

Житомирський державний університет імені Івана Франка
Фізико-математичний факультет
Кафедра прикладної математики та інформатики

Я. Б. Сікора

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

**БАЗОВІ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.030601 „МЕНЕДЖМЕНТ”
ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ І ФАКУЛЬТЕТУ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ
ОСВІТИ ТА ДОВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ**

Житомир-2011

ББК 22.183р
С35
УДК 519.8(07)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор **Б. М. Ляшенко**;
доктор педагогічних наук, доцент **О. М. Спирін**;
кандидат фізико-математичних наук, доцент **А. Й. Щехорський**

Сікора Я. Б.

- С35 Дослідження операцій: базові навчально-методичні матеріали для студентів напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент» заочної форми навчання і факультету післядипломної освіти та довузівської підготовки. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2011. – 44 с.

У базових навчально-методичних матеріалах розглядається низка економічних ситуацій, які рекомендується розв'язувати як задачі оптимізації. Зміст та матеріал відповідає нормативному документу «Галузевий стандарт вищої освіти. Освітньо-професійна програма підготовки бакалавра щодо нормативної дисципліни «Дослідження операцій».

Призначено для студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання і факультету післядипломної освіти та довузівської підготовки.

ББК 22.183р

Зміст

Вступ.....	4
Розподіл навчального часу за темами.....	5
Зміст лекцій, лабораторних занять.....	6
Зразки завдань для позааудиторної самостійної роботи студента.	24
Контроль рівня сформованості математичної компетенції студентів.....	36
Рекомендована література	41

Вступ

Дисципліна „Дослідження операцій” відображає важливий напрямок розвитку сучасної математики, в ній розглядаються питання пов’язані з використанням кількісних методів для прийняття найкращого рішення у різних галузях діяльності людини.

Основною метою викладання є формування у майбутніх менеджерів теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів.

Основними завданнями, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам знань щодо суті та етапів дослідження операцій; основних принципів та прийомів математичного моделювання операцій, принципів підбору математичного та програмного забезпечення практичної реалізації задач; а також формування у студентів умінь:

- постановки і розв’язання організаційних задач з використанням математичного апарату;
- розв’язувати задачі оптимального розподілу ресурсів;
- розв’язувати оптимізаційні задачі управління ресурсами; масового обслуговування, упорядкування та координації;
- будувати та оптимізувати сіткові моделі;
- розв’язувати задачі та будувати моделі заміни,
- розв’язувати задачі з умовами невизначеності і конфлікту;
- використовувати методики багатокритеріальної оптимізації управлінських рішень;
- використовувати прикладні програми при проведенні розрахунків на ПЕОМ і порівнянні можливих альтернатив;
- провадити післяоптимізаційний аналіз та розробку практичних рекомендацій з прийняття рішень.

Розподіл навчального часу за темами

№	Теми	Всього	Аудиторні заняття				Самостійна робота	Форма контролю
			лекції	практичні	лабораторні	підсумкові модульні роботи		
	<i>Модуль 1</i> Основні поняття та принципи математичних методів оптимізації	36	2	-	2		32	
1.	Предмет та задачі дисципліни.	5	1	-	-		4	
2.	Методи економіко-математичного моделювання.	7	1	-	-		6	
3.	Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів.	10	-	-	-		10	
4.	Оптимізація на мережах.	6	-	-	-		6	
5.	Оптимізаційні задачі управління запасами.	8	-	-	2		6	
	<i>Модуль 2</i> Задачі масового обслуговування. Сітьове планування. Теорія ігор	45	2	-	2		41	
6.	Задачі масового обслуговування.	8	2	-	-		6	
7.	Задачі упорядкування та координації. Сітьове планування.	12	-	-	2		10	
8.	Задачі та моделі заміни.	8	-	-	-		8	
9.	Задачі з умовами невизначеності та конфлікту.	7	-	-	-		7	
10.	Багатокритеріальні задачі в менеджменті.	8	-	-	-		8	
	Всього	81	4	-	4		73	екзамен

Зміст лекцій, лабораторних занять

№	Номери і назви модулів, тем, лекцій, їх зміст (мета вивчення, провідна ідея, основні проблеми, ключові поняття), тема, мета, короткий зміст практичних, лабораторних занять	Кількість навчальних годин	Назва, короткий зміст питань, винесених на позааудиторне самостійне опрацювання	Кількість навчальних годин
Настановча сесія				
1.	<p>I модуль. Основні поняття та принципи математичних методів оптимізації</p> <p>Лекція 1: Предмет та задачі дисципліни. Методи економіко-математичного моделювання.</p> <p>Мета: Показати роль і місце дослідження операцій у економіці, дати основні поняття.</p> <p>Зміст: Поняття операції. Загальні відомості про дослідження операцій. Історія розвитку методів дослідження операцій. Класифікація економіко-математичних моделей.</p>	2	<p>Поняття операції. Загальні відомості про дослідження операцій. Історія розвитку методів дослідження операцій. Класифікація економіко-математичних моделей. Задачі про призначення, розподіл матеріалів, розподіл обмежених ресурсів. Динамічні задачі управління запасами, статичні і стохастичні моделі.</p>	16
2.	<p>II модуль. Задачі масового обслуговування. Сіткове планування. Теорія ігор</p> <p>Лекція 2: Задачі масового обслуговування.</p> <p>Мета: Дати основні поняття теорії масового обслуговування, їх класифікацію.</p> <p>Зміст: Класифікація СМО, характеристика елементів одноканальної СМО, розрахунок параметрів СМО.</p>	2	<p>Теорія масового обслуговування (ТМО). Сутність задач ТМО. Системи масового обслуговування та їх класифікація. Коефіцієнт простою вимог черзі та в системі, простою каналів, середній час очікування. Характеристика елементів СМО. Розрахунки параметрів систем масового обслуговування. Методика визначення оптимальної кількості каналів обслуговування.</p>	16
Зимова сесія				
3.	<p>Лабораторне заняття 1: Задача по управлінню запасами на складах.</p>	2	<p>Сутність проблеми оптимального управління запасами. Класифікація витрат, пов'язаних зі створенням та зберіганням запасів. Основи</p>	20

№	Номери і назви модулів, тем, лекцій, їх зміст (мета вивчення, провідна ідея, основні проблеми, ключові поняття), тема, мета, короткий зміст практичних, лабораторних занять	Кількість навчальних годин	Назва, короткий зміст питань, винесених на позааудиторне самостійне опрацювання	Кількість навчальних годин
	<p>Мета: набуття навичок побудови математичних моделей задач по управлінню запасами та розв'язання цих задач.</p> <p>Зміст: Обчислення основних параметрів задачі управління запасами.</p>		<p>теорії управління запасами. Постановка задачі оптимізації поточних запасів за різних умов постачальника. Статичні детерміновані моделі оптимізації запасів без дефіциту та з дефіцитом. Стохастичні моделі управління запасами. Методи визначення оптимальних страхових запасів на основі дослідження коливань: термінів поставок, одночасно обсягів та термінів поставок, дефіцитів матеріалів.</p>	
4.	<p>Лабораторне заняття 2: Задача сітьового планування.</p> <p>Мета: ознайомитися з методом сітьового планування і управління, сформулювати навички побудови інформаційно-динамічної моделі задачі СПУ, сітьового графіка; уміння оптимізувати сітьові моделі.</p> <p>Зміст: побудова сітьової моделі. Визначення критичного шляху, побудова сітьового графіку.</p>	2	<p>Характеристика задач упорядкування та координації. Постановка задачі оптимізації послідовності обробки виробів (надання послуг). Зміст та сфери використання сітьових методів планування та управління. Класифікація систем сітьового планування та управління. Характеристика комплексу робіт. Елементи сітьового графіка, методика його побудови. Розрахунки основних параметрів сітьового графіка (аналітичний метод, матричний). Характеристика основних типів сітьових моделей (детерміновані, з урахуванням: часу, вартості, ресурсів; недетерміновані). Методи оптимізації сітьового графіка за критерієм часу: без врахування та з врахуванням ресурсів.</p>	21
	Контрольна робота			
	Екзамен			
	Разом	8		73

ЛАБОРАТОРНІ ЗАНЯТТЯ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

Тема 5. Задача по управлінню запасами на складах

Мета: набуття навичок побудови математичних моделей задач по управлінню запасами та розв'язування цих задач.

Теоретичні питання

1. Постановка задачі управління запасами.
2. Вхідні та вихідні дані задачі.
3. Основні моделі задачі управління запасами.

Теоретичні відомості

Приклад 1. Андрій є торговим агентом компанії TOYOTA і займається продажем останньої моделі цієї марки автомобіля. Річний попит оцінюється в 4000 од. Ціна кожного автомобіля 90 тис. у.о., а річні витрати на зберігання складають 10% від ціни самого автомобіля. Андрій провів аналіз витрат на замовлення і зрозумів, що середні витрати на замовлення складають 25 тис. у.о. Час виконання замовлення дорівнює восьми дням. Протягом цього часу щоденний попит на автомобілі – 20.

Чому дорівнює оптимальний розмір замовлення? Чому дорівнює точка відновлення? Які сукупні витрати? Який оптимальна кількість замовлень в рік? Який оптимальний час між двома замовленнями, якщо припустити, що кількість робочих днів в рік становить 200?

Початкові дані

величина попиту за рік $D = 4000$;

витрати замовлення $K = 25$;

витрати зберігання $h = \frac{9}{200} = 0,045$;

ціна за одиницю $c = 90$;

час виконання замовлення $L = 8$;

щоденний попит $d = 20$;

число робочих днів $T = 200$.

Розв'язання

оптимальний розмір замовлення $Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 25}{0,045}} \approx 149$;

точка відновлення $R = \frac{D}{T}L - Q^* = 160 - 149 = 11$;

число замовлень за рік $N = \frac{D}{Q^*} = 26,83$;

сукупні витрати = сукупні витрати замовлення + сукупні витрати зберігання

$$C = \frac{4000}{149}25 + \frac{149}{2}9 = 1341,64;$$

вартість продажів $= c \cdot D = 360000$;

число днів між замовленнями $t = 7,45$.

Приклад 2. На практиці об'єм партії (розмір замовлення) може відрізнятися від оптимального. Може виявитись, що зручніше замовляти по 150 чи 200, ніж 149. Виникає питання, як при цьому зміняться сукупні витрати.

Нехай 200 – мінімальне замовлення. Зміна сукупних витрат обчислюється за формулою:

$$\frac{\Delta C}{C} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta Q}{Q^*} \right)^2$$

$$\frac{\Delta Q}{Q^*} = \frac{200 - 149}{149} = \frac{51}{149} \approx 0,342 \quad \frac{\Delta C}{C} \approx \frac{1}{2}(0,342)^2 \approx 0,06$$

Зміна сукупних витрат становитиме 6%.

Приклад 3. При дискретному випадковому попиті d математичне очікування сумарних витрат при запасі s^* задовольняє нерівності

$$F(s^*) < \rho < F(s^* + 1),$$

а при неперервному випадковому попиті d $F(s^*) = \rho$, де $F(s) = r(d < s)$ - функція розподілу попиту d , $F(s^*), F(s^* + 1)$ - її значення, ρ - густина втрат через незадоволений попит.

Підприємство закуповує агрегат із запасними блоками до нього. Вартість одного блоку - 5 ум. од. у випадку виходу з ладу агрегату через поломку блоку, що відсутній у запасі, простоювання агрегату та термінове замовлення нового блоку до нього обійдуться в 100 ум. од. Дослідний розподіл агрегатів по числу блоків, що потребують заміни, представлено у таблиці.

Число замінених блоків d	0	1	2	3	4	5	6
Статистична ймовірність агрегатів $r(d)$, які потребують заміни d блоків	0,90	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00

Необхідно визначити оптимальне число запасних блоків, які необхідно придбати разом з агрегатом.

Розв'язання. За умовою $h = 5, p = 100$. Обчислимо густину втрат через недостачу запасних блоків за формулою $\rho = \frac{p}{p+h} = \frac{100}{5+100} = 0,952$. Враховуючи $F(s) = r(d < s)$, знайдемо значення функції розподілу попиту:

s	0	1	2	3	4	5	6	>6
d	0	1	2	3	4	5	6	>6
$F(s)$	0,00	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00	1,00

Очевидно, що оптимальний запас складе $s^* = 2$, бо він задовольняє нерівність $F(2) < 0,95 < F(3)$.

Хід виконання роботи

1. Згідно номеру свого варіанту оберіть умову задачі.
2. Випишіть вхідні та вихідні дані задачі.
3. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі по управлінню запасами.

Варіанти завдань

Завдання 1

Задача 1

Менеджер протягом року купує 1500 телевізорів для роздрібного продажу в своєму магазині. Витрати на зберігання кожного телевізора дорівнюють 45 тис. ум. од. в рік витрат на замовлення – 150 тис. ум. од. Кількість робочих днів в рік дорівнює 300, час виконання замовлення – 6 днів. Необхідно знайти оптимальний розмір замовлення, річні витрати на замовлення, точку відновлення запасу, число замовлень за рік, оптимальний час між двома замовленнями. Як зміняться сукупні витрати, якщо замовляти 150 телевізорів?

