**УДК 378.147:515.4**

**І.Г.Ленчук**

# АЛГОРИТМІЧНИЙ ПІДХІД У ПОБУДОВІ ПРОЕКЦІЙНИХ КРЕСЛЕНЬ КОМБІНАЦІЙ ДВОХ ТІЛ

*Обгрунтовуються алгоритми побудови зображень комбінацій стереометричних тіл як за допомогою традиційних креслярських інструментів, так і "від руки".*

Зупинимося на методологічних аспектах виконання плоских зображень комбінацій двох просторових об'єктів курсу стереометрії, одним з яких є куля. Тут учителю потрібно подбати про розвиток просторових уявлень і логіко-геометричного мислення, а також практичних навичок учнів у виконанні графічних операцій у таких напрямках: 1) чітко уявляти кожне тіло з його внутрішніми закономірними взаємозв'язками абстраговано від іншого [1,2] і знати правила побудови зображень цих тіл персонально; 2) вміти зосереджуватися на істотних спільних співвідношеннях і відмежовуватися від несуттєвих одиничних співвідношень між окремими елементами заданих тіл у комбінаціях; 3) "бачити" спільні геометричні елементи тіл комбінації та навчитися (через аналіз) вилучати із умови їх взаєморозташування спільні визначальні елементи поверхонь заданих тіл, фіксувати ці елементи образно в уяві і на зображеннях; 4) за будь-яких умов знаходити оптимальний шлях до побудови вірних, наочних і ненаочних (з урахуванням ситуації) зображень.

Особливо складно будувати проеційні креслення описаних та вписаних поверхонь. ***Як приклад розглянемо задачу та обгрунтуємо алгоритм побудови навчального креслення правильної трикутної піраміди, описаної навколо кулі, якщо її висота у два рази більша діаметра кулі.*** При цьому зауважимо, що число вершин в основі правильної піраміди аж ніяк не впливає на структуру алгоритму, а домовленість стосовно взаємозалежності в розмірах висоти піраміди і діаметра кулі є формальним метричним фактором визначеності креслення.

Якщо виконавець малодосвідчений у побудові проеційних креслень М.Ф.Четверухіна чи останні досить складні (що трапляється) об'єктивно і, одночасно, він володіє певними вміннями і навичками у роботі з комплексними кресленнями Г.Монжа, то ключем до вірного і наочного рисунка має служити виконане від руки зображення комплексу куля-піраміда саме на епюрі Г.Монжа (тут вісь комплексу *і* перпендикулярна площині підлоги (стола) $H$ (рис.1)). Якраз за ним значно спрощується аналіз задачі на побудову, і учень розробляє алгоритм графічних операцій, чітко встановивши всі спільні геометричні елементи поверхонь тіл, обов'язкові та визначальні в процесі грамотних дій на картинній площині.

***1. Побудова зображення кулі:***

а) точку перетину двох взаємно перпендикулярних прямих (див. рис. 2), одна з яких розташована горизонтально, а інша - вертикально, вибираємо за центр кулі O; б) довільно взятий на вертикальній прямій відрізок OY приймаємо за малу піввісь еліпса, в який проеціюється екватор кулі. У прямокутній диметрії його велика піввісь $OX = 3 \cdot OY$. З центром у точці O радіусом OX проводимо коло - обрис кулі; в) через точку Y ведемо горизонтальну пряму до перетину з обрисом у точці Z; г) на вертикальній прямій вверх і вниз від точки O відкладемо відрізки OE і OF, рівні відрізку YZ. Точки E і F, як відомо з попереднього, зображають полюси кулі.

