УДК 372.851:51

С.П. Семенець,
кандидат педагогічних наук, доцент
(Житомирський педуніверситет)

АНАЛІТИЧНЕ ЗАДАННЯ ПРОЕКТИВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПЛОЩИНИ. ТЕОРЕМА БРІАНШОНА

Реалізований аналітичний підхід до проективних перетворень на площині. У такому трактуванні проективних перетворень доведені деякі їх найпростіші властивості. На основі доведеної теореми про проективне перетворення кола, обґрунтовується теорема Бріаншона та усі її частинні випадки.

Перетворення площини, яке у прямокутній декартовій системі координат (ПДСК) задається формулами:

$$x' = \frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_3x+B_3y+C_3},\ y' = \frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_3x+B_3y+C_3} \qquad (*)$$

$$\text{де} \quad r_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2,$$

називається проективним.

Очевидно, що для всіх точок **M(x;y)** площини, які задовольняють рівнянню

$$A_3x+B_3y+C_3=0 \qquad (1)$$

точок образів не існує.

Щоб відповідність між точками площини була взаємно однозначною, будемо вважати, що у випадку **(1)** точці **M(x;y)** відповідає невласна (нескінченно віддалена) точка прямої $\mathbf{M_\infty(x';y')}$. Точку **M(x;y)** – назвемо граничною точкою прямої.

__**Теорема1.**__ Проективне перетворення площини будь-яку її пряму переводить у пряму.

__Доведення.__ Нехай деяка пряма ***l*** задана рівнянням:

$$Ax+By+C=0. \qquad (2)$$

Якщо точка **M(x;y)** – будь-яка точка прямої ***l*** – є прообразом точки **M′(x′;y′),** то із **(*)** знайдемо :

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} C_3x'-C_1 & B_3x'-B_1 \\ C_3y'-C_2 & B_3y'-B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3x'-A_1 & B_3x'-B_1 \\ A_3y'-A_2 & B_3y'-B_2 \end{vmatrix}},\ y = -\frac{\begin{vmatrix} A_3x'-A_1 & C_3x'-C_1 \\ A_3y'-A_2 & C_3y'-C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3x'-A_1 & B_3x'-B_1 \\ A_3y'-A_2 & B_3y'-B_2 \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

Або :

$$x = \frac{(C_3B_2-C_2B_3)x'+(C_1B_3-C_3B_1)y'+C_2B_1-C_1B_2}{(A_2B_3-A_3B_2)x'+(A_3B_1-A_1B_3)y'+A_1B_2-A_2B_1},$$
$$y = \frac{(C_2A_3-C_3A_2)x'+(C_3A_1-C_1A_3)y'+C_1A_2-C_2A_1}{(A_2B_3-A_3B_2)x'+(A_3B_1-A_1B_3)y'+A_1B_2-A_2B_1}. \qquad (4)$$

Одержані вирази для **x, y** підставимо у рівність **(2).** В результаті матимемо рівняння, якому задовольнятимуть кординати довільної точки-образу прямої ***l*** :

$$(AC_3B_2-AC_2B_3+BC_2A_3-BC_3A_2+CA_2B_3-CA_3B_2)x'+(AC_1B_3-AC_3B_1+BC_3A_1-BC_1A_3$$
$$+CA_3B_1-CA_1B_3)y'+AC_2B_1-AC_1B_2+BC_1A_2-BC_2A_1+CA_1B_2-CA_2B_1=0$$

Або:

$$Px'+Ly'+Q=0, \qquad (5)$$

де:

$$P = AC_3B_2-AC_2B_3+BC_2A_3-BC_3A_2+CA_2B_3-CA_3B_2,$$
$$L = AC_1B_3-AC_3B_1+BC_3A_1-BC_1A_3+CA_3B_1-CA_1B_3, \qquad (6)$$
$$Q = AC_2B_1-AC_1B_2+BC_1A_2-BC_2A_1+CA_1B_2-CA_2B_1.$$

За умови, що $\mathbf{P^2+L^2 \neq 0}$, рівняння (5) визначає пряму.

Якщо пряма ***l*** має рівняння (1), то, за формулами (6), **P=L=Q=0**.

Будемо говорити, що в цьому випадку прямій-прообразу відповідає невласна пряма. Пряму, яку доповнено її невласною точкою, називають проективною прямою. А площину, доповнену невласною прямою (як множину усіх її невласних точок), називають проективною площиною.