Задача 2

Менеджер продає 400 водяних матраців в рік, причому витрати на зберігання становлять 1 тис. ум. од. за матрац в день і витрати замовлення – 40 тис. ум. од. Кількість робочих днів дорівнює 250 і час виконання замовлення – 6 днів. Чому дорівнює оптимальний розмір замовлення? Точка відновлення? Сукупні витрати? Число замовлень в рік? Число днів між замовленнями? Який оптимальний розмір замовлення, якщо витрати на зберігання становлять 1,5 тис. ум. од?

Задача 3

Власник маленької компанії випускає електричні ножі. Щоденний попит на ножі приблизно дорівнює 40. Фіксовані витрати виробництва становлять 100 тис. ум. од., витрати на зберігання – 8 тис. ум. од. за рік. Яке мінімальне замовлення необхідно мати на складі? Знайти річні витрати на замовлення, точку відновлення запасу, число замовлень за рік, оптимальний час між двома замовленнями. Вважати, що рік містить 365 днів.

Задача 4

Компанія закуповує у заводу-виробника лобове скло для вантажних автомобілів для роздрібною торгівлі. В рік, за 200 робочих днів, реалізовується біля 10000 скла. Витрати замовлення для компанії становлять 400 тис. ум. од., щоденні витрати на зберігання одного скла – 6 тис. ум. од. Чому дорівнює оптимальний розмір замовлення? Які мінімальні річні сукупні витрати? Число замовлень в рік? Число днів між замовленнями? Знайти точку відновлення запасу, якщо час виконання замовлення 15 днів.

Задача 5

Річне замовлення на тостер становить 3000 одиниць, або 10 в день. Витрати замовлення дорівнюють 25 тис. ум. од., витрати на зберігання – 0,4 тис. ум. од. в день. Так як тостер є дуже популярним серед покупців, то у випадку відсутності товару покупці згодні почекати, поки не надійде наступне замовлення. Проте витрати, пов'язані з дефіцитом, дорівнюють 0,75 тис. ум. од. в день. Скільки тостерів буде замовляти менеджер? Який максимальний дефіцит? Чому дорівнюють сукупні витрати? Який інтервал між поставками?

Задача 6

Магазин користується популярністю у покупців завдяки широкому асортименту екологічно чистих продуктів. Більшість покупців не відмовляються від послуг магазину навіть в тому випадку, коли товару, що їх цікавить немає у продажу. Вони залишають замовлення на товар і чекають, коли надійде нова партія.

Сир – не найбільш популярний з всього набору товарів, але адміністратор магазину регулярно замовляє цей продукт. Річний попит на сир становить 500 головок. Витрати замовлення – 40 тис. ум. од. за замовлення. Витрати на зберігання – 5 тис. ум. од. в рік. Втрачений прибуток внаслідок дефіциту становить 100 тис. ум. од. в рік на одну головку сиру. Скільки сиру необхідно замовити, якщо допустити можливість дефіциту? Чому дорівнює точка відновлення замовлення, якщо час виконання замовлення 10 днів та число робочих днів в рік 250? Чому дорівнює максимальний розмір дефіциту? Який інтервал між поставками?

Задача 7

Об'єм продажу деякого магазину складає 500 упаковок супу в пакетах в рік. Величина попиту рівномірно розподіляється протягом року. Ціна одного пакету становить 2 ум. од. За доставку замовлення власник магазину повинен заплатити 10 ум. од. Час доставки замовлення від постачальника складає 12 робочих днів (при 6-денному робочому тижні). За оцінкою спеціалістів, витрати на зберігання в рік складає 0,4 ум. од. за один пакет. Необхідно визначити: скільки пакетів повинен замовляти власник магазину для однієї поставки; сукупні витрати; частоту замовлень; число замовлень в рік; точку замовлення; вартість продажу. Відомо, що магазин працює 300 днів на рік.

Задача 8

На деякому станку виготовляють деталі в кількості 2000 штук в місяць. Ці деталі використовуються для виробництва продукції на іншому станку з інтенсивністю 500 шт. в місяць. За оцінкою спеціалістів компанії, витрати на зберігання складають 0,5 ум. од. в рік за одну деталь. Вартість виробництва однієї деталі становить 2,5 ум. од., а вартість на підготовку виробництва складає 1000 ум. од. Яким повинен бути розмір партії деталей, що виробляється на першому станку, з якою частотою необхідно запускати виробництво цих партій?

Задача 9

Неонові лампи в університетському містечку замінюють з інтенсивністю 100 штук в день. Підрозділ матеріального забезпечення містечка замовляє ці лампи з визначеною періодичністю. Вартість розміщення замовлення на купівлю ламп складає 100 ум. од.

Вартість зберігання лампи на складі оцінюється в 0,02 ум. од. в день. Строк виконання замовлення від моменту його розміщення до реальної поставки становить 12 днів. Необхідно визначити оптимальну стратегію замовлення неонових ламп (оптимальний розмір замовлення, річні витрати на замовлення, точку відновлення запасу, число замовлень за рік, оптимальний час між двома замовленнями). Як зміняться сукупні витрати, якщо замінити 15 ламп?

Задача 10

Потреба підприємства в деталях деякого типу складає 120000 деталей в рік, причому ці деталі використовуються в процесі виробництва рівномірно та неперервно. Деталі замовляються раз в рік і надходять партіями однакового об'єму, вказаного у замовленні. Зберігання деталей на складі коштує 0,35 ум. од. на добу, а постачання партії – 10000 ум. од. Затримка виробництва через відсутність деталей неприпустима. Визначте найбільш економічний об'єм партії та інтервал між поставками, які необхідно вказати в замовленні. На скільки процентів збільшаться затрати на створення і зберігання запасу порівняно з мінімальними затратами при об'ємі партій, що замовляються, 5000 деталей. Знайти точку відновлення, якщо строк виконання замовлення = 16 днів.

Задача 11

Потреба підприємства в деталях деякого типу складає 120000 деталей в рік, причому ці деталі використовуються в процесі виробництва рівномірно та неперервно. Деталі замовляються раз в рік і надходять партіями однакового об'єму, вказаного у замовленні. Зберігання деталей на складі коштує 0,35 ум. од. на добу, а постачання партії – 10000 ум. од. Знайти найбільш економічний об'єм партії та інтервал між поставками, якщо відомо, що відсутність кожної деталі приносить на добу збитки в розмірі 3,5 ум. од. Визначте максимальний рівень запасу та максимальний дефіцит.

Задача 12

За умовою задачі 10 знайти зміну затрат на створення і зберігання запасу при зміні об'єму партії на 10%.

Задача 13

Щоденний попит на деякий продукт складає 100 од. Затрати на придбання кожної партії цього продукту, що не залежать від об'єму партії, дорівнюють 100 ум. од., а затрати на зберігання одиниці продукту – 0,02 ум. од. на добу. Визначте найбільш економічний об'єм партії та інтервал між поставками такого об'єму, річні витрати на замовлення, число замовлень за рік.

Задача 14

Щоденний попит на деякий продукт складає 100 од. Затрати на придбання кожної партії цього продукту, що не залежать від об'єму партії, дорівнюють 100 ум. од., а затрати на зберігання одиниці продукту – 0,02 ум. од. на добу. Можливий дефіцит, який приносить 0,03 ум. од. збитків на добу на одиницю продукту. Знайти найбільш економічний об'єм партії та інтервал між поставками, максимальний рівень запасу та максимальний дефіцит.

Задача 15

Ресторан замовляє м'ясний фарш на початку кожного тижня для задоволення тижневого попиту в 300 фунтів. Фіксована вартість розміщення замовлення становить 20 ум. од. Вартість заморожування та зберігання одного фунта фаршу коштує ресторану приблизно в 0,03 ум. од. в день. Визначте тижневі витрати ресторану, пов'язані з існуючою стратегією створення запасу; визначте оптимальну стратегію управління запасами, припускаючи, що час виконання замовлення від моменту його розміщення до реальної поставки рівне нулю; обчисліть різницю між поточними тижневими витратами ресторану та тими, які визначаються оптимальною стратегією управління запасами. Як зміняться сукупні витрати, якщо замовляти 800 фунтів?

Задача 16

Компанія зберігає на складі продукцію, яка споживається з інтенсивністю 50 одиниць в день. За розміщення замовлення компанія кожен раз платить 20 ум. од. Вартість зберігання одиниці продукції на складі обходиться в 0,35 ум. од. на тиждень. Визначте оптимальну

стратегію управління запасами, якщо припустити, що час виконання замовлення від моменту його розміщення до реального постачання = 1 тиждень. Визначте оптимальну кількість замовлення протягом року (вважаючи, що рік має 365 днів).

Задача 17

Відділ постачання компанії запропонував дві стратегії управління запасами.

Стратегія 1. Об'єм замовлення 150 одиниць при точці відновлення замовлення в 50 одиниць та час виконання замовлення 10 днів.

Стратегія 2. Об'єм замовлення 200 одиниць при точці відновлення замовлення в 75 одиниць та час виконання замовлення 15 днів.

Витрати на оформлення замовлення становлять 20 ум. од., а вартість зберігання одиниці продукції на складі обходиться в 0,02 ум. од. в день. Яку з двох стратегій необхідно затвердити.

Завдання 2

Фірма може випускати виріб чи закуповувати його. Якщо фірма сама випускає виріб, то кожний запуск його виробництва обходиться в 20 ум. од. потужність виробництва складає 100 одиниць в день. Якщо виріб закуповується, витрати на розміщення кожного замовлення рівні 15 ум. од. витрати на зберігання виробу на складі, незалежно, чи він виробляється чи закуповується, становлять 0,02 ум. од. купівля виробу фірмою оцінюється в 260000 одиниць в рік. Якщо припустити, що фірма працює без дефіциту, визначте, що вигідніше – закуповувати чи виробляти виріб?

Завдання 3

Підприємство закуповує агрегат із запасними блоками до нього. Вартість одного блоку - 3 ум. од. у випадку виходу з ладу агрегату через поломку блоку, що відсутній у запасі, простоювання агрегату та термінове замовлення нового блоку до нього обійдуться в 60 ум. од. Дослідний розподіл агрегатів по числу блоків, що потребують заміни, представлено у таблиці.

Число замінених блоків d	0	1	2	3	4	5
Статистична ймовірність агрегатів $r(d)$, які потребують заміни d блоків	0,70	0,06	0,03	0,02	0,01	0,01

Необхідно визначити оптимальне число запасних блоків, які необхідно придбати разом з агрегатом.

Виконати	Завдання 2: Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецький. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД „Професіонал”, 2005. – 264 с. – с. 183.
-----------------	--

Завдання для самостійної роботи

▪ виконати завдання	20 годин
Оцінювання	
▪ звіт	1 оцінка

Література

Основна література

1. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецький. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД „Професіонал”, 2005. – 264 с.
2. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник / Ю. П. Зайченко. – К.: ВППОЛ, 2000.

Додаткова література

3. Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И. Н. Ляшенка. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.

4. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Т. 1,2. – М.: Мир, 1981. – 712 с.

Зміст звіту

Тема роботи; завдання; вхідні та вихідні дані задачі; графічна інтерпретацію моделі задачі, результати її розв'язання; висновки за результатами розв'язання.

Контрольні запитання

1. Класифікація витрат, пов'язаних зі створенням та зберіганням запасів.
2. В чому полягає задача управління запасами?
3. Опишіть модель оптимального розміру замовлення з припущенням, що отримання замовлення не миттєве.
4. Що називається точкою відновлення? Як її знайти?
5. Опишіть модель оптимального розміру замовлення з дефіцитом.
6. Як пов'язані оптимальні розміри замовлення для задач з дефіцитом і без дефіциту при однакових параметрах?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2

Тема 7. Задача сітьового планування

Мета: ознайомитися з методами сітьового планування і управління, сформувати навички побудови інформаційно-динамічної моделі задачі СПУ, сітьового графіка; уміння оптимізувати сітьових моделей.

Теоретичні питання

1. Структурне планування.
2. Календарне планування.
3. Методика розрахунку часових параметрів робіт.

Теоретичні відомості

Приклад 1. Видавець має контракт з автором на видання його книги. Нижче представлена послідовність (спрощена) процесів, що призводять до реалізації проекту видання книги. Необхідно розробити мережу для цього проекту.

	Процес	Попередній процес	Тривалість (тижні)
A	Читання рукопису редактором	-	3
B	Пробна верстка окремих сторінок книги	-	2
C	Розробка обгортки книги	-	4
D	Підготовка ілюстрацій	-	3
E	Перегляд автором редакторських правок	A, B	2
F	Створення макету книги	E	2
G	Перевірка автором макету книги	F	2
H	Перевірка автором ілюстрацій	D	1
I	Підготовка друкованих форм	G, H	2
J	Друк книги	C, I	4

На рис. 1 показана мережа, що являє собою взаємозв'язок процесів даного проекту. Фіктивна роботи (2,3) уведена для того, щоб розмежувати конкуруючі роботи A і B. Номера вузлів мережі зростають у напрямі виконання проекту.

