

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Франовський Анатолій Цезарович

викладач

Коляда Єлизавета Миколаївна

Студентка

Житомирський державний університет імені І. Я. Франка

м. Житомир, Україна

Вступ. / Introductions.

З чого ж починається навчання розв'язування тригонометричних нерівностей в школі? Звичайно, з самих тригонометричних функцій. Спочатку вводяться самі відношення $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$. Показується це на конкретних прикладах прямокутних трикутників. Наступний крок-це вводяться поняття тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$. Далі розглядаються основні властивості цих функцій, області визначення і множина значень, проміжки знакопостійності, а головне графіки цих функцій. На кінець останній крок цього “великого шляху”- це розв'язок тригонометричних рівнянь. І тільки після цього, добре засвоївши всі теми, учні підходять до нашої теми, а саме розв'язування тригонометричних нерівностей. Звичайно починається розв'язок таких нерівностей з самих простих: $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x < a$. Найпростіші тригонометричні нерівності можна розв'язувати за допомогою графіків тригонометричних функцій або користуючись одиничним колом. Є ще самий простий – аналітичний спосіб розв'язування нерівностей, який не вивчається в шкільному курсі математики. При розв'язуванні найбільш складних нерівностей застосовується метод інтервалів. Ці нерівності не вивчаються в шкільному курсі математики, але їх можна використовувати при викладанні математики на факультативах чи з учнями які цікавляться математикою.

Мета роботи. / Aim.

Визначити основні методи розв'язування тригонометричних нерівностей та проаналізувати їх ефективність для учнів.

Матеріали та методи./Materials and methods.

У роботі використано аналіз літературних джерел, порівняння методів та розв'язання конкретних задач різної складності.

Результати та обговорення./Results and discussion.

Проаналізовано три методи розв'язування тригонометричних нерівностей, таких як: графічний, за допомогою одиничного кола та аналітичний. Кожен з них має свої переваги та недоліки, які важливо врахувати при виборі способу розв'язку.

Графічний метод має такі переваги як: наглядність та можливість оцінити поведінку функції, використання для наближених розв'язків; та недоліки: неточність при побудові, потреба в додаткових інструментах.

Метод тригонометричного кола, має перевагу в геометричній наочності та зручність для основних функцій $\sin x$ та $\cos x$. Недолік: важко застосовувати для складних нерівностей.

Переваги в аналітично методі: отримання точних розв'язків, можливість застосування алгебраїчних методів, зручний для складних виразів. Недолік в тому, що може бути складний для великих виразів.

Вибір методу залежить від конкретної задачі. Для простих нерівностей підходить метод тригонометричного кола. Якщо потрібний точний розв'язок, краще застосовувати аналітичний метод. Графічний – ефективний при аналізі поведінки функції та наближених розрахунків.

Розв'язати нерівність $\sin(x) < \sqrt{2}/2$.

I. спосіб: Графічний.

Розв'язання: Спочатку перевіряємо праву частину нерівності на входження в ОДЗ синуса. Для косинуса таку перевірку теж робимо для тангенса і котангенса перевірки не робимо, так як вони приймають необмежені числові значення.

Оскільки умова виконується $|\sqrt{2}/2| \leq 1$, то розв'язок нерівності для синуса існує. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \sqrt{2}/2$ (Рис 1.) та виділимо проміжки, на яких графік функції $y = \sin x$ розташований

нижче від графіка прямої $y=\sqrt{2}/2$. Нижче, оскільки заданий знак нерівності строго менше. Якщо нерівність нестрога, то точки перетину включаємо в розв'язок і дістаємо проміжки.

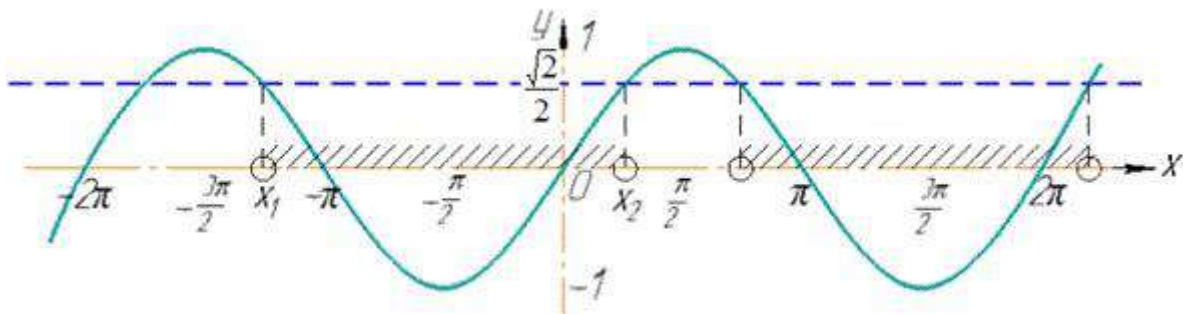


Рис. 1. Функція $y=\sin x$ та $y=\sqrt{2}/2$

Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) - перетину графіків зазначених функцій з лівого проміжку:

$$x_1 = -\pi - \arcsin \sqrt{2}/2 = -\pi - \pi/4 = -5/4 \pi; x_2 = \arcsin \sqrt{2}/2 = \pi/4$$

Запишемо відповідь, врахувавши період функції $y=\sin(x)$.

