

Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк. – 2008. – С. 150 – 157.

У статті розглядаються конструктивні вміння учнів як складова їх розвитку та здатності до продовження математичної освіти. Зосереджено увагу на розв'язуванні конструктивних задач про геометричні тіла.

РОЗВИТОК УМІНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ КОНСТРУКТИВНІ ЗАДАЧІ

**І.А. Сверчевська, кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри математичного аналізу**

Житомирський державний університет імені Івана Франка

Для поліпшення професійної освіти молоді, їх підготовки до самостійного життя, подальшої освіти велике значення має наступність навчання у школі та вищому навчальному закладі, коли процес вивчення нового спирається на попередні знання й уміння. На думку Л.В. Занкова, учня не можна примусити засвоїти знання, він повинен мати пізнавальні уміння, щоб виробити знання. Пізнавальні вміння дадуть змогу застосовувати знання, перетворювати, розширювати і доповнювати, знаходячи нові зв'язки та співвідношення, тому необхідним є забезпечення засвоєння школярами основних прийомів розумової діяльності, розвиток їх пізнавальних умінь.

Пізнавальні вміння, з одного боку, будемо розглядати як здатність учня виконувати певні дії на основі засвоєних знань і навичок, а з іншого – як систему психічних і практичних дій, що ґрунтуються на теоретичних знаннях. Наукові праці А.П. Акімової, А.С. Деркача, Н.В. Кузьміної, Л.Д. Павлової та ін. підтверджують важливість пізнавальних умінь і виділяють як стрижневі аналітичні, проектувальні, конструктивні,

комунікативні та організаторські вміння [1]. Зосередимо увагу на **конструктивних вміннях**.

Конструктивні вміння необхідні у підготовці для оволодіння такими спеціальностями, як інженер, конструктор, архітектор, дизайнер, науковець тощо. Важливими є набуті у загальноосвітній школі вміння розв'язувати задачі, конструювати об'єкти, необхідні для доведення, дослідження та розв'язування поставлених завдань. Часто недостатня розвиненість конструктивних умінь, просторового та творчого мислення стає на заваді успішному опануванню матеріалом навчальних дисциплін вищої школи.

Конструктивні вміння включають дії, пов'язані з вивченням теоретичного матеріалу, розв'язуванням задач тощо. Тобто це вміння слухати вчителя і водночас стисло занотовувати його пояснення; знаходити у підручнику потрібний матеріал; висловлювати міркування про те, що вивчається; складати орієнтовний план і записувати доведення теореми і розв'язання задачі; висувати гіпотези, вибирати теоретичні твердження, необхідні для розв'язання задачі, доведення нового твердження; вибирати раціональні методи доведень і розв'язування задач.

На думку методистів Л.М. Лоповка, Г.Г. Маслової, Н.Ф. Четверухіна та ін., конструктивні вміння ототожнюються з вміннями розв'язувати конструктивні задачі. Інший підхід – у роботах методистів П.Я.Дорфа, М.М. Лімана, М.Н. Трубецького: конструктивні вміння – це вміння конструювати прилади, пристрої, моделі [2]. У роботах С.В. Музиченко розглянуто конструктивні задачі, що навчають вибирати з минулого досвіду потрібні знання й вміння і використовувати їх у нових ситуаціях. Виділено такі задачі з алгебри, розв'язування яких полягає у конструювання математичних об'єктів: графіків, діаграм, формул, виразів, рівнянь, нерівностей та їх систем [3].

Конструювання математичних об'єктів, як геометричних, так і алгебраїчних, вимагає застосування загальних конструктивних умінь. Крім того, під час навчання геометрії необхідні уміння виконувати малюнки геометричних фігур; уявляти геометричні тіла; розкладати їх на частини; розглядати геометричне тіло з різних позицій; будувати розгортки геометричних тіл і виготовляти моделі; розв'язувати конструктивні задачі.

Під час вивчення розділу "Геометричні тіла" важливими є специфічні конструктивні уміння: розв'язувати конструктивні задачі (задачі на побудову) і конструювати моделі геометричних тіл. Розглянемо *конструктивні задачі*, серед яких виділимо: **побудову зображень геометричних тіл, побудову перерізів геометричних тіл, побудову комбінацій геометричних тіл**. Такі побудови учні повинні вміти виконувати при вивченні геометричних понять, при доведенні теорем, при розв'язуванні всіх видів задач на геометричні тіла.

