УДК 372.851:51

С.П.Семенець,
кандидат педагогічних наук, доцент
Л.М Семенець., асистент
(Житомирський державний університет)

Проективні перетворення площини. Теорема Паскаля

У нині діючих підручниках із вищої геометрії для фізико-математичних спеціальностей педагогічних вузів [1-3] не завжди звертається увага на зв'язок вузівського та шкільного курсів геометрії, який в значній мірі сприяє якісній професійній підготовці майбутніх учителів математики. Особливо відчутною ця проблема є при вивченні студентами питань проективної та диференціальної геометрії, які в найбільшій мірі є відірваними від теорії та методики викладання геометрії у школі. І тому є необхідність у дещо іншому розгляді тих питань курсу вищої геометрії, які мають прикладне спрямування щодо визначення методу розв'язання цілого класу задач як елементарної, так і вищої геометрії.

У роботі [4] був реалізований аналітичний підхід до проективних перетворень площини, доведені деякі їх найпростіші властивості. На основі доведеної теореми про проективне перетворення кола обґрунтовувалась теорема Бріаншона та усі її частинні випадки. Усе це дало змогу авторам довести ще деякі фундаментальні теореми методом, який принципово відрізняєть від традиційних; дати ще одне означення полюса і поляри; із цих позицій обгрунтувати побудову дотичної до кола за допомогою одніє лінійки.

Відомо, що перетворення площини, яке у прямокутній декартовій системі координат задається формулами:

$$x' = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_3x + B_3y + C_3},\ y' = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{A_3x + B_3y + C_3}, \qquad (*)$$

де $r_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2,$

називається проективним. Для подальших викладок необхідними будуть доведені у роботі [4] твердження.

Теорема 1. Для заданого проективного перетворення площини існує єдина гранична пряма, тобто така, яка при цьому перетворенні переходить у невласну пряму.

Теорема 2. Існує проективне перетворення, яке дане коло переводить в коло, а задану точку всередині кола – в центр образу.

Обгрунтуємо теорему про проективне перетворення кола і прямої.

Теорема 3. Нехай на площині дані коло і пряма, яка його не перетинає. Тоді існує таке проективне перетворення, яке коло переводить в коло, а пряму – в невласну пряму.

Доведення.

Оскільки задана пряма не перетинає заданого кола, то існує єдина точка всередині кола, яка буде полюсом цієї прямої відносно кола. Зазначимо, що тоді задана пряма, як поляра, є геометричним місцем четвертих гармонічних точок до полюса відносно точок перетину з колом будь-якої січної, яка проходить через полюс. За теоремою 2 деяке проективне перетворення переведе дане коло в коло, а знайдений полюс – в центр образу. Але гармонізм є інваріантом проективних перетворень і четвертою гармонічною точкою до середини відрізка відносно його кінців є невласна точка прямої, яка містить цей відрізок. Тому образом заданої прямої буде пряма, усі точки якої будуть невласними.

Теорема 4 (Паскаля). Якщо шестикутник $ABCDEF$ є вписаним в коло,то точки перетину протилежних сторін AB і DE, BC і EF, CD і FA належать одній прямій (прямій Паскаля).

Доведення. У курсі елементарної геометрії відома теорема.

Лема. Якщо шестикутник $ABCDEF$ є вписаним в коло і $AB \| DE$, $BC \| EF$, то $CD \| AF$.

Для доведення теореми Паскаля розглянемо проективне перетворення, яке переводить описане навколо шестикутника коло в коло, описане навколо відповідного шестикутника-образа, а точки перетину прямих AB і DE, BC і EF – у нескінченно віддалені (невласні) точки. Отже, $A'B' \parallel D'E'$, $B'C' \parallel E'F'$. Тоді за лемою $C'D' \parallel A'F'$. Отже, три пари протилежних сторін шестикутника-образа проективного перетворення перетинаються у трьох невласних точках, які належать невласній прямій. Оскільки при проективному перетворенні пряма переходить в пряму, то три точки перетину протилежних сторін шестикутника–прообраза, вписаного в коло–прообраз, належать одній прямій.

Відомо, що теорема Паскаля виконується і тоді, коли вписаними є п'ятикутник, чотирикутник, трикутник.

Теорема 5. У п'ятикутнику, вписаному в коло, дві точки перетину двох пар несуміжних сторін і точка перетину п'ятої сторони з дотичною, проведеною у протилежній до неї вершині п'ятикутника, належать одній прямій.

Доведення. Теорема є наслідком теореми про проективне перетворення кола і прямої та відомої теореми елементарної геометрії (леми).

Лема. Якщо в п'ятикутнику, вписаному в коло, дві пари сторін паралельні, то його п'ята сторона паралельна дотичній до кола, проведеній у протилежній до цієї сторони вершині п'ятикутника.

Теорема 6. Дві точки перетину протилежних сторін чотирикутника, вписаного в коло і дві точки перетину дотичних до кола, проведених у протилежних вершинах чотирикутника, належать одній прямій.

Доведення. Скористаємося лемою.