Отже, розв'язком нерівності є множина значень:

$-5/4 \pi + 2\pi n < x < \pi/4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ або з правого проміжку: $3/4 \pi + 2\pi n < x < 9/4 \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ Відповідь $3/4 \pi + 2\pi n < x < 9/4 \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

II. спосіб: За допомогою одиничного кола.

Розв'язання:

Побудуємо одиничне коло (Рис 2.), пряму $y=\sqrt{2}/2$ і позначимо точки P_{x_1} і P_{x_2} перетину одиничного кола й зазначеної прямої та виділимо множину точок, ординати яких менші $\sqrt{2}/2$.

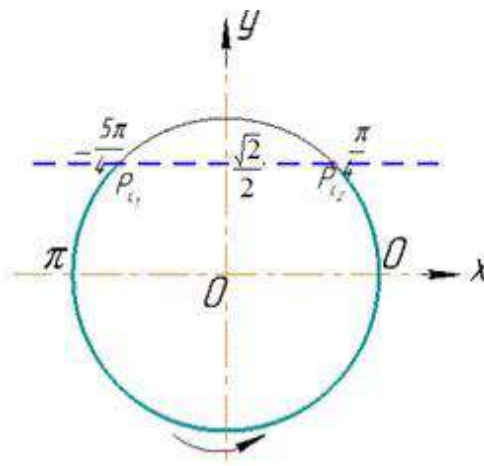


Рис. 2. Одиничне коло

Розв'язком даної нерівності будуть всі точки кола які знаходяться нижче від прямої $y=\sqrt{2}/2$ (на колі виділено зеленим кольором) x_1 і x_2 , здійснюючи обхід дуги проти годинникової стрілки: $x_1 < x_2$, $x_1 = -5/4\pi$ і $x_2 = \pi/4$

2π є періодом для синуса $y=\sin(x)$, тому при додаванні або відніманні на це число множина розв'язків нерівності не зміниться!

$$-5/4\pi + 2\pi n < x < \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Відповідь $-5/4\pi + 2\pi n < x < \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

III. спосіб: Аналітичний.

Розв'язання:

Записуємо рівняння $\sin x = \sqrt{2}/2$ і його розв'язок $x = (-1)^n \arcsin \sqrt{2}/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Надамо n значення $0; 1; 2$ і знаходимо три корені відповідного рівняння: $x_0 = \arcsin \sqrt{2}/2$; $x_1 = -\arcsin \sqrt{2}/2 + \pi$; $x_2 = \arcsin \sqrt{2}/2 + 2\pi$. Значення x_0 , x_1 і x_2 являються абсцисами трьох точок пертину графіків $y = \sin x$ і $y = \sqrt{2}/2$. Вочевидь, що завжди на інтервалі $(x_1; x_2)$ - нерівність $\sin x < \sqrt{2}/2$. Додамо до кінців цих проміжків нерівності число, кратне періоду синуса $x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, тобто $3/4\pi + 2\pi n < x < 9/4\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $3/4\pi + 2\pi n < x < 9/4\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Висновки./Conclusions.

У ході дослідження тригонометричних нерівностей було розглянуто основні методи їх розв'язування, зокрема графічний, аналітичний та метод використання одиничного кола.

Графічний метод є одним із найнаочніших способів розв'язання тригонометричних нерівностей. Він дозволяє швидко знайти проміжки, на яких функція приймає потрібні значення. Однак цей метод має певні недоліки, оскільки потребує точного вміння будувати графіки функцій і часто буває непридатним для складних нерівностей.

Метод одиничного кола дозволяє розглядати тригонометричні нерівності через геометричну інтерпретацію, що значно полегшує розуміння учнями особливостей розв'язків. Його застосування ефективне при знаходженні

розв'язків найпростіших тригонометричних нерівностей, особливо тих, які пов'язані із синусом та косинусом.

Аналітичний метод є найбільш універсальним способом розв'язання тригонометричних нерівностей. Він базується на перетворенні нерівностей до простих рівнянь, застосуванні тригонометричних тотожностей та аналізі періодичності функцій. Цей метод дозволяє отримати точний аналітичний розв'язок, проте вимагає глибокого розуміння тригонометричних властивостей і потребує обчислювальних навичок.