MESURE DE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE DANS L'ALGÈBRE DES NOMBRES BIHYPERBOLIQUES

Kolomiets Tamila,
Docteur en mathématiques et statistiques,
professeur associé au département d'analyse mathématique,
d'analyse commerciale et de statistiques,
université d'État de Jytomyr Ivan Franko

Introduction. L'étude des systèmes hypercomplexes et de leurs applications possibles constitue un domaine important des mathématiques modernes [1-4], en particulier pour la construction de la théorie des mesures hypercomplexes, de la théorie des probabilités et des statistiques mathématiques [5].

L'article [6] est consacré à l'étude d'une mesure à valeurs complexes et à ses applications. Dans [7], les auteurs ont étudié les propriétés d'une mesure de probabilité à valeurs dans l'algèbre des nombres hyperboliques (dual) [8-9]. Ils y ont notamment introduit le concept de probabilité conditionnelle hyperbolique. Des analogues des concepts de base de la théorie des probabilités pour l'algèbre des nombres hyperboliques ont été étudiés dans [10, 11]. L'article [12] résume certains des résultats de [7] et [10] pour le cas où la mesure de probabilité prend des valeurs dans l'algèbre des nombres bihyperboliques, également appelée quaternions hyperboliques [13, 14]. En particulier, il est démontré dans cet article que la probabilité bihyperbolique satisfait les propriétés de base de la probabilité classique à valeurs réelles. Les concepts de relation d'ordre partiel dans l'algèbre des nombres bihyperboliques, de module à valeur bihyperbolique, de norme à valeur bihyperbolique, ainsi que de séquence convergente de nombres bihyperboliques sont définis et toutes les propriétés nécessaires sont prouvées.

Algèbre des nombres bihyperboliques

Définition 1 [14]. *L'algèbre des nombres bihyperboliques est une algèbre commutative à quatre dimensions de la forme:*

$$\mathbb{W}_4 = \mathbb{W}_4(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 e + a_2 f + a_3 g \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

avec une base $\{1, e, f, g\}$ *et une table de multiplication des éléments de la base:*

$$e^2 = f^2 = g^2 = 1, \qquad ef = fe = g, \qquad eg = ge = f, \qquad fg = gf = e.$$

L'algèbre $\mathbb{W}_4$ peut être représentée comme

$$\mathbb{W}_2 = \{w_0 + w_1 f \mid w_0, w_1 \in \mathbb{W}\}$$

avec une base $\{1, f\}$, où $f^2 = 1$, et $\mathbb{W}$ est une algèbre commutative bidimensionnelle de nombres hyperboliques de la forme

$$\mathbb{W} = \{b_0 + b_1 e \mid b_0, b_1 \in \mathbb{R}\}$$

avec une base $\{1, e\}$, où $e^2 = 1$. De plus, l'unité imaginaire $f \in \mathbb{W}_2$ commute avec l'unité imaginaire $e \in \mathbb{W}$.

L'algèbre $\mathbb{W}_4$ possède quatre idempotents [14]

$$i_1 := \frac{1+e+f+g}{4}, \quad i_2 := \frac{1-e-f+g}{4},$$
$$i_3 := \frac{1+e-f-g}{4}, \quad i_4 := \frac{1-e+f-g}{4}, \tag{1}$$

pour lesquels il est facile de vérifier la relation

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 1,\ i_k^2 = i_k,\ i_k i_l = 0 \text{ si } k \neq l,\ k,l = 1,2,3,4.$$

Nous désignons par

$$\mathbb{W}_4(i_k) := i_k \mathbb{W}_4$$

les idéaux principaux générés par les idempotents $i_k, k = 1,2,3,4$ (1).

