У світі математики. – Т. 9, вип. 1. – 2003. – С. 37 -45.

ВІД ЗОЛОТОЇ ПРОПОРЦІЇ ДО β-ПЕРЕРІЗУ

І.А Сверчевська

1. Біля джерел золотої пропорції.

“Правильні пропорції – запорука гарної форми в усіх речах”, - як говорив художник Альбрехт Дюрер. Із багатьох пропорцій, якими здавна користувалися люди при створенні гармонійних творінь, існує одна, яку називали по різному – “золотою”, “божественною”, “золотим перерізом”. Вона відповідає такому поділу цілого на дві нерівні частини, при якому відношення більшої частини до меншої дорівнює відношенню цілого до більшої частини. Виявилося, що це відношення $\varphi \approx 1{,}618$.

Перші згадки про золотий переріз зустрічаються в другій книзі “Начал” Евкліда (III ст. до н.е.). Тим часом відкриття золотого перерізу пов’язують з іменем Піфагора. Особливого значення цьому відношенню надавав математик XV століття, італієць, Лука Пачолі у своєму знаменитому трактаті “Божественна пропорція”. Золоту пропорцію він прагнув зробити підґрунтям для всіх наук, вивів з неї принципи архітектури та пропорції розмірів людського тіла. Цікаво, що ілюстрував книгу великий Леонардо да Вінчі. Саме він ввів термін “золотий переріз”.

Еталонами краси людського тіла вважаються твори грецьких скульпторів Фідія, Поліклета, які використовували принцип золотої пропорції. Золота пропорція займала провідне місце в художніх канонах Леонардо да Вінчі і Дюрера. У відповідності з цими канонами золота пропорція відповідає поділу тіла на дві нерівні частини лінією талії. Висота обличчя відноситься до вертикальної відстані між дугами брів і нижньою частиною підборіддя, як відстань між нижньою частиною носа і нижньою частиною підборіддя відноситься до відстані між кутами губ і нижньою частиною підборіддя. Це відношення дорівнює золотому перерізу. Йоганн Кеплер називав золотий переріз одним із скарбів математики, який можна порівняти із дорогоцінним каменем [1].

Після Й. Кеплера золотий переріз майже 200 років ніхто не згадував. Тільки у 1850 році німецький вчений Цейзинг відкрив його заново і назвав законом пропорцій. Він виявив золотий переріз в пропорціях тіла людини і тварин, в деяких храмах, в ботаніці і музиці. Цейзинг вважав, що все тіло людини в цілому пов’язане системою пропорційних відношень, серед яких золотий переріз займає провідне місце. Він знайшов, що середня пропорція чоловічого тіла близька до $\frac{13}{8} = 1{,}625$, а жіночого – до $\frac{8}{5} = 1{,}60$. Тобто ці пропорції відхиляються по різні боки від золотого перерізу $\varphi \approx 1{,}618$. Характерно, що пуп поділяє тіло немовля на дві рівні частини і пропорція тіла тільки згодом досягає остаточного розвитку, що відповідає золотому перерізу.

В Стародавній Греції в будівлях громадського призначення широко використовували золоту пропорцію. Серед них перше місце належить Парфенону, храму богині мудрості Афіни. Ширина Парфенону оцінена в 100 грецьких футів (3089,0 см), а висота 61,8, висота трьох східців основи і колони 38,2, висота перекриття і фронтону 23,6 футів. Вказані розміри утворюють ряд золотої пропорції: $100 : 61{,}8 \approx 61{,}8 : 38{,}2 \approx 38{,}2 : 23{,}6 \approx \varphi = 1{,}618...$ (ці розміри дещо змінені у різних авторів). Можливо, що зодчі античності не знали властивостей золотої пропорції, а застосовували її інтуїтивно на основі притаманного їм почуття гармонії і краси.