Будуючи **зображення геометричних тіл** необхідно дотримуватися певних вимог, які б відповідали не тільки строгій математичній теорії, але й задовольняли педагогічну практику. Вимоги, що їх повинні задовольняти малюнки, розроблені М.Ф. Четверухіним [4, с.8]. Застосувавши їх до геометричних тіл, маємо, що зображення повинне бути: 1) правильним, тобто бути однією з можливих проекцій геометричного тіла; 2) наочним, тобто викликати просторове уявлення геометричного тіла; 3) простим для виконання.

Правильність зображення забезпечується вибором однієї із проекцій геометричного тіла. У стереометрії для побудови зображення слід використовувати метод паралельного проектування. Тоді зображення виконуються досить просто і є наочними. За мірою строгості виконання умови правильності зображення геометричного тіла будемо розділяти побудови зображень геометричного тіла на *точні* та *умовні*. Напрям проектування при зображенні многогранників довільний. При зображенні

кулі застосовується ортогональне проектування для того, щоб обрисом кулі було коло, а не еліпс. Будуючи зображення геометричних тіл, слід дотримуватися правил типів ліній: суцільна основна лінія – для видимого контуру геометричного тіла, штрихова – для ліній невидимого контуру, суцільна або штрихова тонка – для допоміжних ліній [2, с.5].

Перед розглядом правил побудов геометричних тіл необхідно повторити властивості паралельного проектування і правила зображення трикутника, паралелограма, довільного многокутника, кола, тетраедра, які передбачені за програмою у 10 класі. При цьому можна використати задачі на зображення правильних многокутників та їх комбінацій з колом, поставивши завдання порівняти зображення плоских фігур у натуральну величину з їх паралельними проекціями.

У формі сократичної бесіди обговорюємо з учнями, що здійснення побудови геометричних тіл вирішує питання про його існування (конструктивне доведення). Проводячи індивідуальну роботу з учнями із слаборозвиненою просторовою уявою, доцільно пояснити, що видимі та невидимі на зображенні геометричного тіла лінії можна визначити, уявивши, що паралельно до напрямку проектування ідуть промені світла. При цьому поверхня тіла "ділиться" на дві частини: освітлену та неосвітлену. Видимі елементи зображуються суцільними, невидимі – пунктирними лініями. Виходячи із загальних принципів зображень геометричних тіл можна сформулювати і занести до довідників учнів ряд практичних рекомендацій яким доцільно слідувати при побудові зображень деяких геометричних тіл. Наприклад, трикутну піраміду краще зображати опуклим чотирикутником, у якому проведені діагоналі, причому одна з них штрихова. При зображенні куба в його основі креслити паралелограм з гострим кутом 45° і відношенням сторін 1:2 тощо.

На уроках введення понять геометричних тіл пропонуємо організувати роботу з учнями по виробленню правил-орієнтирів їх

зображень, використовуючи II тип орієнтовної основи дій. Вчитель демонструє через кодоскоп або на таблиці готове зображення геометричного тіла, створює проблемну ситуацію, задаючи питання, як найкраще покроково виконати його побудову. Учні висловлюють свої пропозиції, після їх обговорення вчитель разом з учнями виробляють правила-орієнтири побудови, демонструючи кожний крок за допомогою кодоскопа або на дошці, звертаючи увагу на те, що побудову виконуємо спочатку тонкими лініями, а потім обводимо видимі елементи суцільною лінією, а невидимі – штриховою. Після чого учні виконують малюнки у своїх зошитах та отримують завдання записати знайдені правила-орієнтири до власних довідників. Наприклад, *правила-орієнтири побудови зображення прямої призми*:

1. Виконуємо побудову основи.
2. Через вершини основи проводимо вертикальні прямі.
3. На кожній прямій відкладаємо рівні відрізки.
4. Послідовно з'єднуємо кінці відрізків, одержуємо верхню основу.

Для учнів, які розв'язують задачу, найбільш важливим є наочність зображення. Застосовуючи метод евристичних настанов, вчитель під час практичної роботи з'ясовує з учнями, що правильний малюнок не завжди є наочним, демонструючи малюнки з невдало вибраним розташуванням геометричного тіла відносно площини проекції і напрямку проектування. Учні доходять висновку, що зображення многогранників буде наочним, якщо: многогранник розміщено перед площиною проекції у найбільш звичному для ока положенні; на зображенні подана найбільша можлива кількість його граней; зображення окремих ребер, діагоналей та ін. не зливаються. Для цього, починаючи побудову призми або піраміди з їх основи, потрібно поміркувати, які ребра основи видимі і відповідно розташувати многокутник.

