УДК 378.147:515.4

І.Г.Ленчук,
кандидат технічних наук, доцент
(Житомирський педуніверситет)

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД АЛГОРИТМІЗАЦІЇ ПОБУДОВИ ЗОБРАЖЕНЬ КОМБІНАЦІЙ КУЛЯ-ОПИСАНА ПІРАМІДА

Пропонується метод розв'язування конструктивних задач стереометрії шляхом доречних аналітичних представлень на проеційних кресленнях визначальних елементів нетривіальних комбінацій двох тіл. Особлива увага звертається на аналіз просторової ситуації з посиланнями до епюру Г.Монжа.

Комплексні креслення в ортогональних проекціях за методом Г.Монжа мають, як відомо, прикладний характер – вони знайшли найширше застосування в техніці і у зв'язку з цим постійне місце у навчальних планах ліцеїв, коледжів та більшості вузів. Вважається, що такі креслення не лише прості у виконанні, а й зручно вимірні. На них особливо легко встановлювати розміри зображених предметів. З іншого боку, їм властива виняткова ненаочність. Природно, що цю суттєву ознаку "нефахівці" зараховують до розряду недоліків. Але ***у процесі навчання ненаочність останніх слід вважати позитивною ознакою методу, оскільки свідомі систематичні звертання саме до ненаочних зображень найбільш ефективно сприяють розвитку просторових уявлень учнів.***

Цікаво і важливо, що комплексними ортогональними проекціями можна з успіхом також скористатися на етапі створення алгоритмів виконання на позиційно повному кресленні М.Ф.Четверухіна зображень найбільш складних комбінацій стереометричних тіл, у тому числі комбінацій куля-описана піраміда, коли піраміда відмінна від правильної. При цьому відшуканню оптимального алгоритму побудови в кожному окремому випадку сприятимуть не лише вдалі графічні ходи, а й доречні аналітичні розрахунки, які допоможуть зафіксувати на зображенні розташування окремих елементів, визначальних у комбінації. Іноді це необхідні розрахунки для проведення чергового кроку побудови, а іноді – просто для спрощення цих дій, зокрема, тоді, коли виникає потреба виконання зображення з розумінням справи "від руки" швидко, наочно і, по можливості, правильно. Однак не може бути сумнівів, що перш ніж будувати зображення "від руки", потрібно глибоко зрозуміти, усвідомити алгоритм розв'язання цієї ж задачі на побудову за допомогою традиційних креслярських інструментів з тим, щоб допустимі спрощення були обґрунтовані і не суперечили зримо супутнім геометричним фактам.

Звичайно ж, зразу займатися на професійному рівні такими побудовами у змозі лише досвідчений виконавець, який має добре розвинену просторову уяву, солідну практику в користуванні методами Г. Монжа і М.Ф. Четверухіна, певний багаж знань з теорії позиційної повноти і метричної визначеності зображень. Важливо чітко уявляти комбінацію двох тіл, "бачити" їх спільні елементи – точки (лінії) дотику, вміти вдало вибирати розташування (орієнтацію) об'єкта в системі горизонтальна (Π_1) -фронтальна (Π_2) площини з метою отримання потрібної інформації з комплексного креслення комбінації у максимально можливій кількості. Ми переконані, що кваліфікований учитель математики зобов'язаний задовольняти сформульовані вимоги і обов'язково мати добрі навички уявлення будь-яких просторових образів геометрії, а отже – без особливих зусиль будувати зображення найскладніших комбінацій двох тіл.

Відразу ж зауважимо, що, працюючи на проеційному кресленні М.Ф. Четверухіна, ми дещо порушимо один із основних його принципів і зображати неплоскі фігури на картинній площині будемо не за методом їх вільного виконання, а закріпившись за аксонометричними осями у прямокутній диметрії. Цим ми, по-перше, визначимося і закладемо орієнтири дій, що дуже посутньо в час впровадження у навчальний процес комп'ютерних систем і НІТН. А по-друге, виключимо із результатів дій небажані (але можливі) варіанти ненаочних креслень, оскільки зображення в прямокутній диметрії будуть гарантовано наочними. Крім цього, в конструктивних задачах, які сформульовані у викладі нижче, обов'язковою складовою комбінацій є куля. А позиційно повне і метрично визначене зображення кулі орієнтовно в прямокутній диметрії будується досить просто як креслярськими інструментами, так і "від руки". Нагадаємо цей алгоритм для циркуля і лінійки:

а) точку перетину двох взаємно перпендикулярних прямих, одна з яких розташована горизонтально, а інша - вертикально, обираємо за центр кулі O; б) довільно взятий на вертикальній прямій відрізок OD приймаємо за малу піввісь еліпса, в який проеціюється екватор кулі, а відрізок $OA=3\ OD$ на горизонтальній прямій - за його велику піввісь; в) з центром в точці O радіусом OA проводимо коло - обрис кулі; г) через точку D ведемо горизонтальну пряму до перетину з обрисом кулі в точці Z; д) на вертикальній прямій вверх і вниз від точки O відкладаємо відрізки OE і OF, рівні відрізку DZ, чим визначимо північний і південний полюси кулі в точках E і F відповідно; е) в центральній симетрії відносно точки O шукаємо інші кінці великої та малої осей еліпса: $B=S_0(A)$, $C=S_0(D)$; ж) за великою AB і малою CD осями будуємо відомим методом еліпс, що є зображенням екватора; з) в центрі кулі O і її південному полюсі E проводимо аксонометричні осі в ортогональній диметрії (цей додатковий пункт обов'язковий у його графічній реалізації на картинній площині у переважній більшості випадків).

Наведемо умови лише чотирьох можливих (типових, у певній мірі) стереометричних побудов, що відносяться до класу конструктивних задач, визначених у заголовку статті.

№1. Побудувати піраміду, описану навколо кулі, якщо в основі піраміди лежить правильний трикутник, дві бічні грані перпендикулярні до основи, а третя складає з площиною основи кут $60°$.

№2. Навколо кулі радіуса r описати піраміду. Основою піраміди служить ромб, у якого гострий кут рівний $60°$, а сторона рівна $\frac{2a}{\sqrt{3}}(a>2r)$ і одне з бічних ребер піраміди розташовується перпендикулярно до площини її основи.

№3. Навколо кулі описати піраміду. Основою піраміди служить рівнобедрений прямокутний трикутник, її висота в два рази більша за діаметр кулі, а основою висоти є центр вписаного в трикутник кола.

№4. Побудувати піраміду, описану навколо кулі. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, дві бічні грані, що містять його рівні сторони, перпендикулярні до площини основи, а третя грань складає з площиною основи кут *45°*. Висота піраміди у два рази більша за діаметр кулі.

Отже, маючи на увазі викладені вище міркування і пам'ятаючи, що інструментами виконання графічних дій будуть циркуль та лінійка, приступимо до розв'язання першої задачі.

В системі двох взаємно перпендикулярних площин проекцій Π_1 і Π_2 комбінацію куля-піраміда розташуємо так, щоб основа піраміди була горизонтальною, а бічна грань, нахилена до площини основи під кутом *60°*, - фронтальнопроеціюючою (рис. 1).

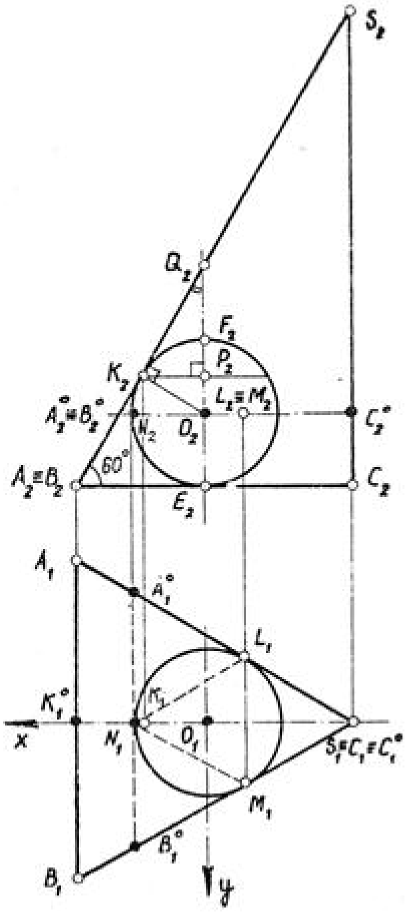

Рис. 1.