__**Теорема 2.**__ Для заданого проективного перетворення площини існує єдина гранична пряма, тобто, така, яка при цьому перетворенні переходить у невласну пряму.

__Доведення.__ Образу прямої у проективному перетворенні є невласна пряма, якщо виконуються умови:

$$\begin{cases} A(C_3B_2-C_2B_3)+B(C_2A_3-C_3A_2)+C(A_2B_3-B_2A_3)=0, \\ A(C_1B_3-C_3B_1)+B(C_3A_1-C_1A_3)+C(A_3B_1-B_1A_3)=0. \end{cases} \qquad (7)$$

Звідси коефіцієнти **A, B** та **C** рівняння прямої знаходимо з точністю до пропорційності: **A:B:C**.

Оскільки ранг матриці системи дорівнює 2, то шукане відношення буде однозначно таким: $\mathbf{A:B:C=A_3:B_3:C_3}$

<u>Теорема 3.</u> Проективне перетворення площини цілком визначається заданням чотирьох пар відповідних точок загального розташування (жодні три з яких не належать одній прямій).

<u>Доведення.</u> У рівностях **(*)** є дев'ять числових коефіцієнтів : $\mathbf{A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3}$. Очевидно, проективне перетворення (завдяки тому, що воно задається дробово-раціональними виразами) визначатиметься не самими власне коефіцієнтами, а їх відношеннями. Тому достатньо чотири пари відповідних точок для того, щоб одержати із рівності **(*)** систему восьми лінійно-незалежних рівнянь. Тоді одержана система матиме єдиний розв'язок, а отже, з точністю до пропорційності будуть знайдені і коефіцієнти перетворення **(*)**.

<u>Теорема 4.</u> Існує проективне перетворення, яке дане коло переводить в коло, а задану точку всередині кола – в центр образу.

<u>Доведення.</u> Виконаємо проективне перетворення **(*)** кола, яке на площині задається рівнянням:

$$X^2 + Y^2 = 1 \tag{8}$$

Скориставшись формулами **(4)** і поклавши:

$$C_2B_3 - C_3B_2 = 0, C_3A_1 - C_1A_3 = 0, A_2B_3 - A_3B_2 = 0,$$
$$C_1B_3 - C_3B_1 = A, C_2B_1 - C_1B_2 = B, A_3B_1 - A_1B_3 = C,$$
$$A_1B_2 - A_2B_1 = D, C_2A_3 - C_3A_2 = F, C_1A_2 - C_2A_1 = Q,$$

одержимо:

$$x = \frac{Ay' + B}{Cy' + D}, y = \frac{Fx' + Q}{Cx' + D}.$$

Тоді шукане рівняння образу буде мати вид:

$$(Ay' + B)^2 + (Fx' + Q)^2 = (Cx' + D)^2 \tag{9}$$

Або:

$$(A^2 - C^2)y'^2 + 2(AB - CD)y' + (Fx' + Q)^2 + B^2 - D^2 = 0. \tag{10}$$

Якщо $\mathbf{A^2 \neq C^2}$ і $\mathbf{F \neq 0}$, то останнє рівняння **(10)** можна подати так:

$$F^2\left(x' + \frac{Q}{F}\right) + (A^2 - C^2)\cdot\left(y' + \frac{AB - CD}{A^2 - C^2}\right)^2 = \frac{(AB - CD)^2}{A^2 - C^2} \tag{11}$$

За умови, що $\mathbf{F^2=A^2-C^2 \neq 0}$ і $\mathbf{AD \neq BC}$, рівняння **(11)** є рівнянням кола з центром в точці $M_1\left(-\frac{Q}{F}, \frac{CD - AB}{A^2 - C^2}\right)$ і радіусом $R = \frac{|AD - BC|}{A^2 - C^2}$

Знайдемо прообраз точки M_1 при такому проективному перетворенні:

$$x = \frac{A(CD - AB)/(A^2 - C^2) + B}{C(CD - AB)/(A^2 - C^2) + D} = \frac{C}{A}$$

$$y = \frac{F\left(-\frac{Q}{F}\right) + Q}{Cy' + D} = \frac{0}{A^2 - AB} = 0, \text{ при } A \neq B$$

Отже, точка M(C/A, 0) не співпадає з точкою O(0,0) при C≠0, і лежить всередині кола **(8)**, оскільки $|C/A| < 1$.