Під час побудови зображень тіл обертання для попередньої корекції звертаємо увагу учнів на те, що контурні твірні конуса не є сторонами його осевого перерізу, точки дотику проведених дотичних не можуть бути кінцями того самого діаметра. Для забезпечення наочності зображення циліндра, конуса, зрізаного конуса та інших тіл обертання потрібно вміти креслити еліпси. Спочатку для цього можна користуватися шаблонами, але надалі бажано вчитися малювати їх від руки. Обов'язково звернути увагу на те, що еліпс не є об'єднанням дуг двох кіл, не повинен мати гострих кутів.

Для навчання учнів правильно зображати кулю, вироблення правил-орієнтирів, пропонуємо організувати фронтальну роботу з класом за таблицею із зображенням кулі. Рис. 1.

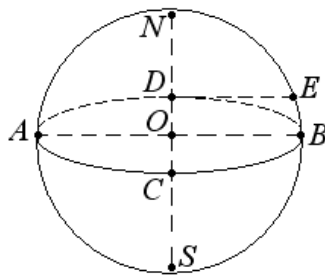


Рис. 1

У ході бесіди звертаємо увагу, що полюси N і S не лежать на обрисі кулі, інакше екватор, площина якого перпендикулярна до діаметру NS буде проектуватися не в еліпс, а у відрізок. Доцільно зупинитися також на точному зображенні полюсів. Для цього побудувавши еліпс з осями AB та CD, проводимо дотичну ED до екваторіального перерізу (E – на обрисі кулі). Відрізок ED відкладаємо на прямій CD по обидві сторони від центра. Точки N і S – шукані.

Під час розв'язування задач на побудову слід звернути увагу учнів, що на відміну від побудов на площині у просторі ми не користуємося циркулем і лінійкою. Всі побудови виконуються за властивостями паралельного проектування, причому побудови можуть бути *точні* та

умовні, в залежності від можливості точно побудувати точки та відрізки на зображенні. Застосовуючи дослідницький метод, учитель аналізує з учнями можливості побудови точних зображень на прикладах задач про прямокутний паралелепіпед, правильну призму та піраміду. Малюнки до задач виконуються учнями на дошці та в зошитах. Після розв'язування кожної задачі усно обґрунтовується точність побудови.

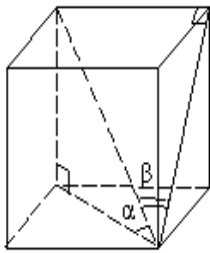


Рис. 2.

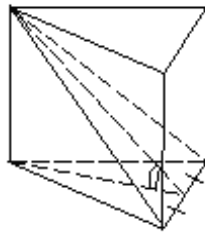


Рис. 3

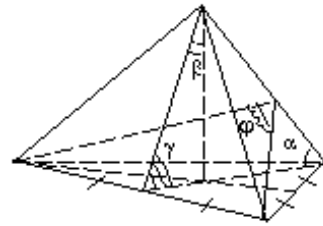


Рис. 4

Задача 1. Дано прямокутний паралелепіпед. Побудуйте кут між його діагоналлю та основою (α), діагоналлю та бічною гранню (β). Рис. 2.

Задача 2. Дано правильну трикутну призму. Переріз проходить через сторону основи та протилежну вершину верхньої основи. Покажіть кут між перерізом та основою призми. Рис. 3.

Задача 3. Дано правильну трикутну піраміду. Зобразіть її висоту, апофему, кут між бічним ребром та основою (α), між висотою та бічною гранню (β), між бічною гранню та основою (γ). Рис. 4.

До задачі 3 можна дати додаткове завдання: побудувати лінійний кут при бічному ребрі, та організувати навчальну діяльність учнів за III типом орієнтування. Для цього створюється проблемна ситуація, оскільки побудову можна виконати тільки умовно (кут ϕ на рис. 4), провівши відрізки перпендикулярів у бічних гранях умовно.

