УДК 378.147:515.4

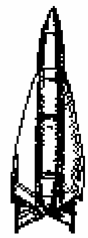
І.Г.Ленчук

МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ЗОБРАЖЕНЬ В АКСОНОМЕТРІЇ. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

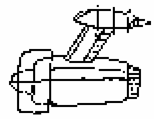
Обгрунтовуються основи виконання в ортогональних проекціях вірних і наочних зображень тіл обертання. Майже очевидні проеційні взаємозалежності спонукають до створення тривіальних побудовних алгоритмів

Немає жодних сумнівів, що стереометрія строгістю геометричних форм і співвідношень, які повсюдно унаочнюються, робить досить відчутний внесок у процес формування активного зорового сприйняття навколишньої дійсності, розвиває відчуття гармонії та пропорції, спостережливість, уяву, вчить мислити просторовими образами.

Вміння виконати просторовий малюнок з натури (чи з уяви, що значно важче), правильно відтворити у мозку оригінал за його зображенням (читання проеційного креслення) можливі лише за обставин засвоєння основних правил умовного зображення просторових фігур на картинній площині та прийомів, що забезпечують їх



•••.1



•••.2

наочність. Такі правила слугують тим, хто вчиться, орієнтувальною основою в певній послідовності конструктивних операцій із зображення неплоскої фігури.

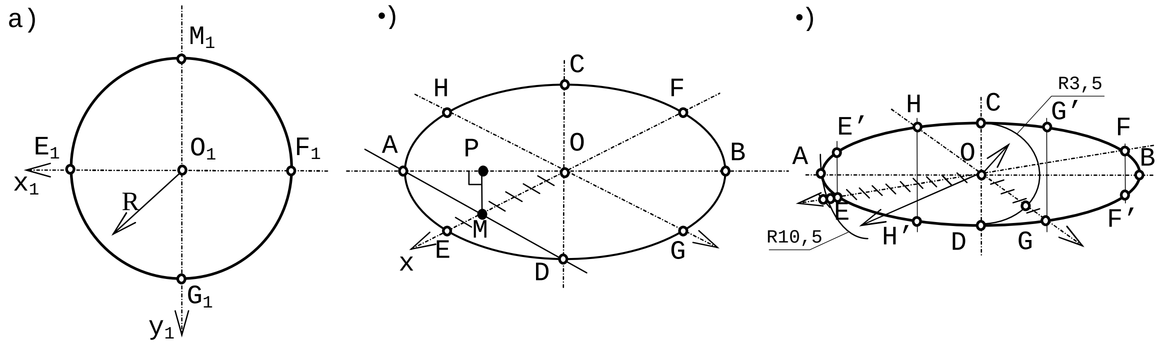
«Графічна грамотність і вміння вільно малювати обов’язкові для кожної освіченої людини і особливо для людей, які займаються творчою діяльністю в різноманітних областях науки і техніки. При конструюванні машин, апаратів чи споруд конструктору необхідно робити від руки замальовки розроблюваних об’єктів у декількох варіантах, із яких він вибирає той, який найбільше відповідає естетичним вимогам. Для прикладу на рисунку 1 наведено один із творчих нарисів, який виконав від руки акад. С.П.Корольов, а на рисунку 2 - нарис авіаконструктора О.К.Антонова» (цит. і рис. за кн. [1]).

Логічна організація наукового обгрунтування вихідних положень і стрижневих тверджень теорії специфічних аксонометричних зображень М.Ф.Четверухіна, становлення принципів і структурування форм та методів роботи, відпрацювання доказово незаперечних правил-орієнтирів їх практичної реалізації, пошук засобів удосконалення техніки графічних операцій немислимі без вичерпної поінформованості про конструктивні особливості вірних і наочних проеційних креслень як многогранників [2], так і найпростіших, найбільш вживаних тіл обертання. Адже відомо, що тільки у навчальній практиці конуси, циліндри і кулі зустрічаються не лише як стереометричні фігури сформульованої задачі на обчислення, доведення чи побудову. В технічному малюванні, наприклад, вони є елементами наочно зображуваних деталей машин і механізмів, які в сукупності представляють найрізноманітніші комбінації (комплекси) відомих геометричних тіл.

