

## НОВІТНІ КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ ВИВЧЕННЯ ОСНОВ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

*Розроблений навчально-контролюючий комплекс із розвинутим інтерфейсом для вивчення симплекс-методу розв'язування задач лінійного програмування та здобуття практичних навичок використання обчислювальної техніки в еколого-економічних дослідженнях.*

Сучасна українська економіка потребує все більше і більше висококваліфікованих фахівців, які вільно володіють комп'ютерною технікою та вміло використовують її у своїй виробничій діяльності. Для підготовки таких фахівців доцільно використати сучасні технічні засоби навчання, а саме комплекси відповідних навчальних програм для персональних комп'ютерів. Такий підхід дає можливість індивідуалізувати процес навчання і контролю рівня знань, а також широко впроваджувати дистанційне та самостійне навчання.

Дане дослідження присвячене розробці методики вивчення основ лінійного програмування з використанням сучасних технічних засобів навчання. Тому основним його об'єктом є задачі лінійного програмування, що полягають у пошуку максимуму (або мінімуму) цільової функції при наявності обмежень на її змінні у вигляді системи лінійних рівнянь та нерівностей. До цього класу належать такі відомі проблеми як задачі про оптимальний план випуску продукції, оптимізацію міжгалузевих потоків, вибір виробничої програми, розміщення та призначення, оптимізацію потоку газу в мережі, транспортна задача [1] тощо.

Дотримуючись введених у [2] позначень і стилю викладу, наведемо кілька задач, оптимальне розв'язування яких потребує застосування методів лінійного програмування.

**Транспортна задача.** Вугілля, добуто у кількох родовищах, відправляється ряду споживачів. Відомі об'єми видобутку вугілля в кожному з родовищ та потреби кожного зі споживачів у цьому вугіллі, а також вартість перевезення тонни вугілля від родовищ до кожного споживача. Потрібно при наявних умовах спланувати перевезення вугілля так, щоб затрати були мінімальними.

Побудуємо математичну модель такої задачі. Для спрощення викладу припустимо, що три споживачі вугілля (наприклад, електростанції):  $C_1$  (з потребами  $b_1$ ),  $C_2$  (з потребами  $b_2$ ) та  $C_3$  (з потребами  $b_3$ ) – використовують вугілля, добуто у двох родовищах  $P_1$ ,  $P_2$  потужністю  $a_1$  та  $a_2$  відповідно. Будемо також вважати, що задача закритого типу, тобто видобуток вугілля рівний сумарній потребі в ньому (в іншому випадку задачу неважко звести до такої, вводячи фіктивні джерела постачання або фіктивних споживачів, тобто передбачити можливий імпорт чи експорт вугілля)  $b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2$ . Припустимо, що вартість вугілля залежить лише від відстані його перевезень. Позначимо  $x_{ij}$  кількість вугілля, призначеного для перевезення із родовища  $P_i$  до споживача  $C_j$ . Виходячи з отриманих даних, побудуємо схему перевезень (табл. 1)

Таблиця 1

Схема перевезень

	до $C_1$	до $C_2$	до $C_3$	Всього відправлено
із $P_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$a_1$
із $P_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$a_2$
Всього привезено	$b_1$	$b_2$	$b_3$	

Із наведеної таблиці перевезень маємо:

а) кількість вугілля, перевезеного споживачам  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , можна подати у вигляді:

$$x_{11} + x_{21} = b_1, \quad x_{12} + x_{22} = b_2, \quad x_{13} + x_{23} = b_3; \quad (1)$$

б) кількість вугілля, вивезеного із родовищ  $P_1$  і  $P_2$ , можна подати у вигляді:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2. \quad (2)$$

Із припущення, що вартість перевезень  $c_{ij}$  прямо пропорційна віддалі між пунктами  $P_i$  і  $C_j$ , маємо

$$S = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}. \quad (3)$$

Таким чином, приходимо до математичної задачі: серед невід'ємних (оскільки лише такі мають практичний зміст) розв'язків системи (1),(2) п'яти рівнянь із шістьма невідомими вибрати такий, при якому функція  $S$  досягає найменшого значення.

