УДК 372.851

І.А. Сверчевська,
асистент
(Житомирський педуніверситет)

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ "ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ"

З метою зацікавити учнів математикою розглянуто узагальнення "золотого перерізу", доведено властивості введеного відношення β-перерізу і запропоновано ряд вправ для самостійної роботи.

Викладання математики повинно викликати інтерес до предмету. Значні можливості для цього дає вивчення математичних закономірностей краси: пропорції, симетрії, перспективи, визначних математичних кривих і геометричних форм. Найважливішою при цьому є пропорція "золотого перерізу" як міра досконалості і краси.

За словами Й. Кеплера, "золотий переріз" – це один із скарбів математики, який можна порівняти із дорогоцінним каменем. Суть "золотого перерізу" в тому, що відрізок АВ поділяється внутрішньою точкою С на такі дві частини, що $AB : AC = AC : CB$. Якщо позначити це відношення $AB : AC = x$, то його рівняння:

$$x^2 = x + 1. \tag{1}$$

Додатній корінь цього рівняння:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618... \tag{2}$$

назвали відношенням "золотого перерізу", а саму формулу – формулою краси. При цьому більша частина даного відрізка $AC = 0{,}618AB$. Багато математиків досліджували властивості "золотого перерізу", його прояви у природі та застосування [1:22].

В 1964 році А. Стахов, розв'язуючи задачу про найкращу систему тягарів, одержав рівняння:

$$x^{p+1} = x^p + 1, \tag{3}$$

яке назвав рівнянням узагальненого "золотого перерізу". Звідси при $p=0$ одержується поділ відрізка навпіл, а при $p = 1$ – класичний "золотий переріз". Підставляючи інші значення p, одержимо серію узагальнених "золотих перерізів". Існують гіпотези, що вони дають нові критерії гармонії природи [2:34].

Розглянемо властивості узагальненого "золотого перерізу" для випадку $p = 2$. Введемо означення: "золотим" β-перерізом називається поділ відрізка AB внутрішньою точкою C на такі дві частини, що $AB^2 : AC^2 = AC : CB$. Якщо позначити відношення $AB : AC = x$, то одержимо рівняння відношення β-перерізу:

$$x^3 = x^2 + 1. \tag{4}$$

З геометричної інтерпретації цього рівняння випливає, що воно має один дійсний додатній корінь. Обчисливши його, одержуємо $\beta = 1{,}4656\ldots$ А більша частина відрізка $AC = 0{,}6823AB$.

Знайдемо формулу, яка виражає відношення β-перерізу в радикалах. Для цього визначимо дійсний корінь рівняння (4). Після підстановки $x = y + \frac{1}{3}$ одержимо рівняння:

$$y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{29}{27} = 0, \tag{5}$$

звідки, за формулами Кардано, маємо:

$$\beta = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{29-3\sqrt{93}}{2}} + 1\right). \tag{6}$$

Тому, що β – корінь рівняння (4), то:

$$\beta^3 = \beta^2 + 1. \tag{7}$$

Виходячи з цього і застосувавши метод математичної індукції, можна одержати важливу властивість β-перерізу:

$$\beta^n = \beta^{n-1} + \beta^{n-3}, \; n \ge 3. \tag{8}$$

Очевидно, що ця рівність виконується для всіх цілих чисел n і всіх коренів рівняння (4).

Введемо в розгляд числову послідовність:

$$0,1,1,1,2,3,4,6,9\ ...,\; u_{n+1} = u_n + u_{n-2},\, n \ge 3. \tag{9}$$

Доведемо, що відношення β-перерізу β пов'язане з числами послідовності (9) рівністю:

$$\beta^n = u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1},\; n \ge 3. \tag{10}$$

Для n=3 маємо $\beta^3 = u_3\beta^2 + u_1\beta + u_2 = 1\cdot\beta^2 + 0\cdot\beta + 1 = \beta^2 + 1.$ Рівність істинна, згідно з (7).

Припустимо істинність формули (10) для натурального числа n і доведемо, що:

$$\beta^{n+1} = u_{n+1}\beta^2 + u_{n-1}\beta + u_n. \tag{11}$$

Тому, що $\beta^{n+1} = \beta^n \cdot \beta$, то, використавши припущення, маємо:

$$\beta^{n+1} = \beta\left(u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1}\right) = u_n\beta^3 + u_{n-2}\beta^2 + u_{n-1}\beta.$$

Застосувавши (7) і (9), одержимо:

$$\beta^{n+1} = u_n\left(\beta^2 + 1\right) + u_{n-2}\beta^2 + u_{n-1}\beta = \left(u_n + u_{n-2}\right)\beta^2 + u_{n-1}\beta + u_n = u_{n+1}\beta^2 + u_{n-1}\beta + u_n.$$ Тобто, (11).