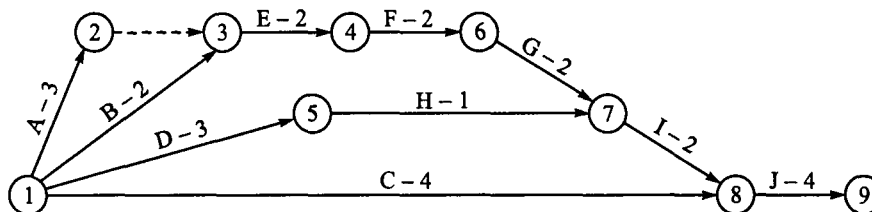


Рис. 1

Приклад 2. Знайти критичний шлях для проекту, показаного на рис. 2. Тривалість всіх робіт подана у днях.

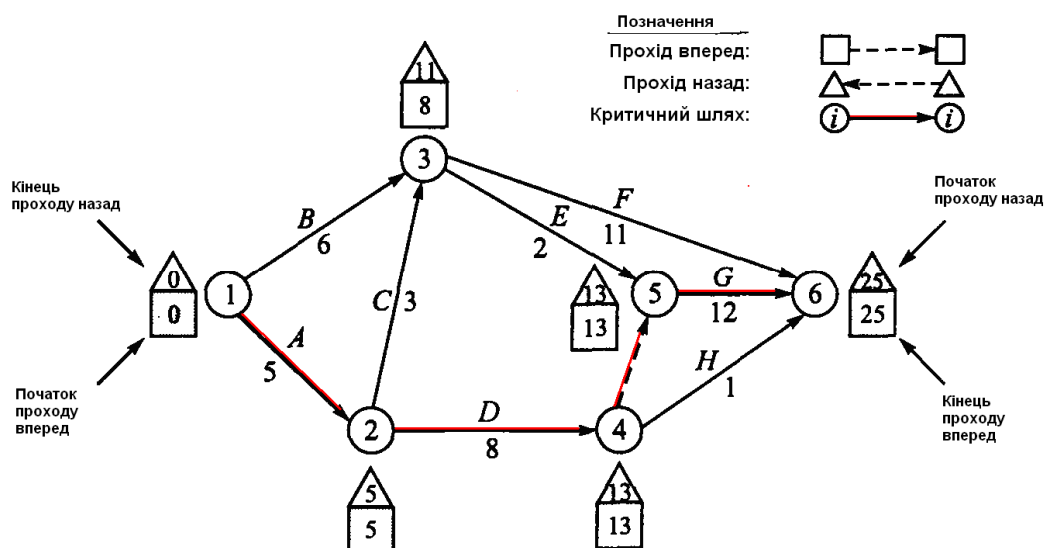


Рис. 2

Прохід вперед

Вузол 1. Припускаємо $\square_1 = 0$.

Вузол 2. $\square_2 = \square_1 + t_{12} = 0 + 5 = 5$.

Вузол 3. $\square_3 = \max\{\square_1 + t_{13}, \square_2 + t_{23}\} = \max\{0 + 6, 5 + 3\} = 8$.

Вузол 4. $\square_4 = \square_2 + t_{24} = 5 + 8 = 13$.

Вузол 5. $\square_5 = \max\{\square_3 + t_{35}, \square_4 + t_{45}\} = \max\{8 + 2, 13 + 0\} = 13$.

Вузол 6. $\square_6 = \max\{\square_3 + t_{36}, \square_4 + t_{46}, \square_5 + t_{56}\} = \max\{8 + 11, 13 + 1, 13 + 12\} = 25$.

Таким чином, розрахунки показують, що проект можна виконати за 25 днів.

Прохід назад.

Вузол 6. Припускаємо $\Delta_6 = \square_6 = 25$.

Вузол 5. $\Delta_5 = \Delta_6 - t_{56} = 25 - 12 = 13$.

Вузол 4. $\Delta_4 = \min\{\Delta_6 - t_{46}, \Delta_5 - t_{45}\} = \min\{25 - 1, 13 - 0\} = 13$.

Вузол 3. $\Delta_3 = \min\{\Delta_6 - t_{36}, \Delta_5 - t_{35}\} = \min\{25 - 11, 13 - 2\} = 11$.

Вузол 2. $\Delta_2 = \min\{\Delta_4 - t_{24}, \Delta_3 - t_{23}\} = \min\{13 - 8, 11 - 3\} = 5$.

Вузол 1. $\Delta_1 = \min\{\Delta_3 - t_{13}, \Delta_2 - t_{12}\} = \min\{11 - 6, 5 - 5\} = 0$.

Обчислення без помилок завжди призводять до результату $\Delta_1 = 0$.

Правила визначення критичних робіт показують, що критичний шлях складуть роботи $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$, тобто цей шлях проходить від початкового вузла 1 до кінцевого 6. Сума тривалостей критичних робіт (1,2), (2,4), (4,5), (5,6) дорівнює тривалості всього проекту (тобто 25 днів). Відмітимо, що робота (4,6) задовольняє дві перші умови критичного шляху

($\Delta_4 = \square_4 = 13$ і $\Delta_6 = \square_6 = 25$), але не задовольняє третій умові ($\square_6 - \Delta_4 \neq t_{46}$). Тому дана робота не є критичною.

Приклад 3. Обчислимо резерви часу для некритичних робіт в мережі проекту з прикладу 2.

Загальні і вільні резерви часу некритичних робіт представлені в наступній таблиці.

$$TF_{ij} = \Delta_j - \square_i - t_{ij}.$$

$$FF_{ij} = \square_j - \square_i - t_{ij}.$$

Некритична робота	Тривалість роботи (t_{ij})	Загальний резерв (TF_{ij})	Вільний резерв (FF_{ij})
В (1, 3)	6	$11 - 0 - 6 = 5$	$8 - 0 - 6 = 2$
С (2, 3)	3	$11 - 5 - 3 = 3$	$8 - 5 - 3 = 0$
Е (3, 5)	2	$13 - 8 - 2 = 3$	$13 - 8 - 2 = 3$
Ф (3, 6)	11	$25 - 8 - 11 = 6$	$25 - 8 - 11 = 6$
Н (4, 6)	1	$25 - 13 - 1 = 11$	$25 - 13 - 1 = 11$

Правило „червоного прапорця” слід застосовувати тільки до робіт В і С, оскільки для них $FF_{ij} < TF_{ij}$. Інші роботи (Е, Ф і Н) мають $FF_{ij} = TF_{ij}$, тому вони можуть виконуватись в будь-який час всередині своїх максимальних інтервалів часу виконання.

Розглянемо роботу В, відмічену „червоним прапорцем”. Оскільки для цієї роботи $TF = 5$ днів, вона може початися в будь-який день з інтервалу 0-5 днів від початку виконання всього проекту. Але якщо $FF = 2$ дні, то, оскільки робота почнеться в 0-, 1-, чи 2-й день від початку виконання проекту, це ніяк не вплине на наступні роботи Е і Ф. Проте, якщо робота В почнеться в $(2+d)$ -й день ($2+d < 5$), початок виконання робіт Е і Ф необхідно здвинути від самого раннього терміну (8-й день від початку виконання проекту) на величину, не меншу d ; тільки за таких умов не порушиться відношення слідування між процесами В, Е і Ф.

Для поміченої „червоним прапорцем” роботи С маємо $FF = 0$. Це значить, що будь-який здвиг початку виконання цієї роботи повинен супроводжуватись таким же (не меншим) здвигом початку виконання робіт Е і Ф.

Приклад 4. Розглянемо проект з прикладу 1. Щоби не повторювати обчислення критичного шляху, значення a , m і b , представлені у таблиці, були вибрані так, щоб $\bar{t}_{ij} = t_{ij}$ для всіх i та j .

Робота	(i, j)	(a, m, b)
А	1,2	(3,5,7)
В	1,3	(4,6,8)
С	2,3	(1,3,5)
Д	2,4	(5,8,11)
Е	3,5	(1,2,3)
Ф	3,6	(9,11,13)
Н	4,6	(0,0,0)
Г	5,6	(10,12,14)

Середнє \bar{t} і дисперсія V_{ij} для різних робіт дано в наступній таблиці. Для фіктивної роботи $(a, m, b) = (0,0,0)$, тому її середнє і дисперсія також дорівнюють нулю.

Робота	(i, j)	\bar{t}	V_{ij}
А	1,2	5	0,444
В	1,3	6	0,444
С	2,3	3	0,44
Д	2,4	8	1
Е	3,5	2	0,111
Ф	3,6	11	0,444

Н	4,6	0	0
G	5,6	12	0,444

В таблиці наведені найдовші шляхи (які були визначені за середньою тривалістю) від початкового вузла 1 до всіх інших вузлів, а також відповідні середні значення і дисперсії.

Вузол	Найдовший шлях	Середнє шляху	Стандартне відхилення шляху
2	1-2	5	0,44
3	1-2-3	8	0,89
4	1-2-4	13	1,44
5	1-2-4-5	13	1,44
6	1-2-4-5-6	25	1,89

І на кінець, в наступній таблиці представлені обчислені аналітиком значення ймовірностей того, що кожен вузол буде досягнутий з запланований час S_j .

Вузол	Найдовший шлях	Середнє шляху	Стандартне відхилення шляху	S_j	K_j	$P\{z \leq K_j\}$
2	1-2	5	0,44	5	0	0,5
3	1-2-3	8	0,89	11	3,18	0,9993
4	1-2-4	13	1,44	12	-0,83	0,2033
5	1-2-4-5	13	1,44	14	0,83	0,7967
6	1-2-4-5-6	25	1,89	26	0,73	0,7673

Хід виконання роботи

1. Згідно номеру свого варіанту оберіть умову задачі.
2. Побудуйте сітьову модель.
3. Визначте критичний шлях.
4. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій.
5. Побудуйте часовий графік.
6. Знайдіть загальні та вільні запаси часу для некритичних процесів та помітьте при необхідності їх „червоними прапорцями”.

Варіанти завдань

Завдання 1

1. В таблиці наведені дані по програмі будівництва будинку. Побудуйте сітьову модель цієї програми та виконайте її розрахунок. Визначте критичні шляхи в мережі програми. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.

Операція	Опис	Попередні операції	Тривалість (в днях)
A	Підготовка будівельної площадки	-	1
B	Доставка матеріалів та обладнання	-	2
C	Риття котловану	A	1
D	Залиття фундаменту бетоном	C	2
E	Зовнішні сантехнічні роботи	B, C	6
F	Побудова каркасу будівлі	D	10
G	Підведення електрики	F	3
H	Настилення підлоги	G	1
I	Покриття будівлі	F	1
J	Внутрішні сантехнічні роботи	E, H	5
K	Обшилювання дошками	I	2
L	Зовнішня теплоізоляція	F, J	1
M	Установка дверей та вікон	F	2
N	Кладка цегли	L, M	4

O	Теплоізоляція стін та стелі	G, J	2
P	Штукатурка стін та стелі	O	2
Q	Теплоізоляція даху	I, P	1
R	Внутрішнє оздоблювання	P	7
S	Зовнішнє оздоблювання	I, N	7
T	Благоустрій території	S	3

2. Для підготовки фінансового плану на наступний рік фірмі необхідно отримати дані з відділів продажу, виробництва, фінансів та бухгалтерії. В таблиці вказані відповідні операції та їх тривалість. Побудуйте сітьову модель цієї програми та виконайте її розрахунок. Визначте критичні шляхи в мережі програми. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.

Операція	Опис	Попередні операції	Тривалість (в днях)
A	Розробка прогнозу збуту	-	10
B	Вивчення кон'юнктури ринку	-	7
C	Підготовка робочих креслень виробу та технології його виробництва	A	5
D	Розробка календарних планів виробництва	C	3
E	Оцінка вартості виробництва	D	2
F	Визначення ціни виробу	B, E	1
G	Розробка фінансового плану	E, F	14

3. В таблиці перераховані операції, необхідні для організації виступу хору при свічках. Побудуйте сітьову модель цієї програми та виконайте її розрахунок. Визначте критичні шляхи в мережі програми. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.

Операція	Опис	Попередні операції	Тривалість (в днях)
A	Вибір музичного твору	-	21
B	Розучування музики	A	14
C	Розмноження нот	A	14
D	Пробні співи	B, C	3
E	Репетиція хору	D	70
F	Репетиція солістів	D	70
G	Отримання канделябрів	D	14
H	Закупівля свічок	G	1
I	Встановлення канделябрів	H	1
J	Закупівля декорацій	D	1
K	Встановлення декорацій	J	1
L	Замовлення костюмів для хору	D	7
M	Прасування костюмів	L	7
N	Перевірка системи підсилення звуку	D	7
O	Вибір записів	N	14
P	Настоявання системи підсилення звуку	O	1
Q	Генеральна репетиція хору	E, F, P	1
R	Банкет	Q, I, K	1
S	Проведення концерту	M, R	1

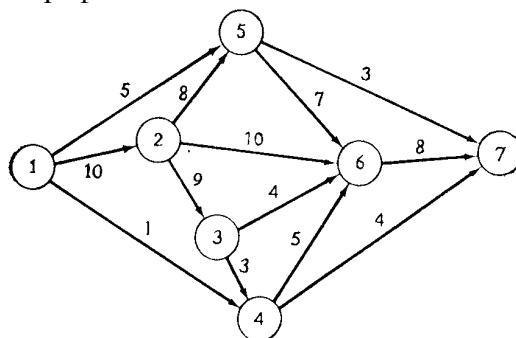
4. В таблиці наведений перелік операцій по переносу частини високовольтної лінії напругою 13,8 кВ та довжиною біля 0,5 км. Перенесення лінії необхідно у зв'язку з розширенням дороги, вздовж якої вона проходить. Побудуйте сітьову модель цієї програми та виконайте її розрахунок. Визначте критичні шляхи в мережі програми. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.