**Задача про використання ресурсів.** Підприємство має у своєму розпорядженні певну кількість ресурсів (устаткування, сировину, фахівців тощо), випускає різні види продукції. Виходячи із наявних ресурсів, потрібно скласти такий план випуску продукції, щоб прибуток підприємства був максимальним.

Припустимо, що підприємство має ресурси трьох видів:  $P_1, P_2, P_3$  – в кількості відповідно  $b_1, b_2, b_3$  умовних одиниць і випускає два види товарів:  $T_1, T_2$ . Нехай  $a_{ij}$  – кількість одиниць ресурсу  $P_i$ , необхідних для виробництва одиниці товару  $T_j$ . Відомо, що прибуток, отримуваний підприємством при виробництві товару  $T_j$ , рівний  $c_j$ . Потрібно при даних ресурсах випустити таку комбінацію товарів, при якій прибуток виявиться б максимальним. Позначимо через  $x_1, x_2$  відповідно кількість товарів  $T_1, T_2$ . Тоді математична задача про розподіл ресурсів полягає у шуканні невідомих  $x_1, x_2$ , що задовольняють умовам:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \quad (4)$$

і надає лінійній функції

$$S = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (5)$$

найбільшого значення.

*Задача про дієту.* Із наявних на фермі кормів різного виду потрібно скласти такий раціон харчування, який, з одного боку, забезпечував би мінімальні потреби тварин у білках, жирах, вуглеводах, вітамінах тощо і, разом з тим, вимагав би найменших затрат у межах наявного ресурсу кормів.

Нехай маємо два види продуктів  $P_1$  і  $P_2$ , що містять харчові речовини  $R_1, R_2, R_3$ . Нехай  $a_{ij}$  – кількість харчової речовини  $R_i$ , що міститься в продукті  $P_j$ . Окрім цих даних, відомо:  $b_i$  – щодобова потреба в харчовій речовині  $R_i$  і  $c_j$  – вартість одиниці продукту  $P_j$ . Тоді приходимо до такої математичної моделі. Дана система

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \quad (6)$$

трьох лінійних нерівностей із двома невідомими  $x_1, x_2$  і лінійна функція

$$S = c_1x_1 + c_2x_2. \quad (7)$$

Потрібно серед всіх невід'ємних розв'язків системи (6) вибрати такий, при якому функція (7) досягає найменшого значення.

Незважаючи на таке розмаїття математичних моделей оптимізаційних задач, всі вони являють собою лише різновиди однієї і тієї ж задачі лінійного програмування.

Дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (8)$$

і лінійна функція

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (9)$$

Потрібно знайти такий невід'ємний розв'язок:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (10)$$

системи (8), при якому функція (9) приймає найбільше значення.

Нехай відомо будь-який опорний розв'язок  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$  задачі (1)-(3), а вектори  $A_{i_1} = (a_{1i_1}, a_{2i_1}, \dots, a_{mi_1})^T, A_{i_2} = (a_{1i_2}, a_{2i_2}, \dots, a_{mi_2})^T, \dots, A_{i_m} = (a_{1i_m}, a_{2i_m}, \dots, a_{mi_m})^T$  складають його базис, такий, що  $x_j^{(1)} > 0$  при  $j = i_1, i_2, \dots, i_m$  та  $x_j = 0$  при  $j \neq i_1, i_2, \dots, i_m$ .

Щоб розв'язати задачу (8)-(10) або встановити її нерозв'язність, потрібно виконати алгоритм, що впливає із теорем, наведених у теоретичному обґрунтуванні симплекс-методу [1: 69-75; 2: 91-123]:

1. Розвинути вектори  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  за початковом базисом  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ , тобто, знайти всі числа  $x_{kj}, k = 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n$  (для цього потрібно всі вектори помножити на матрицю, обернену до базисної).

