## ТЕОРЕМА МОРЛІ ДЛЯ СТВОРЕННЯ ФРАКТАЛУ В GEOGEBRA

**Морозова Марина Анатоліївна,**
учитель математики, учитель вищої категорії, старший вчитель
ліцей № 1 міста Житомира
**Чемерис Ольга Анатоліївна,**
к.пед.н., доцент
Житомирський державний університет імені Івана Франка,
м. Житомир, Україна

**Вступ.** Іменні теореми в геометрії, такі як теорема Піфагора, синусів, косинусів тощо, є фундаментальними інструментами для розв'язування задач на трикутники [2]. Вони надають чіткі математичні формули та співвідношення між сторонами і кутами трикутника, а отже і алгоритм для розв’язання, що дозволяє знаходити невідомі елементи за заданими.

Вивчення теорем допомагає глибше зрозуміти властивості трикутників і взаємозв'язки між їх елементами. Теореми про трикутники широко використовуються в різних галузях науки і техніки, таких як фізика, астрономія, інженерія.

Однією з красивих теорем у геометрії трикутника є *теорема Морлі*, яка стверджує, що точки перетину суміжних трисектрис кутів довільного трикутника є вершинами рівностороннього трикутника [3]. Тобто якщо розділити кожен кут довільного трикутника на три рівні частини, то точки перетину суміжних трисектрис утворюють правильний трикутник, який називається *трикутником Морлі* (рис. 1 – зображення виконано у GeoGebra [1]).

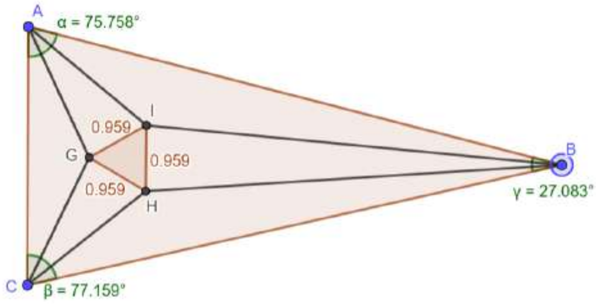


**Рис. 1. Перетин трисектрис кутів трикутника**

Теорема, яку відкрив у 1904 році англійський математик Франк Морлі, не є очевидною, адже здавалося б, що з довільного трикутника неможливо отримати правильний трикутник таким простим способом. Доведення теореми досить складне і використовує різноманітні математичні інструменти, проте саме формулювання теореми дуже лаконічне та красиве.

**Мета роботи** – продемонструвати використання теореми Морлі для створення складних і красивих фракталів за допомогою інтерактивного програмного забезпечення GeoGebra.

**Матеріали та методи.** Для дослідження розглянуто історичні факти, присвячені теоремі Морлі та її доведенню, вивчено способи візуалізації геометричних побудов, переглянуто статті, присвячені фракталам та їх застосуванню.

У динамічному середовищі GeoGebra можна виконувати побудови для фактичної перевірки теореми Морлі. Також середовище дає можливість створити новий інструмент, який прискорить елементарні кроки для візуалізації фракталів Морлі.

**Результати та обговорення.** На нашу думку, знайомство учнів основної школи в класах з поглибленим вивченням математики має переваги, адже дослідження теореми Морлі допомагає глибше зрозуміти властивості трикутника та розвинути геометричну інтуїцію. Також теорема Морлі має зв'язки з різними розділами математики, такими як теорія чисел, алгебра, топологія, теорія графів тощо.

Теорема встановлює несподівані зв'язки між елементами трикутника, що стимулює пошук нових геометричних властивостей. Вивчення доведень теореми Морлі вимагає знання різних геометричних теорем і методів, що сприяє розширенню загальних знань з геометрії. Теорема Морлі може бути використана як основа для побудови нових геометричних фігур та дослідження їх властивостей.

У математичних журналах можна знайти різноманітні доведення цієї теореми, що використовують різні методи. Більшість доведень теореми Морлі базуються на використанні тригонометрії та комплексних чисел. Основна ідея полягає в тому, щоб виразити координати точок перетину трисектрис через координати вершин вихідного трикутника і потім довести, що відстані між цими точками рівні.

