

LA MULTIPLICATION DES PROBABILITÉS DANS L'ALGÈBRE DES NOMBRES BIHYPERBOLIQUES

Kolomiets Tamila,

Docteur en mathématiques et statistiques,
professeur associé au département d'analyse mathématique,
d'analyse commerciale et de statistiques,
université d'État de Jytomyr Ivan Franko

Introduction. L'étude des systèmes hypercomplexes [1–5] et de leurs applications possibles, en particulier pour la construction de la théorie des probabilités hypercomplexes [6], est un domaine d'actualité des mathématiques modernes. Des analogues des concepts de base de la théorie des probabilités pour l'algèbre des nombres hyperboliques ont été étudiés dans [7, 8]. L'article [9] résume certains des résultats des articles [7] et [8] pour l'algèbre des nombres bihyperboliques, en particulier, il introduit la définition de la probabilité bihyperbolique et prouve ses propriétés de base.

Résultats préliminaires.

Définition 1 [10]. *L'algèbre des nombres bihyperboliques est une algèbre commutative à quatre dimensions de la forme:*

$$\mathbb{W}_4 = \mathbb{W}_4(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1e + a_2f + a_3g \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

avec une base $\{1, e, f, g\}$ et une table de multiplication des éléments de la base:

$$e^2 = f^2 = g^2 = 1, \quad ef = fe = g, \quad eg = ge = f, \quad fg = gf = e.$$

L'algèbre $\mathbb{W}_4$ possède quatre idempotents [10]

$$\begin{aligned} i_1 &:= \frac{1 + e + f + g}{4}, & i_2 &:= \frac{1 - e - f + g}{4}, \\ i_3 &:= \frac{1 + e - f - g}{4}, & i_4 &:= \frac{1 - e + f - g}{4}, \end{aligned} \tag{1}$$

pour lesquels il est facile de vérifier la relation

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 1, \quad i_k^2 = i_k, \quad i_k i_l = 0 \text{ si } k \neq l, \quad k, l = 1, 2, 3, 4.$$

Nous désignons par

$$\mathbb{W}_4(i_k) := i_k \mathbb{W}_4$$

les idéaux principaux générés par les idempotents $i_k, k = 1, 2, 3, 4$ (1).

Lemma 1 [10]. *Pour $k \neq l, k, l = 1, 2, 3, 4$, l'égalité*

$$\mathbb{W}_4(i_k) \cap \mathbb{W}_4(i_l) = 0.$$

L'algèbre $\mathbb{W}_4$ peut être représentée comme une décomposition idempotente (décomposition de Pierce) [10]

$$\mathbb{W}_4 = \mathbb{W}_4(i_1) \oplus \mathbb{W}_4(i_2) \oplus \mathbb{W}_4(i_3) \oplus \mathbb{W}_4(i_4), \tag{2}$$

où $\oplus$ est une opération de somme directe.

Lemma 2 [10]. *Tout nombre bihyperbolique*

$$\alpha = a_0 + a_1e + a_2f + a_3g,$$

où $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ peut s'écrire

$$\alpha = r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 + r_4 i_4, \tag{3}$$

où i_k sont les idempotents de la forme (1), $r_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3, 4$.

Lemma 3 [10]. Les idéaux de $\mathbb{W}_4(i_k)$ peuvent être représentés comme

$$\mathbb{W}_4(i_k) = i_k \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Nous dénotons le domaine de tous les diviseurs de zéro de l'algèbre $\mathbb{W}_4$ par $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4, 0}$.

Définition 2 [9]. Une relation d'ordre partiel dans l'algèbre $\mathbb{W}_4$ est une relation $\preceq_{\mathbb{W}_4}$ (ci-après $\preceq$), pour laquelle la condition

$$\alpha \preceq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{W}_4^+, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{W}_4,$$

où $\mathbb{W}_4^+$ est l'ensemble des nombres bihyperboliques non négatifs de la forme

$$\mathbb{W}_4^+ := \{x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 \mid x_k \geq 0, k = 1, 2, 3, 4\}.$$

Si $\alpha \preceq \beta$ ($\beta \succeq \alpha$) mais $\alpha \neq \beta$, on écrit $\alpha < \beta$ ($\beta > \alpha$). Si $\alpha \not\preceq \beta$ et $\beta \not\preceq \alpha$, on dit que α et β sont incommensurables.