Розвинення вектора  $A_0$  за початковим базисом відоме:  $x_{10} = x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{m0} = x_{i_m}^{(1)}$ . Розвинення базисних векторів також відоме:  $x_{ki} = 0$  при  $i \neq k$ ;  $x_{ki} = 1, x_{20} = x_{i_2}^{(1)}, k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, m$  (оскільки при множенні на обернену матрицю ми отримуємо одиничну матрицю). Розвинення інших векторів можна знайти як  $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T = B^{-1}(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ , де  $B$  – базисна матриця.

2. Для кожного  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) обчислити оцінку за формулою:  $\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{k=1}^m c_{ik} x_{kj} - c_j$ . Якщо всі  $\Delta_j \geq 0$ , то процес розв'язання задачі закінчився. Отриманий опорний розв'язок є оптимальним із цільовою

$$\text{функцією } Z_{max} = \sum_{k=1}^m c_{ik} x_{k0}.$$

Якщо ж  $\Delta_j \leq 0$ , то:

3. Потрібно встановити, чи існує хоча б одна оцінка  $\Delta_j < 0$  така, що при фіксованому  $j$  всі  $x_{kj} \leq 0$ , ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Якщо існує, то процес розв'язування задачі закінчився, цільова функція (2) задачі необмежена зверху на множині допустимих розв'язків (8),(10).

Якщо ж таких оцінок не існує, тобто, якщо  $x_{kj} > 0$  для довільної оцінки  $\Delta_j < 0$ , то:

4. Треба вибрати одну із оцінок  $\Delta_j < 0$  (нехай  $\Delta_s$ , де  $s$  – номер вибраного рядка за від'ємною оцінкою).

Потім для неї обчислити відношення  $\frac{x_{k0}}{x_{ks}}$ , де  $x_{k0}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – коефіцієнти опорного розв'язку) для довіль-

них  $k$ , при яких  $x_{ks} > 0$ . Серед цих відношень знайти мінімальне (нехай це буде  $Q_0 = \frac{x_{r0}}{x_{rs}}$ ).

5. Здійснити перехід до нового опорного розв'язку, базис якого отримується заміною вектора  $A_{ir}$  в попередньому базисі вектором  $A_s$ , обчислюючи координати всіх векторів  $A_0, A_1, \dots, A_n$  в новому базисі за формула-

$$\text{ми: } x''_{rj} = Q_j = \frac{x_{rj}}{x_{rs}}; x''_{kj} = x_{kj} - Q_j x_{ks}; j = 0, 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m; k \neq r.$$

6. Виконати пункт 2 і, якщо потрібно, пункти 3, 4, 5, враховуючи новий базис і нові значення величин  $x_{kj}$ .

Основним результатом цієї роботи є навчаючо-контролюючий комплекс SIMPLEX – 1 по вивченню і розв'язанню задач лінійного програмування [1-3], реалізований у середовищі Delphi 6.0 (об'єм основного модуля – 800 Кбайт і 1,7 Мбайт допоміжних файлів). Створений нами комплекс функціонально складається із:

– теоретичного навчаючого блоку, який, окрім навчання, дає можливість контролювати рівень засвоєння поданого матеріалу;

– програми симплекс-методу, суть якого полягає в цілеспрямованому переході від одного до іншого базового розв'язання задачі лінійного програмування з метою пошуку оптимального плану у відповідності з викладеним алгоритмом 1-6.

Структурно комплекс має три базові модулі, що підпорядковані головному проекту. Його форма забезпечує керування всім комплексом і має структурну карту до інших підпорядкованих форм у вигляді інтерфейсного меню, яке має розділи "Навчання" та "Обчислення".

Навчальний розділ передбачає три рівні підготовки користувача – поверхневий (побіжно розглядаються основні питання теорії лінійного програмування), середній та поглиблений (розглядаються всі питання теорії) (рис.1).

Кожен згаданий рівень передбачає три підходи до вивчення теоретичної та практичної частин: почати спочатку, продовжити з незавершеної теми, розглянути нову тему (рис.2).

