УДК 512(075.3)

Л.П. Таргонський,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Т.Л. Новицька,
старший лаборант
(Житомирський державний університет)

ПРО НЕСТАНДАРТНИЙ ВИКЛАД ЕЛЕМЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

У зв'язку з проблемою викладу елементів математичного аналізу в середній школі у статті розглянута методика побудови множини гіпердійсних чисел і методика вивчення основних властивостей цієї множини.

Математичний аналіз є однією з основ навчального курсу вищої математики. У наш час математичний аналіз в сукупності з іншими фундаментальними математичними предметами створив фундамент сучасної математики, без освоєння якого неможлива підготовка кваліфікованих наукових і технічних працівників. Саме тому елементи математичного аналізу необхідні навіть у найскромніших представленнях про вищу математику.

Звичайно середня школа, яка повинна давати належну математичну підготовку своїм випускникам, теж практикує вивчення елементів математичного аналізу в школі. Так, у 1995р. вийшов пробний підручник для 10-11 класів середніх шкіл України "Алгебра і початки аналізу", підготовлений М.І. Шкілем, З.І. Слепкань і О.С. Дубинчуком. Відомо, що методи логічного обґрунтування апарату математичного аналізу, розроблені ще Коші, ускладнили апарат аналізу, віддалили його зміст від фізичної наглядності [1].

Тому виникли серйозні труднощі в питаннях викладу математичного аналізу.

У 1960 році на семінарі Прінстонського університету відомий математик Абрахам Робінсон обґрунтував можливість застосування методів математичної логіки до викладу математичного аналізу [2]. Ним було доведено, що поняття сталого нескінченного малого числа має точний математичний зміст. З цього часу розпочався процес нестандартного викладу математичного аналізу. Принциповим моментом нестандартного викладу є розгляд нескінченно малих як сталих величин на противагу тому, що при стандартному викладі нескінченно малі вважалися змінними величинами.

Нестандартні методи математичного аналізу, як відзначає М. Девіс [3], володіють математичною елегантністю, простотою і красою своїх методів. Ці методи сприяють більш простому і доступному викладу математичного аналізу і можуть бути застосовані в середній школі за умови, якщо учні ознайомлені з розширенням множини гіпердійсних чисел.

Тому метою даної роботи є виклад методики побудови множини гіпердійсних чисел.

<u>Побудова множини гіпердійсних чисел.</u>

За роки навчання в школі учні вивчали множину N — натуральних чисел, Z — цілих чисел, Q — раціональних чисел і R — дійсних чисел, встановили, що $N \subset Z \subset Q \subset R.$

Наступним завданням є розширення множини R до множини R^* — гіпердійсних чисел, яка містить сталі нескінченно малі числа і яка б зберігала важливі властивості множини дійсних чисел.

Розглядається множина всіх послідовностей дійсних чисел. Досвід побудови множини дійсних чисел підказує ідею введення поняття еквівалентних послідовностей, розбиття множини всіх послідовностей дійсних чисел на класи еквівалентних послідовностей і визначення, що кожний отриманий клас є гіпердійсним числом.

<u>Означення 1.</u> Дві послідовності дійсних чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ називаються еквівалентними $\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, якщо множина тих значень індексів n, для яких $x_n = y_n$ є суттєвою підмножиною множини натуральних чисел.

Це твердження записується $x_n = y_n$ (м. в с.) і читається $x_n = y_n$ майже всюди.

Суттєві множини визначаються наступними твердженнями:

1^0. Множина N — натуральних чисел суттєва.

Порожня множина $\varnothing$ не суттєва.

2^0. Якщо множини A і B без спільних точок і такі, що $A \cup B = N,$ справедливе тільки одне з двох тверджень:

A — суттєва множина і B не суттєва множина — перше твердження;

A — не суттєва множина, B суттєва множина — друге твердження.

3^0. Якщо A — суттєва множина і $B \supset A,$ то B — суттєва множина.

4^0. Якщо A і B суттєві множини, то $A \cap B$ — суттєва множина.

Якщо A і B не суттєві множини, то $A \cup B$ не суттєва множина.

5^0. Скінченні множини не суттєві.

У математиці множина всіх суттєвих підмножин множини натуральних чисел називається нетривіальним ультрафільтром. Доведено існування нетривіального ультрафільтра, встановлено, що не існує засобів побудови конкретного нетривіального ультрафільтра, тобто існує неоднозначність у виборі ультрафільтра.