Операція	Опис	Попередні операції	Тривалість (в днях)
A	Оцінювання складу і змісту робіт	-	1
B	Повідомлення споживачів електроенергії про тимчасове відключення системи	A	0,5
C	Складання замовлення на матеріали та обладнання	A	1
D	Огляд району проведення робіт	A	0,5
E	Постачання матеріалів	C, D	3
F	Розподілення опор по точкам монтажу	E	3,5
G	Пов'язування точок монтажу	D	0,5
H	Розмітка точок монтажу	G	0,5
I	Копання ям під опори	H	3
J	Монтаж опор	F, I	4
K	Захист старих проводів	F, I	1
L	Протягування нових проводів	J, K	2
M	Монтаж арматури	L	2
N	Перевірка нових проводів	L	2
O	Підстригання дерев	D	2
P	Переключення ліній	B, M, N, O	0,1
Q	Включення і фазування нової лінії	P	0,5
R	Прибирання будівельного сміття	Q	1

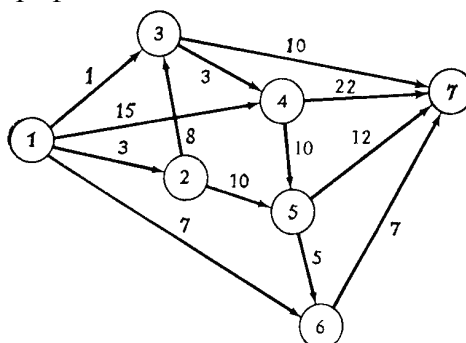
5. Операції, пов'язані з купівлею нового авто, перераховані в таблиці. Побудуйте сітьову модель цієї програми та виконайте її розрахунок. Визначте критичні шляхи в мережі програми. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.

Операція	Опис	Попередні операції	Тривалість (в днях)
A	Проведення техніко-економічного обґрунтування	-	3
B	Пошук покупця автомобіля	A	14
C	Побудова списку моделей, що випускаються	A	1
D	Оцінювання моделей	C	3
E	Опитування думки автомеханіків	C	1
F	Збір інформації від агентів по продажу	C	2
G	Систематизація зібраної інформації	D, E, F	1
H	Вибір трьох найбільш підходящих моделей	G	1
I	Перевірка трьох обраних моделей	H	3
J	Збір гарантійних і фінансових даних	H	2
K	Вибір однієї моделі	I, J	2
L	Порівняння агентів з продажу та вибір агента	K	2
M	Пошук бажаного кольору	L	4
N	Повторна перевірка обраної моделі	L	1
O	Оформлення купівлі автомобіля	B, M, N	3

6. Визначте критичні шляхи в мережі програми. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.



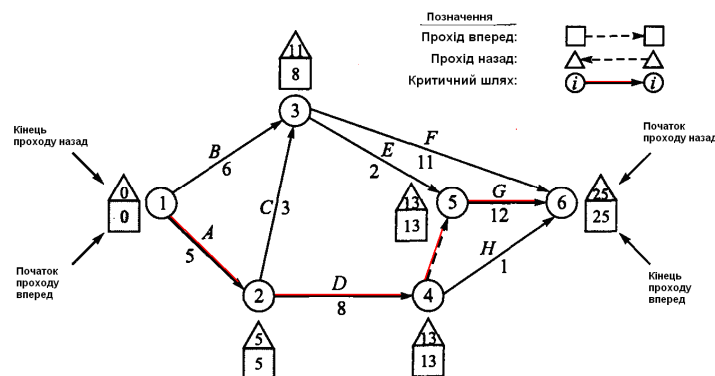
7. Визначте критичні шляхи в сіті програми. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.



8. Для розширення частини дороги необхідно перенести повітряну електролінію (довжиною 1700 футів). В наступній таблиці наведені етапи виконання робіт по заміні електролінії. Побудуйте відповідну сітьову модель та зробіть її розрахунок. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.

Процес	Попередній процес	Тривалість (дни)
A	-	1
B	-	2
C	A	1
D	C	2
E	B, C	6
F	D	10
G	F	3
H	G	1
I	F	1
J	E, H	5
K	I	2
L	F, J	1
M	F	2
N	L, M	4
O	G, J	2
P	O	2
Q	I, P	1
R	P	7
S	I, N	7
T	S	3

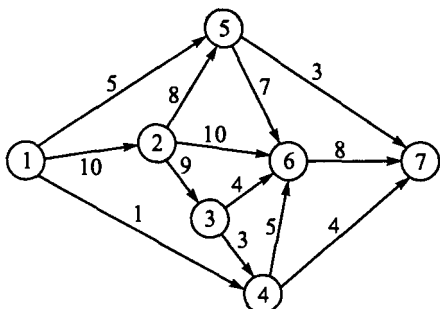
9. Нехай в проекті з прикладу тривалість процесів В і F зростає до 20 і 25 днів відповідно.



Визначте критичний шлях. Побудуйте сітьовий графік. Знайдіть загальні та вільні запаси часу для некритичних процесів та помітьте при необхідності їх „червоними прапорцями”. Нехай процес А почався на 5-й день від початку виконання всього проекту. Визначте по можливості ранні терміни початку процесів С, D, Е і Н. Припустимо, що для виконання процесів F, G і Н необхідно одне й теж обладнання. Визначте мінімально необхідну кількість цього обладнання.

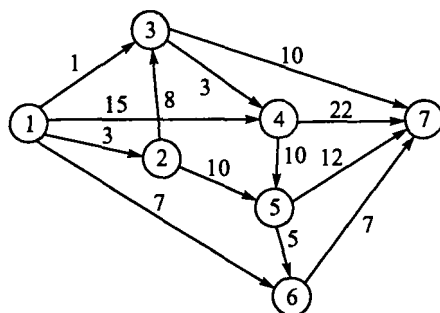
10. Обчисліть запаси часу та розставте „червоні прапорці” процесам проектів, показаних на рис. Потім побудуйте часові графіки при виконанні наступних вимог.

1. Процес (1,5) не може початись раніше 14-го моменту часу.
2. Процеси (5,6) і (5,7) використовують однакове обладнання, яке в будь-який момент часу може використовуватись тільки в одному процесі.
3. Всі інші процеси починаються так рано, як тільки можливо.

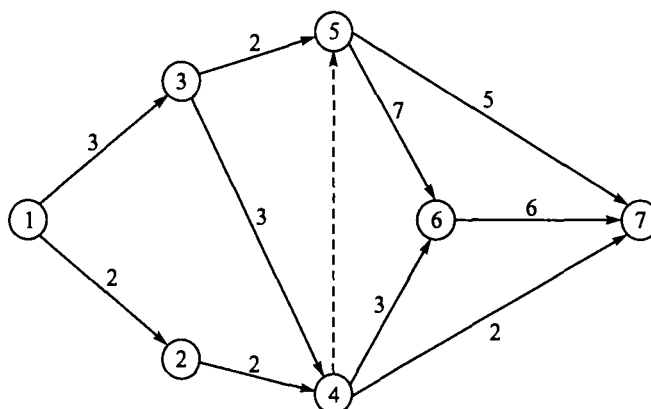


11. Обчисліть запаси часу та розставте „червоні прапорці” процесам проектів, показаних на рисунку. Потім побудуйте часові графіки при виконанні наступних вимог.

1. Процес (1,3) повинен початись так рано. Як тільки можливо. З врахуванням того, що процеси (1,2), (1,3), (1,6) використовують однакове обладнання. Яке в будь-який момент часу може використовуватись тільки в одному процесі.
2. Всі інші процеси починаються так рано, як тільки можливо.



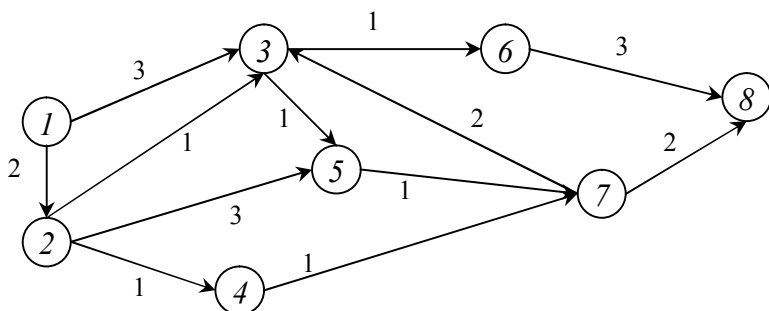
12. Знайдіть критичний шлях для мережі проекту. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.



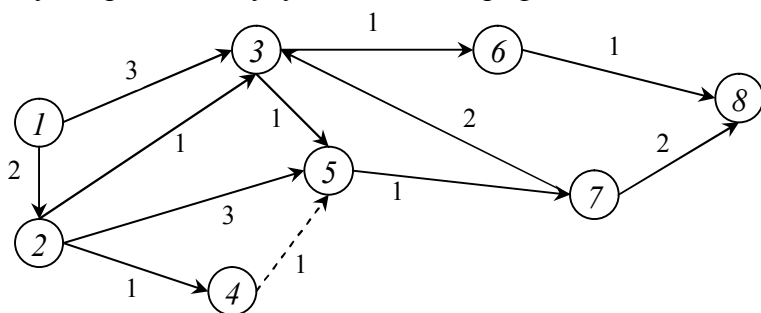
13. Побудуйте відповідну сітьову модель та зробіть її розрахунок. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.

№ з/п	Робота	Спирається на роботу	Час виконання роботи
1.	a_1		1
2.	a_2	a_1	2
3.	a_3	a_1	4
4.	a_4	a_2, a_3	5
5.	a_5	a_3	3
6.	a_6	a_4, a_5	6
7.	a_7	a_5, a_6	2

14. Знайдіть критичний шлях для мережі проекту. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.



15. Знайдіть критичний шлях для мережі проекту. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.



16. Побудуйте відповідну сітьову модель та зробіть її розрахунок. Обчисліть загальний та вільний резерви часу операцій. Побудуйте часовий графік.

№ з/п	Робота	Спирається на роботу	Час виконання роботи
1.	a_1		2
2.	a_2	a_1	3
3.	a_3	a_1	5
4.	a_4	a_2, a_3	7
5.	a_5	a_2	6
6.	a_6	a_4, a_5	4
7.	a_7	a_4, a_6	1

Завдання 2

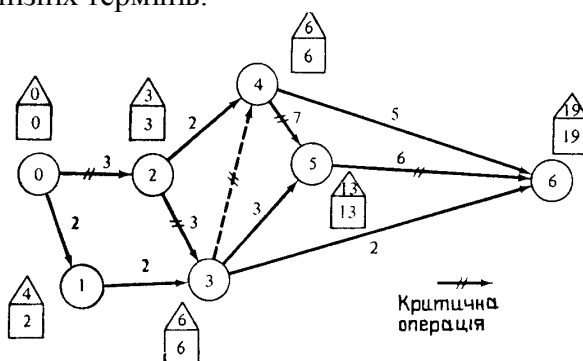
1) Припустимо, що для програм задачі оцінки тривалості операцій (a,b,m) задані, як показано в таблиці. Знайти ймовірності того, що різноманітні події мережі настануть не пізніше своїх найбільш пізніх термінів.

Операція	(a, b, m)	Операція	(a, b, m)
1,2	(5, 8, 6)	3,6	(3, 5, 4)
1,4	(1, 4, 3)	4,6	(4, 10, 8)
1,5	(2, 5, 4)	4,7	(5, 8, 6)
2,3	(4, 6, 5)	5,6	(9, 15, 10)
2,5	(7, 10, 8)	5,7	(4, 8, 6)
2,6	(8, 13, 9)	6,7	(3, 5, 4)
3,4	(5, 10, 9)		

2) Припустимо, що для програм задачі оцінки тривалості операцій (a,b,m) задані, як показано в таблиці. Знайти ймовірності того, що різноманітні події мережі настануть не пізніше своїх найбільш пізніх термінів.

Операція	(a, b, m)	Операція	(a, b, m)
1,2	(1, 4, 3)	3,7	(12, 14, 13)
1,3	(5, 8, 7)	4,5	(10, 15, 12)
1,4	(6, 9, 7)	4,7	(8, 12, 10)
1,6	(1, 3, 2)	5,6	(7, 11, 8)
2,3	(3, 5, 4)	5,7	(2, 8, 4)
2,5	(7, 9, 8)	6,7	(5, 7, 6)
3,4	(10, 20, 15)		

3) Дана сітьова модель, для програм задачі оцінки тривалості операцій (a,b,m) задані, як показано в таблиці. Знайти ймовірності того, що різноманітні події мережі настануть не пізніше своїх найбільш пізніх термінів.