Лема. Дотичні до кола, проведені у вершинах у нього вписаного прямокутника, паралельні.

Далі потрібно провести міркування, аналогічні тим, які були при доведенні теореми 4.

Теорема 7. Сторони трикутника вписаного в коло і дотичні, проведені у вершинах трикутника, які протилежні цим сторонам, перетинаються у трьох точках однієї прямої.

Доведення. Для обґрунтування цієї теореми достатньо знову скористатися теоремою 4 та відповідною лемою.

Лема. Сторони правильного трикутника, вписаного в коло і дотичні, проведені у вершинах трикутника, які протилежні цим сторонам, паралельні.

Важливо зазначити, що згідно теореми про проективне перетворення кола [4], існує таке проективне перетворення площини, яке переводить коло у еліпс, параболу, гіперболу, прямі, які перетинаються. Завдяки чому, теореми Бріаншона і Паскаля, їх частинні випадки можна узагальнити для вищевказаних кривих другого порядку, що зроблено у вузівських підручниках з проективної геометрії.

Теорема 8 (Паппа). Якщо точки A, B, C належать прямій l, а точки A_1, B_1, C_1 прямій l_1, то точки перетину прямих AB_1 і BA_1, BC_1 і CB_1, CA_1 і AC_1 належать одній прямій.

Доведення. Скористаємося лемою.

Лема. Нехай точки A, B, C належать одній прямій, а точки A_1, B_1, C_1 – іншій. Тоді, якщо $AB_1 \parallel BA_1$ і $BC_1 \parallel CB_1$, то $AC_1 \parallel CA_1$.

Для доведення теореми Паппа розглянемо проективне перетворення, гранична пряма якого проходить через точки перетину прямих AB_1 і BA_1, BC_1 і CB_1. Позначимо через $A', B', C', A_1', B_1', C_1'$ образи точок A, B, C, A_1, B_1, C_1 відповідно. Тоді $A'B_1' \parallel B'A_1'$, $B'C_1' \parallel C'B_1'$ і за лемою $C'A_1' \parallel A'C_1'$.

Отже, три прямі перетинаються у трьох невласних точках, які належать невласній прямій, яка є образом граничної прямої. А тому точки перетину прямих AB_1 і BA_1, BC_1 і CB_1, CA_1 і AC_1 належать одній прямій (граничній у розглянутому проективному перетворенні).

<u>Теорема 9 (Дезарга).</u> Нехай прямі *а, в, с* перетинаються в точці O. Якщо в трикутниках $A_1B_1C_1$ і $A_1B_1C_1$ вершини A_1 і A_2 належать прямій *а*, B_1 і B_2 – прямій *в*, C_1 і C_2 – прямій c, а точки A, B, C є перетином прямих B_1C_1 і B_2C_2, C_1A_1 і C_2A_2, A_1B_1 і A_2B_2 відповідно, то точки A, B, C належать одній прямій.

Доведення.

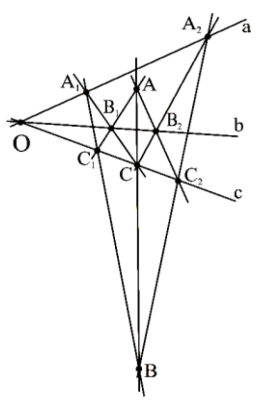

Рис. 1

Виконаємо проективне перетворення рисунка 1, у якому пряма AB є граничною прямою. Тоді $C_1'B_1' \parallel C_2'B_2'$ і $A_1'C_1' \parallel A_2'C_2'$.

Розглянемо гомотетію з центром в точці O' і коефіцієнтом:

$$k = \frac{OA_2'}{OA_1'}$$

.

При такій гомотетії точка C_1' перейде в точку C_2', а точка B_1' - в точку B_2', оскільки $C_1'B_1' \parallel C_2'B_2'$ і $A_1'C_1' \parallel A_2'C_2'$.

Тому $B_1'A_1' \parallel B_2'A_2'$, оскільки трикутник $A_1'\,B_1'\,C_1'$ і трикутник $A_2'\,B_2'\,C_2'$ – гомотетичні (рис. 2). Отже, точки $A'\,B'\,C'$ належать невласній прямій, а точки A, B, C – граничній прямій.

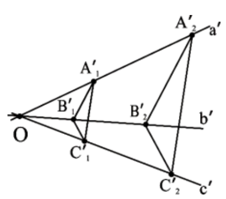

Рис. 2

Доведемо ще одну теорему, яка відіграє значну роль у теорії проективних перетворень площини і має значну практичну спрямованість.

<u>Теорема 10</u>. Нехай в колі ω задано точку O. Розглянемо усі проективні перетворення, які коло ω відображають у коло, а точку O – в його центр. Тоді такі перетворення відображають на нескінченність одну і ту ж пряму.

Доведення.

Отже, потрібно довести, що для усіх проективних перетворень, які відображають дане коло і точку всередині нього у коло і його центр відповідно (існування таких проективних перетворень доводить теорема 2), існує одна і та ж гранична пряма.