Золотий переріз має певне застосування у музиці. Ще Піфагор помітив, що висота звуку при даному натягу струни залежить від її довжини. Відношення довжин струн, що дають різні звуки гами, до довжини струни, яка дає основний тон, дорівнює відношенню цілих чисел. Для музичних інтервалів мала секста і велика секста відношення довжин струн, звуки яких дають ці інтервали дорівнюють відповідно $5 : 8 = 0{,}625$ і $3 : 5 = 0{,}600$. Маємо наближення числа $\frac{1}{\varphi} = 0{,}618...$ з надлишком і недостачею. Обидві сексти належать до найприємніших для слуху інтервалів.

Золотий переріз зустрічається і в природі. З’ясувалося, що в розташуванні листків на гілці, насіння соняшника, будові шишок сосни проявляє себе закон “золотого перерізу”. Розглянемо, як росте всім відома рослина – цикорій. Від основної стеблини утворюються пагони, де розташовуються перші листки. Потім пагін робить сильний викид в простір і випускає новий листок, потім робить новий викид у простір, але вже меншої сили і т.д. Якщо перший викид прийняти за 100 одиниць, то другий дорівнюватиме 62 одиницям, третій – 38, четвертий – 24 одиницям. Відношення $\frac{100}{62} \approx \frac{62}{38} \approx \frac{38}{24} \approx 1{,}6$.

У зовнішній будові тіла живих організмів помітну роль відіграє спіраль. У математиці є кілька видів спіралі. Рівняння логарифмічної спіралі $\rho = a^{\theta}$, де $\rho-$ радіус-вектор, $\theta-$ кут його повороту навколо полюса в радіанах. Взявши $a = \varphi^{\frac{1}{m}}$, де $m = k\pi, k \in N$, одержимо рівняння золотої спіралі $\rho = \varphi^{\frac{\theta}{m}}$. По цій спіралі летять на полум'я метелики, молюски нарощують свої черепашки, по золотій спіралі розташовані лусочки шишок і насіння соняшника [2].

Одним із семи чудес світу є Єгипетські піраміди. Серед них особливе місце займає велика піраміда фараона Хеопса. Кут нахилу граней піраміди, виміряний у 1840 році, дорівнює $51^{0}50'$. Вказаному значенню кута α відповідає $tg\alpha \approx 1{,}2723$. Ця величина, що дорівнює відношенню висоти піраміди Н до половини її основи a , близька до $\sqrt{\varphi} \approx 1{,}2720$. Відношення апофеми бічної грані до висоти також близьке до $\sqrt{\varphi}$. Звідси випливає, що $tg\alpha = \frac{1}{sin\alpha}$ або $cos^{2}\alpha + cos\alpha - 1 = 0$. Маємо додатне значення $cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\varphi}$ або $\frac{1}{cos\alpha} = \varphi$, тобто відношення апофеми бічної грані до половини сторони основи піраміди дорівнює відношенню золотого перерізу. Можна припустити, що єгиптяни знали золоту пропорцію, але важко уявити, що вони знали золоту пропорцію, але важко уявити , що вони знали її вираз $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Хоча, вивчаючи комплекс єгипетських пірамід, вчені звернули увагу на зображення зодчого Хесіри (XXVII ст.до н.е.) в його гробниці, де він тримає в руках прилад для письма і дві палиці – еталони міри. Довжини їх відносяться як сторона і діагональ прямокутника "два квадрати", тобто як числа 1 і $\sqrt{5}$. За допомогою них можна скласти число φ.

Золота пропорція пов"язана з правильними многогранниками, тобто опуклими многогранниками, у яких всі грані – однакові правильні многокутники і двогранні кути при всіх ребрах рівні. З часів Платона і Евкліда відомо, що існує всього п"ять типів правильних многогранників (п"ять платонових тіл): тетраедр, куб, октаедр, ікосаедр, додекаедр [3]. Лука Пачолі, що жив після Платона два тисячоліття потому, шукав "божественну пропорцію" в найдосконаліших творіннях математики – п"яти платонових тілах.