Найбільш трудомістким у виконанні круглого тіла є викреслювання еліпса - проекції кола, що виконує в оригіналі роль основи поверхні або ж її паралелі, а інколи - меридіана.

У нашому виборі методу зображень [2] гарантом наочності останніх є, як відомо, аксонометричні напрямки, а їх вірність гарантують умовні співвідношення між визначальними елементами основи тіла та, безсумнівно, відомі (спільні) інваріанти паралельних проекцій і перетворення подібності. Отож-то будувати еліпс в ізометрії від руки доцільно за такою схемою (рис.3,а),б)):

1. Проводимо аксонометричні осі.
2. Відкладаємо в обох напрямках осей Ox і Oy однакове число одиничних відрізків (зручно R кола в оригіналі вибрати кратним 7); одержимо точки E, F, G, H еліпса.
3. Відрізок OE розділимо точкою M у відношенні 5:2.
4. Через точку M проведемо пряму, паралельну осі Oy, і в її перетині з горизонтальною і вертикальною прямими, інцидентними точці O, одержимо кінці A і D півосей еліпса.
5. Будуємо кінці півосей, яких не вистачає: $B=S_0(A)$ і $C=S_0(D)$.
6. Проводимо еліпс через вісім побудованих його точок.



•••. 3

Обґрунтуванням побудови служать наступні міркування. На зображенні трикутник ODM рівносторонній

($\angle$MOD=$\angle$OMD=60^0, що очевидно), тому $CD = 2\cdot OD = 2\cdot OM = 2\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{d}{2} = \frac{5}{7}d \approx 0{,}71d$,

$AB = 2\cdot AO = 2\cdot 2\cdot OM\cdot\cos 30^0 = 2\cdot\frac{5}{7}d\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{7}d \approx 1{,}22d$. Якраз такі співвідношення між осями еліпса і діаметром кола (прообразом еліпса) встановлює ДЗСТ 2.317-69 для побудови зображень круглих тіл у збільшеній (практичній) ізометрії.

Алгоритм побудови зображення еліпса в прямокутній диметрії дещо відрізняється від попереднього (рис.3,а) ,в)). Тут зручно прийняти радіус кола R кратним 10, оскільки, згідно з тим же стандартом, велика вісь закономірної кривої $AB = 1{,}06d \approx 1{,}05d = 1{,}05\cdot 20 = 21$, а мала - $CD = 0{,}35d = \frac{AB}{3} = 7$ одиницям масштабу. Виходячи із цих міркувань, матимемо таку схему елементарних конструктивних операцій:

1. Проводимо аксонометричні осі.

2. В обох напрямках осі Ох відкладаємо однакову кількість одиничних відрізків (по 10) і одержуємо точки Е і F еліпса.

3. В обох напрямках осі Оу відкладаємо в два рази менше число відрізків (по 5) і одержуємо ще дві точки G і Н того ж еліпса; спряжені діаметри EF і GH, як відомо, однозначно визначають шукану криву.

4. На горизонтальній і вертикальній прямих від точки О в обидві сторони відкладаємо 10,5 і 3,5 відрізки відповідно, чим встановимо кінці осей еліпса A, B і C, D (тут, при побудові від руки зручно користуватися вимірювачем).

5. Будуємо точки E', F', G', H', симетричні точкам E, F, G, H відносно горизонтальної (чи вертикальної) прямої.

6. Проводимо еліпс через одержані його дванадцять точок.