*Векторний метод* для доведення теореми Морлі дозволяє уникнути громіздких тригонометричних обчислень і представити геометричні відношення у більш компактному вигляді. Його ідея полягає у реалізації наступних кроків:

- введення системи координат таким чином, щоб одна з вершин вихідного трикутника співпала з початком координат, а вектори-сторони стали базисними векторами;
- вираження координат усіх точок, що нас цікавлять (вершини заданого трикутника, точки перетину трисектрис) через базисні вектори;
- доведення рівності довжин векторів, що з'єднують вершини отриманого трикутника Морлі, і перевірка, що вони утворюють між собою кут 60°.

Хоча теорема Морлі на перший погляд може здаватися чисто теоретичним результатом, без очевидних практичних застосувань, вона має декілька цікавих зв'язків з іншими областями знань та може бути використана як інструмент для дослідження більш складних математичних структур. Теорема Морлі може бути використана як основа для побудови фрактальних структур, які мають цікаві властивості симетрії [4]. Деякі природні структури, такі як сніжинки або кристали, мають складну геометричну форму, яка може бути описана за допомогою аналогів теореми Морлі.

Теорема Морлі може бути використана для генерації текстур з цікавими візерунками, які можуть бути застосовані в різних областях дизайну, від текстилю до архітектури. В іграх можуть бути використані геометричні конструкції, засновані на теоремі Морлі, для створення декорацій або елементів геймплея. Існують деякі зв'язки між теоремою Морлі та теорією ділення кола, що дозволяє використовувати геометричні інструменти для дослідження числових послідовностей. Теорема Морлі може бути використана як основа для створення нових криптографічних алгоритмів, заснованих на геометричних перетвореннях. Візуалізуємо побудову для теореми Морлі. Для цього використаємо динамічне середовище GeoGebra та її потужні графічні можливості, тут додамо протокол побудови (рис. 2):

| ⋮ | Ім'я | Опис | Значення |
|---|---|---|---|
| 1 | Точка A | | A = (-5, 3) |
| 2 | Точка B | | B = (2, 1) |
| 3 | Точка C | | C = (-6.828, -1.085) |
| 4 | Трикутник t1 | Многокутник A, B, C | t1 = 16.126 |
| 4 | Відрізок c | Відрізок A, B | c = 7.28 |
| 4 | Відрізок a | Відрізок B, C | a = 9.071 |
| 4 | Відрізок b | Відрізок C, A | b = 4.475 |
| 5 | Кут α | Кут між C, A, B | α = 98.166° |
| 6 | Кут β | Кут між B, C, A | β = 52.601° |
| 7 | Кут γ | Кут між A, B, C | γ = 29.234° |
| 8 | Точка B' | Об'єкт B, повернутий на кут β / 3 | B' = (0.962, 3.563) |
| 9 | Точка C' | Об'єкт C, повернутий на кут β / 3 | C' = (-6.828, -1.085) |
| 10 | Відрізок a' | Відрізок B', C' | a' = 9.071 |
| 11 | Точка B'' | Об'єкт B', повернутий на кут β / 3 | B'' = (-0.8, 5.694) |
| 12 | Точка C'' | Об'єкт C', повернутий на кут β / 3 | C'' = (-6.828, -1.085) |
| 13 | Відрізок a'' | Відрізок B'', C'' | a'' = 9.071 |
| 14 | Точка $C'_1$ | Об'єкт C, повернутий на кут α / 3 | $C'_1$ = (-4.33, -1.425) |
| 15 | Точка A' | Об'єкт A, повернутий на кут α / 3 | A' = (-5, 3) |
| 16 | Відрізок b' | Відрізок $C'_1$, A' | b' = 4.475 |
| 17 | Точка D | Об'єкт $C'_1$, повернутий на кут α / 3 | D = (-2.044, -0.361) |
| 18 | Точка A'' | Об'єкт A', повернутий на кут α / 3 | A'' = (-5, 3) |
| 19 | Відрізок b'' | Відрізок D, A'' | b'' = 4.475 |
| 20 | Точка $A'_1$ | Об'єкт A, повернутий на кут γ / 3 | $A'_1$ = (-5.238, 1.786) |
| 21 | Точка $B'_1$ | Об'єкт B, повернутий на кут γ / 3 | $B'_1$ = (2, 1) |
| 22 | Відрізок c' | Відрізок $A'_1$, $B'_1$ | c' = 7.28 |
| 23 | Точка E | Об'єкт $A'_1$, повернутий на кут γ / 3 | E = (-5.266, 0.55) |
| 24 | Точка F | Об'єкт $B'_1$, повернутий на кут γ / 3 | F = (2, 1) |
| 25 | Відрізок c'' | Відрізок E, F | c'' = 7.28 |
| 26 | Точка G | Перетин b' та a'' | G = (-4.737, 1.266) |
| 27 | Точка H | Перетин a' та c'' | H = (-3.951, 0.631) |
| 28 | Точка I | Перетин c' та b'' | I = (-3.795, 1.63) |
| 29 | Відрізок f | Відрізок A, G | f = 1.754 |
| 30 | Відрізок g | Відрізок A, I | g = 1.825 |
| 31 | Відрізок h | Відрізок C, G | h = 3.146 |
| 32 | Відрізок i | Відрізок C, H | i = 3.35 |
| 33 | Відрізок j | Відрізок B, H | j = 5.963 |
| 34 | Відрізок k | Відрізок B, I | k = 5.829 |
| 35 | Трикутник t2 | Многокутник G, I, H | t2 = 0.442 |
| 35 | Відрізок $h_1$ | Відрізок G, I | $h_1$ = 1.01 |
| 35 | Відрізок $g_1$ | Відрізок I, H | $g_1$ = 1.01 |
| 35 | Відрізок $i_1$ | Відрізок H, G | $i_1$ = 1.01 |