***2. Побудова зображення паралелі, що містить точки дотику кулі та бічних граней піраміди:***

а) від точки E на вертикальній прямій відкладаємо відрізок $ES = 2 \cdot EF$, чим визначаємо на зображенні вершину піраміди S; б) сумістимо фронтально проеціюючу площину, в якій лежить вісь обертання кулі EF, з площиною малюнка. Цим самим фактично перейдемо до розгляду комбінації тіл на епюрі Г. Монжа двох взаємно перпендикулярних площин проекцій, з яких фронтальна площина збігається з площиною аркуша паперу (дошки), а профільна - суміщується з нею (тут і нахилена до площини H під кутом $\alpha \neq 90^\circ$ ). Одержимо точки E', F', S' як суміщення точок E, F, S відповідно. Площина Σ паралелі p перпендикулярна до діаметра кулі EF, тому профільною проекцією паралелі є відрізок $U'V' \perp E'F'$ (U'V' - натуральна величина діаметра паралелі). Тут U' і V' знаходимо як точки дотику дотичних, проведених із точки S' до обрису кулі (для полегшення уяви їх зручно представити твірними конуса з вершиною S', описаного навколо кулі та вписаного в шукану піраміду); в) фіксуємо центр паралелі ($O_1$ , $O'_1$) і, відклавши від точки $O_1$ на горизонтальній прямій відрізки $O_1H$ і $O_1G$, рівні половині діаметра паралелі U'V', одержимо кінці великої осі еліпса, яким зображається паралель p. Малу вісь UV знайдемо оберненим проеціюванням U'V' на EF; г) шукаємо точки I і J видимості, в яких еліпс дотикається обрису кулі; д) за великою GH і малою UV осями будуємо еліпс, який буде зображенням шуканої паралелі і разом з обрисом кулі дасть наочне зображення останньої.

***3. Побудова зображення піраміди:***

а) в перетині паралелі p з додатним напрямком осі $O_1x_1$ ортогональної диметрії знайдемо точку K° дотику кулі та лівої грані піраміди (див. рис. 1, 2). Точки L° і M°, у яких відповідно дотикаються до кулі інші грані піраміди, відшукаємо як вершини правильного трикутника, вписаного в паралель, третьою вершиною якого є точка K°. Для цього радіус, що доповнює $O_1K°$ до діаметра, поділимо навпіл і через одержану точку проведемо пряму, паралельну осі $O_1y_1$. У перетині останньої з p одержимо точки L° і M°; б) опишемо навколо паралелі правильний трикутник A°B°C°, у якого сторона A°B° // $O_1y_1$ і дотикається p в точці K°; точка C° належить осі абсцис $O_1x_1$ і $O_1C° = 2 \cdot O_1K°$. Крім цього, A°C° містить точку L°, а B°C° - точку M°; в) точку K, що є серединою сторони AB трикутника ABC в основі піраміди, знайдемо в перетині апофеми SK° її лівої грані з віссю $Ex_2$; г) у гомотетії Hs з коефіцієнтом $k = \dfrac{SK}{SK^0} = \dfrac{SE}{SO_1}$ будуємо трикутник ABC, гомотетичний трикутнику A°B°C°; д) проводимо із вершини S бічні ребра піраміди.