До питання про точні та умовні побудови потрібно повернутися під час вивчення тіл обертання та з'ясувати, що на практиці всі побудови тіл обертання виконуються умовно. Для успішної побудови геометричних тіл

необхідно в наочній формі розкрити учням механізм проектування. Це можна здійснити, застосувавши програму "GRAN 3D". Повертаючи модель, одержують найбільш наочне зображення геометричного тіла.

Другим видом конструктивних задач є побудови **перерізів геометричних тіл**. За програмою 11 класу передбачена тема "Перерізи многогранників, їх побудова". Починаючи розгляд побудови перерізів многогранника, методом створення проблемної ситуації з'ясовуємо поняття перерізу опуклого многогранника. Учням ставиться запитання: "Яка фігура може утворитися в перерізі многогранника площиною?" Учні за допомогою настанов учителя доходять висновку, що в перерізі призми або піраміди площиною одержуємо плоску фігуру, контур якої складається з відрізків прямих ліній, по яким площина перерізу перетинає грані тіла. Вершинами цього многокутника є точки перетину ребер тіла січною площиною. Вчитель демонструє підготовлені заздалегідь малюнки з можливими видами перерізів куба. (Рис. 5).

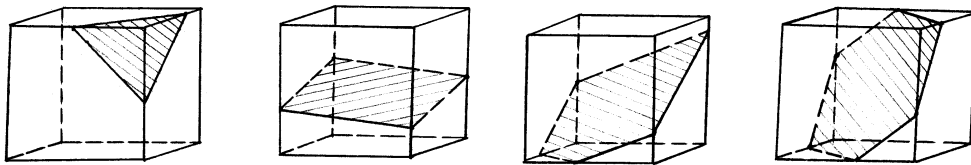


Рис. 5

Вчитель підсумовує суть поняття перерізу та висуває інше проблемне запитання: "Скільки сторін може мати многокутник-переріз многогранника? Чи може перерізом куба бути восьмикутник?" З'ясовується, що найменша кількість сторін многокутника-перерізу є три, а найбільша дорівнює кількості граней многогранника.

Під час фронтальної роботи з класом вчитель пояснює, що при побудові перерізів задається зображення многогранника та вказується спосіб задання січної площини. Актуалізуються знання учнів про способи задання площини. Вчитель, продовжуючи бесіду, вказує, що при побудові перерізів січна площина найчастіше задається трьома точками, та суть

побудови полягає у відшуванні слідів площини перерізу на гранях даного многогранника. Перш ніж перейти до побудови перерізів многогранників, актуалізуються знання учнів про побудову точок перетину прямих і площин. Вчитель організовує самостійну роботу учнів за готовими малюнками із виконаними побудовами: 1) перетину двох прямих; 2) перетину прямої і площини; 3) перетину двох площин. Використовуючи ці малюнки, учні самостійно слідкують за побудовами і доходять висновку, що це основні допоміжні задачі.

Після цього в класі розв'язуються елементарні задачі на побудову методом слідів. Вчитель повідомляє ідею методу слідів, яка полягає в наступному: відшукується слід січної площини на будь-якій із площин граней многогранника, на сліді відшукується точка, яка разом із відомою точкою перерізу належить тій же грані, на якій потрібно одержати лінію перетину (або побудувати точки перетину ребер із січною площиною).