Тому, справді, існує таке проективне перетворення площини, яке при вказаних вище умовах переводить дане коло в коло, а дану точку в середині кола – в центр образу.

Зазначимо, що при проективному перетворенні площини коло може перейти в еліпс, гіперболу, параболу, дві прямі, які перетинаються.

Розглянемо можливі випадки:

1 При $\mathbf{A^2-C^2>0, F \neq 0, AD \neq BC, A^2-C^2 \neq F^2}$, рівняння (11) є рівнянням еліпса.

2 При $\mathbf{A^2-C^2<0, F \neq 0, AD \neq BC}$ рівняння (11) є рівнянням гіперболи.

3 При $\mathbf{A^2=C^2, F \neq 0, AB \neq CD}$ рівняння (10) є рівнянням параболи.

4 При $\mathbf{AD=BC, F \neq 0, A^2-C^2<0,}$ рівняння (11) є рівнянням двох прямих, які перетинаються.

<u>Наслідок з Теореми 4</u>. Існує проективне перетворення, яке дане коло переводить в коло, а дану хорду – в його діаметр.

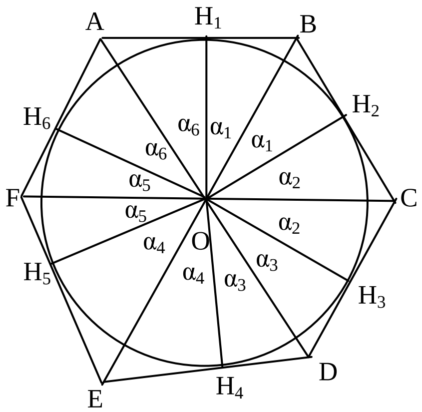
Справді, нехай M – довільна точка на на заданій хорді. Згідно теореми 4, існує проективне перетворення, яке переводить дане коло в коло, а точку M – в його центр. Оскільки при проективному перетворенні пряма переходить в пряму, то задана хорда перейде в діаметр.

<u>Теорема 5. (Бріаншона)</u> Нехай ABCDEF – шестикутник, описаний навколо кола. Тоді його діагоналі AD,BE,CF перетинаються в одній точці (точці Бріаншона).

Спочатку доведемо таку лему.

Лема 5.1. Якщо в шестикутнику ABCDEF, описаному навколо кола з центром O, діагоналі AD, BE проходять через точку O, то діагональ CF теж містить точку O.

Доведення. Нехай OH_1, OH_2, OH_3, OH_4, OH_5, OH_6 – висоти трикутників ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODE, ΔOEF, ΔOFA.



Тоді: $\angle H_1OB=\angle BOH_2=\alpha_1$, $\angle H_4OE=\angle EOH_5=\alpha_4$, $\angle H_2OC=\angle COH_3=\alpha_2$, $\angle H_5OF=\angle FOH_6=\alpha_5$, $\angle H_3OD=\angle DOH_4=\alpha_3$, $\angle H_6OA=\angle AOH_1=\alpha_6$,

Очевидно, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=180°$.

З умови $AD\cap BE=O$ випливає, що $\angle AOB=\angle DOE$. Тоді $\alpha_1+\alpha_6=\alpha_3+\alpha_4$. Знайдемо $\angle COF$:

$\angle COF=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_6+\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=180°$.Отже, пряма CF містить точку O, що й треба було довести.

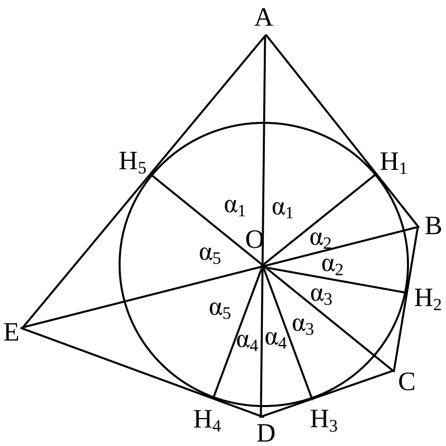
Для доведення теореми Бріаншона скористаємось теоремою про проективне перетворення кола**.** Існує проективне перетворення, яке коло, вписане в шестикутник, переводить в коло, вписане у відповідний шестикутник, а точку перетину двох діагоналей шестикутника – в точку перетину відповідних діагоналей, яка буде центром кола-образу. Згідно з лемою 5.1, третя дагональ шестикутника-образа, описаного навколо кола-образа, проходить через точку перетину двох інших його діагоналей. Отже, три діагоналі шестикутника-прообраза, описаного навколо кола, теж будуть проходити через одну точку.