Операція	(a, b, m)	Операція	(a, b, m)
0,1	(1, 3, 2)	3,5	(1, 7, 2,5)
0,2	(2, 8, 2)	3,6	(1, 3, 2)

1,3	(1, 3, 2)	4,5	(6, 8, 7)
2,3	(1, 11, 1,5)	4,6	(3, 11, 4)
2,4	(0,5, 7,5, 1)	5,6	(4, 8, 6)

Виконати	Завдання: Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецький. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД „Професіонал”, 2005. – 264 с. – с. 191.
-----------------	--

Завдання для самостійної роботи

■ виконати завдання	21 година
---------------------	-----------

Оцінювання

■ звіт	1 оцінка
--------	----------

Література

Основна література

1. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецький. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД „Професіонал”, 2005. – 264 с.
2. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – 6-е изд.; пер. с англ. – М.: Изд. дом „Вильямс”, 2001. – 912 с.

Додаткова література

3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник / Ю. П. Зайченко. – К.: ВІПОЛ, 2000.
4. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Т. 1,2. – М.: Мир, 1981. – 712 с.

Зміст звіту

Тема роботи; завдання; сітьова модель із вказаними ранніми та пізніми термінами настання події; сітьовий графік, вказані критичні роботи, резерви часу для некритичних робіт; наведені обчислення; висновки за результатами розв’язання.

Контрольні запитання

1. Що називається структурною таблицею комплексу робіт ?
2. Що таке ранг роботи?
3. Як будується сітьовий графік?
4. Як визначити час закінчення всього комплексу робіт?
5. Які роботи називаються критичними? Як їх знайти?
6. Що таке критичний шлях?
7. Як знайти загальний та вільний запасу часу?
8. Сформулюйте правило „червоного прапорця”.
9. Для наступних процесів визначте максимальний здвиг початку їх виконання (відносно раннього терміну початку виконання), який не порушить ніяких відношень слідування з іншими процесами.
 - а) $TF=10$, $FF=10$, $t=4$.
 - б) $TF=10$, $FF=5$, $t=4$.
 - в) $TF=10$, $FF=0$, $t=4$.
10. В задачі на основі значень запасів часу (див. лекції) дайте відповідь на наступні питання.
 - а) Нехай процес В почався в 1-й день від початку виконання всього проекту, а процес С – в 5-й день. Який ранній термін початку процесів Е і F?
 - б) Нехай процес В почався на 3-й день від початку виконання проекту, а процес С – на 7-й. Який ранній термін початку процесів Е і F?
 - в) Чи зможе процес В початись після 6-го дня від початку процесів Е і F?

ВЗРАЗКИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПОЗААУДИТОРНОЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

Самостійна робота полягає у вивченні теоретичного матеріалу та виконанні комплексної контрольної роботи.

Для самостійного вивчення студентами заочної форми навчання пропонуються теми.

№ п/п	Вид самостійної роботи		
	Найменування тем, що винесені на самостійне вивчення	Години	Рекомендована література
1.	Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів.	10	[11] с. 226-233, 447-452
2.	Оптимізація на мережах.	6	[11] с.244-282
3.	Задачі та моделі заміни.	8	[11] с.458-461
4.	Задачі з умовами невизначеності та конфлікту.	7	[11] с. 549-579
5.	Багатокритеріальні задачі в менеджменті.	8	[11] с. 382-394

Кожний студент має виконати усі завдання контрольної роботи.

Розв'язання завдань має бути виконано з необхідним поясненням і обґрунтуванням виконуваних дій.

Контрольна робота має бути акуратно оформлена; порядок запису виконаних завдань має відповідати їх нумерації.

Студент, який не виконав усіх завдань і не оформив належним чином контрольну роботу, **не допускається до захисту контрольної роботи** з виставленням оцінки „не зараховано”.

Захист контрольної роботи здійснюється за таким порядком: студент отримує індивідуальний варіант завдань, аналогічних завданням з контрольної роботи і протягом обмеженого часу демонструє володіння методами розв'язання відповідних задач. Подальше уточнення ступеня володіння необхідними методами та навичками здійснюється на співбесіді. По ходу співбесіди викладач має право задавати питання щодо застосованих термінів, понять, формул, теорем.

Успішний захист контрольної роботи може бути врахований при виставленні екзаменаційної оцінки.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

I. 1. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виробу, ціни виробів і загальна кількість наявних ресурсів наведені в таблиці.

Ресурси	Норма витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	
Деревина, м ³			
перший вид	0,2	0,1	40
другий вид	0,1	0,3	45
Трудовісткість, люд.-год.	1,2	1,5	360
Ціна одного виробу, тис. грн.	6	8	

- Вважаючи, що збут продукції забезпечений, визначити: скільки столів і шаф необхідно виготовити фабриці, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.
- Визначити, збільшення яких ресурсів найбільш вигідне для фабрики і чому.
- Як зміниться розв'язок, якщо запас деревини 1 виду збільшиться на 10 м³?
- Чи зміниться розв'язок, якщо ціна одного стола зросте на 4 тис. грн.?

2. Для виробництва двох видів морозива (вершкового і молочного) комбінат використовує цукор і вершки. Норми витрат цих продуктів, добові запаси, а також ціна реалізації по кожному виду морозива наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на 1 кг морозива		Загальний запас продуктів
	молочне	вершкове	
Вершки, кг.	0,2	0,1	160
Цукор, кг.	0,2	0,4	240
Трудовитрати, люд.-год.	2	3	1800
Ціна 1 кг морозива, грн.	60	75	

1. Вважаючи, що збут морозива забезпечений, визначити, скільки вершкового і молочного морозива повинен випускати комбінат на добу, щоб прибуток від реалізації був максимальним.
2. Визначити, збільшення запасів яких продуктів є найбільш доцільним і чому.
3. Якщо фонд робочого часу знизиться на 300 люд.-год., як це вплине на розв'язок?
4. Якщо ціна 1 кг. молочного морозива зросте до 90 грн., як це вплине на визначення добового плану виробництва?

3. Для виробництва карамелі двох видів А і В кондитерська фабрика використовує цукор і фруктове пюре. Норми витрат цих продуктів, а також витрати праці на 1 кг карамелі, ціни її реалізації і загальний запас виробничих ресурсів вказані в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на 1 кг виробу		Загальний запас ресурсів
	карамель А	карамель В	
Цукор, кг.	0,2	0,6	180
Фруктове пюре, кг.	0,4	0,2	120
Трудовитрати, люд.-год.	0,4	0,5	180
Ціна 1 кг карамелі, грн.	45	60	

1. Вважаючи, що збут забезпечений, визначити, скільки карамелі А і В необхідно випускати фабриці, щоб прибуток від реалізації був максимальним.
2. Визначити, чи можливе зниження запасів яких-небудь ресурсів і на яку величину.
3. Якщо запас цукру збільшиться до 200 кг., як це вплине на розв'язок?
4. Якщо ціна 1 кг. карамелі виду А зросте до 90 грн., як зміниться розв'язок?

4. Для випуску двох сортів тіста кондитерська використовує цукор і яйця. Витрати цих ресурсів, а також витрати праці, загальна кількість наявних ресурсів і ціни за 1 кг тіста кожного сорту наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на 1 кг тіста		Загальний запас ресурсів
	карамель А	карамель В	
Яйця, шт.	5	2	1000
Цукор, кг.	0,3	0,25	75
Трудовитрати, люд.-год.	0,25	0,5	125
Ціна 1 кг карамелі, грн.	15	10	

1. Вважаючи, що збут забезпечений, визначити, скільки тіста кожного виду необхідно випускати фабриці, щоб прибуток від реалізації був максимальним.
2. Визначити, чи є робочий час дефіцитним ресурсом? Обґрунтувати відповідь.
3. Якщо запас цукру збільшиться на 15 кг., як це вплине на розв'язок?
4. Якщо ціна тіста 1 сорту зросте до 20 грн. за кг., як зміниться розв'язок?

5. Для виробництва стільців та столів меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, ціни одиниці готової продукції і загальна кількість наявних ресурсів наведені в таблиці.

Ресурси	Норма витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стілець	стіл	
Деревина, м ³			
перший вид	1	3	360
другий вид	1	0,5	200
Трудовісткість, люд.-год.	2,5	3	900
Ціна одного виробу, тис. грн.	18	24	

1. Вважаючи, що збут продукції забезпечений, визначити: скільки стільців і столів необхідно виготовити фабриці, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.
2. Цінність якого ресурсу є найбільшою? Обґрунтувати відповідь.
3. Запаси якого з ресурсів можна знизити і на яку величину?
4. До якої величини може зрости ціна одного стільця, щоб попередній розв'язок не змінився?

6. Фабрика виробляє фарбу двох видів: для внутрішнього і зовнішнього використання, використовуючи при цьому сировину двох видів: А і В. Норми витрати сировини на 1 т фарби кожного виду, загальна кількість початкових продуктів, а також ціни реалізації фарби кожного виду наведені нижче.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на 1 т фарби, т		Загальний запас ресурсів
	для внутрішнього використання	для зовнішнього використання	
А	2	3	6
В	5	2	10
Ціна 1 т фарби, млн. грн.	1	2	

1. Встановлено, що добовий попит на фарбу для зовнішнього використання ніколи не перевищує 1,5 т. Визначити, скільки фарби кожного виду потрібно виробляти фабриці, щоб її прибуток був максимальним.
2. Чи є попит на фарбу для зовнішнього використання дефіцитним «ресурсом» і на скільки є бажаним його збільшення?
3. Якщо запас сировини виду В знизиться до 8 т, як це вплине на вибір рішення?
4. Якщо ціна фарби для зовнішнього використання зросте до 3 млн. грн. за 1 т, як внаслідок цього зміниться розв'язок?

7. Для пошиття пальто і курток швейна фабрика використовує тканину двох видів.

Витрати тканини, загальний її запас, а також ціни реалізації готових виробів наведені в таблиці.

Тканина	Витрати тканини на один виріб, м		Добовий запас тканини, м
	пальто	куртка	
Перший вид	5	2	100
Другий вид	1	4	40
Ціна одного виробу, тис. у.о.	20	15	

1. Встановлено, що попит на куртки не перевищує 30 шт. на добу. Визначити, скільки пальто і курток повинна виробляти фабрика, щоб її прибуток був максимальним.
2. Запас якого виду тканини доцільно збільшувати і чому?
3. Чи є попит дефіцитним ресурсом і можлива зміна його величини?
4. Якщо ціна куртки зросте до 18 тис. у.о. за 1 т, чи вплине це на розв'язок?

8. Деталі двох видів А₁ і А₂ послідовно обробляються на трьох станках. Відомі: час обробки однієї деталі кожного виду кожним станком і сумарний час роботи станків у запланований період, а також ціни, за якими реалізуються готові вироби.

Станки	Час обробки однієї деталі		Час роботи станків, год
	A ₁	A ₂	
I	1	2	16
II	2	3	28
III	3	3	30
Ціна однієї деталі, тис. грн.	4	3	

1. Встановлено, що реалізація деталей A₁ і A₂ забезпечена у будь-якій кількості. Визначити, скільки виробів A₁ і A₂ слід випускати цеху, щоб прибуток від реалізації був максимальним.
2. Чи є фонд часу роботи станка III дефіцитним ресурсом?
3. Робочий час яких станків доцільно збільшувати і наскільки?
4. При зміні ціни однієї деталі A₁ до 5 тис. грн. чи зміниться план виробництва?

9. Завод випускає вироби двох типів: A і B. При цьому використовується сировина чотирьох видів. Витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції, запаси сировини і ціни готової продукції наведені нижче.

Сировина	Витрати сировини на один виріб, кг.		Запаси сировини, кг
	A	B	
I	2	3	21
II	1	0	4
III	0	1	6
IV	2	1	10
Ціна однієї деталі, тис. грн.	3	2	

1. Вважаючи, що збут продукції забезпечений, встановити план виробництва виробів A і B, що забезпечує максимальний прибуток від реалізації.
2. Визначити, збільшення запасів яких видів сировини і на яку величину найбільш доцільно для заводу.
3. Визначити, запаси яких ресурсів є надлишковими для встановленого плану виробництва.
4. Якщо ціна виробу B зростає до 3 тис. грн., як це вплине на вибір рішення?

10. Чотири станка обробляють два види деталей A і B. Кожна деталь обробляється на усіх чотирьох станках. Відомі: час обробки деталі на кожному станку, час обробки станків протягом одного циклу виробництва і ціна однієї деталі A і B.

Станки	Час обробки однієї деталі, год.		Час роботи станка за один цикл виробництва, год.
	A	B	
I	1	2	16
II	2	3	25
III	1	1	10
IV	3	1	24
Ціна однієї деталі, тис. грн.	4	1	

1. Встановлено, що збут продукції забезпечений. Визначити план виробництва деталей A і B, що забезпечить максимальний прибуток від реалізації.
2. Визначити, який із ресурсів є найбільш дефіцитним і чому.
3. Який із станків працює зайву кількість годин і скільки годин?
4. Як зміниться план виробництва, якщо ціна деталі B зростає до 2 тис. грн.?

Приклад розв'язання завдання

ВАРІАНТ № 0

Визначити добову виробничу програму невеликого цеху з пошиття жіночого одягу. Для весняно-літнього сезону модельєри цеху розробили нові моделі жіночих брюк та спідниць; відомі витрати на пошиття цих виробів і ціна їх реалізації на ринку. Необхідно встановити кількість брюк та спідниць, які необхідно пошити за добу. Цифрова інформація по даній ситуації наведена у табл. 1.