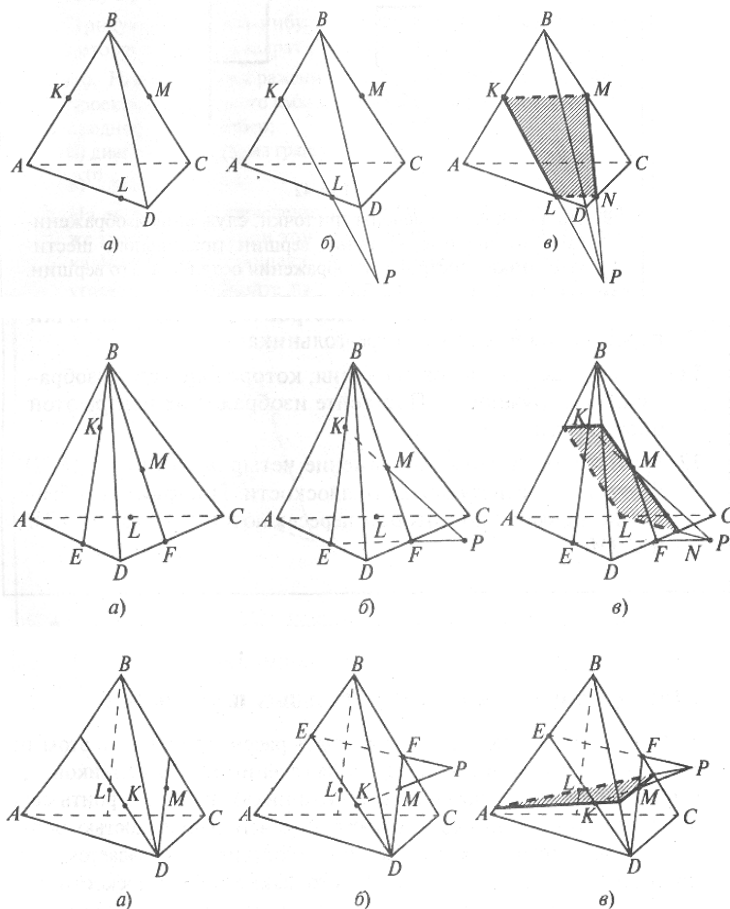


Рис. 6

У ході евристичної бесіди з класом вчитель з'ясовує, що складність побудови перерізу залежить від того, які точки січної площини задано, та ілюструє побудову перерізів на тетраедрі, розглянемо випадки розташування трьох точок січної площини: 1) всі точки лежать на ребрах; 2) дві точки на бічних гранях, одна на ребрі основи; 3) всі точки на бічних гранях. Для цього використовується таблиця з готовими малюнками кроків побудови, тобто графічними правилами-орієнтирами (рис. 6).

Усно обговорюються етапи побудови. Ця таблиця вивішується в класі, і може використовуватися учнями на наступних уроках та при виконанні домашніх завдань. Після цього одна з побудов виконується вчителем на дошці, а учнями в зошитах. Лінії та точки вчитель наносить на малюнок поступово одночасно з відповідними поясненнями. Із елементів традиційної схеми розв'язування задач на побудову доцільно використовувати тільки етап побудови.

Оскільки за програмою на побудову перерізів відведено одну навчальну годину, побудову перерізів інших геометричних тіл можна запропонувати учням для самостійної роботи, за спеціальними картками з мультиплікаційними серіями малюнків, що ілюструють кроки побудови. Учні повинні з'ясувати, як виконана побудова, та зробити пояснення для всього класу.

Для вдосконалення конструктивних умінь учнів доцільно запропонувати домашню самостійну роботу на побудову перерізів многогранників. Для цього в окремих зошитах учні готують малюнки вказаних вчителем многогранників, наприклад, куба, правильної трикутної призми, тетраедра, правильної чотирикутної піраміди. Вчитель задає на кожному малюнку індивідуально три точки, що визначають переріз. Після перевірки вчителем виконання побудов здійснюється корекція, учні виконують роботу над помилками. Крім задання площини перерізу трьома

точками доцільно розглянути випадки, коли січна площина задається умовами паралельності, перпендикулярності тощо. У цих випадках побудови виконуються умовно.

Переходячи до побудови **комбінацій геометричних тіл**, слід навести приклади тіл з навколишнього світу, повсякденного життя, які є комбінаціями тих геометричних тіл, що вивчаються. Для збудження пізнавального інтересу пропонуємо застосувати таку форму роботи. Учні отримують завдання виготовити картки з фотографіями, вирізками із журналів, малюнками об'єктів навколишнього світу. На уроці вчитель повідомляє, що у 1987 році психолог Бідерман висловив припущення про те, що в склад просторових об'єктів входять такі геометричні тіла як циліндри, конуси, паралелепіпеди, клини та інші (геони – від геометричні іони), комбінації яких дозволяють створити форму довільної фігури. Він вважає, що набір 36 геонів разом з деякими просторовими відношеннями достатні для опису об'єктів, які людина може розпізнавати [5, с.205]. Демонструється плакат (рис. 7).

