву, задану параметричними рівняннями $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ (астроїда).

I спосіб. Надамо конкретних значень для t та обчислимо для них x і y (див. табл.).

t	**0^0**	**30^0**	**45^0**	**60**	**90^0**	**120^0**	**135^0**	**150^0**	**180^0**
x	2	1,30	0,71	0,25	0	-0,25	-0,71	-1,30	-2
y	0	0,25	0,71	1,30	2	1,30	0,71	0,25	0
t	**210^0**	**225^0**	**240^0**	**270**	**300^0**	**315^0**	**330^0**	**360^0**	
x	-1,30	-0,71	-0,25	0	0,25	0,71	1,30	2	
y	-0,25	-0,71	-1,30	-2	-1,30	-0,71	-0,25	0	

II спосіб. Перевиразимо з першого рівняння $\cos t = \sqrt[3]{\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ та з другого рівняння $\sin t = \sqrt[3]{\frac{y}{2}} = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Тепер підставимо у «тригонометричну одиницю»: $1 = \cos^2 t + \sin^2 t = \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1$. Остаточно маємо $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ – це рівняння даної астроїди в прямокутній декартовій системі координат. Скористаємось динамічним середовищем GeoGebra та побудуємо астроїду (див. рис. 4).

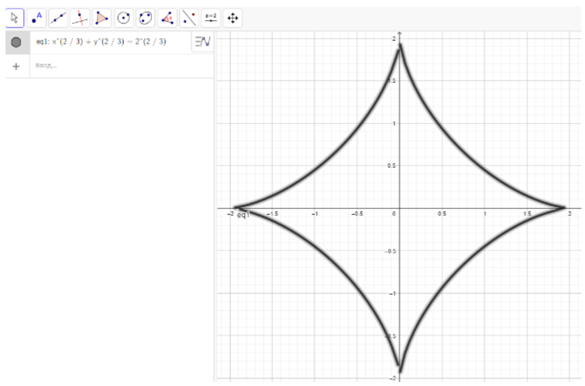
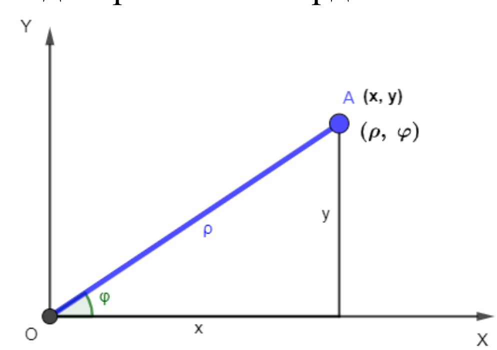


Рис. 4. Астроїда $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$

У **прямокутній декартовій системі координат** на площині положення точки задає впорядкована пара чисел (x, y), а у **полярній системі координат** – впорядкована пара чисел (ρ, φ). З рис. 5 очевидний зв'язок між полярними та декартовими координатами:



$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

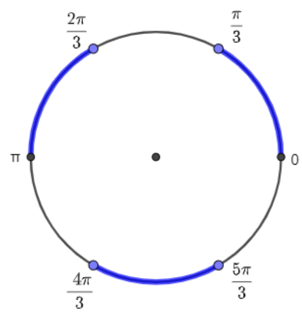
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

Рис. 5. Положення точки на площині

Приклад 2. Побудувати криву, задану полярним рівнянням $\rho = \frac{1}{2}\sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

Дослідимо рівняння кривої і знайдемо область визначення функції. Оскільки $\rho \geq 0$, то $\sin 3\varphi \geq 0$, тому $2\pi n \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi n$. Отже, $\frac{2}{3}\pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$.



Тепер складемо таблицю, покладаючи значення φ з області визначення і побудуємо точки.

$\boldsymbol{\varphi}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\boldsymbol{\rho}$	0	0,5	0,35	0	0	0,35	0,5	0	0	0,5	0

З΄єднаємо одержані точки послідовно плавною лінією – це наша шукана троянда. Щоб намалювати в середовищі GeoGebra, то виконали перехід за формули зв'язку і одержали рівняння $2\left(x^2 + y^2\right)^2 = y\left(3x^2 - y^2\right)$ (див. рис. 6).

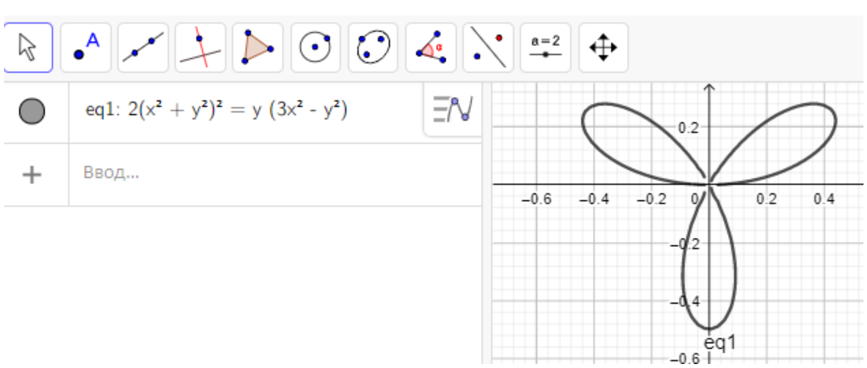


Рис. 6. Троянда $\rho = \frac{1}{2}\sin 3\varphi$ *в ПДСК*

Позааудиторна самостійна робота № 3

Завдання для роботи взято з посібника:

Методичні вказівки до індивідуального домашнього завдання з теми «Лінії, задані рівняннями в полярних координатах та параметрично» з курсу «Вища математика» / укладачі: О. О. Іваненко, Ю. А. Кравченко. Суми : Сумський державний університет, 2014. 29 с.

Завдання 1. Побудуйте криву, задану параметричними рівняннями згідно варіанту (див. табл. 5). Для цього складіть таблицю значень, зобразіть точки на координатній площині та з'єднайте їх. Яким буде рівняння кривої, якщо виключити параметр t ?

Завдання 2. Побудуйте криву, задану полярним рівнянням згідно варіанту (див. табл. 5). Для цього складіть таблицю значень на області визначення, зобразіть точки на площині та з'єднайте їх. Яким буде рівняння кривої у декартових координатах ?

Завдання 3. Побудуйте криву, задану рівнянням у декартовій системі координат (див. табл.), у середовищі GeoGebra classic. Яким буде рівняння кривої у полярних координатах?