Узагальнимо числову послідовність (9), враховуючи, що $u_{n-2} = u_{n+1} - u_n,$ тоді одержимо послідовність чисел:

$$\ldots 3,0,-2,1,1,-1,0,1,\ u_0 = 0, 0,1,1,1,2,3,4,6,9\ldots, \quad (12)$$

яку можна використати, щоб довести, що рівність (10) виконується для всіх цілих значень n.

Для $n = 0$ маємо: $\beta^0 = u_0\beta^2 + u_{-2}\beta + u_{-1}$. Тому, що як $u_0 = 0,\ u_{-2} = 0,\ u_{-1} = 1,$ одержимо істинну рівність $\beta^0 = 1.$ Нехай $n = -m,\ m > 0,$ доведемо (10), або:

$$\beta^{-m} = u_{-m}\beta^2 + u_{-m-2}\beta + u_{-m-1}, \quad \text{де} \quad m > 0. \qquad (13)$$

Якщо $m = 1,$ то маємо $\beta^{-1} = u_{-1}\beta^2 + u_{-3}\beta + u_{-2}$. Тому, що $u_{-1} = 1,\ u_{-3} = -1,\ u_{-2} = 0,$ то $\beta^{-1} = \beta^2 - \beta$ або $\beta^3 = \beta^2 + 1 -$ істинно за (7). Припустимо, що рівність (13) виконується для натурального m і доведемо, що

$$\beta^{-m+1} = u_{-m+1}\beta^2 + u_{-m-1}\beta + u_{-m}. \qquad (14)$$

Маємо, за припущенням, (7) і властивістю послідовності (12):

$$\beta^{-m+1} = \beta^{-m}\cdot\beta = \left(u_{-m}\beta^2 + u_{-m-2}\beta + u_{-m-1}\right)\cdot\beta = u_{-m}\beta^3 + u_{-m-2}\beta^2 + u_{-m-1}\beta =$$
$$= u_{-m}\left(\beta^2 + 1\right) + u_{-m-2}\beta^2 + u_{-m-1}\beta = \left(u_{-m} + u_{-m-2}\right)\beta^2 + u_{-m-1}\beta + u_{-m} = u_{-m+1}\beta^2 + u_{-m-1}\beta + u_{-m}.$$

Тобто, доведено:

$$\beta^n = u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1},\ n \in Z, \qquad (15)$$

де коефіцієнти визначаються із послідовності (12).

Спираючись на властивість (8), одержимо, що відношення β-перерізу пов'язане з трикутником Паскаля:

$$1\cdot\beta^n = 1\cdot\beta^{n-1} + 1\cdot\beta^{n-3} = 1\cdot\beta^{n-2} + 2\cdot\beta^{n-4} + 1\cdot\beta^{n-6} = 1\cdot\beta^{n-3} + 3\cdot\beta^{n-5} + 3\cdot\beta^{n-7} + 1\cdot\beta^{n-9} =$$
$$= 1\cdot\beta^{n-4} + 4\cdot\beta^{n-6} + 6\cdot\beta^{n-8} + 4\cdot\beta^{n-10} + 1\cdot\beta^{n-12} = \ldots$$

Коефіцієнти цього ланцюжка рівностей утворюють трикутник Паскаля.

Нехай x_1, x_2, x_3 – корені рівняння (4). За формулами Вієта, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0,\ x_1x_2x_3 = 1.$ Поділивши почленно першу рівність на другу, одержимо:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0. \qquad (16)$$

Введемо позначення:

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = S_n. \qquad (17)$$

Маємо:

$$S_0 = 1 + 1 + 1 = 3,\ S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) =$$
$$= 1^2 - 2\cdot 0 = 1.$$

Доведемо, що

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-3},\ n \ge 3. \qquad (18)$$

Очевидно, що для всіх коренів рівняння (4) має місце властивість (8), тому:

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = \left(x_1^{n-1} + x_1^{n-3}\right) + \left(x_2^{n-1} + x_2^{n-3}\right) + \left(x_3^{n-1} + x_3^{n-3}\right) = \left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1}\right) +$$
$$+ \left(x_1^{n-3} + x_2^{n-3} + x_3^{n-3}\right) = S_{n-1} + S_{n-3}.$$

Враховуючи, що $S_0 = 3,\ S_1 = S_2 = 1$ і (18), побудуємо числову послідовність:

$$3,1,1,4,5,6,10,\ldots, \qquad (19)$$

яка використовується для знаходження сум степенів коренів рівняння (4). Через те, що властивість (18) має місце для всіх цілих n, то, ввівши на основі рівності $S_{n-3} = S_n - S_{n-1}$ узагальнену числову послідовність:

$$\ldots 2,3,-2,0,S_0=3,1,1,4,5,6,10\ldots, \qquad (20)$$

можна обчислювати значення S_n для довільного цілого n. Зокрема, для $n = 2$ маємо $S_{-1} = S_2 - S_1 = 0,$ тобто властивість (16).