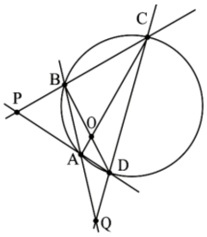

Рис. 3

Проведемо через точку O дві довільні хорди. Нехай P, Q – точки перетину протилежних сторін чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло (рис.3).

Розглянемо довільне проективне перетворення, яке коло ω відображає в коло, а точку O – в його центр. Очевидно, що чотирикутник при цьому перетворенні переходить в прямокутник, а пряма PQ – у невласну пряму. Отже, пряма PQ є граничною прямою у розглянутому проективному перетворенні. За теоремою 1 така пряма єдина. Це означає, що пряма PQ не залежить від проведених через точку O хорд. Тобто, коли точка O – фіксована, то пряма PQ визначається однозначно. А тому для будь-якого іншого проективного перетворення, яке переводить коло ω в коло, а точку O – в його центр, пряма PQ теж буде граничною.

Пряму PQ у проективній геометрії називають полярою точки O відносно кола ω, а точку O – полюсом. Отже, можна дати таке означення поляри точки відносно кола: якщо точка розміщена всередині кола, то полярою цієї точки відносно кола називається така пряма, яка є граничною у будь-якому проективному перетворенні, яке переводить дане коло у коло, а дану точку – в центр образу.

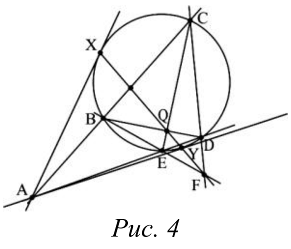

Рис. 4

Доведена теорема дає змогу обґрунтувати побудову дотичної до кола за допомогою однієї лінійки.

Перший спосіб.

Побудова (рис.4).

1.Через точку A проводимо довільні прямі AB, AE, які перетинають коло в точках B, C, D, E відповідно.

2. Будуємо прямі: (CD), (BE), (CE), (BD).

3. Знаходимо $Q=(BD)\cap(CE)$, $F=(BE)\cap(CD)$.

4. Проводимо пряму (QF).

5. Знаходимо $X=(QF)\cap(W,r)$, $Y=(QF)\cap(W,r)$.

6. Будуємо прямі (AX) і (AY), які є шуканими.

Доведення.

Із побудови випливає, що пряма (AF) є полярою точки Q відносно кола (W,r). Отже, за сформульованим вище означенням пряма (AF) є граничною прямою у будь-якому проективному перетворенні, яке переводить коло (W,r) в коло, а тому точку Q в центр образу. У результаті проективного перетворення рисунка 4, одержуємо такий образ (рис. 5).

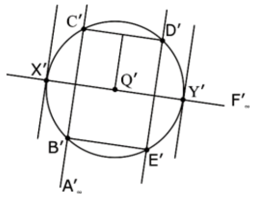

Рис. 5

Прямі, які проходять через точки X', Y' паралельно прямим $(C'B')$ і $(E'D')$ є дотичними до кола. Отже, прямі $(X'A'_{\infty})$ і $(Y'A'_{\infty})$ є дотичними, а тому прямі (XA), (YA) теж є дотичними.

Другий спосіб.

Побудова (рис. 6).

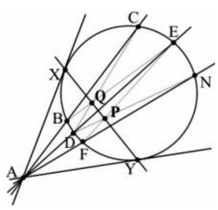

Рис. 6

1. Через точку А проводимо довільні січні до кола (AB), (AD), (AF).

2. Знаходимо: $C=(W,r)\cap(AB)$, $E=(W,R)\cap(AD)$, $N=(W,r)\cap(AF)$.

3. Будуємо прямі: (BE), (DC), (EF), (DN).

4.Знаходимо точки: $Q=(DC)\cap(BE)$ і $P=(EF)\cap(DN)$.

5. Будуємо пряму (QP).

6.Знаходимо: $X=(W,r)\cap(QP)$, $Y=(W,r)\cap(QP)$.

7. Будуємо прямі (AX), (AY), які є шуканими.

Доведення.

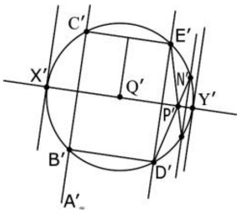

Рис. 7

Із побудови випливає, що поляра точки Q проходить через точку A. Згідно із означенням поляри в результаті проективного перетворення одержується рисунок 7. Очевидно, що $(B'C') \parallel (E'D')$ і чотирикутник $B'C'E'D'$ є прямокутником. Тоді $(X'A'_\infty)$ і $(Y'A'_\infty)$ є дотичними до кола ω'. Тому прямі (AX) і (AY) є теж дотичними.

Література

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.: ил.
2. Погорєлов А.В. Геометрия. Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности „Математика” – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 288 с.
3. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. Учебник для педагогических институтов. – М.: Учпедгиз, 1961. – 360 с.
4. Семенець С.П. Аналітичне задання проективних перетворень площини. Теорема Бріаншона.// Вісник Житомирського педагогічного університету. – 2003. –№ 11.– С. 115-118.