Звичайно, якщо взяти до уваги передбачені стандартом розміри осей еліпса, то легко помітити зручні (умовні) співвідношення між ними, а саме: в ізометрії AB:CD=1,22d:0,17d$\approx$7:4, а в диметрії AB:CD=1,06d:0,35d$\approx$3:1. Це, без сумніву, може при нагоді значно прискорити і суттєво спростити дії виконавця від руки:

1. Проводимо пару взаємоперпендикулярних прямих і точку О їх перетину приймаємо за центр кривої.

2. Від точки О вверх і вниз, вліво і вправо відкладаємо попарно рівні відрізки ОС=OD=2(1) од. довжини, ОА=ОВ=3,5(3) од. довжини, чим визначаємо малу та велику осі еліпса CD і AB відповідно.

3. Обов’язково з урахуванням форми еліпса наводимо криву лінію за правилом: від точки С вліво-вниз через точку А вправо-вниз до точки D і, аналогічно, - від точки С вправо-вниз через точку В вліво-вниз до точки D.

Певна практика гарантує достатню якість результату цих графічних операцій.

Побудови на проеційному кресленні решти елементів тіл обертання порівняно прості й у фахівця належного гатунку не викликають сумнівів. Однак досягти вищого рівня професіоналізму можна лише через усвідомлення геометричної сутності конструкції кожного тіла (і його елементів), зображення яких виконуються спочатку за строгими законами ортогонального проеціювання винятково циркулем і лінійкою. І тільки потім, увівши допустимі та доречні умовності та спрощення, потрібно сформувати прості й надійні у використанні алгоритми дій від руки. Ефектному досягненню цієї мети на першому етапі сприятимуть комплексні зображення в ортогональних проекціях, які в літературі ще називають проекціями Г.Монжа [3].

1. ***Зображення кулі та її елементів.***

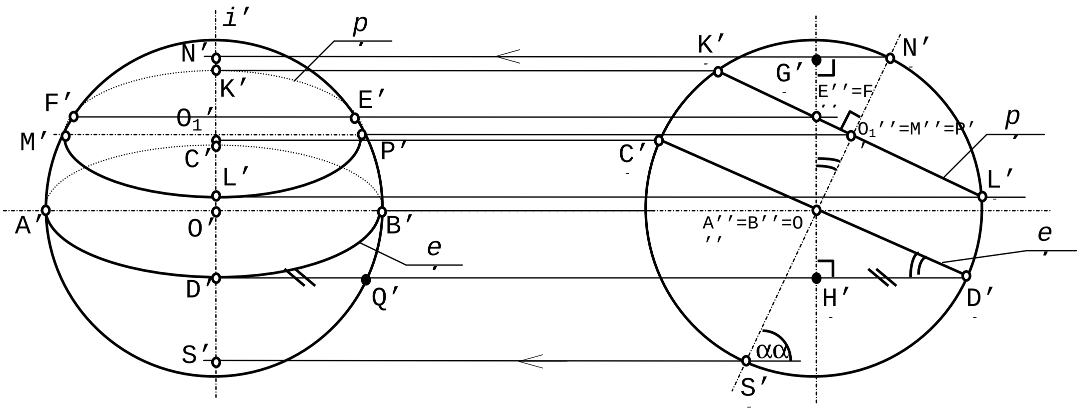
Зображення кулі у випадку її ортогонального проеціювання завжди буде мати обрис у вигляді кола. При цьому діаметр кола обрису дорівнює справжньому діаметру кулі. Якщо ж в уяві за площину зображень обрати фронтальну площину проекцій V (образно - площину дошки), а пряму *і*, що містить будь-який діаметр обрису, назвати віссю кулі та розташувати перпендикулярно до горизонтальної площини проекцій Н (підлоги), то кожна паралель (коло в перетині поверхні кулі площиною, перпендикулярною до осі), а серед них і екватор - найбільша із паралелей, що лежить у площині, яка проходить через центр кулі, будуть проеціюватися на V у відрізки прямих. Тут північний та південний полюси кулі (точки перетину її поверхні з віссю) займуть відповідно найвище і найнижче розташування, а головний меридіан суміститься з обрисом цього тіла (меридіаном називається велике коло в перерізі поверхні кулі будь-якою площиною, що містить вісь; меридіан у фронтальній площині називається головним).