**Рис. 2. Протокол побудови трикутника Морлі**

Створення фракталів за теоремою Морлі – це процес, який поєднує в собі математику, мистецтво і програмування. Це чудовий спосіб дослідити властивості трикутників і створити унікальні візуальні образи.

Трисектриса кута – це промінь, який виокремлює від кута його третину. В GeoGebra ми можемо створити такий інструмент для проведення трисектриси: обираємо в інструментах дію *Створити Новий Інструмент*. Потім вказуємо початкові об'єкти та результат, даємо інструменту назву, опис, зображення. Новий інстумент з'являється серед інших інструментів (рис. 3).

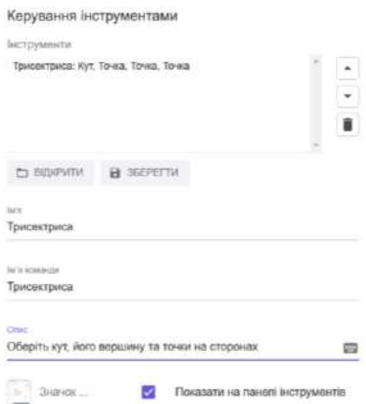


**Рис. 3. Вікно для внесення змін в інстументи**

За допомогою наступної побудови створимо інструмент *Трисектриса* (рис. 4):