Варіанти	Завдання 1	Завдання 2	Завдання 3
1	$\begin{cases} x = 3(1-\cos t) \\ y = 3(t-\sin t) \end{cases}$	$\rho = 7(1-\sin\varphi)$	$(x^2+y^2)^2 = 2ay^3$
2	$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$	$\rho = 6(1+\sin\varphi)$	$(x^2+y^2)^3 = x^4 - y^4$
3	$\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	$\rho = 4(1-\cos\varphi)$	$(x^2+y^2)^2 = 5a^2x^2 + 3a^2y^2$
4	$\begin{cases} x = 4\cos^2 t \\ y = 4\sin^2 t - 3 \end{cases}$	$\rho = \dfrac{2}{1+\sin\varphi}$	$(x^2+y^2)^3 = a^2x^4$
5	$\begin{cases} x = 8\sin t \\ y = 8\cos t \end{cases}$	$\rho = 5e^{\varphi},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$	$x^2+y^2 = x\sqrt{x}$
6	$\begin{cases} x = 8t^2 - 2 \\ y = 2t \end{cases}$	$\rho = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+\cos\varphi}$	$(x^2+y^2)^3 = 2ay^3$

7	$\begin{cases} x = 4\sin^2 t \\ y = 8\cos^2 t \end{cases}$	$\rho = -4\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(3x^2 + 2y^2)$
8	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$	$\rho = 8\sin\varphi$	$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2(4x^2 + 3y^2)$
9	$\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}$	$\rho = 10\cos\varphi$	$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2$
10	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$	$\rho = -2\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$	$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$
11	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$	$\rho = e^{-\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + y^2)$
12	$\begin{cases} x = 6(t - \cos t) \\ y = 6(1 - \sin t) \end{cases}$	$\rho = 2\cos 3\varphi$	$(x^2 + y^2)^3 = a^4x^2$
13	$\begin{cases} x = 8\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$	$\rho = \sin 4\varphi$	$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$
14	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$	$\rho = 5\sin 3\varphi$	$x^2 + y = \sqrt{xy}$
15	$\begin{cases} x = 16(t - \sin t) \\ y = 16(1 - \cos t) \end{cases}$	$\rho = 3\cos 4\varphi$	$(x^2 + y^2)^3 = \sqrt[3]{4x^2 + 3x^2y^2}$
16	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$	$\rho = e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0 \le \varphi \le \pi$	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(2x^2 + 3y^2)$
17	$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$	$\rho = 2\sin 2\varphi$	$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$
18	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$	$\rho = 6\cos\varphi$	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(7x^2 + 5y^2)$
19	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$	$\rho = 2\sin\varphi$	$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$
20	$\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$	$\rho = 3\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{4\pi}{3}$	$x^2 + y^2 = \sqrt[3]{x^2y^2}$

21	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\sin t \\ y = 5\sqrt{2}\cos t \end{cases}$	$\rho = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$	$(x^2+y^2)^3 = a^2y^4$
22	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\sin^3 t \\ y = \sqrt{2}\cos^3 t \end{cases}$	$\rho = e^{2\varphi},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$	$(x^2+y^2)^2 = 12x^2 + 16y^2$
23	$\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$	$\rho = 8(1-\cos\varphi)$	$(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2$
24	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$	$\rho = 6\sin\varphi$	$x^6 = 4(x^4 - y^4)$
25	$\begin{cases} x = 24\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	$\rho = 2\cos\varphi$	$(x^2+y^2)^3 = a^4y^2$
26	$\begin{cases} x = 8(t-\cos t) \\ y = 8(1-\sin t) \end{cases}$	$\rho = 8(1+\cos\varphi)$	$(x^2+y^2)^2 = 2x^2 + 3y^2$
27	$\begin{cases} x = 9\sin t \\ y = 4\cos t \end{cases}$	$\rho = \dfrac{2}{1-\sin\varphi}$	$3x^2 - y^2 = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$
28	$\begin{cases} x = 8\sin^3 t \\ y = 8\cos^3 t \end{cases}$	$\rho = e^{-2\varphi},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$	$(x^2+y^2)^2 = y^2$
29	$\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t-\sin t \end{cases}$	$\rho = \dfrac{6}{1+\cos\varphi}$	$x^2 + y^2 = \sqrt[3]{y^2}$
30	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$	$\rho = 4\cos 2\varphi$	$(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$

Тема 4. Границі функції

Основні моменти в обчисленні границь функцій:

Якщо функція є елементарною та граничне значення аргументу належить області її визначення, то обчислення границі функції зводиться до простої підстановки граничного значення аргументу:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Якщо аргумент прямує до нескінченості чи до числа, яке не належить області визначення функції, то у кожному випадку проводять спеціальне дослідження.

Границі, які часто зустрічаються (для $a > 0$):

1) $\lim\limits_{x\to\infty} ax = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{a} = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to\pm 0} \frac{a}{x} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & 0 < a < 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1 \\ -\infty, & a > 1 \end{cases}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgax}{bx} = \frac{a}{b}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctgax}{bx} = \frac{a}{b}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}7182818\ldots$, $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Обчислимо наступні границі:

1) $$\lim_{x\to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 5} \frac{2(x-5)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x + \frac{1}{3}\right)} = \lim_{x\to 5} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{2(x-5)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x + \frac{1}{3}\right)} = = \lim_{x\to 5} \frac{2x - 1}{3x + 1} = \frac{9}{16}$$

$$2)\ \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+1}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{(9-(2x+1))\left(2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{(8-2x)\left(2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{6+0-0}{3-0+0}=2$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}{1}=\frac{0+\sqrt{2-0}}{1}=\sqrt{2}$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}x-\sqrt{x^2+5x}=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(x^2+5x\right)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-5x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+5x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=$$

$$=\frac{-5}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{5}{2}$$

Для перевірки обчислень границь функцій можна скористатитсь онлайн сервісом OnlineMSchool:
http://ua.onlinemschool.com/math/assistance/limit_derivative/limit/

або сервісом WolframAlpha:
https://www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp?id=3001bb57192b77b83f9a9cd4da497a38

Ось так виглядає умова для прикладу 2 та нижче – готовий результат:

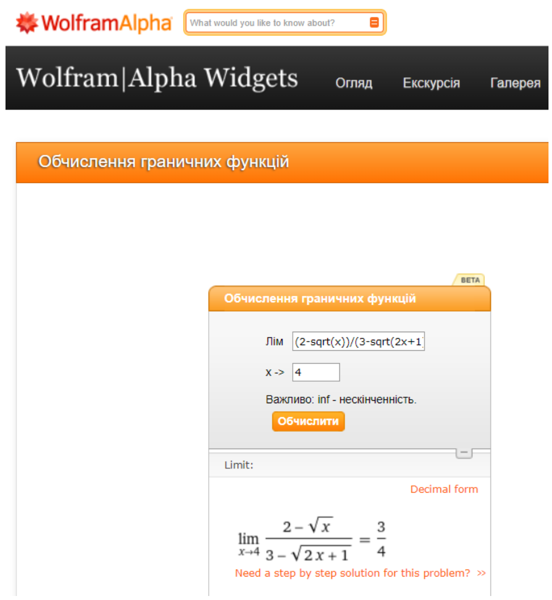


Рис.7. Сервіс OnlineMSchool для обчислення границь функцій

Позааудиторна самостійна робота № 4

Обчислити границі функцій (відповідно до свого варіанту)