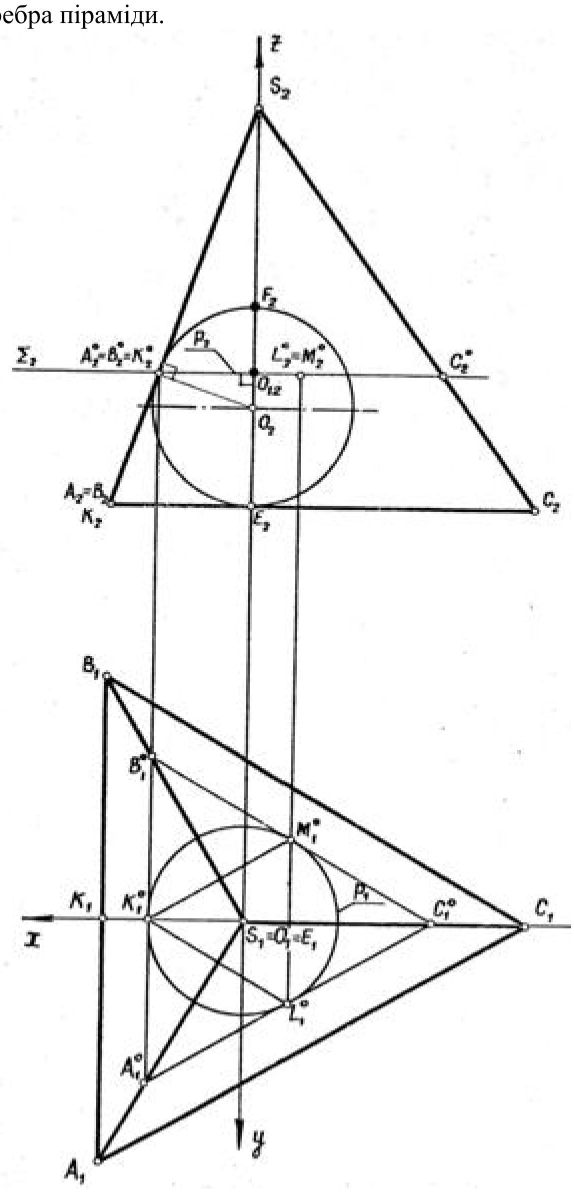


Рис. 1

Відзначимо, що ***для кращої наочності проекційного креслення доцільно вважати описану поверхню в комбінації прозорою щодо вписаної в неї поверхні й кожну з них непрозорою стосовно себе***. При цьому видимість обох поверхонь встановлюється незалежно одна від одної.

Учень (а, можливо, і вчитель) може висловити думку, що такий шлях виконання стереометричних побудов дещо складний і потребує чимало часу для його реалізації в кожному більш-менш непростому випадку. І це дійсно так. Але ж ми розглядали побудову зображень комбінацій геометричних тіл з теоретичним обгрунтуванням кожного кроку, з повним розумінням суті питання. Ми вчилися виконувати побудови циркулем і лінійкою, опираючись на наукову основу. А процес навчання, як відомо, мало коли буває простим і коротким. Якщо ж учень зрозумів і засвоїв усе, про що говорилося раніше, і в нього бракує часу на ретельне і графічно точне виконання побудов (на уроці чи при виконанні домашніх завдань), то, ввівши певні умовності, можна спростити і прискорити цей процес.