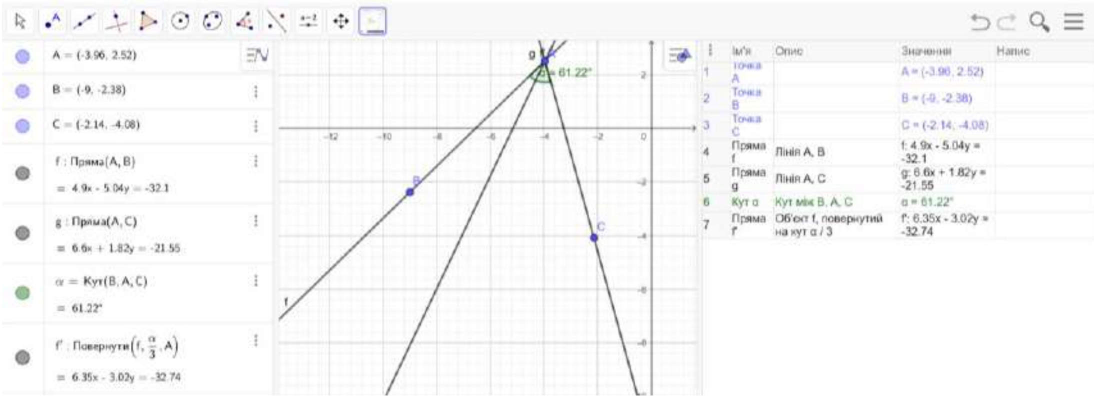


**Рис. 4. Побудови для створення інструменту Трисектриса**

Новий інструмент пришвидшує побудову. Використаємо його для створення фракталу Морлі (рис. 5):

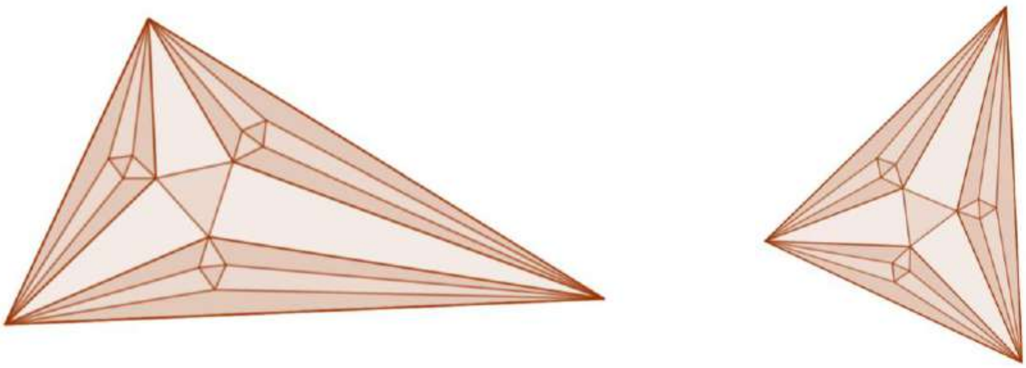

**Рис. 5. Фрактал Морлі**

**Висновки.** Загалом, теорема Морлі є прекрасним прикладом того, як фундаментальні математичні дослідження можуть призвести до несподіваних і красивих результатів. Хоча вона не має прямого практичного застосування в повсякденному житті, її вивчення сприяє розвитку математичної культури та глибшому розумінню світу навколо нас. Вчені продовжують досліджувати зв'язки між теоремою Морлі та іншими областями знань, і можливо, в майбутньому будуть відкриті нові, несподівані застосування.

Основна цінність теореми Морлі полягає не стільки в її прямих практичних застосуваннях, скільки в її ролі інструменту для розвитку математичного мислення та розуміння глибинних зв'язків між різними математичними структурами.

Теорема Морлі, незважаючи на свою абстрактність, відкриває широкі можливості для створення цікавих і нестандартних візуальних ефектів в комп'ютерній графіці. Її застосування може зробити ваші проекти більш оригінальними і привабливими. До речі, для реалізації ідей візуалізації теореми можна використовувати будь-яку мову програмування, яка підтримує роботу з графікою, наприклад, C++, Python (з використанням бібліотек, таких як PyOpenGL або Pygame), або спеціалізовані графічні пакети, такі як Blender або Unity.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. GeoGebra Динамічна математика для навчання та викладання : [веб-сайт]. URL : http://www.geogebra.org/. (дата звернення: 18.12.2024).

2. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. URL: http://surl.li/vzqmrk. (дата звернення: 11.12.2024).

3. Філдс Дж. Чудо Морлі. URL : http://surl.li/dwnvhn. (дата звернення: 19.12.2024).

4. Фрактали в математиці. URL: http://surl.li/pcfsbj. (дата звернення: 17.12.2024).