Lemma 1 [14]. *Pour $k \neq l,\ k,l = 1,2,3,4$, l'égalité*

$$\mathbb{W}_4(i_k) \cap \mathbb{W}_4(i_l) = 0.$$

L'algèbre $\mathbb{W}_4$ peut être représentée comme une décomposition idempotente (décomposition de Pierce) [14]

$$\mathbb{W}_4 = \mathbb{W}_4(i_1) \oplus \mathbb{W}_4(i_2) \oplus \mathbb{W}_4(i_3) \oplus \mathbb{W}_4(i_4), \tag{2}$$

où $\oplus$ est une opération de somme directe.

Lemma 2 [14]. *Tout nombre bihyperbolique*

$$\alpha = a_0 + a_1 e + a_2 f + a_3 g,$$

où $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ peut s'écrire

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4, \tag{3}$$

où i_k sont les idempotents de la forme (1), $r_k \in \mathbb{R}, k = 1,2,3,4$.

Lemma 3 [14]. *Les idéaux de $\mathbb{W}_4(i_k)$ peuvent être représentés comme*

$$\mathbb{W}_4(i_k) = i_k \mathbb{R}, \qquad k = 1,2,3,4.$$

Nous dénotons le domaine de tous les diviseurs de zéro de l'algèbre $\mathbb{W}_{\mathbf{4}}$ par $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_{4},\mathbf{0}}$.

Il est facile de voir que si le côté droit de la somme (2) est dépourvu d'au moins un terme, alors les éléments de cette somme appartiennent au domaine des diviseurs de zéro $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$. L'inverse est également vrai: si le nombre bihyperbolique

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4$$

est un diviseur de zéro, c'est-à-dire $\alpha \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, alors il existe un indice $k \in \{1,2,3,4\}$ tel que

$$r_k = 0, k = 1,2,3,4.$$

Une mesure de probabilité bihyperbolique

Définition 2 [12]. *Une relation d'ordre partiel dans l'algèbre $\mathbb{W}_4$ est une relation $\preccurlyeq_{\mathbb{W}_4}$ (ci-après $\preccurlyeq$), pour laquelle la condition*

$$\alpha \preccurlyeq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{W}_4^+, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{W}_4,$$

où $\mathbb{W}_4^+$ est l'ensemble des nombres bihyperboliques non négatifs de la forme

$$\mathbb{W}_4^+ := \{x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 \mid x_k \geq 0, k = 1,2,3,4\}.$$

Si $\alpha \preccurlyeq \beta$ ($\beta \succcurlyeq \alpha$) mais $\alpha \neq \beta$, on écrit $\alpha \prec \beta$ ($\beta \succ \alpha$). Si $\alpha \not\preccurlyeq \beta$ et $\beta \not\preccurlyeq \alpha$, on dit que α et β sont incommensurables.

Les propriétés de base de la relation d'ordre partiel sont prouvées dans [12].

Soit A un événement aléatoire, (Ω, Σ) un espace de dimension (Ω est l'espace des événements élémentaires ω), Σ l'algèbre σ des événements (l'ensemble des sous-ensembles de Ω appelés événements aléatoires), et $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$ le domaine des diviseurs nuls de l'algèbre $\mathbb{W}_4$.

Définition 3 [12]. Une mesure de probabilité bihyperbolique (probabilité $\mathbb{W}_4$) est une fonction bihyperbolique définie sur la σ-algèbre d'événements Σ

$$P_{\mathbb{W}_4} = P_{\mathbb{W}_4}(\cdot) : \Sigma \to \mathbb{W}_4,$$

pour laquelle les conditions sont remplies:

1) $P_{\mathbb{W}_4}(A) \succcurlyeq 0 \quad \forall\, A \in \Sigma;$

2) $P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \zeta$, *où* ζ *prend l'une des cinq valeurs possibles:*

$$\zeta = \{1, i_1, i_2, i_3, i_4\};$$

3) Pour toute séquence $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ *d'événements aléatoires incompatibles entre eux, l'égalité est respectée*

$$P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_n).$$

Nous appelons le triplet $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$ *l'espace de probabilité* $\mathbb{W}_4$.