Для цього на допоміжній формі "Навчання" (рис.3) передбачено кнопки "вперед" і "назад" (рис.4), що забезпечують перегляд теоретичного матеріалу в обраному режимі, і індикатор, що вказує відсоток пройденого теоретичного матеріалу.

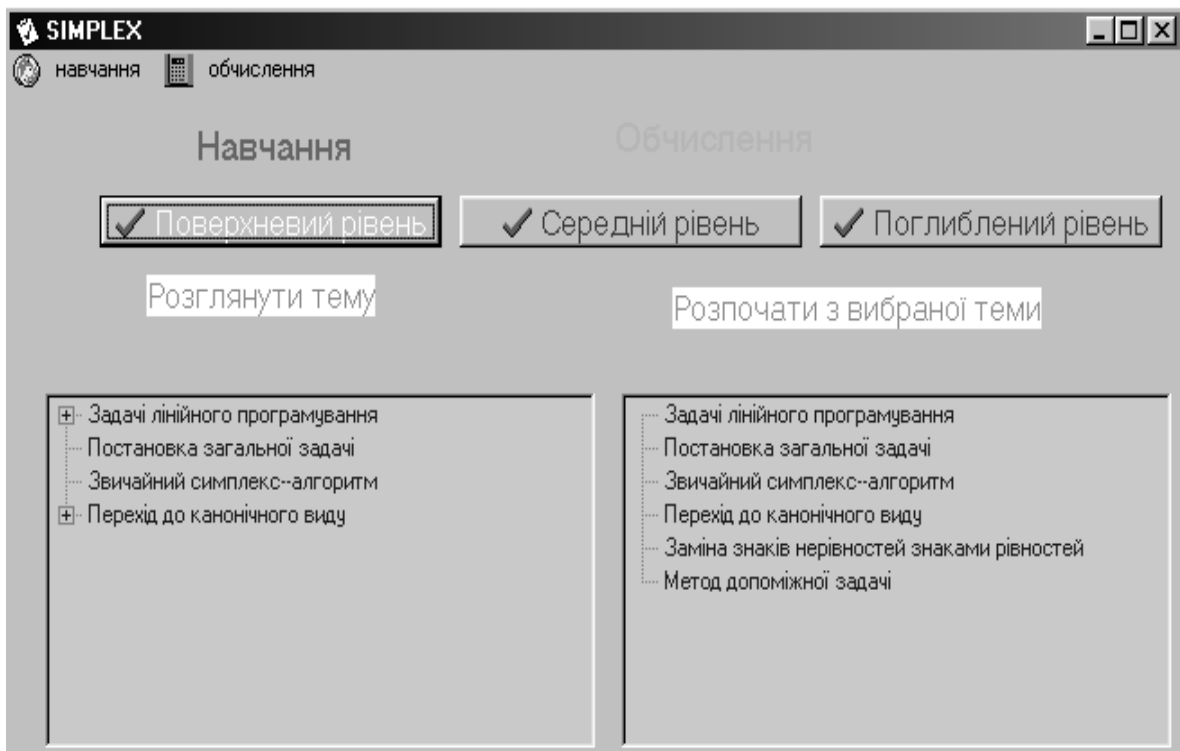


Рис. 1

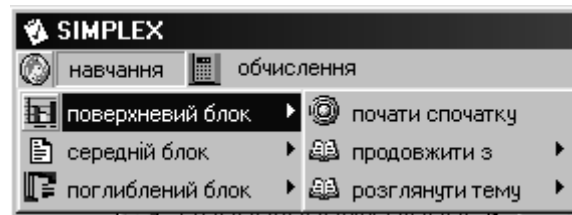


Рис. 2

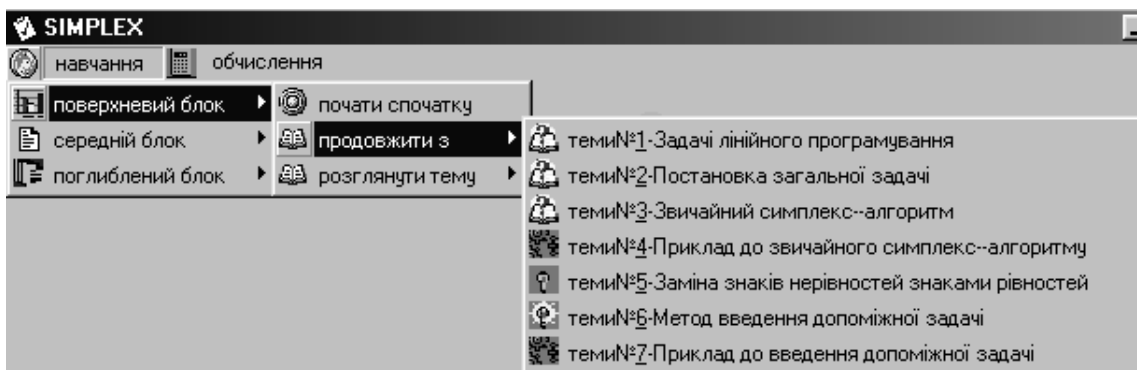


Рис. 4

Розділ "Обчислення" використовується для запуску в дію допоміжної форми "Обчислення", що застосовується для розв'язування загальної задачі лінійного програмування. Ця форма має спеціальну панель вводу умов задачі, завдяки якій виключається ряд можливих помилок (рис.5-7).

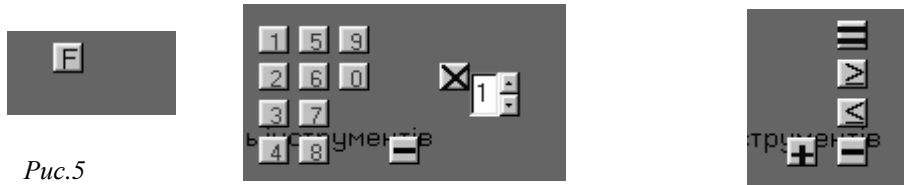


Рис.5

Розв'язування задачі лінійного програмування передбачено, за вибором користувача, в одному із двох режимів: власне, саме розв'язування задачі та навчальне розв'язування із демонстрацією всіх проміжних результатів, що подаються у вигляді послідовності симплекс-таблиць (рис.8).

№ баз	Сбаз	A0	A1	A2	A3	A4	A5
A4	1	2	1	0	0	1	1
A2	0	3	-2	1	0	0	1
A3	0	4	1	0	1	0	-2
	Z=2	Φ	1	0	0	0	2
		C	0	0	0	1	-1

Рис.8

Для досягнення точності в обчисленнях використані звичайні дроби, які в підсумковому результаті подаються в десятковому записі.

Розроблений навчально-контролюючий комплекс SIMPLEX-1 пропонується використовувати як технічний засіб навчання під час вивчення методів лінійного програмування та здобуття практичних навичок використання обчислювальної техніки в еколого-економічних дослідженнях.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.
2. Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. – М.: Просвещение, 1966. – 124 с.
3. Волков В.А. Элементы линейного программирования. – М.: Просвещение, 1975. – 144 с.
4. Баас Р., Фервай М., Гюнтер Х. Delphi 5 для пользователя. Пер. с нем. – К.: BHV, 2000. – 496 с.

Матеріал надійшов до редакції 25.11.2002 р.

**Ляшенко Б.Н., Рабченюк С.Л. Новейшие компьютерные технологии изучения основ линейного программирования.**

*Разработан обучающе-контролирующий комплекс с развитым интерфейсом для изучения симплекс-метода решения задач линейного программирования и приобретения практических навыков использования вычислительной техники в эколого-экономических исследованиях.*

**Lyashenko B.M., Rabchenyuk S.L. The Newest Computer Technologies of Mastering the Bases of Linear Programming.**

*The authors present a new complex with a developed interface for mastering the simplex-method of solving problems of linear programming and acquiring practical skills of the use of computer facilities in ecology-economic researches.*