Зрозуміло, що хоч таке зображення кулі вірне, але воно не є наочним, оскільки її елементи відносно картинної площини займають частинне розташування.

Як же по-іншому можна розмістити кулю в системі двох взаємно перпендикулярних площині проекцій H, V, щоб зображення на фронтальній площині давало найбільш повне уявлення цього тіла? Очевидно, що вісь *i* потрібно нахилити "на себе" і розташувати її під деяким кутом $\alpha \neq 90^0$ до горизонтальної площини проекцій H. Тоді образом екватора, як і будь-якої паралелі на V, буде еліпс, а зображення кулі відразу ж стане наочним. Тут не вистачає лише теоретичного обгрунтування правил побудови зображень екватора, полюсів і якої завгодно паралелі.

Виявляється, що такі побудови досить просто обгрунтовуються, якщо ввести в розгляд ще одну площину проекцій, перпендикулярну до двох вище згаданих, - профільну W (стіна в класній кімнаті по праву руку від учнів). Важливо, що тут вісь кулі *i*, паралельна W, буде проеціюватися на неї без спотворення (*i"*), а екватор і всі без винятку паралелі, розташовані в просторі ортогонально *i*,- у відрізки прямих, перпендикулярних *i"* (рис. 3).

Отже, нехай кулю на епюрі Г.Монжа задано центром 0(0',0"), радіусом R(R'=R") і віссю *i(i',i")*. Відомо, що еліпс, яким зображається екватор на площині проекцій V, однозначно визначається великою і малою осями, що є ортогональними проекціями двох взаємно перпендикулярних діаметрів цього екватора - кола в оригіналі. Шукані діаметри зручно спочатку зафіксувати на профільній площині проекцій W, а саме, один з яких AB є профільно-проеціюючим (A"=B"=O"), а інший CD - профільним (C"D"=CD). Враховуючи належність точок A і B великому колу, розташованому в фронтальній площині симетрії кулі, а точок C і D - її профільному меридіональному перерізу, шляхом проведення горизонтальних ліній проеційного зв'язку (на рисунку вони показані стрілками) знаходимо їх фронтальні проекції A', B' і C', D'. За осями A'B' і C'D' відомим методом будуємо і сам еліпс. Так само на виродженій проекції кола профільного меридіонального перерізу (або, що те ж саме, на фронтальній проекції осі *i*') знаходимо фронтальні проекції N' і S' відповідно північного і південного полюсів кулі.



•••. 4

Побудова зображення деякої *p(p',p")* у системі двох взаємно перпендикулярних площин проекцій V , W відрізняється від побудови екватора тим, що для відшукування великої осі еліпса *p*' (див. рис. 4) не досить провести відповідну горизонтальну лінію зв'язку, а ще й неодмінно потрібно заміряти довжину цієї осі на профільній площині проекцій W (M'P'=K"L", як два взаємно перпендикулярні діаметри кола, що проеціюються в натуральну величину на V і W відповідно) і відкласти її певним чином на знайденому напрямку; крім цього, тут обов'язково встановлюють точки видимості E(E',E") і F(F',F") еліпса на фронтальній площині проекцій. Оскільки видимість на V визначає фронтальна площина симетрії кулі, то точки E', F' належать обрису і, з урахуванням того, що E"$\equiv$F", вони однозначно будуються в перетині визначеної лінії проеційного зв'язку з обрисом. Зауважимо також, що кінці великої осі еліпса M', P' завжди розташовуються у внутрішній області обрису кулі, «близько» біля обрису, і в жодному разі не лежать на ньому.

