Довгопятий Олександр
асистент кафедри математичного аналізу, бізнес-аналізу та статистики,
Ількевич Наталія
кандидат хімічних наук, старший викладач кафедри фізики та методики її навчання,
Севостьянов Євген
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, завідувач кафедри математичного аналізу, бізнес аналізу та статистики,
Таргонський Андрій
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу, бізнес аналізу та статистики
Житомирський державний університет імені Івана Франка

СПОТВОРЕННЯ ВІДСТАНЕЙ ПРИ ВІДОБРАЖЕННЯХ З НЕРІВНІСТЮ ПОЛЕЦЬКОГО В ТЕРМІНАХ ПРОСТИХ КІНЦІВ

Як відомо, квазіконформні відображення є локально неперервними за Гельдером. Зокрема, проблема неперервності за Гельдером для квазіконформних відображень і деяких їх узагальнень досліджувалися різними авторами, див., напр., [1], [2], [3], [4] і [5]. Ми також досліджували цю проблему для класів Орліча та Орліча-Соболєва, див., напр., [6], [7] і [8]. Зараз ми розглянемо з цього приводу відображення, які задовольняють нерівність Полецького відносно p-модуля. Нам найбільш важлива ситуація, коли відображення діють в області з нерівностями Пуанкаре, оскільки саме в таких областях модуль сімей кривих метрично пов'язаний з евклідовим діаметром. Вказана концепція трохи нагадує простори Льовнера, а також області квазіекстремальної довжини за Герінгом-Маріто.

Надалі ми використовуємо наступні позначення: $B(x_0,r)=\{x\in\mathbf{R}^n:|x-x_0|<r\}$, $B^n=B(0,1)$, $S(x_0,r)=\{x\in\mathbf{R}^n:|x-x_0|=r\}$, $\mathbb{S}^{n-1}=S(0,1)$, $\Omega_n=m(B^n)$, $\omega_{n-1}=\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, $A(x_0,r_1,r_2):=\left\{x\in\mathbf{R}^n:r_1<|x-x_0|<r_2\right\}$. Нехай m – міра Лебега в $\mathbf{R}^n$, і нехай $\mathcal{H}^{n-1}$ – (n-1)-вимірна міра Хаусдорфа. Всюди далі $M_p(\Gamma)$ позначає p-модуль сім'ї Γ (див. [9]). Для заданих множин $E,\ F\subset\overline{\mathbf{R}^n}$ і області $D\subset\mathbf{R}^n$ позначимо через $\Gamma(E,F,D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma:[a,b]\to\overline{\mathbf{R}^n}$

таких, що $\gamma(a)\in E, \gamma(b)\in F$ і $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,b)$. Для заданої сім'ї Γ кривих $\gamma:[a,b]\to D$ в D, позначимо через $f(\Gamma)$ сім'ю всіх кривих $\{(f\circ\gamma):[a,b]\to f(D),\ \gamma\in\Gamma\}$.

Нехай $Q:\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$ – вимірна за Лебегом функція, яка дорівнює нулю зовні області D. Розглянемо наступне поняття, див. [4, розділ 7.6]. Будемо говорити, що відображення $f:D\to\overline{\mathbf{R}^n}$ є кільцевим Q-*гомеоморфізмом у точці* $x_0\in\overline{D}$ *по відношенню до* p-*модуля,* $x_0\neq\infty$, $p\geqslant 1$, якщо знайдеться $r_0=r(x_0)>0$ таке, що при довільних $0<r_1<r_2<r_0$ виконується умова

$$M_p(f(\Gamma(S(x_0,r_1),\ S(x_0,r_2),\ D)))\leqslant\int\limits_A Q(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x),\qquad(1)$$

де $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ – довільна вимірна за Лебегом функція, яка задовольняє нерівність

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1.\qquad(2)$$

Будемо говорити, що борелева функція $\rho:D\to[0,\infty]$ є *верхнім градієнтом функції* $u:D\to\mathbf{R}$, якщо для усіх спрямлюваних кривих γ, що з'єднують точки x і $y\in D$ виконується співвідношення $|u(x)-u(y)|\leqslant\int\limits_\gamma\rho\,|dx|$.