En tenant compte de l'écriture du nombre bihyperbolique (3), la mesure de probabilité bihyperbolique $P_{\mathbb{W}_4}$ peut être écrite comme suit

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}_4}(A) &= p_1(A) + p_2(A)e + p_3(A)f + p_4(A)g = \\ &= P_1(A)i_1 + P_2(A)i_2 + P_3(A)i_3 + P_4(A)i_4, \end{aligned} \tag{4}$$

où

$$\begin{aligned} P_1(A) &= p_1(A) + p_2(A) + p_3(A) + p_4(A), \\ P_2(A) &= p_1(A) - p_2(A) - p_3(A) + p_4(A), \\ P_3(A) &= p_1(A) + p_2(A) - p_3(A) - p_4(A), \\ P_4(A) &= p_1(A) - p_2(A) + p_3(A) - p_4(A) \end{aligned}$$

sont des mesures probabilistes réellement significatives.

Il découle de la condition 1 de la définition 3 que si $P_{\mathbb{W}_4}(A) \succcurlyeq 0$, alors

$$P_k(A) \geq 0 \quad \forall\, A \in \Sigma, \quad k = 1,2,3,4.$$

D'après la condition 2) de la définition 3, nous avons

$$P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \zeta = P_1(\Omega)i_1 + P_2(\Omega)i_2 + P_3(\Omega)i_3 + P_4(\Omega)i_4,$$

et:

a) si $\boldsymbol{\zeta = 1}$, alors

$$\boldsymbol{P_1(\Omega) = P_2(\Omega) = P_3(\Omega) = P_4(\Omega) = 1};$$

b) si $\boldsymbol{\zeta = i_k}$, alors

$$\boldsymbol{P_k(\Omega) = 1, \quad P_l(\Omega) = 0, \quad l \neq k, \quad k, l = 1,2,3,4}.$$

L'égalité découle directement de la condition 3) de la définition 3

$$P_k\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_k(A_n),$$

où $P_k,\ k = 1,2,3,4$ − mesures de probabilité réellement significatives.

Les propriétés de base de la mesure de probabilité bihyperbolique $P_{\mathbb{W}_4}$ ont été prouvées dans [12].

Une mesure de probabilité conditionnelle bihyperbolique

Soit $\left(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4}\right)$ un espace de probabilité $\mathbb{W}_4$, A, B deux événements aléatoires.

Définition 4. *La probabilité conditionnelle bihyperbolique de l'événement A à condition que l'événement B se soit produit, est la probabilité* $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)$, *qui satisfait les conditions:*

(I) $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) \coloneqq \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)}}$, *si* $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) \succ 0}$ *et* $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$;

(II) $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) \coloneqq P_{\mathbb{W}_4}(A)}$, *si* $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = 0}$;

(III) $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) \coloneqq \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_1} i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4}$,

si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_1 i_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},\ \mu_1 > 0}$;

(IV) $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) \coloneqq P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_2} i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4}$,

si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_2 i_2 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},\ \mu_2 > 0}$;

(V) $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) \coloneqq P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_3} i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4}$,

si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_3 i_3 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},\ \mu_3 > 0}$;

(VI) $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) \coloneqq P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_4} i_4}$,

si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_4 i_4 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0},\ \mu_4 > 0}$.

La condition (II) de la définition 4 est évidente.

Nous montrerons que les conditions (III) à (VI) sont entièrement compatibles avec la condition (I).

En effet, étant donné la représentation idempotente $\mathbb{W}_4$ de la mesure de probabilité (4), la condition (I) peut être écrite par

$$\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = \frac{P_1(A\cap B)}{P_1(B)} i_1 + \frac{P_2(A\cap B)}{P_2(B)} i_2 + \frac{P_3(A\cap B)}{P_3(B)} i_3 + \frac{P_4(A\cap B)}{P_4(B)} i_4 =}$$
$$\boldsymbol{= P_1(A|B) i_1 + P_2(A|B) i_2 + P_3(A|B) i_3 + P_4(A|B) i_4,}$$

tandis que la condition (III) se présente sous la forme:

$$P_{\mathbb{W}_4}(A|B) \coloneqq \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A\cap B)}{\mu_1} i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4 =$$
$$= \frac{P_1(A\cap B) i_1 + P_2(A\cap B) i_2 + P_3(A\cap B) i_3 + P_4(A\cap B) i_4}{P_1(B)} i_1 +$$
$$+(P_1(A) i_1 + P_2(A) i_2 + P_3(A) i_3 + P_4(A) i_4) i_2 +$$
$$+(P_1(A) i_1 + P_2(A) i_2 + P_3(A) i_3 + P_4(A) i_4) i_3 +$$
$$+(P_1(A) i_1 + P_2(A) i_2 + P_3(A) i_3 + P_4(A) i_4) i_4 =$$
$$= \frac{P_1(A\cap B)}{P_1(B)} i_1 + P_2(A) i_2 + P_3(A) i_3 + P_4(A) i_4 =$$
$$= P_1(A|B) i_1 + P_2(A|B) i_2 + P_3(A|B) i_3 + P_4(A|B) i_4.$$

De même, les conditions (IV) à (VI) peuvent être vérifiées.

Ainsi, la formule (I) et les conditions équivalentes (III) à (VI) sont satisfaites.

Montrons que pour un événement B fixé, lorsque $P_{\mathbb{W}_4}(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle bihyperbolique $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)$ est définie par tous les axiomes de la probabilité $\mathbb{W}_4$ de telle sorte qu'elle définit une mesure de probabilité $\mathbb{W}_4$ sur l'espace dimensionnel (B, Σ_B), où Σ_B est une σ-algèbre d'ensembles de la forme $A \cap B$ pour $A \in \sigma$. Pour cela, nous allons vérifier les trois conditions de la définition 3, ainsi que les cas particuliers où la probabilité $\mathbb{W}_4$ est un diviseur du zéro de l'algèbre $\mathbb{W}_4$.

1) Il est évident que $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) \succcurlyeq 0}$.

2) Il est facile de vérifier que $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B|B) = \zeta}$. En effet:

(a) si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$, alors

$$\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B|B) = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = 1};$$

(b) si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$ et $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_1 i_1}$, alors

$$\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B|B) = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B \cap B)}{\mu_1} i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_4 = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{\mu_1} i_1} =$$

$$= \boldsymbol{i_1};$$

(c) si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$ et $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_2 i_2}$, alors

$$P_{\mathbb{W}_4}(B|B) = P_{\mathbb{W}_4}(B) i_1 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B \cap B)}{\mu_2} i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_4 = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{\mu_2} i_2 =$$

$$= i_2;$$

(d) si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$ et $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_3 i_3}$, alors

$$P_{\mathbb{W}_4}(B|B) = P_{\mathbb{W}_4}(B) i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_2 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B \cap B)}{\mu_3} i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_4 = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{\mu_3} i_3 =$$

$$= i_3;$$

(e) si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$ et $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_4 i_4}$, alors

$$P_{\mathbb{W}_4}(B|B) = P_{\mathbb{W}_4}(B) i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(B) i_3 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B \cap B)}{\mu_4} i_4 = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(B)}{\mu_4} i_4 =$$

$$= i_4.$$

3) Pour toute séquence d'événements aléatoires incompatibles par paire de la forme

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \;\; A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad i \neq j,$$

nous obtenons des cas différents.