Таблиця 1

Виробничі фактори	Витрати на один виріб		Максимально можливий добовий запас
	брюки	спідниці	
Тканина, м	1,5	2	42
Трудовісткість, люд.-год.	3	2	60
Накладні витрати, у.о.	5	5	200
Ціна одного виробу, у.о.	60	50	

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на брюки ніколи не перевищить 18 шт. Попит на спідниці забезпечений.

Яку кількість брюк і спідниць повинен пошити цех, щоб прибуток від реалізації продукції був максимальний?

Розв'язання

Для розв'язання поставленої задачі потрібно почати з побудови математичної моделі.

Так як слід визначити обсяги виробництва, то змінними у моделі є:

x_1 – обсяг виробництва брюк на добу, шт.

x_2 – обсяг виробництва спідниць на добу, шт.

При розв'язанні задачі повинні бути враховані обмеження на витрати виробничих факторів (тканини, праці) і накладні витрати, а також попит на готову продукцію.

Отримаємо чотири обмеження:

$$1) \ 1,5x_1 + 2x_2 \leq 42;$$

$$2) \ 3x_1 + 2x_2 \leq 60;$$

$$3) \ 5x_1 + 5x_2 \leq 200;$$

$$4) \ x_1 \leq 18.$$

Обсяги виробництва продукції не можуть набувати від'ємних значень, тобто $x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$.

Мета нашого аналізу полягає в максимізації прибутку, кількісним виразом якого є вираз: $60x_1 + 50x_2 \rightarrow \max$. Тобто, маємо задачу лінійного програмування:

$$F(x_1, x_2) = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow \max,$$

$$1,5x_1 + 2x_2 \leq 42;$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 60;$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 200;$$

$$x_1 \leq 18.$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язок можна отримати графічним способом (рис. 3).

Шуканою областю розв'язків, у якому одночасно виконуються усі обмеження моделі, є багатокутник ABCDE. Щоб знайти оптимальний розв'язок, необхідно переміщувати пряму, що характеризує прибуток (рис. 3), у напрямку зростання цільової функції до тих пір, поки вона не переміститься у область недопустимих розв'язків.

На рис. 3 видно, що оптимальному розв'язку відповідає точка С, що є точкою перетину прямих обмежень (I) і (II). Визначимо координати точки С, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 = 42, \\ 3x_1 + 2x_2 = 60. \end{cases}$$

Розв'язання вказаної системи рівнянь дає $x_1 = 12$, $x_2 = 12$. Отриманий розв'язок означає, що цех повинен на добу виробляти по 12 брюк і спідниць. Прибуток, отриманий у цьому випадку, складає:

$$F(12; 12) = 60 \cdot 12 + 50 \cdot 12 = 1320 \text{ у.о.}$$

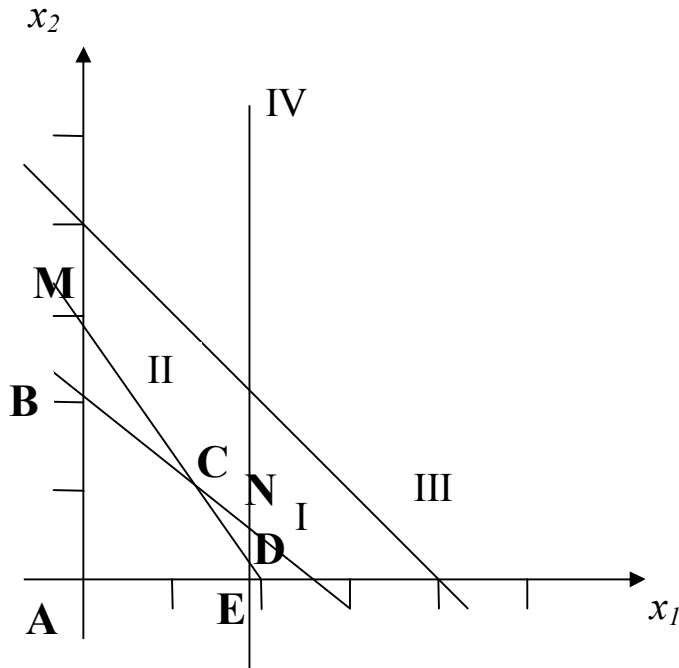


Рис. 3. Графічне зображення області розв'язків задачі

Перша задача на чутливість

На скільки скоротити чи збільшити запаси ресурсів?

Після знаходження оптимального розв'язку логічно з'ясувати, як вплине на оптимальний розв'язок зміна запасів виробничих факторів. Особливо важливо проаналізувати наступні два аспекти:

1. На скільки можна збільшити запас деякого ресурсу для збільшення отриманого оптимального значення цільової функції F ?
2. На скільки можна знизити запас деякого ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції?

Так як величина запасу кожного ресурсу фіксується у правих частинах обмеженнях, то цей вид аналізу ідентифікується як аналіз моделі на чутливість до правої частини обмежень.

Перш ніж відповісти на поставлені запитання, класифікуємо обмеження лінійної моделі як зв'язуючі (активні) і незв'язуючі (неактивні). Пряма, яка представляє зв'язуючі обмеження, повинна проходити через оптимальну точку. У протилежному випадку відповідне обмеження буде незв'язуючим. На рис. 3 зв'язуючими є тільки обмеження (I) і (II), тобто ті, які лімітують запас тканини і фонд робочого часу.

Якщо деяке обмеження є зв'язуючим, то відповідний йому ресурс будемо називати дефіцитним, тобто він використовується повністю. Ресурс, з яким асоціюється незв'язуюче обмеження, слід віднести до розряду недефіцитних (тобто є в надлишку). Ті обмеження, які у даній ситуації напіву навіть не беруть участь у формуванні області допустимих розв'язків, будемо називати надлишковими. Таким чином, при аналізі моделей на чутливість до правої частини обмежень відносяться: 1) гранично допустиме збільшення запасу дефіцитного ресурсу, яке дозволяє покращити знайдений оптимальний розв'язок; 2) гранично допустиме зниження запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює знайдений раніше оптимальне значення цільової функції. Інформація, отримана у останньому випадку, особливо корисна у тих випадках, коли надлишки недефіцитного ресурсу можуть використовуватись для іншої мети.

Розглянемо першу задачу на чутливість на прикладі ситуації з швейним цехом. Дефіцитними ресурсами є тканина – обмеження (I) і фонд робочого часу – обмеження (II).

Зміна добового запасу тканини графічно буде виражатись у переміщенні прямої обмеження (I) паралельно самій собі до точки М (подальше збільшення запасу недоцільне, так як тоді ресурс стане недефіцитним). У результаті переміщення прямої обмеження (I) область допустимих розв'язків збільшиться на трикутник ВМС, оптимальному розв'язку при цьому відповідає точка М. Таким чином запас тканини не слід збільшувати понад межу, коли відповідне обмеження (I) стає надлишковим і вже не впливає ні на область розв'язків, ні на оптимальний розв'язок. Граничний рівень зміни запасу тканини визначається наступним чином: встановлюються координати точки М (вона утворена перетином прямої обмеження (II) і віссю $x_1=0$). У результаті отримаємо $x_1=0$, $x_2=30$. Потім шляхом підстановки координат точки М і ліву частину обмеження (I) визначається максимально допустимий добовий запас тканини: $1,5 \cdot 0 + 2 \cdot 30 = 60$ м. Таким чином, доцільно збільшити добовий запас тканини на $60 - 42 = 18$ м. Величина приросту прибутку від реалізації у цьому випадку складе $1500 - 1320 = 180$ у.о.

Далі розглянемо питання про доцільність збільшення другого дефіцитного ресурсу (фонду робочого часу). У цьому випадку збільшення добового фонду часу графічно виражається у паралельному перенесенні прямої обмеження (II) до точки N. Подальше збільшення запасу даного ресурсу недоцільно, так як він стане надлишковим. У результаті переміщення прямої обмеження (II) новою областю допустимих розв'язків стане многокутник ABNE, а новою оптимальною точкою – точка N. Знайдемо її координати, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 = 42, \\ x_1 = 18. \end{cases}$$

Звідси $x_1=18$; $x_2=7,5$. Підставимо координати точки N у ліву частину обмеження (II) і отримаємо максимально допустимий добовий фонд робочого часу: $3 \cdot 18 + 2 \cdot 7,5 = 69$ люд.-год. Таким чином, змінити добовий запас робочого часу слід на $69 - 60 = 9$ люд.-год. Прибуток від реалізації у цьому випадку складе $60 \cdot 18 + 50 \cdot 7,5 = 1455$ у.о., тобто збільшиться на $1455 - 1320 = 135$ у.о.

Розглянемо питання про зменшення правої частини незв'язуючих і надлишкових обмежень. Обмеження (III) є надлишковим, тому добовий запас засобів на накладні витрати можна зменшити. Графічно це відображається як переміщення прямої обмеження (III) до точки С паралельно самій собі. У цьому випадку оптимальний план визначається точкою С з координатами $x_1=12$, $x_2=12$. Щоб встановити необхідну величину добових накладних витрат, підставимо координати точки С в обмеженні (III). Отримаємо $5 \cdot 12 + 5 \cdot 12 = 120$. Таким чином, зниження запасу засобів на накладні витрати складе $120 - 200 = -80$ у.о. Величина прибутку у цьому випадку не змінюється. Обмеження (IV) фіксує граничний рівень попиту на брюки. Не змінюючи оптимального плану, пряму (IV) можна переміщувати паралельно самій собі до точки С. Так як точка С має координати $x_1=12$, $x_2=12$, то зниження попиту на брюки до величини 12 ніяк не вплине на оптимальність раніше отриманого розв'язку. Зниження попиту у даному випадку складе 6 шт. на добу.

Результати проведеного аналізу можна звести в табл. 2.

Таблиця 2

Ресурси	Тип ресурсів	Максимальна зміна запасів ресурсів	Максимальна зміна прибутку від реалізації, у.о.
1	Дефіцитний	$60 - 42 = 18$ м.	$1500 - 1320 = 180$
2	Дефіцитний	$69 - 60 = 9$ люд.-год.	$1455 - 1320 = 135$
3	Надлишковий	$120 - 200 = -80$ у.о.	$1320 - 1320 = 0$
4	Недефіцитний	$12 - 18 = -6$ шт.	$1320 - 1320 = 0$

Друга задача на чутливість

Збільшення обсягу якого ресурсу є найбільш вигідним?

У першій задачі аналізу на чутливість ми досліджували вплив на оптимум збільшення обсягу дефіцитних ресурсів. При обмеженнях на витрати, пов'язані з додатковим залученням

ресурсів, визначити, якому з ресурсів слід надати перевагу при внесенні додаткових засобів. Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, яка виражається через відповідний приріст оптимального значення цільової функції. Позначимо цінність додаткової одиниці ресурсу i через y_i . Величина y_i визначається із співвідношення:

$$y_i = \frac{\text{Максимальний приріст оптимального значення прибутку } F}{\text{Максимально допустимий приріст обсягу ресурсу } i}$$

За даними табл. 2 проведемо обчислення цінності одиниці кожного ресурсу:

$$y_1 = \frac{180 \text{ у.о.}}{18 \text{ м.}} = 10 \text{ у.о. / м.};$$

$$y_2 = \frac{135 \text{ у.о.}}{9 \text{ люд.} - \text{год.}} = 15 \text{ у.о. / люд.} - \text{год.};$$

$$y_3 = \frac{0}{-80 \text{ у.о.}} = 0;$$

$$y_4 = \frac{0}{-6 \text{ шт.}} = 0.$$

Отримані результати свідчать, що внески в першу чергу слід спрямувати на збільшення фонду робочого часу і лише потім – на закупівлю додаткової тканини. Обсяг недефіцитних ресурсів збільшувати не слід.

Третя задача аналізу на чутливість

У яких межах допустима зміна коефіцієнтів функції?

Зміна коефіцієнтів цільової функції впливає на нахил прямої, яка представляє цю функцію у системі координат. Визначення конкретної кутової точки області допустимих розв'язків у якості оптимуму залежить, перш за все, від нахилу цієї прямої. Це значить, що варіації коефіцієнтів цільової функції можуть призвести до зміни сукупності зв'язуючих обмежень і статусу того чи іншого ресурсу. Таким чином, у межах аналізу на чутливість до зміни коефіцієнтів цільової функції можуть досліджуватися питання:

який діапазон зміни того чи іншого коефіцієнту цільової функції, при якому не відбувається зміна оптимального розв'язку;

на скільки слід змінити той чи інший коефіцієнт цільової функції, щоб змінити статус деякого ресурсу.

Розглянемо поставлені питання на прикладі задачі швейного цеху. Позначимо прибуток від реалізації брюк і спідниць C_1 і C_2 відповідно. Тоді цільова функція буде мати наступний вигляд: $F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$.

При збільшенні C_1 (чи зменшенні C_2) пряма, що представляє цільову функцію F , обертається навколо точки C по часовій стрілці (рис. 3). Якщо C_1 зменшується (або C_2 збільшується), ця пряма обертається у протилежному напрямі. Таким чином, точка C буде залишатись оптимальною до тих пір, поки нахил прямої не вийде за межі, що визначаються нахилами прямих обмежень (I) і (II). Коли нахил прямої F співпаде з нахилом прямої для обмеження (I), отримаємо дві альтернативні кутові точки B і C . Аналогічно, якщо нахил прямої F співпаде з нахилом прямої для обмеження (II), будемо мати альтернативні оптимальні кутові точки C і D . Як тільки нахил прямої F вийде на межі вказаного інтервалу, отримаємо деякий новий оптимальний розв'язок (точки B і D).