Додекаедр – дванадцятигранник із правильних п"ятикутників. Зав"яжіть вузлом вузьку смужку паперу і обережно розгладьте його. Ви одержите правильний п"ятикутник, а його діагоналі якраз і поділяють одна одну в золотому перерізі. Як показали розкопки, улюбленою іграшкою етруських дітей 2500 років тому був додекаедр. До нашого часу він залишається улюбленою іграшкою дорослих, які роблять з нього календар – по місяцю на кожні з дванадцяти його граней.

Ікосаедр – двадцятигранник із правильних трикутників. В ньому до кожної вершини підходить п"ять трикутників, вільні сторони яких утворюють правильний п"ятикутник. Якщо з"єднати між собою довільні два протилежні ребра ікосаедра, то одержується прямокутник. Його більша сторона так відноситься до меншої, як сума сторін – до більшої: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, $a > b$. Якщо позначити $\frac{a}{b} = x$, то одержимо $x^{2} = x + 1$, тобто рівняння золотого перерізу. Маємо $\frac{a}{b} = \varphi$. Можливо тому ікосаедр зберігається в Єгипетській залі Британського музею. Це гральний кубик династії Птоломеїв.

Накопичені знання про золоту пропорцію виявляються в різноманітних галузях науки, застосовуються в техніці, поповнюються новим змістом. В 1964 році А.Стахов, розв'язуючи задачу про найкращу систему тягарів, вивів формулу узагальненого золотого перерізу, який назвав р – переріз. Із цієї формули при p=0 одержується поділ відрізка навпіл, а при $p = 1-$ класичний золотий переріз. При підстановці інших значень p одержується серія узагальнених золотих перерізів. Існують гіпотези, що вони дають нові критерії гармонії природи [4]. Ми розглянемо випадок $p = 2$.

2. Деякі властивості золотого перерізу.

Означення. Золотим перерізом називається поділ відрізка АВ внутрішньою точкою С на такі дві частини, що $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

Якщо позначити це відношення $AB : AC = x,$ то його рівняння

$$x^2 = x + 1. \qquad (1)$$

Додатній корінь цього рівняння

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618... \qquad (2)$$

назвали відношенням золотого перерізу, а саму формулу – формулою краси. При цьому більша частина даного відрізка $AC \approx 0{,}618AB$.

Відношення золотого перерізу позначається грецькою літерою φ не випадково. Так у науці вшановують пам'ять давньогрецького скульптора Фідія, у творіннях якого золотий переріз використовується неодноразово.

Властивість 1. Для довільного цілого числа n

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}. \qquad (3)$$

Тому, що φ корінь рівняння (1), то $\varphi^2 = \varphi + 1$. Помноживши цю рівність на φ^{n-2}, одержимо формулу (3). Вона використовується для побудови узагальненої системи числення, яка називається золотою

$$...\varphi^{-3}, \varphi^{-2}, \varphi^{-1}, \varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, ... \qquad (4)$$

Властивість 2. Для довільного натурального числа n

$$\varphi^n = u_n \varphi + u_{n-1}, \qquad (5)$$

де u_i – числа послідовності Фібоначчі

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}. \qquad (6)$$

Цю властивість легко довести методом математичної індукції [3].

Властивість 3. Відношення наступного члена послідовності (6) Фібоначчі до попереднього прямує до числа φ.

Розглянемо відношення наступного члена послідовності (6) до попереднього. Одержимо послідовність

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, ..., \frac{u_{n+1}}{u_n}, ... \qquad (7)$$

Для доведення існування границі цієї послідовності використаємо твердження:

Нехай дано монотонно зростаюча послідовність x_n і монотонно спадна y_n, причому завжди $x_n < y_n$. Якщо їх різниця прямує до нуля, то ці послідовності мають скінченну границю. Із послідовності (7) виділимо дві послідовності:

$$\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_4}{u_3}, \frac{u_6}{u_5}, ..., \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}, ... \qquad (8)$$

$$\frac{u_3}{u_2}, \frac{u_5}{u_4}, \frac{u_7}{u_6}, ..., \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}, ... \qquad (9)$$