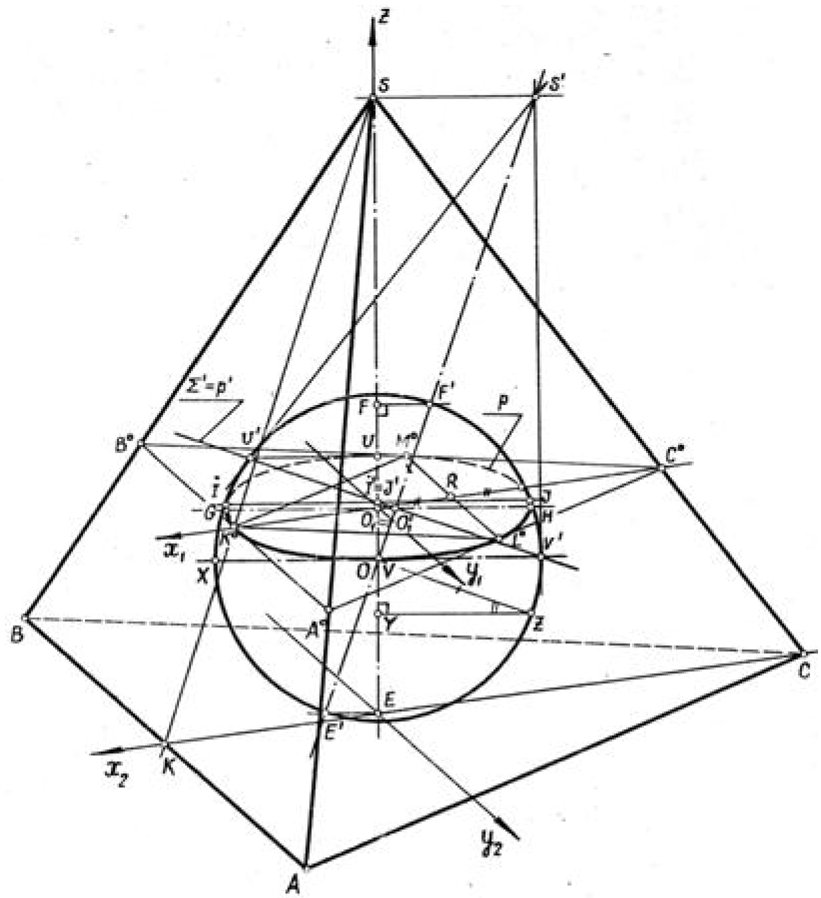


Рис. 2

Згадаємо, що в умові сформульованої задачі на побудову висота піраміди в два рази більша за діаметр кулі: *SF =2 FE*. З урахуванням цього розглянемо прямокутний трикутник *SK°O* (див. рис. 1). Тут $\angle SK°O = 90°$, оскільки *SK°* - дотична до головного меридіану поверхні. Очевидно, що гіпотенуза *SO* трикутника рівна трьом радіусам великого кола кулі *(SO = 3R)*, а катет *K°O* - радіусу *(K°O = R)*. Відомо також, що будь-який катет прямокутного трикутника є середнім геометричним між гіпотенузою і своєю проекцією на гіпотенузу. Отже, $(K°O)^2 = OO_1\ SO$. Або $R^2 = OO_1\ 3R$. Звідси $OO_1 = R/3$. Таким чином, центр паралелі, що містить точки дотику поверхні кулі та бічних граней піраміди, ділить радіус кулі *OF* у відношенні 1:2, рахуючи від точки *O*. Це був ще один (останній) крок на шляху до створення спрощеного алгоритму побудови "від руки". Простежити послідовність дій алгоритму можна на тому ж рисунку 2.

***1. Побудова зображення кулі:***

а) проводимо пару взаємно перпендикулярних прямих і з центром в точці їх перетину довільним радіусом проводимо коло - обрис кулі; б) "на око" на вертикальній прямій задаємо (з урахуванням розумних орієнтирів) зображення її полюсів: OF = OE.

***2. Побудова зображення паралелі:***

а) ділимо відрізок OF приблизно на три рівні частини і точку $O_1$ таку, що $OO_1 = 1/3$ OF беремо за центр паралелі; б) через точку $O_1$ проводимо горизонтальну пряму і на ній у внутрішній області обрису "досить близько" від нього фіксуємо точки G і H - кінці великої осі еліпса, яким зображається паралель кулі; в) приблизно третину великої півосі відкладаємо від точки $O_1$ в обох напрямках вертикальної прямої, чим визначимо малу вісь еліпса UV ($O_1U = O_1V = 1/3\ GO_1$); г) за великою і малою осями "від руки" будуємо еліпс; точки видимості паралелі I і J на обрисі фіксуємо інтуїтивно в процесі наведення кривої.

***3. Побудова зображення піраміди:***

завершальний етап доцільно провести за схемою, описаною в пункті третьому алгоритму розв'язання цієї ж задачі креслярськими інструментами. Відмінність дій полягає лише в тому, що тут всі вони виконуються "від руки" і "на око".

А тепер, для закріплення, розглянемо ще одну задачу, яку розв'яжемо за спрощеним алгоритмом. Нехай ***потрібно побудувати правильну чотирикутну піраміду, вписану в кулю, якщо висота піраміди складає три чверті діаметра кулі*** (рис. 3).

