Лавринович І.І.,
здобувачка першого (бакалаврського) рівня вищої освіти,
освітньо-професійна програма: Середня освіта (Математика),
Житомирський державний університет імені Івана Франка

науковий керівник: ***Сарана О.А.,***
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичного аналізу

НЕРІВНІСТЬ КОШІ ТА ДЕЯКІ ЇЇ УЗАГАЛЬНЕННЯ

У статті розглянуто застосування нерівності Коші, проведено дослідження щодо ефективності застосування даного методу до розв'язування різноманітних задач.

Ключові слова. *нерівність, нерівність Коші.*

Постановка проблеми. В сучасній математиці нерівності відіграють величезну роль. Вивчаючи нерівності, переслідується мета розвитку у дітей розумових навичок, вміння узагальнювати і конкретизувати, мати уявлення про аксіоматичну основу будь-якої теорії як системи знань.

Аналіз актуальних досліджень. Нерівності, представляючи собою апарат елементарної математики, спрощують вивчення математичного аналізу, дозволяючи здійснити перехід до багатьох його понять (властивості функції, межа і ін.). До числа найбільш часто розповсюджених в математиці числових нерівностей відноситься твердження про те, що середнє арифметичне двох або більше невід'ємних чисел більше або дорівнює їх середньому геометричному. Така нерівність носить ім'я французького математика і механіка Огюстена Луї Коші (1789-1857 рр.).

Нерівність Коші застосовується в багатьох розділах шкільної математики. Особливо ефективно її застосовують при доведенні нерівностей і при вирішенні деяких рівнянь підвищеної складності.

Мета статті. Розглянути застосування нерівності Коші, зробити висновок щодо ефективності застосування даного методу до розв'язування різноманітних задач.

Виклад основного матеріалу. Серед узагальнюючих показників, які застосовуються для характеристики суспільних явищ і виявлення закономірностей їхнього розвитку, велике значення мають середні величини. У курсі елементарної та вищої математики найчастіше вживаються середнє арифметичне, середнє геометричне, середнєквадратичне, середнє гармонійне значення набору додатніх чисел.

Нерівністю Коші називається наступне твердження: середнє арифметичне значення n невід'ємних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$не менше їх середнього геометричного значення

$$\frac{a_1 + a_{2+\dots+}a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 * a_2 * \dots * a_n}$$

У цій нерівності знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Звідси можна отримати два цікавих факти, які мають ряд застосувань:

1. Якщо добуток невід'ємних чисел$a_1 * a_2 * \dots * a_n$ є сталою величиною, рівною C, то сума$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ приймає найменше значення при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \sqrt[n]{c}$. Це найменше значення дорівнює $n\sqrt[n]{c}$.

2. Якщо сума невід'ємних чисел $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$є сталою величиною, рівною C, то добуток $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ приймає найбільше значення, рівне $(\frac{C}{n})^n$, при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{C}{n}$.

Узагальненою нерівністю Коші називається нерівність вигляду:

$$(a_1^{p_1} * \dots * a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+\cdots+p_n}} \leq \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + \cdots + p_n}, \quad (1)$$

де $a_1, \dots, a_n$ –додатні числа, $p_1, \dots, p_n (p_k > 0, k = 1, \dots, n)$ –числа, що називаються вагами. В (1) нерівності рівність досягається тільки за умови, що $a_1 = \cdots = a_n$.

Застосування нерівності Коші.

Задача № 1

Довести, що для $x, y, z > 0$ виконується нерівність

$$x^3y + x^3z + y^3z + y^3x + z^3x + z^3y \geq 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2).$$

Доведення. Додавши нерівності

$$x^3y + y^3x \geq 2\sqrt{x^4y^4} = 2x^2y^2;$$
$$x^3z + z^3x \geq 2\sqrt{x^4z^4} = 2x^2z^2;$$
$$y^3z + z^3y \geq 2\sqrt{z^4y^4} = 2z^2y^2,$$

отримуємо

$$x^3y + x^3z + y^3z + y^3x + z^3x + z^3y \geq 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2z^2y^2.$$

Використовуючи оцінку

$$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2z^2y^2 = (x^2y^2 + x^2z^2) + (x^2y^2 + y^2z^2) +$$
$$+(y^2z^2 + x^2z^2) \geq 2\sqrt{x^4y^2z^2} + 2\sqrt{x^2y^4z^2} + 2\sqrt{x^2y^2z^4} =$$
$$= 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 = 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2),$$

отримуємо твердження задачі.

Задача № 2

Довести, що для $\ , y, z > 0$ виконується нерівність

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq \ {}^2y + \ {}^2z + y^2 \ \ + z^2 \ \ + y^2z + z^2y.$$

Доведення. Додавши нерівності

$$\begin{gathered} {}^3 + \ {}^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \ \ {}^3y^3} = 3x^2y; \\ {}^3 + \ {}^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \ \ {}^3z^3} = 3x^2z; \\ y^3 + y^3 + \ {}^3 \geq 3\sqrt[3]{y^3y^3 \ \ {}^3} = 3y^2x; \\ z^3 + z^3 + \ {}^3 \geq 3\sqrt[3]{z^3z^3 \ \ {}^3} = 3z^2x; \\ y^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{y^3y^3z^3} = 3y^2z; \\ z^3 + z^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{z^3z^3y^3} = 3z^2y, \end{gathered}$$

отримуємо твердження задачі.

$$6(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(x^2y + \ {}^2z + y^2 \ \ + z^2 \ \ + y^2z + z^2y);$$
$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq \ {}^2y + \ {}^2z + y^2 \ \ + z^2 \ \ + y^2z + z^2y.$$

Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній статті розглядались деякі нерівності, які можна довести за допомогою співвідношень між середніми величинами. Таких нерівностей є надзвичайно багато, тому основною метою дослідження було розглянути деякі з таких нерівностей та показати як вони доводяться. Для окремих нерівностей існують відомі алгоритми їх доведення.

Було виконано наступні завдання дослідження:

1. Проаналізовано наукову літературу.
2. Розглянуто співвідношення між середніми величинами.
3. Продемонстровано, як діють дані методи для доведення нерівностей.
4. Самостійно придумано приклади нерівностей *(задача № 1,2)*, для доведення яких можна застосовувати нерівність Коші.

Вміння доводити нерівності різними способами покращує логічне мислення та математичну культуру. І, на завершення, хочеться згадати один афоризм: "Математика – наука аналогій. На першому рівні – аналогії між формулами, на другому – між доведеннями, але найбільш цінні аналогії між аналогіями".

Список використаних джерел і літератури

1. Тоноян Г.А. Избранные теоремы и задачи по математике. – 1970. – С.12-13.
2. Вороний О.М. Два доведення узагальненої нерівності Коші // У світі математики. – 2002. – № 2. – С. 41.
3. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – 1986. – С.45.
4. Седряков Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. – 1975. – С.34.
5. Сарана О.А., Математичні олімпіади: просте і складне поруч. // Навчальна книга – Богдан. – 2011. – С.25.