Важливо зазаначити, що теорема Бріаншона виконується і тоді, коли описаним є п'ятикутник, чотирикутник, трикутник. У навчальній літературі такі теореми відомі як частинні випадки теореми Бріашона.

Теорема 6. У п'ятикутнику, описаному навколо кола, дві прямі, які містять по парі несуміжних вершин, і третя пряма, яка проходить через п'яту вершину і точку дотику протилежної сторони, перетинаються в одній точці.

Для доведення цієї теореми знову доведемо лему.

Лема 6.1. Якщо в п'ятикутнику ABCDE, описаному навколо кола з центром O, діагоналі AD і BE проходять через точку O, то пряма, яка проходить через точку C і точку дотику сторони AE, буде містити точку O.



Доведення. Виконавши побудови і позначення, аналогічні тим, що в лемі 5.1, одержуємо:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=180°.$$

За умовою : $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_4+\alpha_5$. Знайдемо $\angle COH_5$:

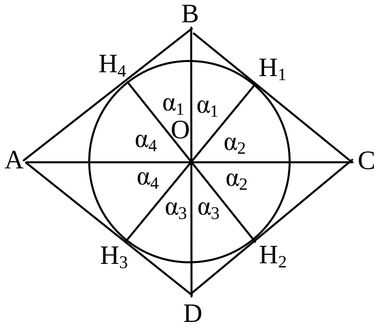
$\angle COH_5=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=180°$, що й треба було довести.

Використавши теорему **4** про проективне перетворення кола (аналогічно, як це було зроблено для шестикутника), доводимо теорему **6.**

Доведемо теорему Бріаншона для випадку описаного чотирикутника.

Теорема 7. У чотирикутнику, описаному навколо кола, діагоналі проходять через точку перетину прямих, які містять точки дотику протилежних сторін чотирикутника.

Теорема доводиться аналогічно попереднім на основі леми.



Лема 7.1. Якщо в чотирикутнику, описаному навколо кола, діагоналі перетинаються в його центрі, то дві прямі, які містять точки дотику протилежних сторін чотирикутника, теж проходять через центр кола, вписаного в цей чотирикутник.

Доведення. Аналогічно, як і в попередніх лемах знаходимо, що $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=180°$.

За умовою $AC \cap BD=O$, отже $\alpha_1+\alpha_4=\alpha_2+\alpha_3$.

Тоді $\angle H_1OH_3=2\alpha_1+2\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=180°$.

Аналогічно доводимо, що $\angle H_2OH_4=180°$. Таким чином,

$H_1H_3 \cap H_2H_4=O$, що й треба було довести.

Очевидно, що в цьому випадку чотирикутник ABCD є ромбом.

Теорема 8. Три прямі, які містять вершини трикутника і точки дотику протилежних сторін до вписаного в трикутник кола, перетинаються в одній точці.

Для доведення цієї теореми необхідно скористатися очевидним твердженням: у правильному трикутнику три прямі, які містять вершини трикутника і точки дотику протилежних сторін до вписаного у нього кола, перетинаються в одній точці – центрі правильного трикутника. Тоді теорема (8) є наслідком теореми (4) про проективне перетворення кола.

Матеріал надійшов до редакції 28.12.02 р.

Семенец С.П. Аналитическое определение проективных преобразований плоскости. Теорема Брианшона.

Осуществлен аналитический подход к проективным преобразованиям на плоскости. В таком толковании проективных преобразований доказаны некоторые их простейшие свойства. Исходя из доказанной теоремы об проективном преобразовании окружности, обосновывается теорема Брианшона и все её частные случаи.

Semenets S. P. Analytical Definition of Design Turnings on the Area. Brianshon's Theorem.

The author realized analytic approach to the design turnings on the area. In such reading of the design turnings some of their simplest qualities are proved. On the principles of the proved theorem about the design turning of the circle it gives proof of Brianshon’s theorem and all its special cases.