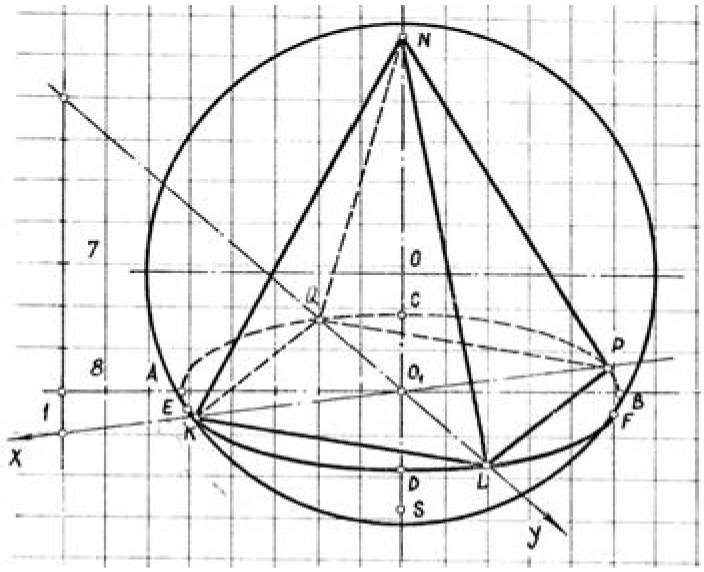


Рис. 3

***1. Побудова зображення кулі:***

а) вибираємо дві взаємно перпендикулярні прямі і з центром в точці їх перетину довільним радіусом проводимо коло - обрис кулі; б) "на око" на вертикальній прямій задаємо зображення її полюсів: ON = OS.

***2. Побудова зображення паралелі:***

а) відрізок NS точкою $O_1$ ділимо у відношенні 3 : 4 ($OO_1$ = 1/2 OS); б) через точку $O_1$ проводимо горизонтальну пряму і на ній "досить близько" від обрису фіксуємо точки A і B - кінці великої осі еліпса, яким зображається паралель кулі; в) приблизно третину великої півосі відкладаємо від точки $O_1$ в обох напрямках вертикальної прямої, чим визначимо малу вісь еліпса CD ($O_1C = O_1D$ = 1/3 $AO_1$); г) за великою і малою осями будуємо еліпс з обов'язковою фіксацією на обрисі точок E і F видимості паралелі.

***3. Побудова зображення піраміди:***

а) шляхом проведення пари спряжених діаметрів паралелі (їх роль виконують аксонометричні осі $O_1x_1$ і $O_1y_1$, розташування яких на площині зображень відоме) вписуємо в неї правильний чотирикутник KLPR (KL // RP; KR // LP); б) з'єднуємо вершини цього чотирикутника з північним полюсом кулі N, який буде вершиною шуканої піраміди.

Підсумовуючи, нам залишилося зробити лише два зауваження по суті справи. По-перше, запропоновані задачі на побудову комбінацій куля-піраміда є в своєму класі типовими. Тому цілковите розуміння вищевикладених закономірностей гарантує кваліфіковане виконання переважної більшості зображень за участю кулі, що зустрічаються в стереометрії. По-друге, процес виконання таких побудов завжди диференціюється і реалізується на дошці (чи на папері) після серйозного аналізу строго в три етапи: 1) за розумним вибором виконавця будують зображення поверхні одного із заданих тіл; 2) "шукають" на ній спільні елементи обох поверхонь - точки (лінії) дотику; 3) будують зображення іншого тіла обов'язково з урахуванням того, що знайдені точки (лінії) дотику належать і його поверхні.

Пропонуємо читачеві самостійно записати на папері послідовність кроків побудов за участю конуса (циліндра) і переконатися, що ці алгоритми в принципі мало чим відрізняються від наведених вище, якщо, звичайно, врахувати певні особливості зображень в ортогональних проекціях їх поверхонь.