Використаємо означення послідовності Фібоначчі (6) $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ і властивість $u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}$. Доведемо, що послідовність (8) монотонно зростаюча. Досить довести, що $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} > \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}$. Маємо

$$\Delta_1 = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} - \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \frac{u_{2n+2}u_{2n-1} - u_{2n+1}u_{2n}}{u_{2n+1}u_{2n-1}} = \frac{(u_{2n+1}+u_{2n})u_{2n-1} - u_{2n}(u_{2n}+u_{2n-1})}{u_{2n+1}u_{2n-1}} = \frac{u_{2n+1}u_{2n-1} - u_{2n}^2}{u_{2n+1}u_{2n-1}} =$$

$$= \frac{u_{2n+1}u_{2n-1} - \left(u_{2n-1}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}\right)}{u_{2n+1}u_{2n-1}} = \frac{(-1)^{2n+2}}{u_{2n+1}u_{2n-1}} = \frac{1}{u_{2n+1}u_{2n-1}}.$$

Тому, що члени послідовності Фібоначчі натуральні числа, маємо $\Delta_1 > 0$.

Послідовність (9) монотонно спадна. Аналогічно до попереднього одержимо, що

$$\Delta_2 = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} - \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+2}} = \frac{1}{u_{2n}u_{2n+2}} > 0.$$

Розглянемо різницю $\Delta_3 = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} - \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}$ і доведемо, що $\Delta_3 > 0$.

$$\varDelta_3=\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}-\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}=\frac{u_{2n+1}u_{2n-1}-u_{2n}^2}{u_{2n}u_{2n-1}}=\frac{u_{2n+1}u_{2n-1}-\left(u_{2n+1}u_{2n-1}+(-1)^{2n+1}\right)}{u_{2n}u_{2n-1}}=\frac{(-1)^{2n+2}}{u_{2n}u_{2n-1}}=\frac{1}{u_{2n}u_{2n-1}}>0,$$

тому що $u_m\in N$.

Оскільки $u_m\to\infty$, якщо $m\to\infty$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\varDelta_3=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_{2n}u_{2n-1}}=0.$ Отже, існує спільна границя послідовностей (8) і (9), яка є границею послідовності (7). Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=A$ і визначимо цю границю.

Послідовність Фібоначчі побудована за законом $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$, тому $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}}$.

Перейшовши до границі в цій рівності, одержимо $A=1+\frac{1}{A}$. Маємо, що границя А послідовності (7) задовольняє рівняння $A^2=A+1$. Це є рівняння золотого перерізу (1), тому $A=\varphi$.

3. Означення і властивості золотого β-перерізу.

Означення. Золотим β-перерізом називається поділ відрізка AB внутрішньою точкою C на такі дві частини, що $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\frac{AC}{CB}$.

Якщо позначити відношення $\frac{AB}{AC}=x$, то одержимо рівняння відношення β-перерізу:

$$x^3=x^2+1. \tag{10}$$

З геометричної інтерпретації цього рівняння випливає, що воно має один дійсний додатній корінь. Обчисливши його, одержуємо $\beta=1{,}46567\ldots$ А більша частина відрізка $AC\approx 0{,}6823AB$.

Тому, що $\beta-$ корінь рівняння (10), маємо

$$\beta^3=\beta^2+1. \tag{11}$$

Властивість 1. Знайдемо формулу, яка виражає відношення β - перерізу в радикалах. Для цього визначимо додатній корінь рівняння (10). Після підстановки $x=y+\frac{1}{3}$ одержимо рівняння

$$y^3-\frac{1}{3}y-\frac{29}{27}=0, \tag{12}$$

звідки за формулами Кардано маємо, що $y=u+v$, де $u=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{2}}$; $v=\frac{1}{3\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{2}}}$. Одержимо формулу

$$\beta=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{\frac{29+3\sqrt{93}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2}{29+3\sqrt{93}}}\right). \tag{13}$$