Оскільки алгоритм побудови зображення кулі (*O, r*) відомий, то в подальшій роботі передбачається відшукати на проеційному кресленні М.Ф.Четверухіна точки дотику граней піраміди *SABC* до поверхні кулі (сфери) і вершини многогранника *S, A, B* і *C*. Очевидно, що основа *ABC* піраміди дотикається до сфери в південному полюсі *E*, а дві бічні грані, перпендикулярні до основи, мають точки дотику *L* і *M* на екваторі. Нарешті, третя бічна грань також має зі сферою одну спільну точку *K*, яка належить апофемі *SK°* цієї грані. З рисунка неважко помітити, що побудова точок *L* і *M* не потребує особливих зусиль. Для цього досить в екватор вписати рівносторонній трикутник *NLM* і зафіксувати дві його вершини, що мають у прямокутній декартовій системі координат *Oxyz* одну і ту ж саму абсцису. Для встановлення такої ж координатної визначеності точки К у просторі знову ж таки звертаємося до рисунка. Помічаємо, що трикутник *QKO* прямокутний, його гострий кут при вершині *Q* рівний *30°*, а катет *KO* дорівнює радіусу кулі *r*. Тому, враховуючи, що гіпотенуза прямокутного трикутника в два рази більша катета, який лежить проти кута в *30°*, маємо: *OQ=2r*. Відомо також, що катет прямокутного трикутника є середнім геометричним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу. Отже, $KO^2=OQ\ OP$, де точка *P* - центр паралелі сфери, на якій лежить шукана точка *K*. Або ж, $r^2=2r\ OP$. Звідси *OP=r/2*. Цим встановлено аплікату точки *K*: $z_к=3r/2$. Оскільки її ордината $y_к=0$, то залишилося знайти із трикутника *KPO* лише абсцису цієї точки: $x_k = PK = \frac{\sqrt{3}}{2} r$. Відрізок *PK* будується як середній пропорційний до відрізків довжиною в *3r/4* і *r (r=NO)*, оскільки $x_k^2 = \frac{3r}{4} \cdot r$. Після побудови точок *K, L* і *M* проблеми побудови решти елементів піраміди, описаної навколо кулі, зникають.

Таким чином, конструкцію алгоритму розв'язання розглядуваної задачі можна представити у такому вигляді.

1. Побудова зображення кулі (послідовність дій наведена у тексті вище).

2. Побудова зображень спільних елементів поверхонь піраміди і кулі:

а) вписуємо в еліпс, що є ортогональною аксонометричною проекцією екватора кулі, зображення правильного трикутника NLM і виділяємо його вершини L і M як такі, в яких до поверхні кулі дотикаються грані піраміди SAC і SBC відповідно; б) на вертикальній прямій уверх від точки O відкладаємо відрізок OP, рівний половині відрізка OF (F - північний полюс кулі, $OF=r$); в) через точку P ведемо пряму, паралельну осі Ox, і на ній в додатному напрямку відкладаємо відрізок PK, чим визначимо точку дотику K третьої бічної грані SAB до сфери.

3. Побудова зображення піраміди:

а) опишемо навколо екваторільного еліпса зображення правильного трикутника $A°B°C°$ так, щоб його сторони $A°C°$ *і* $B°C°$ дотикалися до кривої в точках L і M відповідно. Виконаємо паралельне перенесення цього трикутника на вектор OE в площину основи піраміди; б) на вертикальній прямій уверх від точки O відкладаємо відрізок $OQ=2r$; в) через точки Q і K проведемо пряму лінію до перетину, з одного боку, з вертикальною прямою, що проходить через точку $C \equiv C°$, з другого, - з віссю Ex у південному полюсі кулі Е. Цим визначимо вершину піраміди S і апофему її лівої грані $SK°$ (точка $K°$ - основа апофеми); г) вершини A і B трикутника ABC фіксуємо в перетині прямих $A°C$ і $B°C$, що належать площині основи піраміди, із прямою, яка проходить через точку $K°$ паралельно осі Ey; ґ) з'єднуємо точку S з кожною із точок A, B і C.

Алгоритм дій виконавця складено. Залишилося реалізувати його на дошці (чи на папері в клітинку, рис. 2) із обов'язковим урахуванням властивостей паралельного проеціювання.

Пропонуємо читачеві самостійно розв'язати також графоаналітичним методом задачі на побудову, що записані на початку статті під №№ 2-4. Це в якійсь мірі дасть можливість дещо глибше зрозуміти суть теоретичної частини методу і перевірити себе на практиці.

