Трифоуцан Єгор,
здобувач другого (магістерського) рівня вищої освіти
факультету обчислювальної техніки, інтелектуальних
та управляючих систем
Науковий керівник: ***Гук Віталій,***
кандидат технічних наук, старший викладач
кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем,
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького,
м. Черкаси, Україна

ПРОГРАМНИЙ ІНСТРУМЕНТ ДЛЯ ФУР'Є-АНАЛІЗУ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ЗАДАНІ ТАБЛИЦЕЮ ЗНАЧЕНЬ

Аналіз Фур'є є важливим розділом математики, що досліджує способи представлення та апроксимації періодичних функцій через суму простих тригонометричних функцій, таких як синус і косинус. Такий підхід дозволяє більш ефективно аналізувати складні періодичні функції, поділяючи їх на суму елементарних гармонічних коливань, які легше дослідити. Метод отримав свою назву завдяки працям французького математика Жозефа Фур'є, який вперше дослідив властивості подібного розкладу у контексті аналізу процесів теплообміну. Сьогодні метод Фур'є знаходить широке застосування у дослідженні фізичних явищ і є незамінним інструментом у багатьох наукових та технічних галузях, включно з обробкою сигналів, оптикою, акустикою та багатьма іншими.

Класичний тригонометричний ряд Фур'є використовується для розкладання періодичних функцій на нескінчену суму простих гармонік. Він застосовується до періодичних функцій, які мають період T, тобто задовольняють умові $f(x+T)=f(x)$.

Ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом T має вигляд [1]:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\cos\frac{2\pi nx}{T}+b_n\sin\sin\frac{2\pi nx}{T}\right),$$

де a_0, a_n і b_n – коефіцієнти Фур'є, які визначаються за формулами:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos\frac{2\pi nx}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)sin\frac{2\pi nx}{T}dx.$$

Тут коефіцієнти a_n і b_n визначають амплітуди косинусної та синусної складових відповідно та визначають гармонічне коливання заданої частоти, яке називають окремою гармонікою. Чим більша кількість гармонік враховується в розкладанні, тим точніше апроксимується періодична функція.

Значно складнішою стає ситуація, коли періодична функція $f(x)$ задається не формулою, а таблицею значень [2]. Значення функції, як правило, отримується в результаті вимірювань і містять деякі відхилення від точних значень, які приводять до ускладнення алгоритму обчислення апроксимуючого тригонометричного многочлену. Для автоматизованого підбору окремих гармонік та визначення найбільш прийнятного виразу тригонометричного многочлену зручно використовувати програмний інструмент, який розроблений в рамках магістерської кваліфікаційної роботи.

Розроблений програмний продукт має задовольняти всі потреби користувача в проведенні аналізу таблично заданих періодичних функцій. Початковий екран програмного продукту, зображений на рис.1, дозволяє графічно представити функцію, яка задана таблицею значень та грубо оцінити період функції по значенням характерних піків функції.

Основний функціонал програмного продукту включає:

a) вибір періоду функції для проведення дослідження, це один із найважливіших етапів, оскільки правильний вибір періоду визначає точність подальших розрахунків та якість отриманої апроксимації;