A. Si $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$, alors

$$\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)}} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_k \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A_k \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_k|B)}.$$

B. Soit $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_1 i_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$. Étant donné que.

$$\boldsymbol{A_k \cap B \subset B}, \qquad \boldsymbol{\forall\, k}, \qquad \boldsymbol{A \cap B \subset B},$$

et dénoté par $P_{\mathbb{W}_4}(A_k \cap B) = \nu_k i_1$, on obtient

$$\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B) = \nu i_1 = P_1(A \cap B) i_1 = P_1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap B\right) i_1 = \sum_{k=1}^{\infty} P_1(A_k \cap B) i_1 = }$$
$$\boldsymbol{= \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k i_1,}$$

où

$$\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{\mu_1} i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4 =}$$
$$\boldsymbol{= \frac{\nu}{\mu_1} i_1 + P_2(A) i_2 + P_3(A) i_3 + P_4(A) i_4 =}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{\mu_1}\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k i_1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_2(A_k) i_2 + \sum_{k=1}^{\infty} P_3(A_k) i_3 + \sum_{k=1}^{\infty} P_4(A_k) i_4 =}$$
$$\boldsymbol{= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\nu_k}{\mu_1} i_1 + P_2(A_k) i_2 + P_3(A_k) i_3 + P_4(A_k) i_4\right) =}$$
$$\boldsymbol{= \sum_{k=1}^{\infty}(P_1(A_k|B) i_1 + P_2(A_k) i_2 + P_3(A_k) i_3 + P_4(A_k) i_4) =}$$
$$\boldsymbol{= \sum_{k=1}^{\infty} P_{\mathbb{W}_4}(A_k|B).}$$

C. Une preuve similaire peut être faite pour les cas où $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_2 i_2 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$, $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_3 i_3 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$, $\boldsymbol{P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_4 i_4 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}}$.

Par conséquent, la probabilité conditionnelle bihyperbolique $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)$ satisfait à tous les axiomes de la probabilité $\mathbb{W}_4$ et l'espace dimensionnel $\left(B, \Sigma_B, P_{\mathbb{W}_4}(A|B)\right)$ est un nouvel espace de probabilité $\mathbb{W}_4$.

Conclusions. Les résultats obtenus peuvent être utilisés pour des études plus approfondies des sections pertinentes de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique.

Références

1. *Kantor I. L., Solodovnikov A. S.* Hypercomplex numbers. An elementary introduction to algebras. Translated by A. Shenitzer. New York etc.: Springer-Verlag, 1989. 169 p.
2. *Keller J.* Quaternionic, complex, duplex and real Clifford algebras. Advances in Applied Clifford Algebras. 1994. Vol. 4, No. 1. P. 1–12.
3. *Olariu S.* Complex numbers in *N* dimensions. North-Holland Mathematics Studies, 190. Amsterdam: North-Holland, 2002. 269 p.

4. *Pogorui A., Kolomiiets T.* Some algebraic properties of complex Segre quaternions. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. 2019. Т. 33. С. 158–169.

5. *Погоруй А. О., Коломієць Т. Ю.* Теорія міри. Теорія ймовірностей: навч. посіб. Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2023. 134 с.

6. *Rudin W.* Real and complex analysis. 3rd ed.: New York, NY: McGraw-Hill, 1987. 416 p.

7. *Alpay D., Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M.* Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers. Advances in Applied Clifford Algebras. 2017. Vol. 27, No. 2. P. 913–*929.*

8. *Sobczyk G.* New foundations in mathematics. The geometric concept of number: New York, NY: Birkhäuser, 2013. 370 p.

9. *Shapiro M., Struppa D. C., Vajiac A., Vajiac M. B.* Hyperbolic numbers and their functions. Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Matematica. 2012. Vol. XIX, No. 1. P. 265–283.

10. *Kumar R., Sharma K.* Hyperbolic valued random variables and conditional expectation. arXiv:1611.06850v2 [math.PR] 27 Mar 2017.

11. *Kumar R., Sharma K.* Hyperbolic valued measures and Fundamental law of probability. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017. Vol. 13, No. 10. P. 7163–7177.

12. *Коломієць Т. Ю.* Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. 2020. Т. 34. С. 36–49.

13. *Carmody K.* Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions – further results. Applied Mathematics and Computation. 1997. Vol. 84, No. 1. P. 27–47.

14. *Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M., Rodríguez-Said R. D.* On the set of zeros of bihyperbolic polynomials. Complex Variables and Elliptic Equations. 2008. Vol. 53, No. 7. P. 685–690.