Легко довести, що введене поняття еквівалентності послідовностей володіє властивостями:

a) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — рефлективність;

в) Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — симетричність,

c) Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — транзитивність.

Це означає, що на множині всіх послідовностей дійсних чисел задано відношення еквівалентності, і тому за відомою теоремою множина всіх послідовностей дійсних чисел розбивається на неперетинаючі такі класи (підмножини), що будь-які дві послідовності одного класу еквівалентні між собою, різних класів – не еквівалентні.

Означення 2. Клас еквівалентності послідовностей дійсних чисел називається гіпердійсним числом.

Кожне дійсне число a ототожнюється з класом послідовностей дійсних чисел, кожна з яких еквівалентна стаціонарній послідовності $\{a,a,a,...,a,...\}$. Таким чином $R \subset R^*$.

Поширено арифметичні дії з множини дійсних чисел на множину гіпердійсних чисел. Зафіксуємо довільні послідовності дійсних чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n'\}_{n=1}^{\infty}$ з класів, що визначають відповідно гіпердійсні числа x і y. Оскільки $x_n = x_n'$ (м. в с.), $y_n = y_n'$ (м. в с.), то легко показати, що $x_n + y_n = x_n' + y_n'$ (м. в с.). Отже, послідовності $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{x_n' + y_n'\}_{n=1}^{\infty}$ належать одному класу еквівалентності. Тому має місце наступне означення.

Означення 3. Сумою (добутком) двох гіпердійсних чисел x і y називається клас еквівалентності послідовностей, що містять послідовності $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\left(\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, де $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ довільна послідовність класу, що визначає число x, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} - y$.

Упорядкування гіпердійсних чисел.

Означення 4. Кажуть, що гіпердійсне число α більше за гіпердійсне число β, якщо $a_n > b_n$ (м. в с.), де $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ довільна послідовність з класу, що визначає α, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} - \beta$.

Коректність цього означення випливає з того, що якщо $a_n = a_n'$ (м. в с.), $b_n = b_n'$ (м. в с.), $a_n \geq b_n$ (м. в с.), то $a_n' \geq b_n'$ (м. в с.).

Теорема. Для будь-якого гіпердійсного числа α справедливе одне і тільки одне із співвідношень:

$$\alpha \geq 0, \quad \alpha = 0, \quad -\alpha > 0.$$

Доведення. Нехай послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ належить класу еквівалентності, що визначає число α. Якщо $a_n = 0$ (м. в с.), то $\alpha = 0$. Якщо $a_n \neq 0$ (м. в с.), то множина значень n, при яких $a_n < 0$ в об'єднанні з множиною значень n, при яких $a_n > 0$ не може бути не суттєвою.

Отже, має місце тільки одна з нерівностей $\alpha > 0$ або $\alpha < 0$.

Продовження функцій з множини R на множину R^*.

Нехай функція f з дійсними значеннями визначена на множині X. Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in X$. Оскільки $R \subset R^*$, то x_0 є одночасно гіпердійсним числом і визначається класом еквівалентності, що містить стаціонарну послідовність $\{x_0, x_0, x_0, ..., x_0, ...\}$.

Дійсне число $f(x_0)$ є одночасно гіпердійсним числом, яке визначається класом еквівалентності, що містить стаціонарну послідовність $\{f(x_0), f(x_0), ..., f(x_0), ...\}$, тобто продовжена функція співпадає на множині дійсних чисел з початковою функцією.

Покладемо, що множина X^* є множиною гіпердійсних чисел, тобто таких класів еквівалентності дійсних чисел, що $x_n \in X$ (м. в с.). Нехай $\tilde{x} \in X^*$ і $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ довільна послідовність, що належить класу еквівалентності, який визначає число $\tilde{x}$. Розглянемо клас еквівалентності, якому належить послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, що цей клас не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в класі, що визначає число $\tilde{x}$. Таким чином, покладаємо, що продовжена функція f^* в точці $\tilde{x}$ є гіпердійсним числом, яке визначається класом еквівалентності, якому належить послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Приклад. Продовжити функцію $y = |x|$ з множини R на множину R^*.