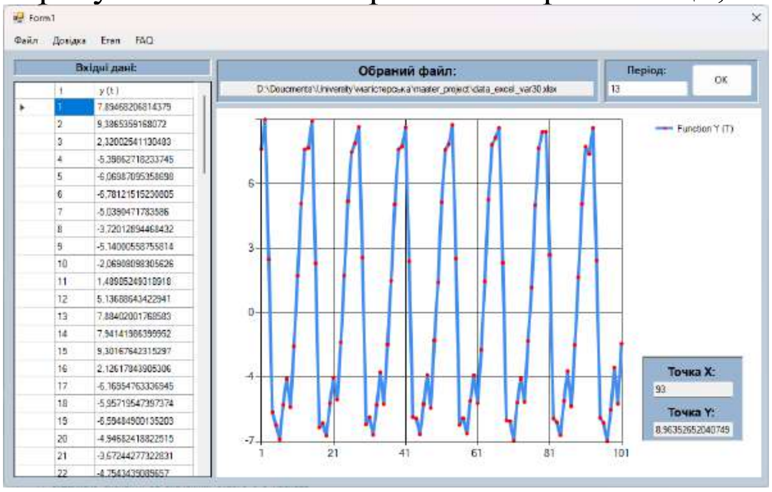
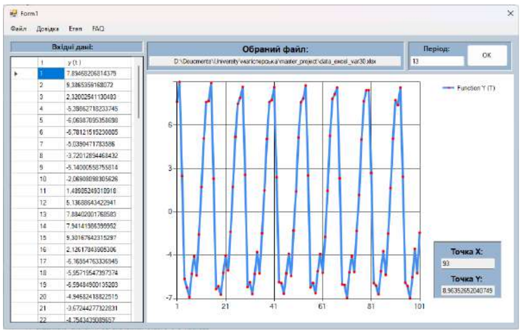
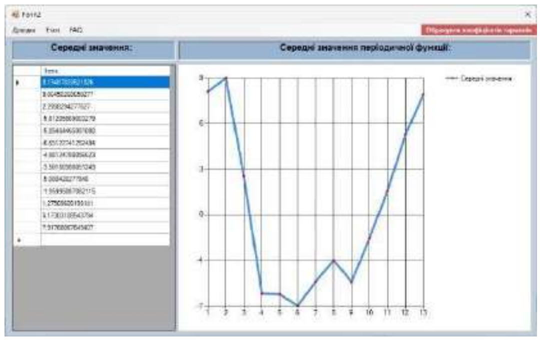


Рис 1. Початковий екран застосунку для аналізу періодичної функції

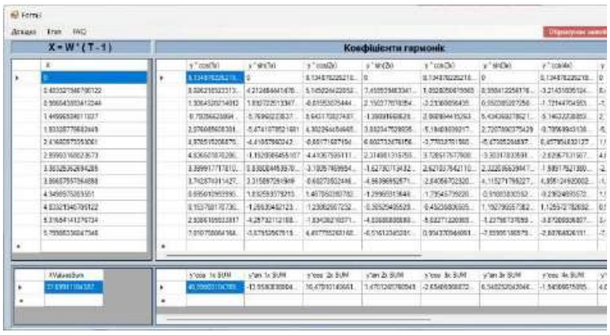
b) усереднення значень функції по всім періодам і формування n середніх значень функції в межах періоду;
c) знаходження відповідних коефіцієнтів ряду Фур'є і представлення середнього періодичного коливання у вигляді суми $\frac{n}{2}$ гармонік;
d) визначення амплітуди кожної гармоніки та вибір гармонік, які вносять найбільший вклад в сумарну періодичну функцію;
e) побудова суми відповідних гармонік і графічне представлення середнього періодичного коливання для візуального аналізу;
f) визначення точності представлення періодичної функції сумою вибраних гармонічних коливань з обчисленням середньоквадратичної та абсолютної похибки;
g) представлення математичної формули та графіку отриманого тригонометричного многочлена.

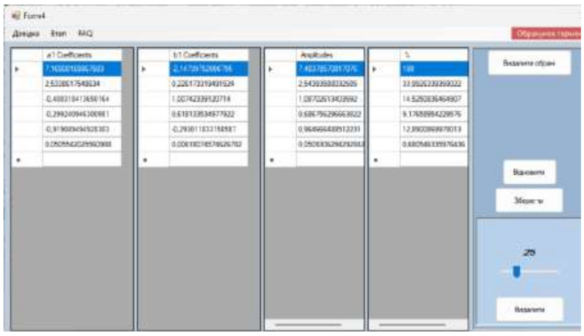
Користувацький інтерфейс програмного застосунку представлений на рис.2. у вигляді послідовності екранів. В процесі роботи користувач аналізує якість апроксимації періодичної функції і може оперативно змінювати параметри та уточнювати вибір гармонік, які будуть входити в результуючу функцію.