Варіанти	**Завдання 1**	**Завдання 2**
1	$\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^3+8}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$
2	$\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3+4x^2+5}{2x^3-3x+21}$
3	$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$
4	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3-3x^2+x}{x^2-4x+3}$
5	$\lim\limits_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x^3-7x}{1-5x^3}$
6	$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4x+1}{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1-x^3}{1+3x^3}$

7	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x^3+12}{2x^5+149}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
10	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$
11	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2+1}$
12	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-2}{x^2+2x+15}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$
14	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4x^3}{2+x+x^2+8x^3}$	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$
15	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16x^2-13x-3}{2x^2+3x-5}$
16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$
17	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+5x+1}{3x^3-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$
18	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5}{7x^3+x^2+4}$	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-6x+5}$
19	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+6}{x^3+27}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{3-x+x^2}}{x^2-x}$
20	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2x}-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+1}{2x^3-5x+21}$
21	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+7x+6}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x}$
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+7}{2x^2+5x+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-2x^2+x}{x^2-5x+4}$
23	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{1-5x^3}$

24	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x^3}{5+3x^3}$
25	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2+4x-21}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$
26	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x^3+2}{6x^5+141}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{1-5x}-1}$
27	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-4x+3}{3x^3-2x^2-x+7}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{7x}$
28	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+3x^2-4}{x^2+2x-3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-6}{6x^2-7x}$
29	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x+13}-4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+11}{4x^2+1}$
30	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{2x-16}{\sqrt{2x}+4}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+9}{5x^2-7}$

Тема 5. Загальне дослідження функцій та побудова їх графіків

Повне дослідження функції і побудову її графіка виконують за такою схемою (деякі пункти можна переставляти місцями й іноді не виконувати):

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Визначаємо, чи є функція парною, непарною, періодичною.
3. Досліджуємо функцію на неперервність, визначаємо точки розриву і їх вид.
4. Знаходимо асимптоти.
5. Знаходимо точки перетину кривої з осями координат.
6. Знаходимо інтервали зростання, спадання і точки екстремуму.
7. Знаходимо інтервали опуклості, увігнутості й точки перегину.

За результатами дослідження будуємо графік функції.

Завдання 1. Дослідимо функцію $y = x\ln x$ та побудуємо її графік.

1. Область визначення функції *D(x):* $x > 0$.

2. Оскільки область визначення не є симетричною відносно початку координат, то дослідження на парність та періодичність є зайвим. Отже, задана функція – ні парна, ні непарна, неперіодична.

3. На всій області визначення функція неперервна. Дослідимо функцію в точці x=0_+:

$$\lim_{x\to 0_+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0_+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \{\textit{застосуємо правило Лопіталя}\} = \lim_{x\to 0_+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+}(-x) = 0_- .$$

4. Вертикальних асимптот на області визначення графік функції немає. Перевіримо, чи є похилі $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x\ln 3x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\ln 3x = +\infty$$ – похилих асимптот немає.

5. Перетину з віссю Oy немає, оскільки $x \neq 0$.

Знайдемо точку перетину з віссю Ох:

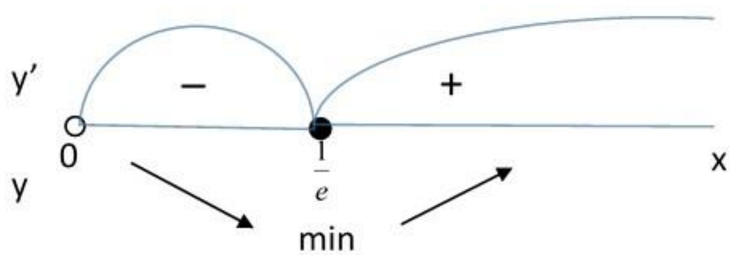
$$y = 0 \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1\,.$$

Отже, маємо точку перетину з віссю Ох: $(1;0)$.

6. Знайдемо критичні точки: $y' = (x \cdot \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} =$ $= \ln x + 1$.

$$y' = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Дослідимо критичну точку за знаком похідної:



Графік функції спадає на проміжку: $\left(0; \dfrac{1}{e}\right)$.

Графік функції зростає на проміжку: $\left(\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$.

Точка мінімуму: $x = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37\ldots \Rightarrow y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e} = -\dfrac{1}{e} \approx -0{,}37\ldots$

7. Знайдемо точки перегину: $y'' = (\ln x + 1)' = \dfrac{1}{x}$. Очевидно, що $y'' \neq 0$ (точок перегину немає). Враховуючи область визначення функції маємо $y'' > 0$, тобто графік функції опуклий донизу.

Етапів дослідження достатньо, щоб виконати побудову графіка функції. Перевіримо свої дії, ввівши умову функції у протокол побудови середовища GeoGebra.

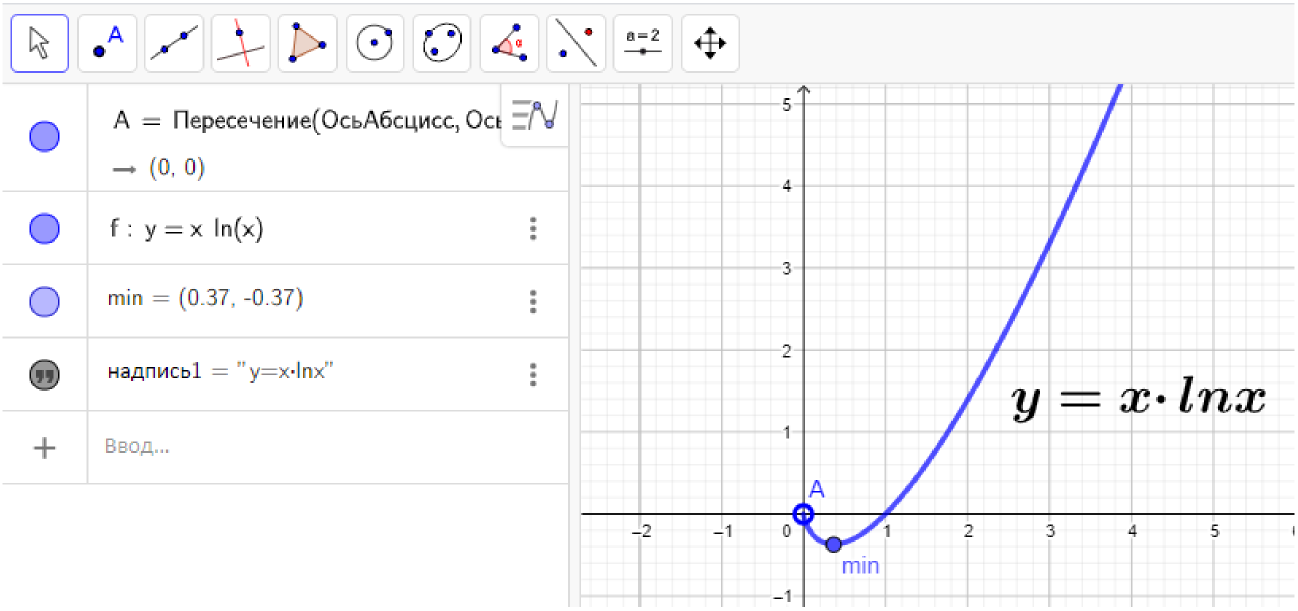


Рис. 6. Графік функції $y = x \cdot \ln x$

Завдання 2. Дослідимо функцію $y = \dfrac{x^2+3}{2x^2-7x}$ та побудуємо її графік.

