

*Чемерис Ольга,  
кандидат педагогічних наук, доцент,  
доцент кафедри алгебри та геометрії,  
Барановська Карина,  
здобувачка другого (магістерського) рівня вищої освіти  
фізико-математичного факультету,  
Житомирський державний університет імені Івана Франка,  
м. Житомир, Україна*

## **ВИКОРИСТАННЯ GEOGEBRA ДЛЯ ПОГЛИБЛЕННЯ РОЗУМІННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗМІСТУ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА**

Типовими складними темами в курсі алгебри 11 класу [1] є «Показникові та логарифмічні функції», які мають багато властивостей, що можуть бути складними для запам'ятовування та застосування, а також тема «Інтеграл і його застосування», що є абстрактною для багатьох учнів.

Тема «Інтеграл і його застосування» дійсно може викликати певні труднощі в учнів 11 класу. На відміну від диференціювання, яке має більш наочну інтерпретацію (нахил дотичної), інтеграл часто сприймається як операція, яка не має візуалізації. Також існує багато різних методів інтегрування (заміна змінної, інтегрування частинами, інтегрування раціональних дробів тощо), і вибір правильного методу може бути складним.

Також викликають труднощі практичне застосування інтегралів для розв'язання реальних задач (обчислення площ, об'ємів, довжин дуг тощо).

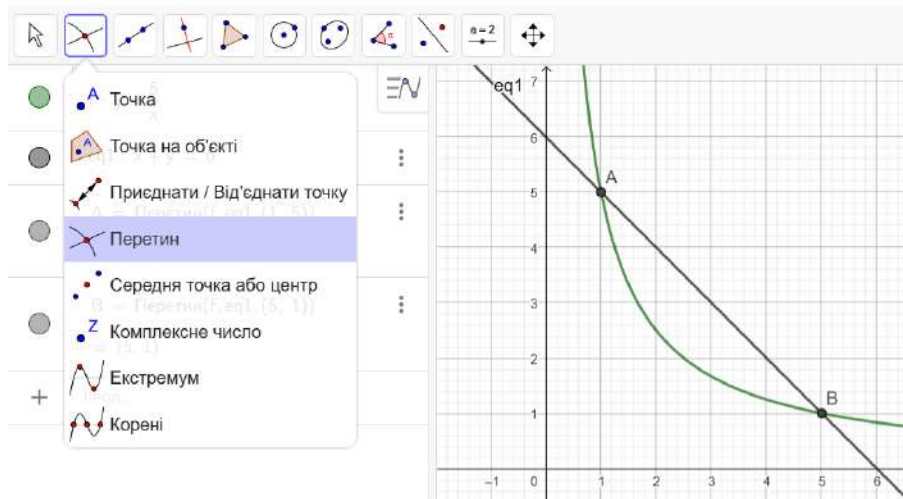
На думку учнів, найбільш складними аспектами теми «Інтеграл та його застосування» є такі моменти в теорії: 1) розуміння того, що інтегрування – це операція, обернена до диференціювання; 2) неочевидний зв'язок визначеного інтеграла з площею криволінійної трапеції; 3) складними можуть бути інтегрування раціональних дробів, тригонометричних функцій та ірраціональних функцій; важким є розуміння фізичного змісту інтеграла, хоча багато формул у фізиці виражаються через інтеграли тощо.

Динамічне середовище GeoGebra [2] є потужним інструментом, який значно полегшує розуміння концепції інтеграла. Воно пропонує візуальне представлення абстрактних математичних понять, що дозволяє учням бачити геометричний зміст інтеграла, зокрема, швидко обчислювати площу криволінійної трапеції.