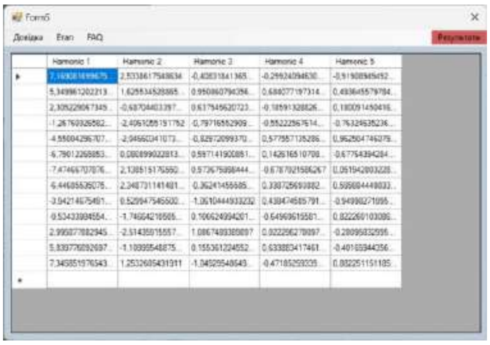


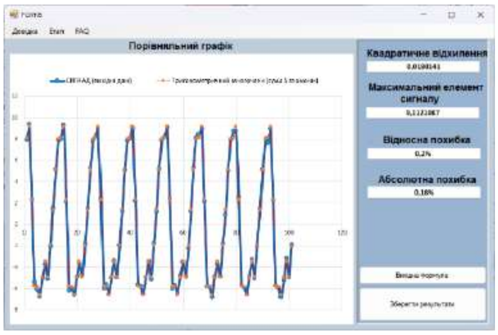
а *б*





в *г*





д *е*

Рис.2. Послідовність екранів користувацького інтерфейсу:
а – введення початкових даних та графіку функції; б – знаходження середніх значень по періодам; в – розрахунок коефіцієнтів гармонік; г - вибір амплітуд функцій; д – обрахунок гармонік; е – представлення результату апроксимації початкової функції

Отримані графіки наочно демонструють відмінності між початковою та апроксимованою функцією, дозволяючи користувачеві проаналізувати абсолютну і середньоквадратичну похибки, що виникають під час апроксимації. Крім того, програмний продукт виводить кінцеву математичну формулу тригонометричного многочлену, який отриманий в результаті розрахунків. Математична формула дозволяє користувачеві проводити подальшу математичну обробку і аналіз отриманої періодичної функції.

Висновки. Класична задача розкладання періодичної функції в ряд Фур'є у випадку представлення функції таблицею значень перетворюється в задачу наближення функції тригонометричним многочленом Фур'є. Для зменшення громіздкості обчислень деякими гармоніками тригонометричного многочлену можна знехтувати без суттєвого погіршення точності наближення.

Практичну задачу наближення табличної функції тригонометричним многочленом Фур'є зручно розв'язувати в автоматизованому режимі за допомогою спеціального програмного інструменту для Фур'є-аналізу табличної функції. В роботі визначені функціональні вимоги до відповідного програмного застосунку, реалізований алгоритм обчислень і описаний користувацький інтерфейс програмного застосунку.

Запропонований програмний застосунок орієнтований на вибір оператором-користувачем відповідних гармонічних складових для наближення заданої періодичної функції. При цьому користувач може оцінювати вплив тих чи інших складових за допомогою числових значень і графічних залежностей, які виводяться на екран в процесі обчислень.

Розроблений програмний застосунок може бути використаний як в навчальному процесі, так і в практичних задачах гармонічного аналізу. В майбутньому планується додати в програмний застосунок інструменти для побудови амплітудного і частотного спектру періодичної функції та проведення аналізу функції в спектральній області та в комплексній формі.

Список використаних джерел та літератури

1. Дубовик В.П. Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. 4-е вид. К.: Ігнатекс-Україна, 2013. 648 с.

2. Jeffrey Rauch. Fourier Series, Integrals, and Sampling From Basic Complex Analysis URL: https://dept.math.lsa.umich.edu/~rauch/555/fouriercomplex.pdf (дата звернення 01.11.2024).