Важливими з практичної точки зору є ще й такі міркування. Оскільки вісь кулі *i* жорстко пов'язана з екватором *e*, то, очевидно, розташування полюсів N', S' і кінців малої осі еліпса C', D', яким зображується екватор на фронтальній площині проекцій, теж знаходяться у взаємній залежності. Це добре помітно на профільній площині проекцій: із зменшенням кута нахилу α осі кулі до площини проекцій H мала вісь еліпса *e'* збільшується і навпаки. Взаємна ортогональність цих елементів дозволяє за відомим зображенням екватора (досить, щоб була задана його мала вісь C'D') будувати певним чином зображення північного і південного полюсів N' і S', і навпаки, за фронтальними проекціями полюсів - еліпс, що зображує екватор на цій площині проекцій. Справді, розглянемо два прямокутні трикутники O"N"G" і D"O"H". Вони рівні, оскільки O"N"=O"D"=R, а $\angle$O"D"H"=$\angle$N"O"G", як такі, що утворені відповідно двома парами взаємно перпендикулярних прямих. Звідси випливає, що O"G"=D"H". Але ж D"H"=D'O', що очевидно. Отже, O'N'=O'S'=D'Q'.

Скористуємося цим результатом до побудови на поверхні кулі будь-якого меридіана.

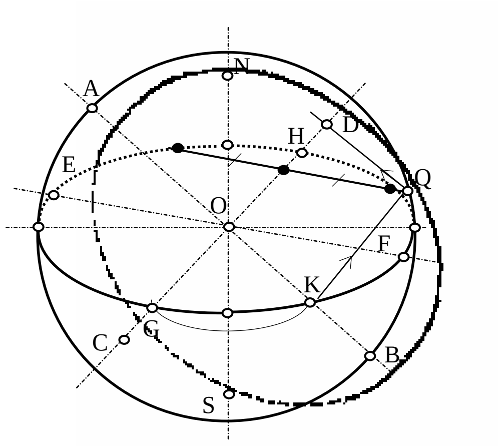


Рис. 5

Відомо, що кожна меридіональна площина містить вісь кулі NS і в перетині з екваторіальним кругом висікає діаметр, перпендикулярний осі. Отже, відрізок NS і довільний діаметр екватора EF (рис. 5) однозначно визначають еліпс (як пара спряжених діаметрів), що зображує меридіан, відповідний діаметру EF. Спробуємо побудувати велику та малу осі цього еліпса. В екваторіальному еліпсі проведемо діаметр GH, спряжений EF. Він є зображенням діаметра кулі, перпендикулярного меридіональній площині NOF. Посилаючись на одну з відомих властивостей ортогональної проекції кола, стверджуємо, що велика вісь AB шуканого еліпса розташовується на площині зображень перпендикулярно до діаметра GH, а мала вісь CD - на прямій, яка містить GH. Для відшукання малої осі доречні такі міркування . Всі перерізи поверхні кулі площинами, що проходять через її центр, рівні між собою. Приймемо (в уяві) меридіональний переріз, що будується, за екватор. У цих умовах точки G і H будуть полюсами кулі. Згідно з вище наведеними умовиводами, розташування на кресленні полюсів і кінців малої осі екватора графічно взаємозалежне. Тому за відомими полюсами G і H будуємо малу вісь CD еліпса-меридіана, що за припущенням виконує роль екватора: 1) від точки O на великій осі еліпса AB відкладаємо відрізок OK, рівний відрізку OG; 2) через точку K ведемо пряму, паралельну GH, до перетину з обрисом кулі в точці Q; 3) від точки O в обох напрямках прямої GH відкладаємо відрізки OC і OD, рівні відрізку KQ. Точки C і D-шукані. Далі, за двома осями AB і CD будуємо шуканий меридіональний еліпс.

2. ***Зображення конуса (циліндра) та його елементів***.

З тим, щоб набуті навички в побудові зображень конуса (циліндра) були стійкими і не носили формальний характер, тут також доцільно звернутися до методу ортогонального проеціювання в системі двох взаємоперпендикулярних площин проекцій V і W.