Завершуючи, зауважимо: нам не хотілося б, щоб у математика і, зокрема, шанувальника і знавця геометрії, який ознайомився з наведеними викладками і зацікавився ними, склалося враження, що автор штучно ускладнює процес розв'язування стереометричних задач на побудову шляхом об'єднання проеційних креслень М.Ф. Четверухіна і Г. Монжа. Так, можливо деякі задачі могли б розв'язуватись простіше і швидше без використання епюра Г. Монжа. Більше того, кожну із наведених у тексті задач (і будь-яку їм подібну) досвідчений фахівець-геометр розв'яже "від руки" безпосередньо на проеційному кресленні М.Ф. Четверухіна. Але ж ми мали за мету продемонструвати метод не лише професіоналам цієї справи, а й учням старших класів, студентам фізико-математичних факультетів педуніверситетів, вчителям математики, які у масі своїй не володіють максимально розвинутими просторовими уявленнями і не мають достатніх навичок побудови зображень окремо взятих стереометричних тіл, не говорячи вже про їхні комбінації і, тим більше, незвичні, рідкісні у шкільній практиці комплекси кількох просторових фігур.

Разом з тим ми свідомо звернулися саме до графоаналітичного методу розв'язування складних задач за допомогою комплексних проекцій Г. Монжа. Лише такий підхід дозволяє здійснити просто і відповідно до законів логіки аналіз взаємного розташування заданих стереометричних тіл; чітко встановити їх спільні елементи; "побачити", як, на яких лініях чи в яких площинах однієї й другої поверхні лежать ці точки, прямі або кола; намітити, нарешті, шлях їхнього пошуку на позиційно повному і метрично визначеному кресленні М.Ф. Четверухіна. Отже, аналіз виділяється окремим етапом процесу розв'язання задачі, що є нормальним явищем, оскільки необхідність аналізу зумовлена самою природою таких задач. При безпосередніх суто графічних побудовах на кресленні М.Ф.Четверухіна усе це виконавець має уявляти, аналізуючи подумки, не користуючись таким потужним засобом геометрії, яким вважають допоміжний рисунок, виконаний, зокрема, за методом Г. Монжа.

Крім цього, дещо нестандартний підхід до розв'язування просторових задач на побудову в математиці і спонукає розв'язувати їх циркулем та лінійкою без будь-яких умовностей і непередбачуваних неточностей відповідно до математично встановленої теорії паралельного проеціювання. При потребі ж можна ввести не просто умовності, а строго обґрунтовані спрощення, які дозволяють прискорити процес побудови рисунка без помітних втрат у наочності і правильності.