Обчислимо межі інтервалів можливих коливань C_1 і C_2 , при яких точка C залишиться оптимальною. Зафіксуємо $C_2=50$. Крайні значення коефіцієнта C_1 можна визначити із рівності нахилів прямої цільової функції F і прямих обмежень (I) і (II). Тангенс кута нахилу для прямої F дорівнює $C_1/50$, а для прямих (I) і (II), відповідно $3/4$ і $3/2$. Мінімальне значення C_1 визначаємо з рівності $C_1/50=3/4$, тоді $\min C_1=37,5$ у.о., а максимальне значення C_1

знаходимо з рівності $C_1/C_2=3/2$, де $\max C_1=75$ у.о. Таким чином, інтервал зміни C_1 , у якому точка C залишиться єдиною оптимальною, визначається нерівністю $37,5 \leq C_1 \leq 75$.

Аналогічно аналіз виконується для коефіцієнта C_2 . Фіксуємо значення $C_1=60$, тоді тангенс кута нахилу прямої цільової функції визначається співвідношенням $60/C_2$. Використавши вже відому рівність тангенсів кутів нахилу прямої F і прямих (I) і (II), отримаємо:

$$60/C_2=3/4, \text{ звідси } \max C_2=80;$$

$$60/C_2=3/2, \text{ звідси } \min C_2=40.$$

Як тільки коефіцієнт $C_1=37,5$ у.о., ресурс (II) стає недефіцитним. Для швейного цеху це означає, що, якщо прибуток від продажу одних брюк стане менше 37,5 у.о., потрібно переглядати добову виробничу програму, яка тепер передбачає максимальну кількість спідниць (тобто $x_2=21$, $x_1=0$). Коли значення C_1 перевищить 75 у.о., добова виробнича програма буде передбачати випуск 18 брюк і 3 спідниць (оптимальний план – точка D).

Відповідні висновки потрібно буде зробити і при відхиленні ціни однієї спідниці C_2 за межі інтервалу $40 \leq C_2 \leq 80$.

II. На АЗС є дві колонки. Майдан при АЗС, де машини чекають заправки, може вмістити не більше чотирьох машин одночасно, і якщо він зайнятий, то чергова машина у чергу не стає, а їде на сусідню станцію. Машини прибувають на станцію з інтенсивністю $k+1, k$ маш./хв. Інтенсивність процесу обслуговування k, k маш./хв. Визначити основні характеристики ефективності даної СМО. Як зміняться ці характеристики, якщо одна колонка вийде з ладу?

Приклад 1. Спеціалізований пост діагностики авто являє собою одноканальну СМО. Число стоянок для авто, що очікують проведення діагностики, обмежене і дорівнює 3. Якщо всі стоянки зайняті, то черговий автомобіль в чергу на обслуговування не стає. Потік машин, що прибувають на діагностику, розподілений за законом Пуассона і має інтенсивність $\lambda=0,85$ (авто на годину). Час діагностики розподілений за показниковим законом і в середньому $= 1,05$ год.

Необхідно визначено ймовірнісні характеристики поста діагностики, що працює в стаціонарному режимі.

Розв'язання

$$\lambda=0,85$$

$$n=3$$

$$\bar{t}_{об} = 1,05$$

1. Параметр потоку обслуговування автомобілів:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1,05} = 0,952.$$

2. Зведена інтенсивність потоку авто визначається як відношення інтенсивностей λ і μ , тобто:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,85}{0,952} = 0,893.$$

3. Обчислимо фінальні ймовірності системи:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}} = \frac{1-0,893}{1-0,893^2} \approx 0,248;$$

$$P_1 = \rho P_0 = 0,893 \cdot 0,248 \approx 0,221;$$

$$P_2 = \rho^2 P_0 = 0,893^2 \cdot 0,248 \approx 0,198;$$

$$P_3 = \rho^3 P_0 = 0,893^3 \cdot 0,248 \approx 0,177;$$

$$P_4 = \rho^4 P_0 = 0,893^4 \cdot 0,248 \approx 0,158.$$

4. Ймовірність відмовлення в обслуговуванні авто:

$$P_{відм} = P_4 \approx 0,158.$$

5. Відносна пропускна спроможність поста діагностики:

$$g = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - 0,158 = 0,842.$$

6. Абсолютна пропускна спроможність поста діагностики:

$$A = g\lambda = 0,842 \cdot 0,85 = 0,716 \text{ (автомобіля на годину)}.$$

7. Середнє число замовлень в черзі (довжина черги):

$$\bar{q} = \frac{\rho^2(1 - \rho^n(n+1 - n\rho))}{(1 - \rho^{n+2})(1 - \rho)} = \frac{0,893^2(1 - 0,893^3(3+1 - 3 \cdot 0,893))}{(1 - 0,893^5)(1 - 0,893)} = 1,02.$$

8. Середній час перебування авто в системі:

$$\bar{t} = \frac{\bar{q}}{\lambda} + \frac{g}{\mu} = \frac{1,02}{0,85} + \frac{0,842}{0,952} \approx 2,084 \text{ годин}.$$

9. Середня тривалість перебування замовлення в черзі на обслуговування:

$$\bar{w} = \frac{\bar{q}}{\lambda} = \frac{1,02}{0,85} = 1,2 \text{ години}.$$

10. Середнє число замовлень, що обслуговуються:

$$\bar{s} = \frac{\rho - \rho^{n+2}}{1 - \rho^{n+2}} = \frac{0,893 - 0,893^5}{1 - 0,893^5} \approx 0,752.$$

11. Середнє число замовлень в СМО:

$$\bar{k} = \bar{q} + \bar{s} = 1,02 + 0,752 = 1,772.$$

Роботу даного посту діагностики можна вважати задовільною, так як пост діагностики не обслуговує автомобілі в середньому в 15,8% випадків ($P_{\text{відм}} = 0,158$).

Приклад 2. В ремонтній службі підприємства виконується налагодження деяких механізмів. На налагодження надходить в середньому 10 механізмів на годину (потік механізмів можна вважати пуасонівським). Налагодження одного механізму займає в середньому 15 хв. (час налагодження інструмента можна вважати експоненціально випадковою величиною). В ремонтній службі працює три працівника. Заробітна плата кожного становить 30 ум. грош. од. в день. В той час, коли механізм знаходиться в ремонті (тобто налагоджується чи очікує налагодження), він не може використовуватись для роботи. Простоювання механізму протягом години приносить підприємству збиток в розмірі 6 ум. грош. од.

Знайти: 1) характеристики роботи ремонтної служби; 2) втрати підприємства протягом робочої зміни (8 годин), пов'язані з налагодженням інструментів, включаючи затрати на управління ремонтної служби і збитки від простоювання механізмів; 3) ймовірність того, що налагодження механізму почнеться відразу ж після надходження (без очікування в черзі); 4) ймовірність того, що кількість механізмів, що очікують налагодження, виявиться вище п'яти; 5) визначити, чи доцільно зменшувати кількість працівників до двох; 6) визначити, чи доцільно збільшувати кількість робітників до чотирьох.

Розв'язання

1) Ремонтну службу можна розглядати як СМО без обмеження на чергу.

$$\lambda = 10 \text{ мех/год} = 0,167 \text{ мех/хв}, \bar{t}_{\text{об}} = 15 \text{ хв.}, \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{об}}} = 0,067 \text{ мех/хв}, m = 3.$$

$$\text{Знайдемо } \rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{0,167}{3 \cdot 0,067} = 0,833.$$

Знайдемо ймовірність простоювання:

$$P_0 = \left[\frac{(3 \cdot 0,833)^0}{0!} + \frac{(3 \cdot 0,833)^1}{1!} + \frac{(3 \cdot 0,833)^2}{2!} + \frac{(3 \cdot 0,833)^3}{3!(1 - 0,833)} \right]^{-1} = 0,046.$$

Ремонтна служба виконує налагодження всіх механізмів, що надходять, тому $P_{\text{відм}} = 0$.

$$P_1 = \frac{(3 \cdot 0,833)^1}{1!} \cdot 0,046 = 0,115, \quad P_2 = \frac{(3 \cdot 0,833)^2}{2!} \cdot 0,046 = 0,144,$$

$$P_3 = \frac{(3 \cdot 0,833)^3}{3!} \cdot 0,046 = 0,12, \quad P_4 = \frac{(3 \cdot 0,833)^4}{4!} \cdot 0,046 = 0,1,$$

$$P_5 = 0,083, \quad P_6 = 0,069, \quad P_7 = 0,048.$$

Знайдемо інші характеристики:

$$\bar{q} = \frac{0,833(3 \cdot 0,833)^3}{3!(1 - 0,833)^2} \cdot 0,046 = 3,43 \text{ (мех)} - \text{довжина черги};$$

$$\bar{s} = 3 \cdot 0,833 = 2,49 \text{ (мех)} - \text{число замовлень на обслуговуванні};$$

$$\bar{k} = 3,43 + 2,49 = 5,92 \text{ (мех)} - \text{число замовлень в системі};$$

$$A = 0,167 \text{ (мех./хв)} - \text{абсолютна пропускна спроможність};$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{q}}{\lambda} = \frac{3,43}{0,167} = 20,5 \text{ (хв)} - \text{перебуває замовлення в черзі};$$

$$\bar{t} = 20,5 + 15 = 35,5 \text{ (хв)} - \text{перебуває замовлення в системі}.$$

2) затрати на утримання ремонтної служби складають $30 \cdot 3 = 90$ грош.од. Збиток підприємства, пов'язаний з простоюванням механізмів, знайдемо за формулою:

$Z_{np} = \bar{k} C_{np} t$, де C_{np} - збиток від простоювання одного механізму протягом одиниці часу.

$Z_{np} = 5,92 \cdot 6 \cdot 8 = 284,16$ грош.од. за зміну. Таким чином, повні витрати підприємства, пов'язані з налагодженням механізмів, складають $90 + 284,16 = 374,16$ грош.од. за зміну.

3) знайдемо ймовірність того, налагодження механізму почнеться відразу є після його надходження. Це відбудеться у випадку, якщо в момент надходження механізму в ремонтну службу хоча б один робітник виявиться вільним. Для цього необхідно, щоб кількість механізмів що знаходяться в ремонтній службі, не перевищувала двох. Ймовірність такого стану знаходиться за формулою

$$P(k \leq R) = \sum_{k=0}^R P_k. \quad P(k \leq 2) = P_0 + P_1 + P_2 = 0,046 + 0,115 + 0,144 = 0,305. \text{ Це значить,}$$

що приблизно в 30,5% випадків механізм, що доставлений в ремонтну службу, відразу ж надходить до робітника.

4) знайдемо ймовірність того, що кількість механізмів, що очікують налагодження, виявиться більше 5. Такий стан означає, що кількість механізмів, що знаходяться в ремонтній службі, перевищують вісім (три з них – на налагодженні, інші – в черзі).

Ймовірність такого стану знаходиться за формулою: $P(k > R) = 1 - \sum_{k=0}^R P_k.$

$$P(k > 8) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8) = 0,218.$$

5) знайдемо навантаження на СМО при $m = 2$. $\rho = 1,25$. Величина $\rho > 1$ означає, що механізми надходять в ремонтну службу з більшою інтенсивністю, ніж вона може їх обслуговувати. Таким чином, два робітники не впораються з потоком замовлень. Зменшувати кількість робітників до двох не можна.

6) знайдемо характеристики СМО при $m = 4$: $\rho = 0,623$; $P_0 = 0,074$; $\bar{q} = 0,53$ (мех);

$$P_{відм} = 0; \quad \bar{s} = 2,49 \text{ (мех)}; \quad \bar{k} = 3,02 \text{ (мех)}; \quad \bar{w} = 3,14 \text{ (хв)}; \quad \bar{t} = 18,14 \text{ (хв)};$$

$$A = 0,167 \text{ (мех/хв)}.$$

Затрати на утримання ремонтної служби складають $30 \cdot 4 = 120$ грош.од. Знайдемо збитки підприємства, пов'язані з простоюванням механізмів: $Z_{np} = 3,02 \cdot 6 \cdot 8 = 144,96$ грош.од. за зміну. Таким чином, загальні втрати підприємства, пов'язані з налагодженням механізмів,

складають $120+144,96=264,96$ грош.од. за зміну. Ці втрати менші, ніж для трьох працівників. Тому збільшення кількості працівників до чотирьох можна вважати вигідним.

III. Залізничну станцію дачного селища обслуговує каса з одним вікном. У вихідні дні, коли населення активно використовує залізницю, інтенсивність потоку пасажирів складає $0, k$ (пас/хв.), касир витрачає на обслуговування у середньому $1, k$ хв. Визначити основні характеристики ефективності даної СМО. Як зміняться ці характеристики, якщо відкриється ще одна каса?

IV. Навести приклад реальної економічної задачі, яку можна розв'язати за допомогою методів дослідження операцій. Побудувати її математичну модель, розв'язати цю задачу.