1. Область визначення функції *D(x)*: $2x^2 - 7x \neq 0 \Rightarrow 2x(x-3{,}5) \neq 0$, отже,

$$D(x): (-\infty; 0) \cup (0; 3{,}5) \cup (3{,}5; +\infty).$$

2. Оскільки область визначення не є симетричною відносно початку координат, то дослідження на парність та періодичність є зайвим. Отже, задана функція – ні парна, ні непарна, неперіодична.

3. На всій області визначення функція неперервна. Дослідимо функцію в точках розриву $x = 0$ та $x = 3{,}5$.

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{x^2+3}{2x^2-7x} = +\infty, \ \lim_{x \to 0_+} \frac{x^2+3}{2x^2-7x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 3{,}5_-} \frac{x^2+3}{2x^2-7x} = -\infty, \ \lim_{x \to 3{,}5_+} \frac{x^2+3}{2x^2-7x} = +\infty.$$

4. Із дослідження області визначення на неперервність випливає наявність двох вертикальних асимптот: $x = 0$ та $x = 3{,}5$.

Перевіримо, чи є похилі $y = kx + b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2+3}{2x^2-7x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^3-7x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}-\dfrac{7x^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{7}{x}}=$$

$$=\frac{0+0}{2-0}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{2x^2-7x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2-7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{7x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x^2}}{2-\dfrac{7}{x}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}.$$

Підставимо: $y=kx+b=0\cdot x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ – графік заданої функції має вертикальну асимптоту.

5. Перетину з віссю Оу немає, оскільки $x\neq 0$. Перетину з віссю Ох немає, оскільки $x^2+3\neq 0$.

6. Знайдемо критичні точки:

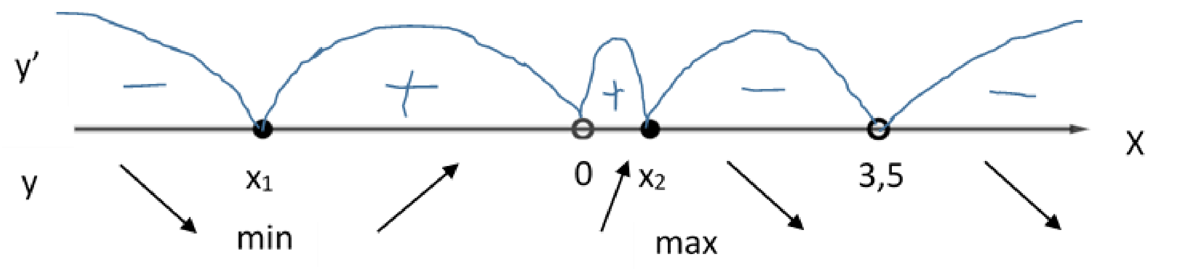
$$y'=\left(\frac{x^2+3}{2x^2-7x}\right)'=\frac{\left(x^2+3\right)'\left(2x^2-7x\right)-\left(x^2+3\right)\left(2x^2-7x\right)'}{\left(2x^2-7x\right)^2}=\frac{2x\left(2x^2-7x\right)-\left(x^2+3\right)\left(4x-7\right)}{\left(2x^2-7x\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^3-14x^2-4x^3+7x^2-21x+21}{\left(2x^2-7x\right)^2}=\frac{-7x^2-21x+21}{\left(2x^2-7x\right)^2}.$$

$$y'=\frac{-7x^2-21x+21}{\left(2x^2-7x\right)^2}=0\Rightarrow -7\left(x^2+3x-3\right)=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

$$x_1\approx -3{,}79...;\ x_2\approx 0{,}79...$$

Дослідимо критичні точки за знаком похідної:



Графік функції спадає на проміжках: $(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;3{,}5)\cup(3{,}5;+\infty)$.

Графік функції зростає на проміжку: $(x_1;0)\cup(0;3{,}5)$.

Точка мінімуму: $x_1 \approx -3{,}79... \Rightarrow y_{\min} = y(x_1) \approx 0{,}31...$

Точка максимуму: $x_2 \approx 0{,}79... \Rightarrow y_{\max} = y(x_2) \approx -0{,}85...$

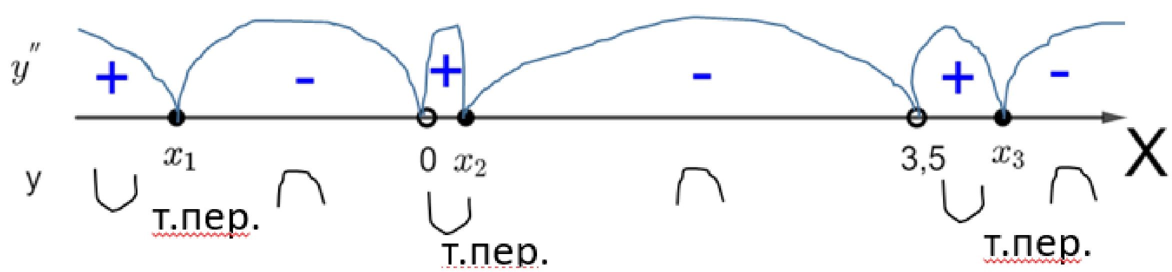
7. Знайдемо точки перегину:

$$y'' = \left(\frac{-7x^2 - 21x + 21}{(2x^2 - 7x)^2}\right)' = \cdots = \frac{-7(4x^3 - 10x^2 - 27x + 6)}{(2x^2 - 7x)^3}.$$

$$y'' = \frac{-7(4x^3 - 10x^2 - 27x + 6)}{(2x^2 - 7x)^3} = 0.$$

$$x_1 \approx -1{,}78...;\ x_2 \approx 0{,}21...;\ x_3 \approx 4{,}07...$$

Дослідимо критичні точки за знаком другої похідної:



Функція опукла донизу на проміжках: $(-\infty;\ x_1)\cup(0;x_2)\cup(3{,}5;x_3)$.

Функція опукла вгору на проміжках: $(x_1;0)\cup(x_2;3{,}5)\cup(x_3;+\infty)$.

Точки перегину: $x_1 \approx -1{,}78... \Rightarrow y(x_1) \approx 0{,}33...$; $x_2 \approx 0{,}21... \Rightarrow y(x_2) \approx -2{,}2...$; $x_3 \approx 4{,}07... \Rightarrow y(x_3) \approx 4{,}22...$

Етапів дослідження достатньо, щоб виконати побудову графіка функції. Перевіримо свої дії, ввівши умову функції у протокол побудови середовища GeoGebra.