Отже, нехай вісь конуса *i* нахилена на спостерігача й утворює з фронтальною площиною проекцій V (класна дошка) кут α . На профільну площину проекцій W (стіна справа) такий конус проеціюється у вигляді рівнобедреного трикутника. При цьому коло в основі конуса вироджується у відрізок прямої, перпендикулярно розташованої до профільної проекції осі, яка, в свою чергу, містить висоту конуса в натуральну величину (рис. 6). Тепер за вже відомою схемо, легко будується фронтальна проекція конуса. Єдине, що тут може викликати певні сумніви у виконавця, то це проведення на площині зображень V обрисових твірних конуса. Це питання просто вирішується, якщо в системі V, W ввести в розгляд ще й кулю, співосну з конусом, вписану в нього, і таку, для якої коло в основі буде паралеллю дотику до конуса (зображення кулі на W будується елементарно, див. рис.). Тоді видимість поверхні конуса на V встановлюється через видимість паралелі на поверхні кулі.

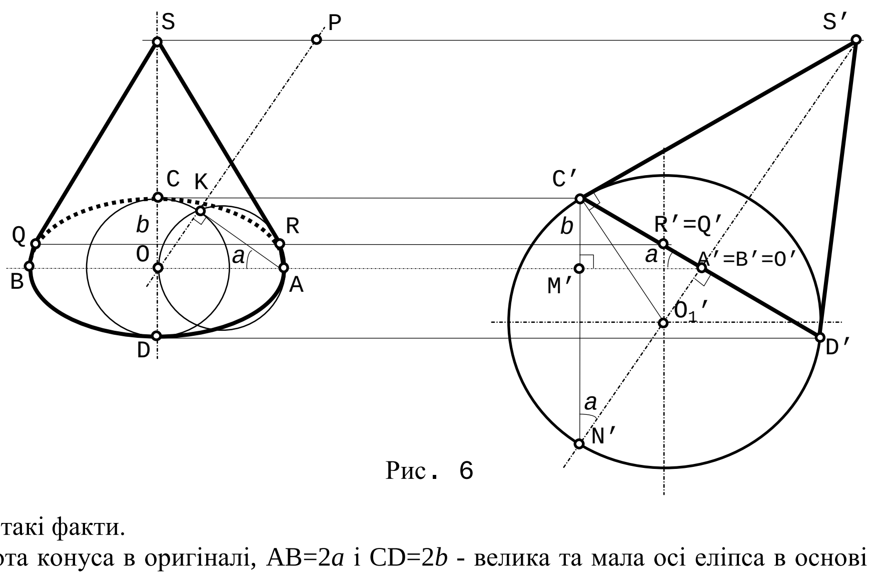


Рис. 6

Цікавими є й такі факти.

Нехай H-висота конуса в оригіналі, AB=2*a* і CD=2*b* - велика та мала осі еліпса в основі конуса на площині зображень. Чи можна аналітично обрахувати довжину відрізка SO=*h*, що зображує висоту? Виявляється, можна.

Проведемо через точку O пряму, паралельну O'S', а через точку A - пряму, паралельну C'D' (див. рис. 6). Зафіксуємо їх точку перетину K і розглянемо трикутники OAK і C'M'O'. Вони прямокутні ($\angle$ OKA= $\angle$ C'M'O'=90^0), з рівними гіпотенузами (O'C'=OA=*a*) і рівними гострими кутами (ΔC'O'N'~ΔC'M'O': ∠C'N'O'=∠C'O'M'=∠OAK), що очевидно. Отже, ΔOKA=ΔC'M'O'. Звідси C'M'=OK=OC=*b*. Тому точка K, з одного боку, лежить на колі з діаметром CD, а з іншого, - на колі з діаметром OA.

