УДК 531

В.В. Грищук,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
(Житомирський педуніверситет)

ЗАСТОСУВАННЯ ПОВНОЇ ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ГАЛІЛЕЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

У цій статті показано, що повороти просторових осей не виводять за межі інерціальних систем відліку.

Згідно принципу відносності Галілея, якщо K – деяка інерціальна система відліку, положення матеріальної точки в якій задається радіус-вектором $\vec{r}$ в момент часу t, а K' - система відліку, відносно якої та ж сама матеріальна точка має радіус-вектор $\vec{r}\,'$ в момент часу t', до того ж штриховані і нештриховані величини зв'язані перетвореннями:

$$\begin{aligned} &\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t' \\ &t = t' \qquad (1) \\ &V' = const , \end{aligned}$$

то система K' за своїми фізичними властивостями еквівалентна системі K і є також інерціальною. Щоб можна було вважати і обернене, що довільні дві інерціальні системи зв'язані перетвореннями Галілея, слід дещо розширити сукупність галілеєвих перетворень. Зокрема, часові зсуви (зміна початку відліку):

$$t = t' + t_0 ;\ t_0 = const , \qquad (2)$$

просторові зсуви:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 ;\ \ \vec{r}_0 = const \qquad (3)$$

і повороти просторових осей:

$$r_\alpha = A_{\alpha\alpha'} r_{\alpha'} , \qquad (4)$$

де $A_{\alpha\alpha'}$ – ортогональна матриця, – також не виводять за межі інерціальних систем. Тому прийнято включати такі перетворення в повну групу перетворень Галілея і стверджувати в цьому випадку про перетворення Галілея в широкому розумінні; перетворення (1) називаються перетвореннями Галілея у вузькому розумінні.

Те, що перетворення (2) та (3) залишають нас в межах інерціальних систем відліку, при умові, що одна із систем відліку інерціальна, – очевидно. Проілюструємо, що і повороти просторових осей залишають системи відліку інерціальними. Зокрема, покажемо, що прискорення залишається однаковим при перетворенні просторових осей (4).

Розглянемо рух тіла вздовж похилої площини при наявності тертя. Багаторічний досвід викладання показує, що саме при розв'язку такої задачі в учнівських і студентських аудиторіях часто виникають питання щодо вибору орієнтації координатних осей.

Виберемо напрямки осей X та Y так, як показано на рис.1. Проставимо сили, що діють на тіло, та запишемо рівняння руху:

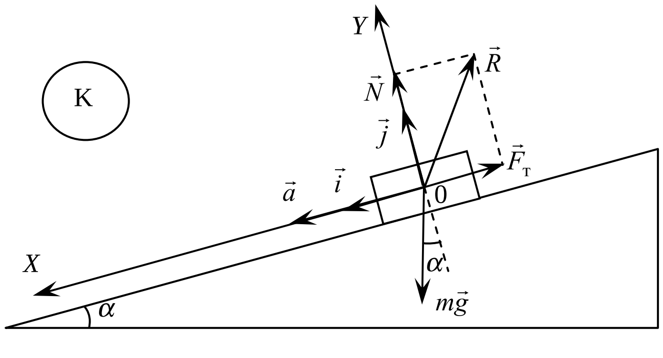

Рис.1.

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a} , \qquad (5)$$

$\vec{R}$ - сила реакції опори, яку можна представити у вигляді: $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_T$, де $\vec{N}$ - сила нормальної реакції опори, $\vec{F}_T$ - сила тертя.

Тоді рівняння (5) набуде вигляду:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T = m\vec{a} . \qquad (6)$$

Спроектуємо рівняння (6) на вказані осі. Слід зауважити, що зміни у шкільній програмі з математики дають можливість скористатися більш природним методом проектування, а саме: щоб спроектувати рівняння (6) на вісь X, це рівняння слід скалярно помножити на орт $\vec{i}$, який і задає вісь X:

$\left(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T\right) \cdot \vec{i} = m\vec{a} \cdot \vec{i}$.

Скористаємося означенням скалярного добутку та його лінійністю:

$m\vec{g} \cdot \vec{i} + \vec{N} \cdot \vec{i} + \vec{F}_T \cdot \vec{i} = m\vec{a} \cdot \vec{i}$,

$mg\, cos\left(90^0 - \alpha\right) + N\, cos\, 90^0 + F_T\, cos\, 180^0 = ma\, cos\, 0^0$,

$$mg\, sin\, \alpha - F_T = ma . \qquad (7)$$

Враховуючи, що між N та F_T існує зв'язок $F_T = \mu N$, спроектуємо рівняння (6) на вісь Y , тобто помножимо це рівняння скалярно на орт $\vec{j}$:

$\left(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T\right) \cdot \vec{j} = m\vec{a} \cdot \vec{j}$,

$m\vec{g} \cdot \vec{j} + \vec{N} \cdot \vec{j} + \vec{F}_T \cdot \vec{j} = m\vec{a} \cdot \vec{j}$,

$mg\, cos\left(180^0 - \alpha\right) + N\, cos\, 0^0 + F_T\, cos\, 90^0 = ma\, cos\, 90^0$,

$-mg\, cos\, \alpha + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\, cos\, \alpha \quad \Rightarrow \quad F_T = \mu mg\, cos\, \alpha$.