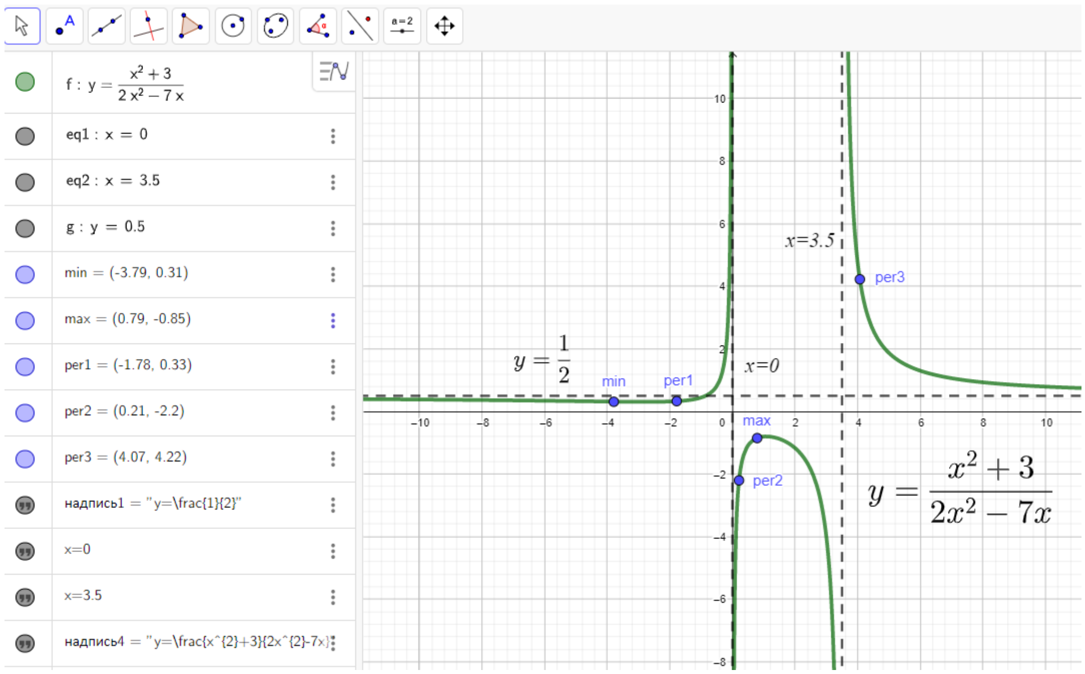
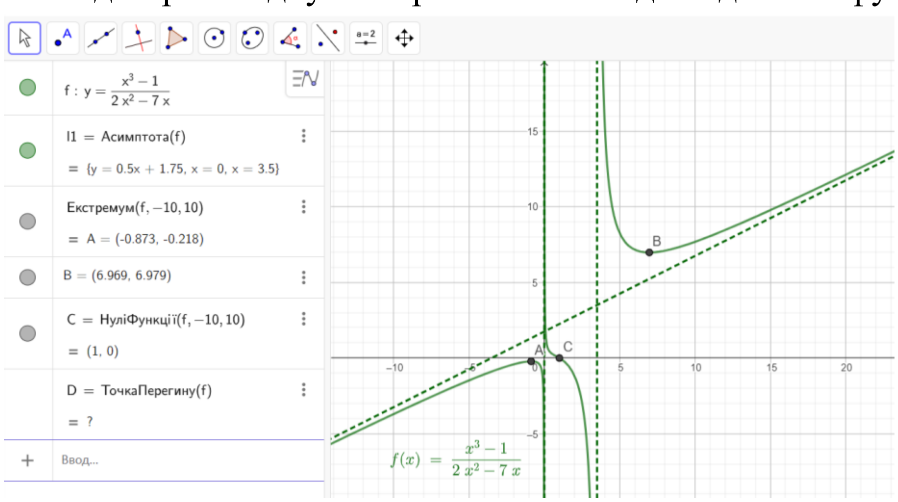


Рис. 7. Графік функції $y = \dfrac{x^2+3}{2x^2-7x}$

Деякі команди пришвидчують кроки повного дослідження функції:



Позааудиторна самостійна робота № 5

Дослідіть функцію (згідно варіанту) та побудуйте її графік :

Варіанти	Завдання	Варіанти	Завдання
1	$y=\ln\left(x^2+4x\right)$	16	$y=\dfrac{(x+1)^2}{4-x^2}$
2	$y=\dfrac{18(x+1)}{x^2}$	17	$y=\dfrac{3-x^2}{5x}$
3	$y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$	18	$y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{5-x}$
4	$y=\dfrac{x^3}{3\left(x^2-3\right)}$	19	$y=\ln\left(x^2+4x\right)$
5	$y=\dfrac{36(2-x)}{x^3}$	20	$y=\dfrac{18(x+1)}{x^2}$
6	$y=3-\ln\left(8x-x^2\right)$	21	$y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$
7	$y=\dfrac{x^3+9}{x^2-x}$	22	$y=\dfrac{x^3}{3\left(x^2-3\right)}$
8	$y=\dfrac{4x^2}{x+1}-\ln x$	23	$y=\dfrac{36(2-x)}{x^3}$
9	$y=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x}$	24	$y=3-\ln\left(8x-x^2\right)$
10	$y=e^{-x^2}$	25	$y=\dfrac{x^3+9}{x^2-x}$
11	$y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$	26	$y=\dfrac{4x^2}{x+1}-\ln x$
12	$y=\dfrac{e^x}{x}$	27	$y=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x}$

13	$y=\frac{12\left(x+1\right)}{\left(x+2\right)^2}$	28	$y=e^{-x^2}$
14	$y=\frac{x}{e^x}$	29	$y=\frac{x^3+1}{x^2}$
15	$y=\ln\frac{x}{x^2+1}$	30	$y=\frac{e^x}{x}$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Барабаш О. В., Дзядик С. Ю., Жданова Ю. Д., Омецинська О. Б. та ін. Вища математика. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних К. : ДУТ. 2015. 187 с.
2. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. - 4-те вид. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013. – 648 с: іл.
3. Вища математика : підручник для студ. в економ. напрямків підгот. / Коваль І. М., Ануфрієв Л. О., Брусиловська О. І. та ін. – Одеса : ОНУ імені І. І. Мечникова, 2013. – 664 с.
4. Вища математика. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних / О.В. Барабаш, С.Ю. Дзядик, Ю.Д. Жданова, О.Б. Омецинська та ін. – К. : ДУТ, 2015. – 187 с.
5. Елементи вищої математики: навч. посібник / Н. Е. Кондрук, М. М. Маляр, В.В. Ніколенко, М. М. Шаркаді. – Ужгород : Видавництво УжНУ "Говерла", 2017. - 124 с.
6. Кондрук Н. Е., Маляр М. М., Ніколенко В. В., Шаркаді М. М. Елементи вищої математики : навч. посібник. Ужгород : Видавництво УжНУ "Говерла". 2017. 124 с.
7. Кузьма О.В. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій: навч. посіб. для студ. / О.В. Кузьма, О.В. Суліма, Т.О. Рудик та інш.; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 127 с.
8. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів інженерних спеціальностей / Укл.: В. П. Мурашковська, Л. А. Руновська. Чернігів : ЧНТУ, 2019. 68с.Мацкул В.М. Вища математика для економістів : підручник / Мацкул В.М. – Одеса: ОНЕУ, 2018. – 472 с.
9. Методичні вказівки до індивідуального домашнього завдання з теми «Лінії, задані рівняннями в полярних координатах та параметрично» з курсу «Вища математика» / укладачі: О. О. Іваненко, Ю. А. Кравченко. Суми : Сумський державний університет, 2014. 29 с.
10. Скуратовський Р.В. Вища математика з прикладами і задачами. Підручник. К. : Національна академія управління, 2021. 232 с.