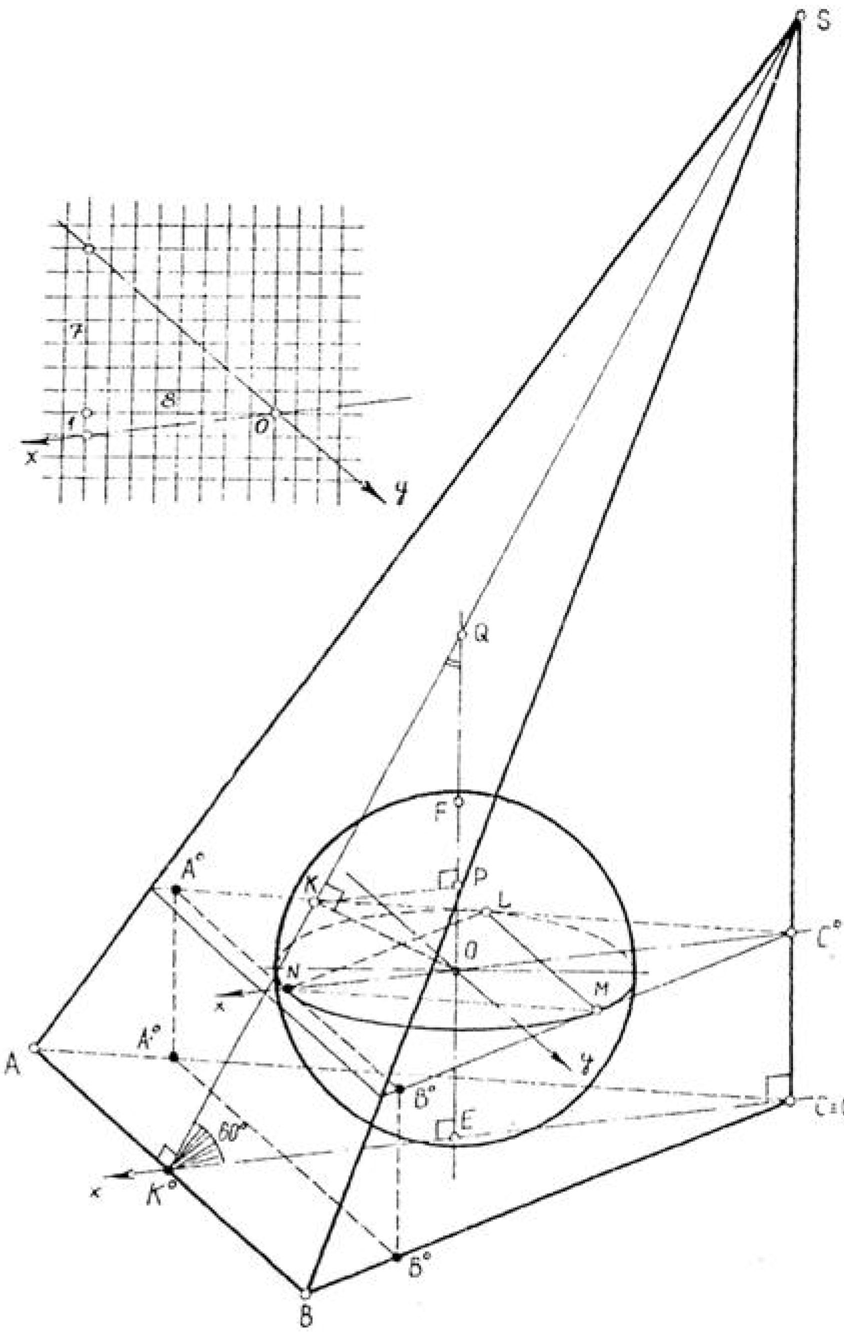

Рис. 2.

З іншого боку, графоаналітичний метод із застосуванням епюра Г. Монжа не лише вчить аналітичному методу міркувань у геометрії, де найбільш наочно переплітаються просторові уявлення і логічне мислення, а й демонструє невичерпні можливості комплексного використання, поєднання аналітики і графіки. До речі, графоаналітичні методи вирішення прикладних задач геометрії давно знайшли визнання в наукових колах і на виробництві.

На додаток наголосимо також, що запропонована схема алгоритмізації стереометричних побудов передбачає створення навчальних програм для сучасних ПК, які давали б змогу учневі (чи вчителю) самостійно, наодинці з ПК учитися виконувати найрізноманітніші можливі в курсі стереометрії зображення на площині. А для цього, як відомо, кожний крок алгоритму має описуватись аналітично. І якщо читач уважно продумає і усвідомить алгоритм, записаний вище, то напевно помітить, що в ньому немає жодної операції, яку не можна було б описати формулою. Крім цього, реалізація на екрані дисплея ПК встановленої сукупності побудов, зібраних у єдиний алгоритм, передбачає обов'язкову координатну визначеність окремих елементів просторових об'єктів і в цілому їх комбінації. Ця проблема, як виявилося, теж просто розв'язується за відомою схемою через відмову від вільного виконання зображень і жорстке закріплення системи куля-піраміда за осями ортогональної диметрії.

Саме виходячи із міркувань гарантованої наочності зображень, чіткої визначеності стереометричного об'єкта в просторі та можливості аналітичної формалізації і машинної алгоритмізації побудов, ми і запропонували графоаналітичний метод їх виконання.

Матеріал надійшов до редакції 16.11.99 р.

Ленчук И.Г. Графоаналитический метод алгоритмизации построения изображений комбинаций шар-описанная пирамида.

Предлагается метод решения конструктивных задач стереометрии путем целесообразных аналитических представлений на проецонных черчениях определяющих элементов нетривиальных комбинаций двух тел. Особое внимание уделяется анализу пространственной ситуации с ссылками к эпюру Г.Монжа.

Lenchuk I.H. Graphic and Analytical Method of Constructing Algorithm of Images of sphere-circumscribed Pyramid Combinations.

The solution method of stereometric constructive tasks is suggested through expedient analytical representations on projection drawings of determining elements of untrivial combinations of two bodies. Special attention is to the analysis of a spatial situation with reference to Monge's complex drawing.