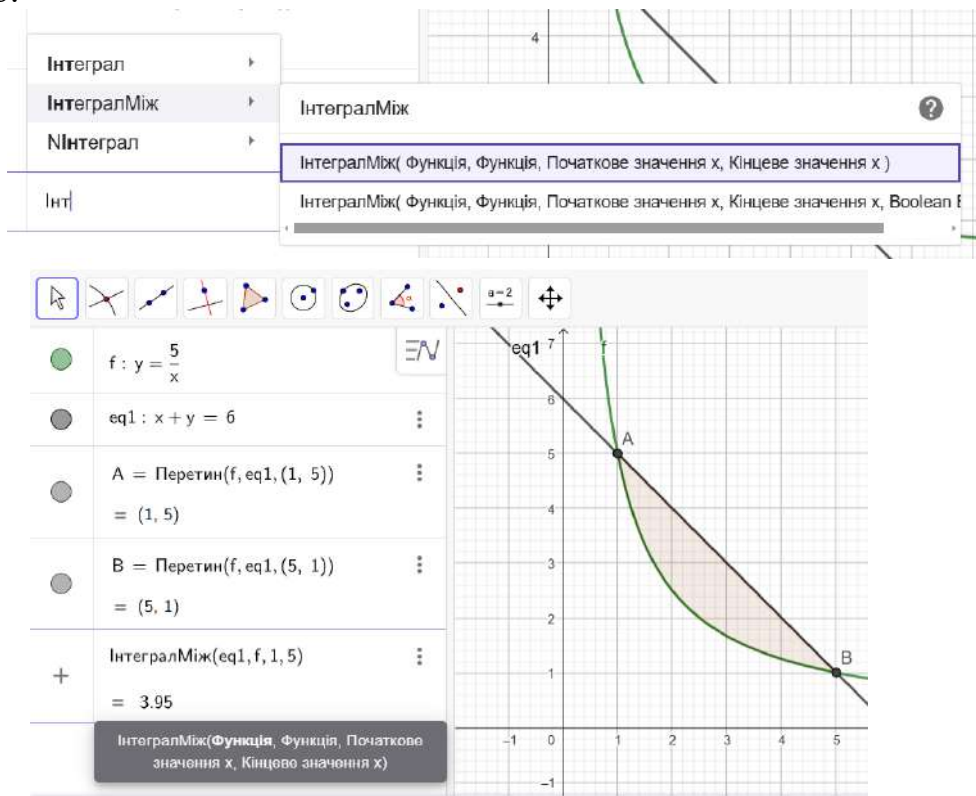
**Задача 11.11\_8 [3, с. 64].** Знайдіть площу фігури, обмеженої гіперболою  $y = \frac{5}{x}$  і прямою  $x + y = 6$ .

*Розв'язання.* Зобразимо область, обмежену заданими лініями з умови. Введемо в протокол побудови рівняння гіперболи та прямої. Потім оберемо інструмент *Перетин* для знаходження точок перетину графіків функцій:

## Секція 1. Інформаційно-комунікаційні технології в освіті та науці



Звернемо увагу на абсиси точок перетину – це будуть наші межі інтегрування. Далі в протокол побудови вводимо наступну синтаксичну конструкцію:

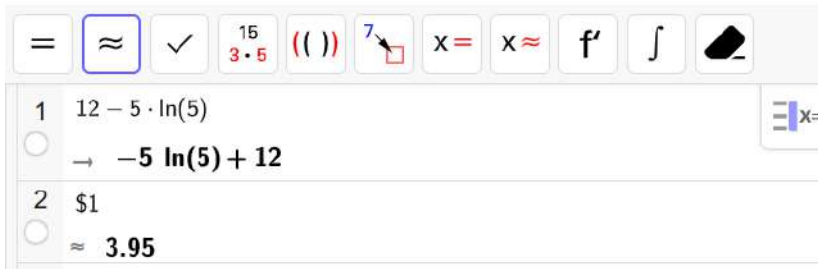


Маємо швидку відповідь в середовищі (це зручно як для вчителя, який перевіряє виконання, а також, якщо він проводить порівняння результату в класі).

І, звичайно, наводимо письмове виконання задачі:

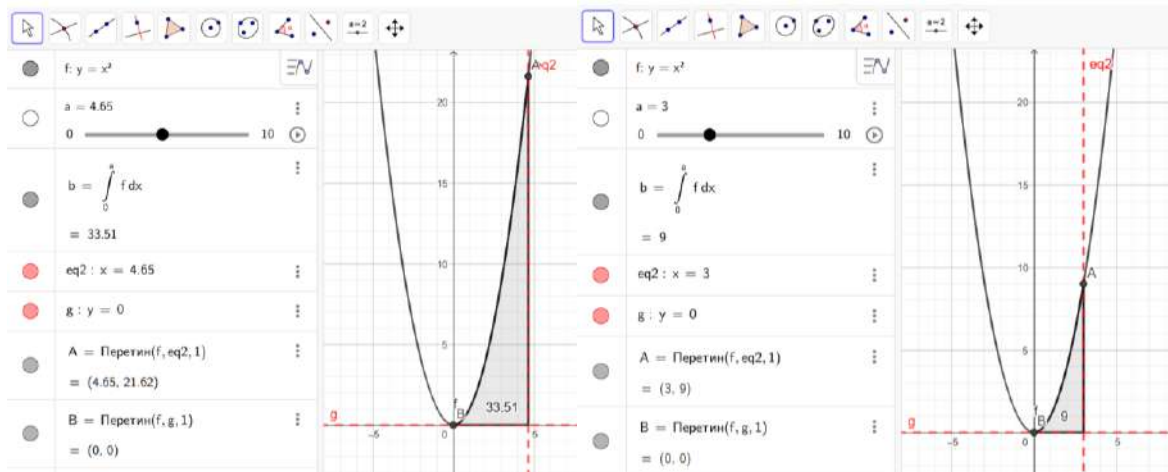
$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^5 \left( (6 - x) - \frac{5}{x} \right) dx = \left( 6x - \frac{x^2}{2} - 5 \cdot \ln x \right) \Big|_1^5 = \\
 &= \left( 6 \cdot 5 - \frac{5^2}{2} - 5 \cdot \ln 5 \right) - \left( 6 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 5 \cdot \ln 1 \right) = 12 - 5 \cdot \ln 5 \approx 3,95
 \end{aligned}$$

Для одержання відповіді перейшли у вкладку СКА середовища GeoGebra та використали інструмент *Наближене обчислення*:



**Завдання 11.14 [3, с. 64].** При яких значеннях  $a$  площа фігури, обмеженої лініями  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$ , дорівнює 9?