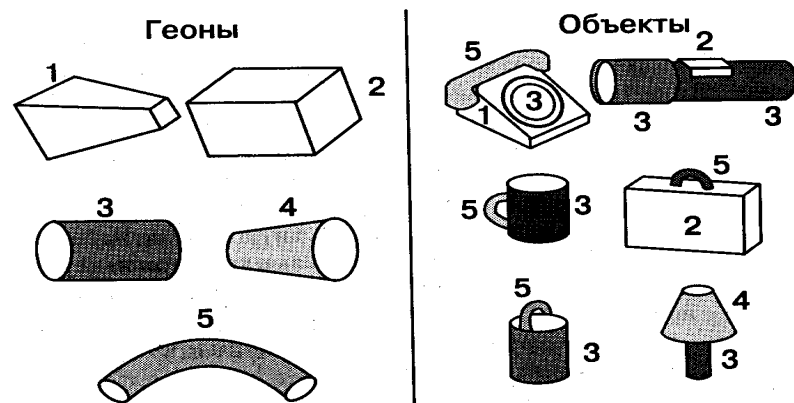


Рис. 7

Вчитель пропонує учням дослідити, з яких геометричних фігур-геонів складаються зображення на виготовлених ними картках. Оголошується конкурс на картку із зображенням об'єкта, що складається з найбільшої кількості геонів. Автори найкращих карток отримують оцінки.

Із різноманітних комбінацій геометричних тіл на особливу увагу заслуговують вписані та описані тіла. За програмою учні повинні мати уявлення про многогранники, вписані в кулю і описані навколо кулі, призму, вписану в циліндр і описану навколо циліндра, піраміду, вписану в конус і описану навколо конуса.

Для побудови комбінацій многогранників з кулею учні повинні вміти виконувати 4 основні побудови: пряма призма, вписана у сферу; правильна піраміда, вписана у сферу; пряма призма, описана навколо кулі; правильна чотирикутна піраміда, описана навколо кулі. Розглядаються правила-орієнтири цих побудов. Для цього вчитель заготовляє на кодоплівках малюнки окремих кроків побудов для кожного з чотирьох випадків. На уроці вчитель демонструє через кодоскоп покрокову побудову, накладаючи наступну плівку на попередню та пояснюючи кожний крок побудови (всі елементи вписаних тіл будуються штриховими лініями). Отримані правила-орієнтири учні самостійно занотують у свої довідники та виконують до кожного з них малюнок.

При побудові зображень комбінацій кулі з многогранниками важливо ознайомити учнів з умовами, при яких вказані побудови можливі, та способами відшукування центра і радіуса кулі для кожного з видів многогранників [6]. Для цього вчитель проводить узагальнюючу лекцію, в якій розглядає комбінації призми та кулі, піраміди та кулі. Основні правила та формули заносяться до учнівських довідників. Для визначеності пропонуємо усі комбінації з кулею зводити до випадків: куля вписана у многогранник, куля описана навколо многогранника, потрібно навчити учнів переформулювати умову в інших випадках.

Побудови комбінації кулі з многогранниками у деяких задачах можна зводити до відшукування центру кулі та її радіусу, а саму кулю не зображати. Корисно також для кращого з'ясування взаємного розташування кулі та елементів многогранника робити виносні малюнки. При відшуванні центру

і радіуса кулі побудови можуть бути як точними, так і умовними, в залежності від властивостей даної призми або піраміди. Для дослідження можливих випадків декілька учнів отримують індивідуальні завдання розв'язати задачі. Наприклад, вкажіть центр кулі та її радіуси:

Задача 1. Куля описана навколо чотирикутної піраміди, основа якої – прямокутник, а одне з бічних ребер перпендикулярне до основи.

Задача 2. Куля вписана у піраміду, основа якої – рівнобедрений трикутник. Бічні грані, що проходять через бічні сторони трикутника, перпендикулярні до основи піраміди.

Вчитель, використовуючи індивідуальну форму роботи, перевіряє правильність виконання побудов, дає необхідні консультації, вказівки. На наступному уроці ці учні пояснюють побудови всьому класу. Задача 1. Побудова *точна*, центр – середина більшого бічного ребра. (Рис. 8). Задача 2. Побудова – *умовна*, $OA = OB = OC = KC = AK = r$. (Рис. 9). У формі бесіди вчитель з'ясовує, яка з побудов точна, яка умовна, і чому.