Покладемо $u_B:=\frac{1}{m(B)}\int\limits_B u(x)\,dm(x)$. Як звично, для заданих множин $A,B\subset R^n$, покладемо $\mathrm{d}iamA=\sup\limits_{x,y\in A}|x-y|$, $\mathrm{d}ist(A,B)=\inf\limits_{x\in A,y\in B}|x-y|$. Нехай $p\geqslant 1$, тоді будемо говорити, що область D задовольняє $(1;p)$-*нерівність Пуанкаре, якщо існують сталі* $C\geqslant 1$ і $\tau>0$ такі, що для будь-якої кулі $B\subset D$, довільної обмеженої неперервної функції $u:D\to\mathbf{R}$ і всякого верхнього градієнту ρ функції u виконується умова

$$\frac{1}{m(B)}\int\limits_B|u(x)-u_B|\,dm(x)\leqslant C\cdot(\mathrm{d}iamB)\left(\frac{1}{m(\tau B)}\int\limits_{\tau B}\rho^p(x)\,dm(x)\right)^{1/p}.$$

Область D називається *регулярною за Альфорсом,* якщо існує стала $C\geqslant 1$ така, що для всіх $x_0\in D$ і всякого $R<\mathrm{d}iamD$ виконується умова $\frac{1}{C}R^n\leqslant m(B(x_0,R)\cap D)\leqslant CR^n$. Нагадаємо, що відображення $f:D\to\overline{\mathbf{R}^n}$ між областями $D\subset\mathbf{R}^n$ і $D'\subset\overline{\mathbf{R}^n}$ називається *замкненим,* якщо $C(f,\partial D)\subset\partial D'$, де $C(f,\partial D)$ – гранична множина f у ∂D. Означення простого кінця, яке використовується нижче, може бути знайдено в [10]. Зокрема, ми говоримо, що *кінець* K *– простий*, якщо K містить ланцюг розрізів $\{\sigma_m\}$ такий, що для будь-якого континуума C в D виконується співвідношення

$$\lim_{m\to\infty} M(\Gamma(C,\sigma_m,D))=0, \tag{3}$$

де $M(\Gamma(C,\sigma_m,D))$ – конформний модуль сім'ї $\Gamma(C,\sigma_m,D)$. Тут і надалі $\overline{D}_P$ позначає поповнення області D її простими кінцями, крім того, нехай $E_D=\overline{D}_P\setminus D$ – множина усіх простих кінців області D. Будемо говорити, що обмежена область D у $\mathbf{R}^n$ *є регулярною (у квазіконформному сенсі)*, якщо D може бути відображеною на обмежену область з локальною квазіконформною межею за допомогою деякого квазіконформного відображення g, причому кожен простий кінець $P\subset E_D$ є регулярним. Зауважимо, що простір $\overline{D}_P$ є *метризованим*; само, якщо $g:D_0\to D$ – квазіконформне відображення області D_0 на D, де область D_0 має локально квазіконформну межу, то для $x,y\in\overline{D}_P$ покладемо: $\rho(x,y):=|g^{-1}(x)-g^{-1}(y)|$. Тут для $x\in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ слід розуміти як деяку (єдину) межову точку D_0, коректно визначену з огляду на [10, теорема 4.1]. *Тілом простого кінця* $P_0\in E_D$ називається наступна множина: $I(P_0)=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\overline{d_m}$, де d_m, $m=1,2,\ldots,$ – деяка спадна послідовність областей, відповідна до P_0. Можна показати, що множина $I(P_0)$ визначена коректно (іншими словами, $I(P_0)$ не залежить від конкретно обраної послідовності d_m, $m=1,2,\ldots,$ у даному простому кінці P_0). Можна показати, що $I(P_0)\subset\partial D$.

Для заданих $\delta>0$ і $p\geqslant 1$, областей $D,D'\subset\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$, простого кінця $P_0\in E_D$, континуума $A\subset D$ і вимірної за Лебегом функції $Q:D\to[0,\infty]$ позначимо $F^{p,P_0}_{Q,A,\delta}(D,D')$ сім'ю всіх гомеоморфізмів f області D на D' які задовольняють умови (1)-(2) для всякого $x_0\in I(P_0)$ (тут $I(P_0)$ позначає тіло простого кінця P_0) таких, що $\mathrm{diam}\,(f(A))\geqslant\delta$. Є справедливим наступний результат.