Les propriétés de base de la relation d'ordre partiel sont prouvées dans [9].

Soit A un événement aléatoire, (Ω, Σ) un espace de dimension (Ω est l'espace des événements élémentaires ω), Σ l'algèbre σ des événements (l'ensemble des sous-ensembles de Ω appelés événements aléatoires), et $\mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4, 0}$ le domaine des diviseurs nuls de l'algèbre $\mathbb{W}_4$.

Définition 3 [9]. Une mesure de probabilité bihyperbolique (probabilité $\mathbb{W}_4$) est une fonction bihyperbolique définie sur la σ -algèbre d'événements Σ

$$P_{\mathbb{W}_4} = P_{\mathbb{W}_4}(\cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{W}_4,$$

pour laquelle les conditions sont remplies:

$$1) \quad P_{\mathbb{W}_4}(A) \succeq 0 \quad \forall A \in \Sigma;$$

$$2) \quad P_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \zeta, \text{ où } \zeta \text{ prend l'une des cinq valeurs possibles:}$$

$$\zeta = \{1, i_1, i_2, i_3, i_4\};$$

3) Pour toute séquence $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ d'événements aléatoires incompatibles entre eux, l'égalité est respectée

$$P_{\mathbb{W}_4}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty P_{\mathbb{W}_4}(A_n).$$

Nous appelons le triplet $(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4})$ l'espace de probabilité $\mathbb{W}_4$.

En tenant compte de l'écriture du nombre bihyperbolique (3), la mesure de probabilité bihyperbolique $P_{\mathbb{W}_4}$ peut être écrite comme suit

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}_4}(A) &= p_1(A) + p_2(A)e + p_3(A)f + p_4(A)g = \\ &= P_1(A)i_1 + P_2(A)i_2 + P_3(A)i_3 + P_4(A)i_4, \end{aligned} \tag{4}$$

où

$$\begin{aligned} P_1(A) &= p_1(A) + p_2(A) + p_3(A) + p_4(A), \\ P_2(A) &= p_1(A) - p_2(A) - p_3(A) + p_4(A), \\ P_3(A) &= p_1(A) + p_2(A) - p_3(A) - p_4(A), \\ P_4(A) &= p_1(A) - p_2(A) + p_3(A) - p_4(A) \end{aligned}$$

sont des mesures probabilistes réellement significatives.

Les propriétés de base de la mesure de probabilité bihyperbolique $P_{\mathbb{W}_4}$ ont été prouvées dans [9].

Soit $(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4})$ un espace de probabilité $\mathbb{W}_4$, A, B deux événements aléatoires.

Définition 4 [11]. *La probabilité conditionnelle bihyperbolique de l'événement A à condition que l'événement B se soit produit, est la probabilité $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)$, qui satisfait les conditions:*

- (I) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)}$, si $P_{\mathbb{W}_4}(B) > 0$ et $P_{\mathbb{W}_4}(B) \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$;
- (II) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := P_{\mathbb{W}_4}(A)$, si $P_{\mathbb{W}_4}(B) = 0$;
- (III) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{\mu_1} i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4$,
si $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_1 i_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $\mu_1 > 0$;
- (IV) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{\mu_2} i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4$,
si $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_2 i_2 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $\mu_2 > 0$;
- (V) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{\mu_3} i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4$,
si $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_3 i_3 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $\mu_3 > 0$;
- (VI) $P_{\mathbb{W}_4}(A|B) := P_{\mathbb{W}_4}(A) i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{\mu_4} i_4$,
si $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_4 i_4 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $\mu_4 > 0$.

Dans l'article [11], nous prouvons que pour un événement B fixé, lorsque $P_{\mathbb{W}_4}(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle bihyperbolique $P_{\mathbb{W}_4}(A|B)$ est définie par tous les axiomes de la probabilité $\mathbb{W}_4$ de telle sorte qu'elle définit une mesure de probabilité $\mathbb{W}_4$ sur l'espace dimensionnel (B, Σ_B) , où Σ_B est une σ -algèbre d'ensembles de la forme $A \cap B$ pour $A \in \sigma$. En particulier, les trois conditions de la définition 3, ainsi que les cas particuliers où la probabilité $\mathbb{W}_4$ est un diviseur du zéro de l'algèbre $\mathbb{W}_4$.