Введемо в розгляд $\beta -$ многочлени з цілими коефіцієнтами:

$$f(\beta) = a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_1\beta + a_0, \quad deg\ f(\beta) \ge 3. \qquad (21)$$

Доведемо, що довільний β – многочлен можна звести до многочлена другого степеня. Використаємо рівняння (4) β-перерізу. Тоді β – корінь многочлена $p(x) = x^3 - x^2 - 1.$ Виконавши ділення з остачею многочлена $f(x)$ на $p(x)$, одержимо:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x),\ deg\, r(x) < 3. \qquad (22)$$

Якщо $x = \beta$, то маємо $f(\beta) = r(\beta)$, що і доводить твердження.

Многочлени

$$f(\beta) = a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0 \tag{23}$$

будемо називати $\beta -$ тричлени і коефіцієнти вибирати із числової послідовності (12) за правилом:

$$f_n(\beta) = u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1}. \tag{24}$$

Множина $\beta -$ тричленів (24) утворює абелеву мультиплікативну групу. Введемо дію множення $\beta -$ тричленів: $f_n(\beta) \cdot f_m(\beta) = f_{n+m}(\beta)$. При цьому в результаті одержимо $\beta -$ тричлен. Маємо:
$f_n(\beta) \cdot f_m(\beta) = \left(u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1}\right)\left(u_m\beta^2 + u_{m-2}\beta + u_{m-1}\right)$ і, враховуючи (15), одержимо:
$f_n(\beta) \cdot f_m(\beta) = \beta^n \cdot \beta^m = \beta^{n+m} = u_{n+m}\beta^2 + u_{n+m-2}\beta + u_{n+m-1}$.

Дія множення $\beta -$ тричленів (24) має властивості комутативності, асоціативності, бо $\beta^n \cdot \beta^m = \beta^m \cdot \beta^n$ і $(\beta^n \cdot \beta^m)\beta^k = \beta^n(\beta^m \cdot \beta^k)$. Одиничним елементом є тричлен $f_0(\beta) = u_0\beta^2 + u_{-2}\beta + u_{-1}$. Множина $\beta -$ тричленів (24) замкнута також відносно дії ділення, тому, що

$$\frac{f_n(\beta)}{f_m(\beta)} = \frac{u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1}}{u_m\beta^2 + u_{m-2}\beta + u_{m-1}} = \frac{\beta^n}{\beta^m} = \beta^{n-m}$$ і, за властивістю (15),

$$\beta^{n-m} = u_{n-m}\beta^2 + u_{n-m-2}\beta + u_{n-m-1} = f_{n-m}(\beta).$$

Піднесення до степеня $\beta -$ тричленів виконується за правилом:

$$\left(u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1}\right)^m = u_{mn}\beta^2 + u_{mn-2}\beta + u_{mn-1}.$$

Нехай $\beta -$ відношення β-перерізу, u_n – члени послідовності (12), $f_n(\beta) -$ $\beta -$ тричлени (24).

Використовуючи властивості β-перерізу, можна розв'язати наступні вправи:

1. Розв'язати рівняння:

а) $\dfrac{\beta^{2x}}{u_x\beta^2 + u_{x-2}\beta + u_{x-1}} - u_{x-2}\beta - u_{x-1} = 6\beta^2$;

б) $u_x^2 + 6u_x + 8 = 0$.

2. Довести:

$\left(u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1}\right)\left(u_{-n}\beta^2 + u_{-n-2}\beta + u_{-n-1}\right) = 1$.

3. Знайти дійсні корені рівняння:

$x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$.

4. Довести:

$f_1(\beta) \cdot f_2(\beta) \cdot \ldots \cdot f_n(\beta) = f_{\frac{(n+1)n}{2}}(\beta)$.

5. Знайти суму ряду:

$$\frac{1}{f_3(\beta)f_4(\beta)} + \frac{1}{f_4(\beta)f_5(\beta)} + \ldots + \frac{1}{f_n(\beta)f_{n+1}(\beta)} + \ldots$$

6. Довести, що відношення "золотого" β-перерізу є єдиним додатнім числом, яке переходить в число, обернене його квадрату, при відніманні від нього одиниці.

Такі узагальнення класичних математичних понять, застосування їх до розв'язування вправ сприяють активному вивченню математики, зацікавленості предметом, викликають інтерес до самостійної дослідної роботи, дають можливість зрозуміти красу математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бендукидзе А.Д. Золотое сечение // Квант. – 1973. – № 8. – С. 22-27.
2. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. – М.: Знание, 1979. – 64 с.

Матеріал надійшов до редакції 19.09.01 р.

Сверчевская И.А. Об одном обобщении "золотого сечения".

С целью заинтересовать учащихся математикой, рассмотрено обобщение "золотого сечения", доказаны свойства введенного отношения β-сечения и предложен ряд упражнений для самостоятельной работы.

Sverchevska I.A. About Generalization of "Golden Section".

To arouse the pupils` interest to mathematics we examined the generalization of "golden section", proved properties of inserted proportion of β-section and offered a number of exercises for independent work.