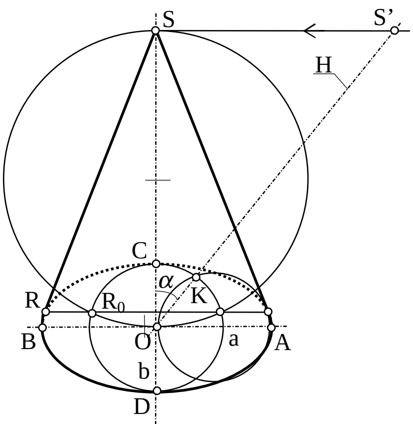


Рис. 7

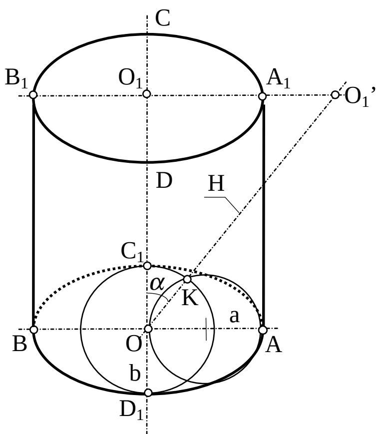


Рис. 8

Нарешті із трикутника OKA знаходимо $cos\,\alpha = \frac{AK}{OA} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}}$, а із трикутника OSP

SO=h=OP $cos\,a = H\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}}$. Це і є аналітичний вираз для висоти конуса на площині зображень.

Із наведених міркувань випливає алгоритм побудови зображення конуса циркулем і лінійкою за заданими його параметрами *a*, *b* і H (рис.7): 1) точку перетину двох взаємно перпендикулярних прямих, одна з яких розташована горизонтально, а інша - вертикально, приймаємо за центр кола O в основі конуса; 2) на горизонтальному напрямку фіксуємо велику вісь еліпса AB=2*a*, на вертикальному - малу CD=2*b*; 3)відомим методом будуємо еліпс, що визначений цими осями; 4) на відрізках CD і OA , як на діаметрах, будуємо два кола і шукаємо точку K їх перетину; 5) на промені OK відкладаємо відрізок OS'=H і через точку S' ведемо горизонтальну пряму до перетину в точці S з вертикальним напрямом точки O; 6) із точки S проводимо дотичні (обрисові твірні конуса) до еліпса.

Цю ж задачу можна інтерпретувати дещо по-іншому, якщо згадати, що конус обертання (як стереометрична фігура) цілком визначається висотою H і діаметром *d*=2R кола в основі. Коли ж мова йде про його наочне зображення в ортогональній проекції, то для визначеності останнього в просторі слід задати ще й кут нахилу α осі конуса до картинної площини.

Тут SO=h=Hcosα, *a*=R (згідно з відомою властивістю ортогональної проекції кола) і *b*=Rsinα (із трикутника OKA, див. рис. 7). Алгоритм виконання циркулем та лінійкою відповідних графічних побудов матиме при цьому таку реалізацію: 1) точку перетину двох взаємно перпендикулярних прямих, одна з яких розташована горизонтально, а інша-вертикально, приймемо за центр кола O в основі конуса; 2) на горизонтальному напрямку відкладаємо велику вісь еліпса AB=2R і на відрізку OA=R, як на діаметрі, проведемо коло ω_1 ; 3) в півплощині вертикального напрямку, що містить точку A, з вершиною в точці O відкладаємо кут, рівний α, і фіксуємо точку K перетину визначеного (похилого) променя з колом ω_1; 4) радіусом OK=*b* проводимо ще одне коло ω_2 і відмічаємо його точки перетину C і D з вертикальним напрямом точки O; 5) на промені OK відкладаємо відрізок OS'=H і через точку S' ведемо горизонтальну пряму до перетину в точці S з тим же вертикальним напрямком; 6) за великою AB і малою CD осями будуємо еліпс і з точки S проводимо дотичні до цього еліпсайого обрисові твірні - за схемою, конструктивно добре зрозумілою з рисунка.