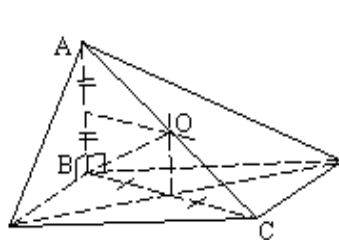


Рис. 8

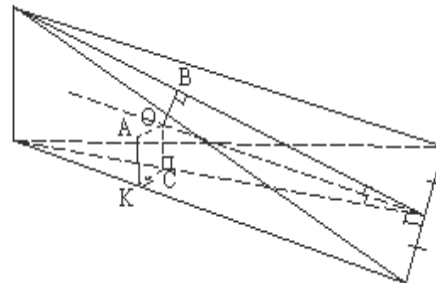


Рис. 9

Для побудови комбінацій призми з циліндром і піраміди з конусом учні повинні вміти виконувати 4 основні побудови: призма, вписана в циліндр; піраміда, вписана в конус; призма, описана навколо циліндра; піраміда, описана навколо конуса. Правила-орієнтири цих побудов вводяться аналогічно до правил-орієнтирів побудов комбінацій многогранників з кулею.

Крім зазначених комбінацій геометричних тіл корисно у задачах розглянути й інші, наприклад, куля – зрізана піраміда, куля – циліндр, куля

– конус, куля – зрізаний конус, многогранник – многогранник, конус – призма, циліндр – піраміда, зрізана піраміда – зрізаний конус тощо.

Для розвитку конструктивних умінь учнів пропонуємо домашні графічні роботи.

1. Побудувати зображення правильної призми (трикутної, чотирикутної), правильної піраміди (трикутної, шестикутної), правильної чотирикутної зрізаної піраміди.
2. Побудувати перерізи многогранників за індивідуальними картками.
3. Побудувати зображення циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі.
4. Побудувати зображення комбінацій геометричних тіл: пряма призма, вписана в сферу; правильна піраміда, вписана у сферу; пряма призма, описана навколо кулі; правильна чотирикутна піраміда, описана навколо кулі.
5. Побудувати зображення комбінацій геометричних тіл: призма, вписана в циліндр; призма описана навколо циліндра; піраміда, вписана в конус; піраміда, описана навколо конуса.

Такі графічні роботи виконуються в окремих зошитах, після перевірки вчителем та необхідної корекції зображення основних геометричних тіл переносяться у довідники. Така робота важлива для розвитку конструктивних умінь учнів, оскільки тестові та контрольні роботи в ході проведення експерименту показали, що зображення геометричних тіл викликає труднощі в учнів. Невміння виконати правильний малюнок приводить до того, що учні не можуть розв'язувати задачі.

На сучасному уроці вчитель користується готовими зображеннями геометричних тіл та таблицях, кодоплівках, на комп'ютері, застосовує моделі геометричних тіл. Але не можна нехтувати побудовою малюнків, посилаючись на брак навчального часу. Важливо, щоб учні побачили послідовні етапи побудови малюнку вчителем, навчилися здійснювати їх самостійно. Тільки після того, як учні засвоять правила побудови основних

геометричних тіл, можна дозволяти розв'язування задач за допомогою ескізів, виносних малюнків, зовсім без малюнків.

У подальших дослідженнях доцільно прослідкувати вплив рівня розвитку конструктивних умінь на якість підготовки майбутніх вчителів математики.

1. Кузьмина Н.В. Закономерности педагогической деятельности // Современные психолого-педагогические проблемы высшей школы. – Л., 1978. – Вып. 4. – С. 66 – 74.
2. Жовнір Я.М. Позиційні задачі в стереометрії. – К.: Освіта, 1991. – 95 с.
3. Музиченко С.В. Конструктивні задачі як засіб діагностики високого рівня математичних знань // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 17. – Донецьк: ТЕАН, 2002. – С. 32 – 39.
4. Четверухін М.Ф. Рисунки просторових фігур.– К.: Рад. шк., 1953.–188 с.
5. Маклаков А.Г. Общая психология. – СПб.: Питер, 2002. – 592 с.
6. Боравльов А.П., Ленчук І.Г. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову. – К.: Вища шк., 2002. – 191 с.

Sverchevska I.A. **The development of senior pupils' skills at solving constructive problems.** The paper deals with pupils' constructive skills as the component of their development and their ability to continue mathematical education. It focuses particularly on solving of constructive problems about geometric solids.

Сверчевская И.А. **Развитие умений старшеклассников решать конструктивные задачи.** Рассматриваются конструктивные умения учащихся как составляющая их развития и способности к продолжению математического образования. Сосредоточено внимание на решении конструктивных задач на геометрические тела.