Властивість 2. Введемо в розгляд числову послідовність:

$$0,1,1,1,2,3,4,6,9\ \ldots,\ u_{n+1}=u_n+u_{n-2},\ n\geq 3. \tag{14}$$

Доведемо, що відношення β-перерізу β пов’язане з числами послідовності (14) рівністю

$$\beta^n=u_n\beta^2+u_{n-2}\beta+u_{n-1},\ n\geq 3. \tag{15}$$

Для n=3 маємо $\beta^3=u_3\beta^2+u_1\beta+u_2=1\cdot\beta^2+0\cdot\beta+1=\beta^2+1.$ Рівність істинна згідно з (11).
Припустимо істинність формули (15) для натурального числа n і доведемо, що

$$\beta^{n+1}=u_{n+1}\beta^2+u_{n-1}\beta+u_n. \tag{16}$$

Оскільки $\beta^{n+1}=\beta^n\cdot\beta$, то, використавши припущення, маємо

$$\beta^{n+1} = \beta\left(u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1}\right) = u_n\beta^3 + u_{n-2}\beta^2 + u_{n-1}\beta.$$

Застосувавши (11) і (14), одержимо

$\beta^{n+1} = u_n\left(\beta^2 + 1\right) + u_{n-2}\beta^2 + u_{n-1}\beta = \left(u_n + u_{n-2}\right)\beta^2 + u_{n-1}\beta + u_n = u_{n+1}\beta^2 + u_{n-1}\beta + u -$ тобто (16).

Узагальнимо числову послідовність (14), враховуючи, що $u_{n-2} = u_{n+1} - u_{n,}$ і тоді одержимо послідовність чисел

$$\ldots 3,0,-2,1,1,-1,0,1,\ u_0 = 0, 0,1,1,1,2,3.4,6,9\ldots, \tag{17}$$

яку можна використати, щоб довести, що рівність (15) виконується для всіх цілих значень n.

Для $n = 0$ маємо $\beta^0 = u_0\beta^2 + u_{-2}\beta + u_{-1}$. Оскільки $u_0 = 0,\ u_{-2} = 0,\ u_{-1} = 1,$ одержимо істинну рівність $\beta^0 = 1.$ Нехай $n = -m,\ m > 0,$ доведемо (15), або

$$\beta^{-m} = u_{-m}\beta^2 + u_{-m-2}\beta + u_{-m-1}, \quad \text{де} \quad m > 0. \tag{18}$$

Якщо $m = 1,$ то маємо $\beta^{-1} = u_{-1}\beta^2 + u_{-3}\beta + u_0$. Тому, що $u_{-1} = 1,\ u_{-3} = -1,\ u_0 = 0,$ то $\beta^{-1} = \beta^2 - \beta$ або $\beta^3 = \beta^2 + 1 -$ істинно за (11). Припустимо, що рівність (18) виконується для натурального m, і доведемо, що

$$\beta^{-m+1} = u_{-m+1}\beta^2 + u_{-m-1}\beta + u_{-m}. \tag{19}$$

Маємо за припущенням, (11) і властивістю послідовності (17):

$$\beta^{-m+1} = \beta^{-m}\cdot\beta = \left(u_{-m}\beta^2 + u_{-m-2}\beta + u_{-m-1}\right)\cdot\beta = u_{-m}\beta^3 + u_{-m-2}\beta^2 + u_{-m-1}\beta =$$
$$= u_{-m}\left(\beta^2 + 1\right) + u_{-m-2}\beta^2 + u_{-m-1}\beta = \left(u_{-m} + u_{-m-2}\right)\beta^2 + u_{-m-1}\beta + u_{-m} = u_{-m+1}\beta^2 + u_{-m-1}\beta + u_{-m}.$$

Іншими словами

$$\beta^n = u_n\beta^2 + u_{n-2}\beta + u_{n-1,}\ n \in Z, \tag{20}$$

де коефіцієнти визначаються із послідовності (17).