На множині R функція $y = |x|$ визначається рівністю

$$|x| = \begin{cases} x, \textit{ якщо } x > 0, \\ 0, \textit{ якщо } x = 0, \\ -x, \textit{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Нехай $\widetilde{x} > 0$ — гіпердійсне число і нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ належить класу, що визначає число $\widetilde{x}$. Тоді $x_n > 0$ (м. в с.). Отже, $|\widetilde{x}|$ визначається класом еквівалентності, якому належить $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Звідси випливає, що $|\widetilde{x}| = \widetilde{x}$. Аналогічно встановлюється, що $|\widetilde{x}| = -\widetilde{x}$, якщо $\widetilde{x} < 0$. Якщо $\widetilde{x} = 0$, то $\widetilde{x} \in R$ і $|0| = 0$.

Існування нескінченно малих гіпердійсних чисел.

Нехай послідовність $\left\{\frac{1}{m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ визначає гіпердійсне число w. Оскільки $\frac{1}{m} > 0$ (м. в с.), то $w > 0$. Зафіксуємо довільне натуральне число n. Тоді при $m > n$ $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ (м. в с.). Стаціонарна послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ визначає число $\frac{1}{n}$ і тому $w < \frac{1}{n}$. Отже, при довільному натуральному n $0 < w < \frac{1}{n}$.

Означення 5. Гіпердійсне число $w \neq 0$ називається нескінченно малим, якщо для довільного натурального n справедлива нерівність

$$|w| < \frac{1}{n}.$$

Таким чином доведено існування сталих нескінченно малих гіпердійсних чисел.

Принцип переносу або принцип Лейбниця.

Розглянемо функції, множиною значень яких є істинні або хибні розповідні речення, які називаються висловлюваннями.

Наприклад, нехай на множині R — дійсних чисел задано функцію, яка кожне число $x \in R$ відображає в нерівність $x^2 - 1 > 0$. Тоді число $x = 1$ функція відображає в нерівність $(-1)^2 - 1 > 0$, що є хибним висловлюванням, число $x = \pi$ - в нерівність $\pi^2 - 1 > 0$, що є істинним висловлюванням. Таким чином, наведено приклад функції, значеннями якої є висловлювання.

У математиці використовується операція, що позначається символом $\forall$ ('для довільного') і $\exists$ ('для деякого або існує'). Нехай $F(x)$ — функція, множиною значень якої є висловлювання. Розглянемо формули $\forall x \in A(F(x))$ і $\exists x \in A(F(x))$. Ці формули читаються відповідно так: 'для довільного x, що належить множині A має місце $F(x)$', 'для деякого елемента x, що належить множині A має місце $F(x)$'. У вигляді аксіоми сформулюємо принцип переносу.

Принцип переносу. Нехай на множині $A \subset R$ визначена функція, яка має множиною значень висловлювання. Тоді формула $\forall x \in A(F(x))$ $(\exists x \in A(F(x)))$ істинна тоді і тільки тоді, коли істинна формула $\forall x \in A^*\left(F^*(x)\right)$ $\left(\exists x \in A^*\left(F^*(x)\right)\right)$.

У роботі подана методика вивчення учнями множини гіпердійсних чисел, вказано на неможливість побудови конкретного нетривіального ультрафільтра, з чого випливає неоднозначність визначення множини гіпердійсних чисел. Усе це розширює в учнів поняття про число і дозволяє використовувати нестандартні методи під час викладання математичного аналізу в школі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. В.А.Успенский. Что такое нестандартный анализ? – М: Наука, 1987. – 128 с.
2. Robinson A. Non – Standard analysis //Proc. Konikl. ned akad. wet. A - 1961. – V. 64 №4. – P. 432 – 440. – Reprint //Indag. Math. – 1961. – V. 23. – P. 432 – 440.
3. Девис М. Прикладной нестандартный анализ – М: Мир, 1980. – 240 с.

Матеріал надійшов до редакції

Таргонский Л.Ф., Новицкая Т.Л. О нестандартном изложении элементов математического анализа в средней школе.

В связи с проблемой изложения элементов математического анализа в средней школе в статье рассмотренна методика построения множества гипердействительных чисел и методика изучения основных свойств этого множества.

Targonsky L.P., Novitska T.L. On the Off-Gauge Presentation of Mathematical Analysis Members in High School

The paper seek to provide the technique of construction of hyper real-valued numbers set and the technique of studying its basic properties in connection with the problem of presentation of mathematical analysis members in high school.