Теорема. *Нехай* $P_0\in E_D:=\overline{D}_P\setminus D$, *нехай* D *– регулярна область (у квазіконформному сенсі), і нехай* D' *– регулярна за Альфорсом обмежена область з* $(1;p)$*- нерівністю Пуанкаре,* $n-1<p\leqslant n$. *Припустимо, виконані наступні умови: 1) для кожного* $y_0\in\partial D$ *знайдеться* $r_0'=r_0'(y_0)>0$ *таке, що* *множина* $B(y_0,r)\cap D$ *є скінченно зв'язною для всіх* $0<r<r_0'$, *більше того, кожна компонента* K *множини* $B(y_0,r)\cap D$ *задовольняє наступну умову: всякі* $x,y\in K$ *можуть бути з'єднані кривою* $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ *так, що* $|\gamma|\in K\cap\overline{B(y_0,\max\{|x-y_0|,|y-y_0|\})}$, $|\gamma|=\{y\in\mathbf{R}^n:\exists\, t\in[a,b]:\gamma(t)=y\}$; *2) для кожного* $y_0\in I(P_0)$ *знайдеться* $0<C=C(y_0)<\infty$ *таке, що* $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(y_0,\varepsilon)\cap D}Q(x)\,dm(x)\leqslant C.$

Тоді для кожного $P\in E_D=\overline{D}_P\setminus D$ *знайдеться* $y_0\in\partial D$ *таке, що* $I(P)=\{y_0\}$, *де* $I(P)$ *позначає тіло простого кінця* P. *Крім того, знайдеться окіл* U *елементу* P_0 *і числа* $\varepsilon_0=\varepsilon_0(P_0,D',n,p,\delta,A)>0$, $C=C(p,n,C,D')>0$ *такі, що для всіх* $f\in F^{p,P_0}_{Q,A,\delta}(D,D')$ *і* $x,y\in U\cap D$ *виконується нерівність*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot\max\left\{\frac{1}{\log^{n-1}\frac{\varepsilon_0}{|x-x_0|}},\frac{1}{\log^{n-1}\frac{\varepsilon_0}{|y-x_0|}}\right\},\tag{4}$$

де $x_0:=I(P_0)$.

Наслідок. *За умов теореми* f *має неперервне продовження у точку* $P_0\in E_D$, *причому*

$$|f(x)-f(P_0)|\leqslant\frac{C}{\log^{n-1}\frac{\varepsilon_0}{|x-x_0|}}.\tag{5}$$

Висновки. Досліджена межова поведінка відображень з прямою модульною умовою типу Полецького за умови, що відповідна мажоранта у ній має скінченні середні по інфінітезимальних кулях. Така поведінка розглянута за умов, що область у прообразі має складну геометрію, а саме, вона регулярна в сенсі простих кінців. За теоремою Рімана будь-яка плоска однозв'язна область регулярна, тому такий результат має широкі застосування. Результуюча оцінка є одностайно неперервною по класу, по права частина нерівності (5) прямує до нуля при $x\to P_0$ і не залежить від f.

Список використаних джерел та літератури

1. Martio O., Rickman S., and Väisälä J. Distortion and singularities of quasiregular mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, 1970. V. 465. P. 1–13.

2. Martio O., Näkki R. Boundary Hölder continuity and quasiconformal mappings. J. London Math. Soc. 1991. V. 44. P. 339–350.

3. Ryazanov V.I. and Sevost'yanov E.A. Toward the theory of ring Q-homeomorphisms. Israel J. Math. 2008. V. 68. P. 101–118.

4. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.

5. Arsenovic'M., Mateljevic' M. On the Hölder continuity of ring Q-homeomorphisms. Georgian Math. J. 2022. V. 29, no. 6. P. 805–811.

6. Ryazanov V., Salimov R. and Sevost'yanov E. On the Hölder property of mappings in domains and on boundaries. J. Math. Sci. 2020. V. 246, no. 1. P. 60–74.

7. Mateljevic' M., Salimov R., Sevost'yanov E. Hölder and Lipschitz Continuity in Orlicz-Sobolev Classes, Distortion and Harmonic Mappings. Filomat. 2022. V. 36, no. 16. P. 5359–5390.

8. Mateljevic' M., Sevost'yanov E. On the behavior of Orlicz-Sobolev mappings with branching on the unit sphere. Journal of Mathematical Sciences. 2023. V. 270, no. 3. P. 467–499.

9. Rickman S. Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

10. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings. J. Anal. Math. 1979. V. 35. P. 13-40.