*Розв'язання.* Спочатку введемо в протокол побудови усі рівняння з умови. Знайдемо точки перетину. Звичайно, площу фігури будемо записувати через означений інтеграл. У цій задачі відповідь будемо шукати за допомогою рухомого *Повзунка*:

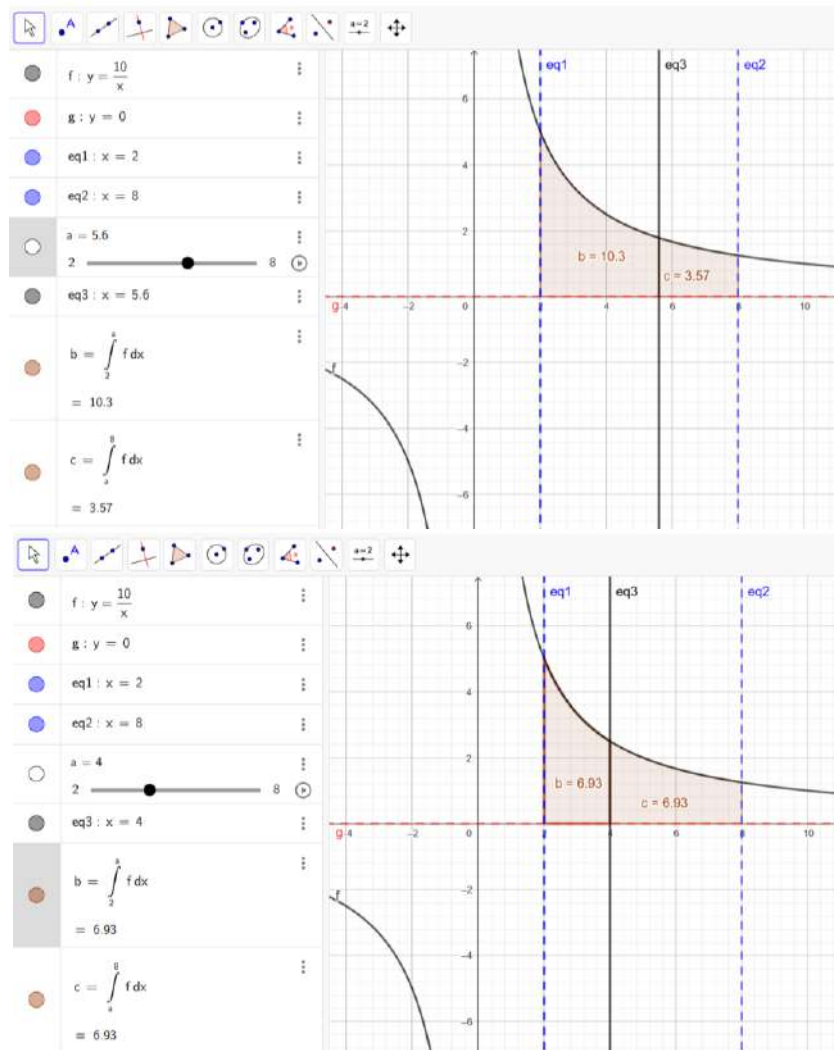


Бачимо, що відповідь буде  $a = 3$ .

**Завдання 18 [3, с. 68].** При якому значенні  $a$  пряма  $x = a$  розбиває фігуру, обмежену графіком функції  $y = \frac{10}{x}$  і прямими  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 8$  на дві рівновеликі фігури?

*Розв'язання.* Аналогічно, як у попередній задачі, побудуємо усі лінії з умови. Зміна значень параметра  $a$  впливає на результат обчислень, тому рухаємо *Повзунок* до тих пір, поки не зрівняємо числові значення для площ частин:

## Секція 1. Інформаційно-комунікаційні технології в освіті та науці



Отже, маємо відповідь  $a = 4$ .

Використання динамічного середовища GeoGebra при вивченні інтегралів дозволяє учням не тільки краще зрозуміти теоретичний матеріал, але й розвинути навички дослідження, моделювання та розв'язання задач. Це робить процес навчання більш ефективним і цікавим.

### Список використаних джерел і літератури

1. Математика: Навчальна програма для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики) ULR : <http://surl.li/polevu>. (Дата перегляду. 12.11.2024).
2. GeoGebra. Динамічна математика для навчання та викладання : [веб-сайт]. 2024. ULR : <http://www.geogebra.org/>. (Дата перегляду. 19.11.2024).
3. Мерзляк А.Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін. Х. : Гімназія, 2019. 208 с.