La formule de multiplication des probabilités en algèbre $\mathbb{W}_4$.

Théorème 1 (théorème de multiplication des probabilités de deux événements dépendants). *Soit $(\Omega, \Sigma, P_{\mathbb{W}_4})$ un espace de probabilités $\mathbb{W}_4$, A, B deux événements aléatoires dépendants. Alors*

$$P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B) = P_{\mathbb{W}_4}(B) P_{\mathbb{W}_4}(A|B). \quad (3)$$

La preuve. Examinons les différents cas qui se présentent.

A. Si $P_{\mathbb{W}_4}(B) > 0$ et $P_{\mathbb{W}_4}(B) \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, on a

$$P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{P_{\mathbb{W}_4}(B)},$$

comme le montre (3).

B. Soit $P_{\mathbb{W}_4}(B) = 0$. Puisque $A \cap B \subset B$, alors $P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B) = 0$, ce qui satisfait (3).

C. Si $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_1 i_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, où $\mu_1 > 0$, alors

$$P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = \frac{P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)}{\mu_1} i_1 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_2 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_3 + P_{\mathbb{W}_4}(A) i_4,$$

d'où

$$P_{\mathbb{W}_4}(B)P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = \mu_1 P_{\mathbb{W}_4}(A|B)i_1 = P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B)i_1. \quad (4)$$

Puisque $A \cap B \subset B$, alors

$$P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B) = P_1(A \cap B)i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4 = P_1(A \cap B)i_1.$$

En tenant compte de (4), on obtient

$$P_{\mathbb{W}_4}(B)P_{\mathbb{W}_4}(A|B) = P_1(A \cap B)i_1 = P_{\mathbb{W}_4}(A \cap B).$$

D. Для випадків, коли $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_2 i_2 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $\mu_2 > 0$, $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_3 i_3 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $\mu_3 > 0$, $P_{\mathbb{W}_4}(B) = \mu_4 i_4 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{W}_4,0}$, $\mu_4 > 0$, доведення аналогічне, як в (C).

Conclusions. Les résultats obtenus peuvent être utilisés pour des études plus approfondies des sections pertinentes de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique.

Liste de références

1. Kantor I. L., Solodovnikov A. S. *Hypercomplex numbers. An elementary introduction to algebras*. Translated by A. Shenitzer. New York etc.: Springer-Verlag, 1989. 169 p.
2. Keller J. Quaternionic, complex, duplex and real Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 1994. Vol. 4, No. 1. P. 1–12.
3. Olariu S. *Complex numbers in N dimensions*. North-Holland Mathematics Studies, 190. Amsterdam: North-Holland, 2002. 269 p.
4. Pogorui A., Kolomiets T. Some algebraic properties of complex Segre quaternions. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2019. Т. 33. С. 158–169.
5. Carmody K. Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions – further results. *Applied Mathematics and Computation*. 1997. Vol. 84, No. 1. P. 27–47.
6. Rudin W. *Real and complex analysis*. 3rd ed.: New York, NY: McGraw-Hill, 1987. 416 p.
7. Alpay D., Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M. Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2017. Vol. 27, No. 2. P. 913–929.
8. Kumar R., Sharma K. Hyperbolic valued random variables and conditional expectation. *arXiv:1611.06850v2 [math.PR]* 27 Mar 2017.
9. Коломієць Т. Ю. Елементи теорії ймовірностей із значеннями у бігіперболічній алгебрі. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*. 2020. Т. 34. С. 36–49.
10. Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M., Rodríguez-Said R. D. On the set of zeros of bihyperbolic polynomials. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2008. Vol. 53, No. 7. P. 685–690.
11. Kolomiets T. Mesure de probabilité conditionnelle dans l'algèbre des nombres bihyperboliques. *Abstracts of XXV International Scientific and Practical Conference «Scientific trends in the development of modern research», June 23-25, 2025*. Lyon, 2025. P. 144-150.