Додаткова:

1. Вища математика : підручник / за ред. Шинкарика М.І. – Тернопіль : Видавництво Карпюка, 2003 р. – 480 с.
2. Вища математика : практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський,

Н. В. Барковська. – К. : ЦУЛ, 2003. – 536 с.
3. Вища математика. Загальний курс. Лінійна алгебра й аналітична геометрія : навч. посібник / В.П. Лавренчук, П.П. Настасієв, О.В. Мартинюк, О.С. Кондур. – Ч. 1. – Чернівці : Книги – XXI, 2010. – 319 с.
4. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник / Клепко В. Ю., Голець В. Л. – К. : Центр навчальної літератури, 2006.
5. Куприков С. І. Збірник задач з вищої математики / С. І. Куприков С. І. – Київ : КСУ, 2005.
6. Литвин І. І. Вища математика : навчальний посібник / Литвин І. І., Конопчук О. М., Желізняк Г. О. – Київ : Центр навчальної літератури, 2004.
7. Михайленко В.М. Алгебра та геометрія для економістів : навч. посібник / Михайленко В. М., Федоренко Н. Д. – К. : Вид-во Європ. ун-ту фінансів, інформ. систем, менеджм. і бізнесу, 2000. – 100 с.
8. Рудавський Ю. К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Ю. К. Рудавський. – Львів : Бескид Біт, 2002. – 256 с.
9. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Ю. К. Рудавський. – Львів : Бескид Біт, 2002. – 262 с.
10. Соколенко О. І. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / О. І. Соколенко, Г. А. Новик. – К. : Либідь, 2001. – 248 с.
11. Шунда Н. М. Застосування похідної до розв’язування задач : посібник / Н. М. Шунда. – К. : Техніка, 1999.

Інтернет- ресурси:

1. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського : [веб-сайт]. Київ, 2024. ULR : http://www.nbuv.gov.ua/. (Дата перегляду.01.06.2024)
2. Український математичний журнал : [веб-сайт]. Київ, 2024. ULR : https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj. (Дата перегляду. 01.06.2024)
3. Сайт присвячено підтримці вивчення математики в загальноосвітніх навчальних закладах України : [веб-сайт]. Чернігів, 2024. ULR : http://sites.google.com/site/matematikaonlajn. (Дата перегляду. 01.06.2024)
4. Інтерактивні 3D моделі : [веб-сайт]. Київ, 2024. ULR : http://www.3dg.com.ua. (Дата перегляду. 01.06.2024)
5. Короткий математичний довідник : [веб-сайт]. Київ, 2024. ULR : https://formula.co.ua/uploads/pdf/reference_book.pdf. (Дата перегляду. 01.06.2024)
6. Список популярних кривих : [веб-сайт]. Школа математики та статистики Сент-Ендрюського університету, Шотландія, 2024. ULR : https://formula.co.ua/uploads/pdf/reference_book.pdf. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html. Famous Curves Index. (Дата перегляду. 01.06.2024).

ДОДАТКИ

Додаток до теми 1

Прикладні аспекти теорії детермінантів

Вивчення визначників (детермінантів) є важливим для здобувачів природничих спеціальностей з кількох причин:

- розв'язування систем лінійних рівнянь: визначники використовуються для розв'язування систем лінійних рівнянь, що є основою багатьох прикладних задач у фізиці, хімії, біології та інших науках;
- аналіз властивостей матриць: визначники допомагають аналізувати властивості матриць, такі як їх інвертованість; це важливо для розуміння складних моделей у різних наукових дисциплінах;
- обчислення об'ємів та площ: визначники використовуються в геометрії для обчислення об'ємів та площ багатокутників і багатогранників, що може бути корисним у фізиці та інших науках;
- теорія власних значень: власні значення та власні вектори, які є основними концепціями в багатьох науках, також обчислюються за допомогою визначників;
- аналіз стійкості систем: у біології та екології визначники використовуються для аналізу стійкості екосистем та популяційних моделей тощо.

Застосування теорії матриць

Лінійні перетворення: Матриці використовуються для опису лінійних перетворень у різних науках, таких як фізика, хімія, біологія та інженерія.

Аналіз даних: У статистиці та аналізі даних матриці використовуються для обробки великих обсягів даних, таких як множинна регресія та метод головних компонентів.

Моделювання і симуляція: Багато моделей у природничих науках (наприклад, моделі популяцій, екосистем, хімічних реакцій) описуються за допомогою матриць.

Теорія графів: У біоінформатиці та екології матриці використовуються для опису зв'язків і взаємодій у мережах, таких як харчові мережі або гени в регуляторних мережах.

Квантова механіка: У квантовій механіці матриці використовуються для опису станів і операторів квантових систем.

Чисельні методи: Багато чисельних методів, що застосовуються для розв'язування диференціальних рівнянь та інших задач, базуються на матричній алгебрі.

Фізичні застосування: У фізиці матриці використовуються для опису різних явищ, таких як напруження та деформація в матеріалах, електромагнітні поля тощо.

Знання матриць та їх властивостей дозволяє студентам природничих наук ефективно працювати з різноманітними математичними моделями та методами, що є невід'ємною частиною їхньої професійної підготовки.

Приклад дій з матрицями в табличному редакторі:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	матриця A				матриця B				число t	-5				
2	-1	5	6		8	0	-3							
3	2	-3	11		7	-5	8							
4	4	6	-7		2	-1	-6							
5														
6	сума	7	5	3		множення	5	-25	-30					
7	A+B	9	-8	19		на число t	-10	15	-55					
8		6	5	-13		матриці A	-20	-30	35					
9														
10	множення	39	-31	7		транспонована матриця		-1	2	4		-1	2	4
11	A*B	17	4	-96		A^t		5	-3	6		5	-3	6
12		60	-23	78				6	11	-7		6	11	-7
13														
14						обернена матриця		-0,09395	0,14822547	0,152401				
15						до A		0,121086	-0,035490605	0,048017				
16								0,050104	0,054279749	-0,01461				
17														
18						перевірка	1	4,44E-16	-2,22045E-16					
19							0	1	0					
20							-6,93889E-18	2,78E-17	1					
21														

Обчислення визначників в табличному редакторі:

	A	B	C	D	E	F
1	**Обчислення визначника за схемою єдиного ділення**					
2	Коефіцієнти при невідомих					
3	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**		
4	3	1	1	1		
5	1	3	1	1		
6	1	1	3	1		
7	1	1	1	3		
8						
9		**Прямий хід**				
10	1	0,333333	0,333333	0,333333		
11	0	2,666667	0,666667	0,666667		
12	0	0,666667	2,666667	0,666667		
13	0	0,666667	0,666667	2,666667		
14						
15	1	0,333333	0,333333	0,333333		
16	0	1	0,25	0,25		
17	0	0	2,5	0,5		
18	0	0	0,5	2,5		
19						
20	1	0,333333	0,333333	0,333333		
21	0	1	0,25	0,25		
22	0	0	1	0,2		
23	0	0	0	2,4		
24						

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	**Обчислення оберненої матриці за схемою єдиного ділення**																
2																	
3		Задана матриця				Одинична матриця											
4	1	1	2	3	1	0	0	0									
5	3	-1	-1	-2	0	1	0	0									
6	2	3	-1	-1	0	0	1	0									
7	1	2	3	-1	0	0	0	1									
8																	
9	1	1	2	3	1	0	0	0									
10	0	-4	-7	-11	-3	1	0	0									
11	0	1	-5	-7	-2	0	1	0									
12	0	1	1	-4	-1	0	0	1									
13																	
14	1	1	2	3	1	0	0	0									
15	0	1	1,75	2,75	0,75	-0,25	0	0									
16	0	0	-6,75	-9,75	-2,75	0,25	1	0									
17	0	0	-0,75	-6,75	-1,75	0,25	0	1									
18																	
19	1	1	2	3	1	0	0	0									
20	0	1	1,75	2,75	0,75	-0,25	0	0									
21	0	0	1	1,44444	0,40741	-0,03704	-0,14815	0									
22	0	0	0	-5,66667	-1,44444	0,22222	-0,11111	1									
23																	
24	1	1	2	3	1	0	0	0		1	1	0	0	0,15686	0,07843	0,29412	0,01961
25	0	1	1,75	2,75	0,75	-0,25	0	0		0	1	0	0	-0,01961	-0,17647	0,2549	0,03922
26	0	0	1	1,44444	0,40741	-0,03704	-0,14815	0		0	0	1	0	0,03922	0,01961	-0,17647	0,2549
27	0	0	0	1	0,2549	-0,03922	0,01961	-0,17647		0	0	0	1	0,2549	-0,03922	0,01961	-0,17647
28																	
29	1	1	2	0	0,23529	0,11765	-0,05882	0,52941		1	0	0	0	0,17647	0,2549	0,03922	-0,01961
30	0	1	1,75	0	0,04902	-0,14216	-0,05392	0,48529		0	1	0	0	-0,01961	-0,17647	0,2549	0,03922
31	0	0	1	0	0,03922	0,01961	-0,17647	0,2549		0	0	1	0	0,03922	0,01961	-0,17647	0,2549
32	0	0	0	1	0,2549	-0,03922	0,01961	-0,17647		0	0	0	1	0,2549	-0,03922	0,01961	-0,17647
33											Одинична матриця				Обернена матриця		
34																	

Додаток до теми 2

Розв’язування систем лінійних рівнянь

Розв'язання системи рівнянь матричним способом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Матриця системи A

1	1	-1
2	1	2
1	-3	1

Матриця вільних членів B

0
10
-2

Визначник det A= 14

Обернена матриця A^-1

0,5	0,142857	0,214286
0	0,142857	-0,28571
-0,5	0,285714	-0,07143

Матриця невідомих

1
2
3

Метод Гауса

1	1	-1	0
2	1	2	10
1	-3	1	-2

Прямий хід

1	1	-1	0
0	1	-4	-10
0	4	-2	2
1	1	-1	0
0	1	-4	-10
0	0	-14	-42
1	1	-1	0
0	1	-4	-10
0	0	1	3

Обернений хід

1	0	-1	-2
0	1	0	2
0	0	1	3
1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	3

Додаток до теми 3

Практичні приклади кривих:

1. Парабола – це траєкторія руху об'єкта, кинутого під кутом до горизонту (фізика). Формула: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

2. Еліпс – це орбіти планет навколо Сонця (астрономія).
Формула: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Гіпербола – це графік залежності швидкості реакції від концентрації (хімія). Формула: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Логарифмічна спіраль – це форма раковин молюсків (біологія).
Формула: $r = a \cdot e^{b \cdot \theta}$.

5. Синусоїда – це коливання маятника (фізика).
Формула: $y = A \cdot \sin(B \cdot x + c)$.

6. Крива Гомперца – це модель росту популяції (екологія).
Формула: $N(t) = N_0 \cdot e^{-e^{b-c \cdot t}}$.

7. Крива Логістичного зростання – модель обмеженого росту популяції (екологія). Формула: $P(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}$.

8. Лінія регресії – це залежність фізичних параметрів, наприклад, висоти і ваги (біометрія). Формула: $y = mx + b$.

9. Циклоїда – це траєкторія точки на ободі колеса (механіка).
Формула: $x(t) = r \cdot (t - sint)$, $y(t) = r \cdot (1 - cost)$.

10. Експоненціальна функція описує зростання чисельності бактерій в сприятливих умовах (біологія). Формула: $y = \mathrm{C} \cdot e^{kt}$.

Ці криві часто використовуються в різних природничих науках для моделювання і аналізу фізичних, біологічних, хімічних та інших процесів.

У лінгвістиці криві можуть бути використані для візуалізації різних мовних явищ та процесів. Ось кілька прикладів:

1. Крива рангової частоти (Закон Ципфа) відображає частоту вживання слів у тексті або корпусі мовних даних. Формула: частота слова f обернено пропорційна його рангу r: $f(r) \approx \frac{1}{r^k}$, де k – константа.

2. Гаусова крива (Нормальний розподіл) використовується для моделювання розподілу різних мовних характеристик, таких як довжина речень або кількість слів у тексті. Формула: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, де μ – середнє значення, σ – стандартне відхилення.

3. Крива S-форм (Логістична крива) відображає процес прийняття нових слів або мовних змін у мовній спільноті. Формула: $P(t) = \frac{K}{1+e^{-r(t-t_0)}}$, де K – максимальна кількість прийняття, r – швидкість зміни, t – час.

4. Крива зростання словникового запасу відображає зростання словникового запасу дитини або мовного студента з часом. Формула: може мати вигляд експоненціальної або логістичної функції, залежно від обставин навчання.

5. Крива спадаючої частоти слів відображає спадаючий розподіл частоти використання слів у тексті, де кілька слів використовуються дуже часто, а багато інших – рідко. Формула: може бути виражена як $y = \frac{A}{x^b}$, де A і b – константи.

6. Фонетична крива відображає частотні характеристики різних фонетичних елементів, таких як голосні або приголосні звуки, у мовному потоці. Формула: може бути представленою у вигляді спектрограми.