Де k – номер студента у журналі.

Вимоги до оформлення контрольної роботи:

1. Розрахунки виконати за допомогою пакетів *Mathcad* або *Excel*.
2. Результати подати у Word, з поясненням методу розв'язання і наведенням розрахунків.
3. Роздрукувати роботу, зробити титульну сторінку.
4. Здати у друкованому вигляді і на дискеті.

КОНТРОЛЬ РІВНЯ СФОРМОВАНOSTІ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНЦІЇ СТУДЕНТІВ

Екзамен з дисципліни „Дослідження операцій” для спеціальності 6.030601 „Менеджмент”, проводиться по закінченню третього семестру.

Екзамен проводиться у відповідності з навчальним планом ЖДУ імені Івана Франка та робочою програмою курсу, затвердженою на засіданні кафедри прикладної математики та інформатики.

Термін часу, протягом якого виконуються письмові завдання – 1 година 20 хвилин.

Екзаменаційний білет включає **три види** завдань.

I. Тестове завдання (максимальна кількість балів – 10).

II. Теоретичне питання (максимальна кількість балів – 20).

Теоретичне питання включає завдання з переліку орієнтовних питань до іспиту.

Об'єктом контролю виконання теоретичного завдання є перевірка засвоєння основ математичного апарату, необхідного для розв'язання практичних задач, творчого використання знань з теорії.

Під час письмової відповіді на теоретичне питання студент повинен сформулювати основні означення і властивості, навести методи розв'язання.

III. Практичні завдання (максимальна кількість балів – 70).

Задача репродуктивного рівня дає можливість виявити ступінь оволодіння студентом необхідним рівнем знань, охоплює питання всіх ключових проблем предмету.

Задача творчого рівня орієнтована на перевірку практичних умінь по використанню різноманітних методів розв'язання задач, та задач прикладного змісту

Під час розв'язання задач студент повинен використовувати раціональну методику розв'язання та аналізу задачі і обґрунтовано пояснити одержані результати.

Зразок

екзаменаційного білету

1. Тестове завдання (максимальна кількість балів – 10).

Оберіть один із запропонованих варіантів відповіді

Проблема розподілу ресурсів між кількома зацікавленими сторонами є:

- а) динамічною задачею;
- б) задачею багатокритеріальної оптимізації;
- в) матричною грою.

2. Теоретичні питання.

Класифікація економіко-математичних моделей.

3. Практичне завдання репродуктивного рівня:

Розв'яжіть задачу про призначення, якщо задана матриця ефективностей:

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 8 & 12 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 9 & 14 & 3 \\ 9 & 3 & 7 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

4. Практичне завдання творчого рівня:

Автозаправочна станція (АЗС) з чотирма колонками має площадку, що вміщає не більше ніж шість машин. Потік машин, що прибувають на АЗС, має інтенсивність $\lambda=1$ маш/хв., середній час на заправку $\bar{t}_{ог}=3$ хв. У разі зайнятості всієї площадки для очікування машини заправляються на сусідніх АЗС. Оцінити відносну пропускну спроможність АЗС, середній час, що витрачає машина на заправку та ступень завантаженості колонок. Зробити свої пропозиції що до роботи АЗС.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЕКЗАМЕНАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Вид завдання	Оцінка	Вимоги до знань та умінь студентів
Тестове	5 бал	Правильна відповідь на тестове завдання.
	0 балів	Неправильна відповідь на тестове завдання.
<i>Максимальна кількість балів</i>	10 балів	
Теоретичне	0-6 балів	Несвідоме, механічне відтворення матеріалу зі значними помилками та прогалинами; судження необґрунтовані; недостатньо проявляється самостійність мислення. Відповідь містить стилістичні та граматичні помилки.
	7-11 балів	Свідоме відтворення матеріалу з незначними помилками; дещо порушено логічність та послідовність викладу; недостатньо проявляється самостійність мислення. Відповідь стилістично правильна, містить незначні граматичні помилки.
	12-15 бали	Свідоме і повне відтворення матеріалу з деякими неточностями у другорядному матеріалі; виклад матеріалу достатньо обґрунтований, дещо порушено послідовність викладу. Відповідь стилістично та граматично правильна.
	16-20 балів	Виклад матеріалу глибоко обґрунтований, логічний, переконливий. Відповідь містить власні приклади, що свідчить про творче застосування матеріалу. Відповідь стилістично та граматично правильна.
<i>Максимальна кількість балів</i>	20 балів	
Практичне	32-35 балів	<ul style="list-style-type: none"> Правильно побудована модель задачі зі вказаними одиницями вимірювання. Правильно обрано й використано необхідні математичні формули. Обчислювальні або графічні задачі виконані правильно, хід розв'язання вірний. Результати обчислень правильні. Висновки аргументовані, є посилання на математичні поняття і формули, пояснено деякі економічні процеси, що відбуваються в діяльності окремого суб'єкта господарювання. Робота написана стилістично та граматично правильно з використанням професійних термінів.
	26-31 балів	<ul style="list-style-type: none"> Правильно побудована модель задачі зі вказаними одиницями вимірювання. Правильно обрано й використано необхідні математичні формули. Є помилки механічного характеру або помилки при обчисленні, правильний хід розв'язання. Результати обчислень неправильні. Висновки аргументовані, є посилання на правила, формули. Робота написана стилістично та граматично правильно з використанням професійних термінів.

	21-25 балів	<ul style="list-style-type: none"> Правильно побудована модель задачі, хоча не вказані одиниці вимірювання. Правильно обрано й використано необхідні математичні формули. Результати обчислень правильні, в обґрунтуванні результату є помилки або воно відсутнє. У роботі є незначні стилістичні та граматичні помилки.
	0-20 балів	Відповідь відсутня або неправильна, хід розв'язання неправильний
Максимальна кількість балів	70 балів	
Всього	100 балів	

ОРІЄНТОВНІ ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ

Теоретичні питання

- Операція. Рішення. Елементи рішення. Особа, що приймає рішення.
- Математичні моделі операцій.
- Статичні та динамічні моделі.
- Прийняття рішень в умовах визначеності, в умовах невизначеності чи в умовах ризику.
- Загальна постановка задач у детермінованому та недетермінованому випадках.
- Класифікація економіко-математичних моделей.
- Принципи складання економіко-математичних моделей.
- Прийоми складання моделей (введення додаткових змінних коефіцієнтів пропорційності, коефіцієнтів змінності та інше).
- Економічні приклади моделей лінійного програмування.
- Аналіз результатів розв'язків за лінійними економіко-математичними моделями: виявлення альтернативних оптимальних планів; визначення границь можливої варіації коефіцієнта цільової функції, коефіцієнта вектору обмежень, коефіцієнта технологічної матриці.
- Задача про призначення: постановка, модель, метод розв'язання.
- Задача про розподіл інвестиційних ресурсів між об'єктами, її подання моделлю динамічного програмування; алгоритм знаходження оптимального плану.
- Сутність проблеми оптимального управління запасами. Класифікація витрат, пов'язаних зі створенням та зберіганням запасів.
- Постановка задачі оптимізації поточних запасів.
- Статичні детерміновані моделі оптимізації запасів без дефіциту та з дефіцитом.
- Сутність задач масового обслуговування.
- Характеристика елементів системи масового обслуговування: вимоги, вхідний потік вимог, черга вимог, канали обслуговування, вихідний потік вимог.
- Характеристика найпростішого потоку вимог (пуассонівського). Показниковий закон розподілу часу обслуговування вимог.
- Класифікація систем масового обслуговування: системи з відмовленнями, з очікуваннями.
- Розрахунок параметрів системи масового обслуговування: коефіцієнтів простою вимог у черзі та в системі, простою каналів обслуговування, середнього часу очікування вимог у черзі.
- Зміст та сфери використання сіткових методів планування та управління.
- Характеристика комплексу робіт.
- Елементи сіткового графіка, методика його побудови.
- Визначення резервів часу.

25. Характеристика задач теорії ігор, приклади (задача про зберігання продукції, яка швидко псується).

26. Характеристика, приклади багатокритеріальних оптимізаційних задач.

Практичні завдання

- Магазин продає 500 упаковок бульйонних кубиків в рік. Величина попиту рівномірно розподіляється протягом року. Ціна однієї упаковки становить 2 ум. од. За доставку замовлення власник магазину повинен заплатити 10 ум. од. Час доставки замовлення від постачальника складає 12 робочих днів (при 6-денному робочому тижні). За оцінкою спеціалістів, витрати на зберігання в рік складає 0,4 ум. од. за одну упаковку. Необхідно визначити: скільки упаковок повинен замовляти власник магазину для однієї поставки; частоту замовлень; точку замовлення. Відомо, що магазин працює 300 днів на рік.
- Скласти математичну модель задачі лінійного програмування, знайти розв'язок симплекс-методом. Два вироби обробляються послідовно на 3-х верстатах. Кількість деталей $B_1(x_1)$ не може бути меншою за кількість деталей $B_2(x_2)$.

Верстат	Запаси ресурсів часу роботи верстатів, годин	Час обробки однієї деталі, години	
		B_1	B_2
1	10	1	2
2	15	2	1
3	50	1	3
Кількість виробів		x_1	x_2
Прибуток, грн./шт.		5	3

- В наближенні посівної фермер має чотири альтернативи:

a_1 – вирощувати кукурудзу,

a_2 – вирощувати пшеницю,

a_3 – вирощувати сою,

a_4 – використовувати землю під пасовиська.

Платежі, пов'язані з вказаними можливостями, залежать від кількості опадів, які умовно можна поділити на чотири категорії:

s_1 - сильні опади, s_2 - помірні опади, s_3 - незначні опади, s_4 - посуха.

Платіжна матриця (в тис. дол.) оцінюється наступним чином.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	-20	60	30	-5
a_2	40	50	35	0
a_3	-50	100	45	-10
a_4	12	15	15	10

Що повинен посіяти фермер?

- Знайти оптимальний розподіл засобів між n підприємствами при умові, що прибуток $f(x)$, отримана від кожного підприємства, є функцією від вкладених в нього засобів x . Вкладення кратні Δx , а функції $f(x)$ задані таблицею.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	3,5	0,5	1,2
2	4,4	1,8	2,8
3	6	3,4	4,6

5. Розв'яжіть задачу про призначення, якщо задана матриця ефективностей:

8	3	8	12	8
9	8	7	8	4
5	2	2	4	2
8	10	9	14	3
9	3	7	10	5

6. Технічні пристрої (ТП) можуть час від часу виходити з ладу (відмовляти). Потік відмовлень ТП найпростіший з інтенсивністю $\lambda = 1,6$ відмовлення на добу. Час відновлення ТП має експоненціальний розподіл. Математичне очікування часу обслуговування $t_{об} = 0,5$ діб. Кількість каналів, що виконують обслуговування, рівне 5. Кількість замовлень в черзі не обмежена. Визначте імовірнісні характеристики СМО, що виконують обслуговування ТП у встановленому режимі.
7. Складіть структурно-часовий графік комплексу робіт згідно із структурно-часовою таблицею. Визначте критичний шлях і загальний час виконання комплексу робіт. Вкажіть на графі критичні роботи.

№ з/п	Робота	Спирається на роботу	Час виконання роботи
1.	a_1		2
2.	a_2	a_1	6
3.	a_3	a_2	7
4.	a_4	a_2, a_3	1
5.	a_5	a_1, a_3	6
6.	a_6	a_4, a_5	4

Рекомендована література

Основна література

1. Егоршин А. А. Математическое программирование: [учеб. пособие] / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х.: ИД „ИНЖЭК”, 2003. – 240 с.
2. Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюття В. И. Математические методы исследования операций: учеб. пособие для вузов. – К., 1979.
3. Кулян В. Р. Математическое программирование с элементами информационных технологий / В. Р. Кулян, Е. А. Юнькова, А. Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2000. – 124 с.
4. Кутковецкий В. Я. Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецкий. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД „Професіонал”, 2005. – 264 с.
5. Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И. Н. Ляшенка. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.
6. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник / Ю. П. Зайченко. – К.: ВІПОЛ, 2000.

Додаткова

7. Бугір М. К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі / М. К. Бугір. – К., 1998. – 272 с.
8. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Т. 1,2. – М.: Мир, 1981. – 712 с.
9. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб.: Изд-во „Питер”, 2000. – 208 с.
10. Плис А. И. МАТНСАД: математический практикум для экономистов и инженеров: [учеб. пособие] / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.
11. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – 6-е изд.; пер. с англ. – М.: Изд. дом „Вильямс”, 2001. – 912 с.

Навчальне видання

СІКОРА Ярослава Богданівна

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Базові навчально-методичні матеріали
для студентів напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент»
заочної форми навчання і
факультету післядипломної освіти та довузівської підготовки

Надруковано з оригінал-макета автора

Підписано до друку __.__.11. Формат 60x90/16. Ум. друк. арк. 1.92.

Обл. вид. арк. __. Друк різнографічний.

Гарнітура Times New Roman. Зам. ____. Наклад 100.

Видавництво Житомирського державного університету імені Івана Франка

Свідоцтво про державну реєстрацію:

серія ЖТ №10 від 07.12.04 р.

вул. Велика Бердичівська, 40, м. Житомир, 10008

електронна пошта (E-mail): zu@zu.edu.ua