Підставимо одержане значення F_T в рівняння (7):

$mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha = ma$.

Звідси одержимо:

$$a = g\left(sin\, \alpha - \mu\, cos\, \alpha\right). \qquad (8)$$

Перейдемо до системи K' поворотом системи координат XOY на кут α (рис.2).

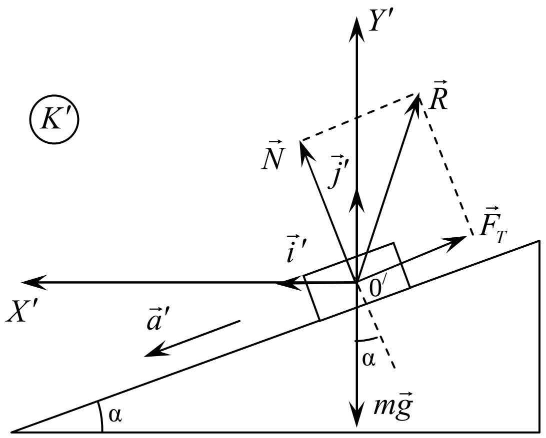

Рис. 2.

Спроектуємо рівняння руху (6) на координатні осі X' і Y' та запишемо скалярні рівняння руху відносно цих осей.

При цьому отримаємо:

$\left(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T\right) \cdot \vec{i}\,' = m\vec{a} \cdot \vec{i}\,'$,

$m\vec{g} \cdot \vec{i}\,' + \vec{N} \cdot \vec{i}\,' + \vec{F}_T \cdot \vec{i}\,' = m\vec{a} \cdot \vec{i}\,'$,

$mg\, cos\, 90^0 + N\, cos\left(90^0 - \alpha\right) + F_T\, cos\left(180^0 - \alpha\right) = ma\, cos\, \alpha$

$$N\, sin\, \alpha - F_T\, cos\, \alpha = ma\, cos\, \alpha \qquad (9)$$

$\left(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T\right) \cdot \vec{j}\,' = m\vec{a} \cdot \vec{j}\,'$,

$m\vec{g} \cdot \vec{j}\,' + \vec{N} \cdot \vec{j}\,' + \vec{F}_T \cdot \vec{j}\,' = m\vec{a} \cdot \vec{j}\,'$,

$mg\, cos\, 180^0 + N\, cos\, \alpha + F_T\, cos\left(90^0 - \alpha\right) = ma\, cos\left(90^0 + \alpha\right)$,

$$-mg + N\, cos\, \alpha + F_T\, sin\, \alpha = -ma\, sin\, \alpha . \qquad (10)$$

Скориставшись зв'язком $F_T = \mu N$, надамо рівнянням (9) та (10) такого вигляду:

$N\left(sin\, \alpha - \mu\, cos\, \alpha\right) = ma\, cos\, \alpha$

$N\left(cos\, \alpha + \mu\, sin\, \alpha\right) = mg - ma\, sin\, \alpha$.

Тоді $\dfrac{ma\, cos\, \alpha}{sin\, \alpha - \mu\, cos\, \alpha} = \dfrac{mg - ma\, sin\, \alpha}{cos\, \alpha + \mu\, sin\, \alpha}$,

$ma\, cos^2\, \alpha + \mu ma\, cos\, \alpha\, sin\, \alpha = mg\, sin\, \alpha - \mu mg\, cos\, \alpha - ma\, sin^2\, \alpha + \mu ma\, cos\, \alpha\, sin\, \alpha$.

Звідси одержимо $a = g\left(sin\, \alpha - \mu\, cos\, \alpha\right)$, що збігається з (8).

Таким чином, за своїми фізичними властивостями система K' еквівалентна системі K, а вибір тієї або іншої орієнтації просторових осей призводить лише до різного обсягу обчислень.

Матеріал надійшов до редакції 26.01.2004 р.

Грищук В.В. Применение полной группы преобразований Галилея при решении физических задач.

В этой статье показано, что повороты пространственных осей не выводят за пределы инерциальных систем отсчета.

Gryschuk V.V. The Employment of the Whole Group of Galileo’s Transformations while Solving Physycal Problems.

This article illustrates that the curves of coordinate axes stay within the boundaries of inertial systems.