7. Крива ентропії мови використовується для оцінки складності і непередбачуваності тексту або мовного корпусу. Формула: ентропія H визначається як $H = -\sum_i p_i \cdot \ln(p_i)$, де p_i – ймовірність появи i-го елемента.

Ці криві та графічні моделі допомагають лінгвістам аналізувати і візуалізувати складні мовні явища, роблячи їх більш зрозумілими і доступними для подальшого дослідження.

Додаток до теми 4

Прикладне застосування теорії границь функцій

Границі функцій мають важливе прикладне значення для здобувачів природничого факультету, оскільки вони допомагають зрозуміти поведінку функцій у різних точках, особливо коли ці точки наближаються до певного значення.

1. Фізика:

- механіка: при дослідженні руху об'єктів границі використовуються для визначення швидкості та прискорення як похідних положення за часом. Наприклад, швидкість в даний момент часу визначається як границя середньої швидкості, коли інтервал часу наближається до нуля;
- електрика та магнетизм: границі застосовуються для аналізу електричних полів та потенціалів, особливо в точках зсередини заряджених об'єктів.

2. Хімія:

- кінетика хімічних реакцій: границі допомагають описати швидкість реакції, особливо при аналізі початкової швидкості, коли концентрація реагентів максимальна;
- рівноважні стани: границі допомагають визначити рівноважні концентрації продуктів та реагентів у реакціях.

3. Термодинаміка:

- станові функції: границі використовуються для визначення властивостей систем при наближенні до критичних точок, таких як температура плавлення чи кипіння.

4. Біологія:

- моделі росту популяцій: границі використовуються для визначення граничних розмірів популяцій в умовах обмежених ресурсів (наприклад, логістичний ріст популяції);
- стабільність популяцій: аналіз границь допомагає визначити стабільні стани популяції, коли час наближається до нескінченності;
- ферментативна кінетика: границі допомагають визначити максимальну швидкість ферментативної реакції при насиченні субстратом.

5. Екологія:

- аналіз граничних умов: границі використовуються для моделювання меж ареалу проживання виду при зміні екологічних параметрів;
- потоки енергії: границі допомагають визначити асимптотичні значення потоків енергії в екосистемах при стабілізації системи;

- дифузія забруднювачів: границі використовуються для визначення концентрацій забруднювачів на великих відстанях від джерела забруднення.

У лінгвістиці границі функцій можуть бути менш очевидними, ніж у природничих науках, але вони все ж можуть знайти своє застосування, особливо у кількісних та обчислювальних підходах до вивчення мови. Ось кілька прикладів:

Статистичний аналіз та моделювання мовних даних

1. Моделювання частоти слів:
   - закон Ціпфа: границі можуть використовуватися для дослідження, як частота вживання слів змінюється при переході від найбільш частих слів до менш частих. Закон Ціпфа стверджує, що частота слова обернено пропорційна його рангу в списку частотності.
2. Аналіз текстів:
   - граничні частоти: в аналізі великих корпусів текстів границі можуть допомогти визначити асимптотичну поведінку частот певних лексичних одиниць або граматичних конструкцій при збільшенні обсягу тексту.

Обчислювальна лінгвістика

1. Навчання моделей машинного навчання:
   - гранична продуктивність: під час навчання моделей на основі великих обсягів даних можна використовувати границі для визначення граничної продуктивності моделей при збільшенні кількості навчальних прикладів.
2. Оптимізація алгоритмів:
   - гранична складність: аналіз граничної складності алгоритмів для обробки мовних даних може допомогти визначити ефективність алгоритмів при збільшенні обсягу даних або кількості параметрів.

Психолінгвістика

1. Обробка мовної інформації мозком:
   - граничні реакції: дослідження, які вимірюють час реакції на мовні стимули, можуть використовувати границі для визначення мінімального часу, необхідного для розпізнавання слів або синтаксичних структур.
2. Моделі сприйняття та вироблення мови:
   - асимптотичні ефекти: аналіз границь може допомогти зрозуміти, як продуктивність людини в мовленнєвих завданнях наближається до асимптотичних значень при тренуванні або повторенні.

Соціолінгвістика

1. Дифузія мовних інновацій:
   - граничні моделі розповсюдження: границі можуть використовуватися для моделювання процесу розповсюдження нових мовних форм або сленгу в спільнотах.

Додаток до теми 5

Функції та їх дослідження

Тема «Функції» має практичне застосування в природничих науках:

- фізика: аналіз руху, закони збереження, електричні та магнітні поля;
- біологія: моделювання популяцій, швидкість росту та регресії;
- хімія: реакційні швидкості, кінетика;
- геологія: моделювання змін рельєфу, ерозія тощо.

Для дослідження функцій пропонуємо використання програмного забезпечення:

- графічні калькулятори: використання інструментів для побудови графіків та аналізу функцій;
- системи комп'ютерної математики: використання спеціалізованого ПЗ (наприклад, GeoGebra, MATLAB, WolframAlpha тощо) для дослідження функцій та їх властивостей.

До речі, у лінгвістиці дослідження функцій також може бути важливим, особливо в області обробки природної мови (NLP) та комп'ютерної лінгвістики.

Наприклад, визначення функції, область визначення, область значень – у лінгвістиці трактуємо це як відповідність між словами та їхніми значеннями, або між звуками та їхніми артикуляційними характеристиками. Графік функції – це візуалізація лінгвістичних даних, таких як частотні розподіли слів або фонетичні зміни.

Приклади важливості досліджень властивостей функцій:

- парність/непарність: у лінгвістиці може відповідати симетрії у структурі слів чи речень;
- періодичність: аналіз періодичності у мовленні, наприклад, повторювані граматичні структури чи звукові патерни;
- нулі функції: знаходження точок, де лінгвістична функція має значення нуль, наприклад, частотність використання певних слів у корпусі текстів;
- похідна: зміна значень лінгвістичних параметрів. Наприклад, похідна від функції частоти слів може показати швидкість зміни популярності певних слів у часі;
- застосування похідної: аналіз зміни мовних патернів, визначення точок екстремумів у використанні мовних конструкцій;

- інтегрування: загальна кількість використань слова чи конструкції у певному корпусі текстів;
- застосування інтегралів: визначення загальної кількості використаних слів, аналіз тривалості мовних явищ;
- асимптоти та поведінка на нескінченності: тенденції у використанні мовних елементів на великих обсягах текстів; аналіз довгострокових тенденцій у мовленні або письмі.

Спеціальні види функцій та їх використання:

- лінійні та квадратичні функції: моделювання відносин між лінгвістичними змінними;
- поліноміальні функції: аналіз складніших лінгвістичних патернів;
- раціональні функції: моделювання відносин між різними лінгвістичними явищами;
- експоненційні та логарифмічні функції: аналіз росту чи зменшення частотності слів;
- тригонометричні функції: моделювання циклічних явищ у мовленні.

Використання спеціалізованого програмного забезпечення: R, Python з бібліотеками для NLP для аналізу лінгвістичних даних.