Властивість 3. Для довільного цілого числа n відношення β-перерізу β задовольняє рівність

$$\beta^n = \beta^{n-1} + \beta^{n-3}. \tag{21}$$

Для доведення досить домножити рівність (11) на β^{n-3}.

Надаючи значень $n \in Z,$ одержимо числову послідовність

$$\ldots\beta^{-3}, \beta^{-2}, \beta^{-1}, \beta^0, \beta^1, \beta^2, \beta^3, \ldots,$$

яку можна використати для побудови ірраціональної системи числення.

Властивість 4. Введемо позначення

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = S_n, \tag{22}$$

де $x_1, x_2, x_3 -$ корені рівняння (10).

Маємо:

$S_0 = 1 + 1 + 1 = 3,\ S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) =$
$= 1^2 - 2\cdot 0 = 1$ $(\textit{за теоремою Вієта.})$

Доведемо, що

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-3,}\ n \ge 3. \tag{23}$$

Очевидно, що для всіх коренів рівняння (10) має місце властивість (21), тому

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = \left(x_1^{n-1} + x_1^{n-3}\right) + \left(x_2^{n-1} + x_2^{n-3}\right) + \left(x_3^{n-1} + x_3^{n-3}\right) = \left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1}\right) +$$
$$+ \left(x_1^{n-3} + x_2^{n-3} + x_3^{n-3}\right) = S_{n-1} + S_{n-3}.$$

Враховуючи, що $S_0 = 3,\ S_1 = S_2 = 1$ і (23), побудуємо числову послідовність

$$3,1,1,4,5,6,10,\ldots, \tag{24}$$

яка використовується для знаходження сум степенів коренів рівняння (10). Через те, що властивість (23) має місце для всіх цілих n, то, ввівши на основі рівності $S_{n-3} = S_n - S_{n-1}$ узагальнену числову послідовність

$$\ldots 2,3,-2,0,S_0=3,1,1,4,5,6,10\ldots, \qquad (25)$$

можна обчислювати значення S_n для довільного цілого n. Зокрема, для $n=2$ маємо $S_{-1}=S_2-S_1=0$, тобто властивість $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$. (26)

Властивість 5. Розглянемо числову послідовність (14), яка узагальнює послідовність Фібоначчі. Відношення двох чисел цього ряду, що стоять поруч, наприклад, $\frac{u_{28}}{u_{27}}=1{,}46557\ldots\approx\beta$, а відношення чисел, розташованих через одне, наприклад $\frac{u_{28}}{u_{26}}=2{,}147897\ldots\approx\beta^2$. Цікаво, що величина $\beta^3\approx 3{,}147897$ близька до значення числа π.

На завершення статті пропонуємо кілька вправ для самостійного розв'язування.

Вправи. Нехай $\beta-$ відношення β-перерізу, u_n – члени послідовності (17).

1. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{\beta^{2x}}{u_x\beta^2+u_{x-2}\beta+u_{x-1}}-u_{x-2}\beta-u_{x-1}=6\beta^2$;

б) $u_x^2+6u_x+8=0$.

2. Довести:

$$\left(u_n\beta^2+u_{n-2}\beta+u_{n-1}\right)\left(u_{-n}\beta^2+u_{-n-2}\beta+u_{-n-1}\right)=1.$$

3. Знайти дійсні корені рівняння:

$$x^3+2x^2+x-1=0.$$

4. Довести, що відношення золотого β-перерізу є єдиним додатнім числом, яке переходить в число, обернене до його квадрату, при відніманні від нього одиниці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тимердинг Г.Е. Золотое сечение. – Петроград: Научное издательство,1924. – 86с.
2. Попов Є.Д. Геометричні властивості відношення золотого перерізу // У світі математики. – К.: Радянська школа, 1982. – с. 31-46.
3. Левитин К.Е. Геометрическая рапсодия.-М.: Знание, 1984.-176с.
4. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. - М.: Знание, 1979. - 64 с.