На завершення відзначимо, що в останні роки основні ідеї методу Г. Монжа разом з методом аксонометрії нами широко пропагуються на заняттях із студентами фізико-математичного факультету, вчителями та учнями шкіл міста й області якраз з метою свідомого, осмисленого навчання виконанню наочних зображень всіх стереометричних тіл і їх можливих комбінацій. Розроблені методи, в яких широко використовуються аксонометричні осі та встановлені умовні співвідношення між елементами плоских фігур, розташованих (як правило) в основі кожного окремо взятого тіла, сприймаються з розумінням і жвавою зацікавленістю, що приносить добрі результати. І, на підтвердження цього, розв’яжемо хоча б одну в певному класі типову шкільну задачу, де явно нерезонно виконувати наочне зображення комбінації двох стереометричних тіл, оскільки всі потрібні взаємозалежності легко пізнаються без спотворень на виді спереду. У школі такі зображення кваліфікують як “осьові перерізи”, що можна вважати умовністю, тому що з точки зору технічної грамоти цей вислів некоректний. Однак чи варто користуватися такими умовностями за наявності простих і зрозумілих учням термінів: “вид спереду”, “вид зверху”, “вид зліва”? Суттєво, що лише одне звертання до них активно сприяє розвитку просторової уяви учня. Адже останні у свідомості дітей асоціюються з уявною просторовою фігурою чи комплексом таких фігур, які “стоять” на столі в класній кімнаті й ортогонально відтворюються в плоску фігуру на дошці, підлозі, стіні справа.

***Задача.*** ***В конус (рис.4) вписано кулю з радіусом $R$. Знайдіть об’єм конуса, якщо відомо, що площина, дотична до кулі і перпендикулярна одній із твірних конуса, віддалена від вершини конуса на відстань $d$.***

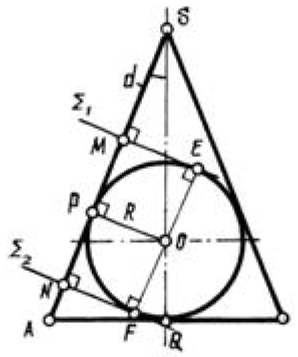


Рис. 4

Площин, перпендикулярних $SA$ (рис.4) і дотичних до поверхні кулі, можна провести дві ( $\Sigma_1$ і $\Sigma_2$ ). Отже, і розв'язків у задачі два. Однак їх відшукання не різниться по суті як геометрично, так і в аналітичних викладках. Тому зупинимося на одній із площин і, при цьому, аналітичний метод мислення стосовно площини $\Sigma_1$ матиме таке представлення.

***Дано:*** $(O, R)$ - куля, вписана в конус;

$\Sigma_1$ - площина, дотична до кулі, $\Sigma_1 \perp SA$ ;

$\Sigma_1 \cap SA = M$ , $SM = d$ .

***Знайти:*** $V$ конуса.

***Алгоритмічна схема.***

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\left(r = AQ,\ h = SQ\right) \leftrightarrow \begin{cases} h = SO + R \leftrightarrow SO = \sqrt{(SM + MP)^2 + OP^2} \leftrightarrow \begin{cases} SM = d, \\ MP = R, \\ OP = R. \end{cases} \\ \qquad \left(\Delta SPO \text{ - } \textit{прямокутний}\right) \\ \dfrac{r}{OP} = \dfrac{SQ}{SP}\left(\Delta SQA \textit{ подібний до } \Delta SPO\right) \leftrightarrow \begin{cases} OP = R, \\ SQ = h, \\ SP = d + R. \end{cases} \end{cases}$$

Очевидно, що нескладна алгоритмічна схема не потребує будь-яких пояснень. Тому залишилося лише зворотним ходом записати відповідь:

$$V = \frac{\pi R^2\left(\sqrt{(d+R)^2 + R^2} + R\right)^3}{3(d+R)^2} .$$

•••••••••

1. Ленчук І.Г. Методологічні засади зображень в аксонометрії. Многогранники // Вісник Житомирського педагогічного інституту. - 1998.–№1.–С.13-19.
2. Ленчук І.Г. Методологічні засади зображень в аксонометрії. Тіла обертання // Вісник Житомирського педагогічного інституту. - 1998.–№2.–С.48-54.

Ленчук Іван Григорович - кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики Житомирського державного педагогічного університету ім. І.Франка.

Наукові інтереси:

– методика викладання у вищій школі;
– прикладна і конструктивна геометрія.