Очевидно, що алгоритм побудови в ортогональній проекції зображення ще однієї (не менш відомої) стереометричної фігури - ***прямого кругового циліндра*** - мало чим відрізнятиметься від щойно описаного алгоритму. Зокрема, його перші п’ять кроків напевне що залишаться незмінними. І лише на завершальному етапі, після побудови еліпса нижньої основи, слід чітко визначитися з верхньою основою циліндра, як з результатом паралельного перенесення вже накресленого еліпса на вектор $\overline{OS}$. Обрисовими твірними розглядуваного тіла обертання слугуватимуть на картинній площині відрізки, паралельні OS, і такі, які з’єднують кінці великих осей цих двох рівних між собою еліпсів.

Таким чином, наведені алгоритмічні схеми строго обгрунтованих графічних операцій з відомими круглими тілами дають повне уявлення про конструктивні особливості їх ортогональних проекцій. Тепер на цій основі неважко сформулювати прості, зрозумілі та зручні в користуванні правила-орієнтири побудовних дій виконавця в усякій конкретній сфері інтересів. При цьому ще раз привертаємо увагу користувача до зображень, у виконанні яких ми в першу чергу посилаємося на досить популярний в інженерній практиці метод прямокутних аксонометричних проекцій. Такий прийом у сукупності із вдало введеними умовними співвідношеннями між елементами фігури в основі тіла дозволяє просто, швидко і, що особливо цінно, вірно, запрограмовано наочно будувати від руки проеційні креслення (технічні малюнки) у будь-якій ситуації навчання чи виробництва. Звичайно ж, суворо дотримуватися всіх наших настанов потрібно лише на стадії засвоєння грамоти побудов за означеним методом. Із часом досвід, набуті навички бачення фігури, деталі тощо дозволять остаточно перейти на метод М.Ф.Четверухіна [4]. Однак при цьому вільне виконання зображень у кожному окремому випадку вже не буде викликати у виконавця негативних емоцій: невпевненість у собі і невизначеність у виборі найбільш вдалого ракурсу щезнуть; запитання «з чого розпочати ?» і «що за чим ?» теж не будуть більше виникати у його свідомості.

Необхідно також наголосити, що, здійснюючи графічні операції від руки, не потрібно боятися відкладати одиничні відрізки, які реально звичайно ж відрізняються один від одного. По-перше, похибки таких дій не сумуються, а взаємно знищуються (один відрізок більший від еталона на долі міліметра, інший менший і т.д.). По-друге, з досвідом у кожного, хто практикує, відпрацьовується відчуття постійної довжини - свій власний еталон у допустимих межах, і він, як правило, оперує одним і тим же відрізком при всіх побудовах на картинній площині (екрані) відповідного формату. І, по-третє, працюючи «на око», не слід забувати, що в цій ситуації незамінним помічником є циркуль (вимірювач), особливо на початковій стадії навчання. Доброю підмогою в естетичному оформленні результатів роботи залишаються олівці різної твердості та положення ДЗСТ 2.303-68 «Лінії». Чітко дотримуватися вимог саме цього стандарту на відповідальних проеційних кресленнях просто необхідно.

••••••••••

1. Щербина В.В. Построение технического рисунка.—К.: Вища школа, 1980.—144 с.
2. Ленчук І.Г. Методологічні засади зображень в аксонометрії. Многогранники // Вісник Житомирського педагогічного інституту. - 1998.—№1.— С. 13-19
3. Четверухин Н.Ф., Левицкий В.С. и др. Начертательная геометрия.—М.: Высшая школа, 1963.—458 с.
4. Четверухін М.Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії.—К.: Радянська школа, 1953.—188 с.
5. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике.—К.: Радянська школа, 1983.—192 с.
6. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников.—М.: Педагогика, 1980.—240 с.

Ленчук Іван Григорович - кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики Житомирського державного педагогічного інституту ім. І.Франка.

Наукові інтереси:

- методика викладання у вищій школі;
- прикладна і конструктивна геометрія.